Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A
Vol. 3 (1968), pp. 351—359

Sur les systèmes différentiels hypoelliptiques à coefficients variables

Par

Yoshio KATO*

0. Introduction

Soit Ω un ouvert de R^n et $\mathcal{P}(x, D)$ une $\mu\times\nu$-matrice d'opérateurs différentiels linéaires $P_{ij}(x,D)$ $(x=(x_1\ldots,x_n),\ D=(-i\partial/\partial x_1\ldots,-i\partial/\partial x_n),$ et $i=\sqrt{-1}$) à coefficients $C^\infty(\Omega)$.[1] Le système $\mathcal{P}(x, D)$ est dit *hypoelliptique dans* Ω si toute solution du système d'équations

$$\mathcal{P}(x, D)u=f$$

est indéfiniment dérivable dans tout ouvert où f l'est.

Le critère d'hypoellipticité des systèmes à coefficients constants a été établi par Hörmander [2], Lech [5], Matsuura [8] et Malgrange [6]. D'autre par M. Volevič a donné dans [10] une classe de systèmes déterminés (i. e. $\mu=\nu$) hypoelliptiques à coefficients variables, c'est-à-dire *la classe de systèmes* $\mathcal{P}(x, D)=[P_{ij}(x, D)]$ $(1\leq i,\ j\leq\nu)$ *à coefficients* $C^\infty(\Omega)$ *qui possèdent la propriété suivante: le polynôme* $Q(x,\xi)=\det\mathcal{P}(x,\xi)$ $(\xi\in R^n)$ *est formellement hypoelliptique dans* Ω[2] *et il existe des nombres non-négatifs* $\sigma_1,\ldots,\sigma_\nu,\ \tau_1,\ldots,\ \tau_\nu$ *tels que* $\sum_{j=1}^{\nu}(\tau_j-\sigma_j)=1$ *et*

$$|P_{ij}(x,\xi)|\leq C_x(1+|Q(x,\xi)|)^{\tau_j-\sigma_i},\quad x\in\Omega,\ \xi\in R^n,$$

C_x *étant une constante indépendante de* ξ.

Dans cet article nous donnerons une classe de systèmes surdéterminés (i. e. $\mu\geq\nu$) hypoelliptiques à coefficients $C^\infty(\Omega)$, qui contient

Received October 25, 1967.
Communicated by S. Matsuura.
* Department of Mathematics, Aichi University of Education.

1) Nous désignons par $C^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes indéfiniment dérivables sur Ω.

2) Le polynôme $Q(x,\xi)$ est dit formellement hypoelliptique dans Ω si $Q(x_0,\xi)$ est hypoelliptique pour tout $x_0\in\Omega$ et quel que soient les points x_0 et y_0 de Ω, $Q(x_0,\xi)$ et $Q(y_0,\xi)$ sont équivalents au sens d'Hörmander (voir Hörmander [3]).

tous les systèmes elliptiques (voir remarque 1) et la classe donnée par M. Volevič (voir la remarque 2). Dans le cas $\mu=\nu=1$, notre classe se réduit à celle défini pour la première fois par Malgrange [7] et Hörmander [4] (i.e. opérateurs différentiels formellement hypoelliptiques).

1. Condition (FH)

Soit $\mathcal{P}(x, D)=[P_{ij}(D)]$ $(1\leq i\leq\mu, 1\leq j\leq\nu, \mu\geq\nu)$, où chaque $P_{ij}(x, D)$ est un opérateur différentiel linéaire à coefficients $C^{\infty}(\Omega)$. Le système $\mathcal{P}(x, D)$ est dit *satisfaire la condition* (FH) *dans* Ω s'il existe des nombres non-négatifs $s_1, \dots, s_\mu, t_1, \dots, t_\nu$ $(\sum_{j=1}^{\nu} t_j>0)$ et des polynômes formellement hypoelliptiques $A(x, \xi)$, $B(x, \xi)$ qui possèdent les propriétés suivantes:

$(\mathrm{FH})_I$ $\det(\mathcal{Q}(x, \xi)\mathcal{P}(x, \xi))^{3)}=|B(x, \xi)|^q$, $x\in\Omega, \xi\in\mathrm{R}^n$, $\mathcal{Q}(x, \xi)$ étant la $\nu\times\mu$-matrice dont le (i, j)-élément est $\overline{P_{ji}(x, \xi)}|A(x, \xi)|^{s_j}$, et $q=\sum_{j=1}^{\nu} t_j$.

$(\mathrm{FH})_{II}$ pour tout $x\in\Omega$ il existe une constante $C_x>0$ telle que

$$|P_{ij}(x, \xi)|(1+|A(x, \xi)|)^{s_i/2}\leq C_x(1+|B(x, \xi)|)^{t_j/2}, \xi\in R^n.$$

Nous pouvons alors établir le théorème suivant:

Théorème. *Soit $\mathcal{P}(x, D)$ une $\mu\times\nu$-matrice $(\mu\geq\nu)$ d'opérateurs différentiels linéaires $P_{ij}(x, D)$ à coefficients $C^{\infty}(\Omega)$. Si le système $\mathcal{P}(x, D)$ vérifie la condition (FH) dans Ω, il est hypoelliptique dans Ω.*

La condition (FH) est inspirée de [10].

Remarque 1. Soit $\mathcal{P}(x, D)=[P_{ij}(x, D)]$ $(1\leq i\leq\mu, 1\leq j\leq\nu, \mu\geq\nu)$ *elliptique*, c'est-à-dire on suppose *qu'il existe des nombres entiers non-négatifs* $\sigma_1, \dots, \sigma_\mu, \tau_1, \dots, \tau_\nu$ *tels que l'ordre de* $P_{ij}(x, D)\leq\tau_j-\sigma_i$ $(P_{ij}(x, D)=0$ *si* $\tau_j-\sigma_i<0)$ *et* $\mathcal{P}^0(x, \xi)=[P_{ij}^0(x, \xi)]$ *est une application linéaire injective de* $\mathbf{C}^\nu$ *dans* $\mathbf{C}^\mu$ *pour tout* $x\in\Omega$ *et* $\xi\neq0$ (*on désigne par* $\mathbf{C}$ *l'espace des nombres complexes*), *où* $P_{ij}^0(x, D)$ *est la part de* $P_{ij}(x, D)$ *qui est homogène de degrée* $\tau_j-\sigma_i$. Alors $\mathcal{P}(x, D)$ vérifie la condition (FH) avec $s_i=\sigma_i$, $t_j=\tau_j/|\tau|$ si $|\tau|=\tau_1+\cdots+\tau_\nu>0$, $=1/\nu$ si

3) La matrice $\mathcal{P}(x, \xi)$ est obtenue en remplaçant $-i\partial/\partial x_j$ par ξ_j.

$|\tau|=0$, $A(x,\xi)=|\xi|^2$ $(=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)$ et $B(x,\xi)=\det(Q(x,\xi)\mathcal{P}(x,\xi))$, où $[Q(x,\xi)]_{ij}=\overline{P_{ji}(x,\xi)}\,|\xi|^{2s_i}$.

Remarque 2. Soit $\mathcal{P}(x,D)$ appartenir à *la classe de Volevič.* Alors $\mathcal{P}(x,D)$ vérifie la condition (FH) avec $s_i=\sigma_i$, $t_j=\tau_j$ $A(x,\xi)=B(x,\xi)=|\det\mathcal{P}(x,\xi)|^2$.

Dans le paragraphe 2 nous préparerons trois lemmes. Et le théorème est briévement démontré dans le paragraphe 3. où nous avons adapté le raisonnement de M. Peetre, exposé dans [9].

2. Préliminaires

Nous allons d'abord introduire un ensemble des fonctions poids:

Définition 1. $\mathcal{K}_0\in k(\xi)$ *si*

(i) $k(\xi)\in\mathcal{K}$[4]

(ii) *il existe des constantes* $C>0$, $N>0$ *et* $k'(\xi)\in\mathcal{K}$ *tels que*

$$\left\{\begin{array}{l}|k(\xi)-k(\eta)|\leq C(1+|\xi-\eta|)^N k'(\eta),\ \xi,\eta\in R^n,\\ k'(\xi)/k(\xi)\to 0\ (\xi\to\infty).\end{array}\right. \tag{1}$$

Lemme 1. 1) *Si* k_1 *et* k_2 *appartiennent à* $\mathcal{K}_0$, *alors* k_1+k_2, k_1k_2, $\sup(k_1,k_2)$ *et* $\inf(k_1,k_2)$ *sont aussi dans* $\mathcal{K}_0$.

2) *Si* $k\in\mathcal{K}_0$, *on a* $k^s\in\mathcal{K}_0$ *pour tout s réel.*

La démonstration n'est pas difficile. Seulement on remarque ici que $(1+|\xi|^2)^{l/2}(1+|P(\xi)|)^a\in\mathcal{K}_0$ (l est a sont réels) si $P(\xi)$ est un polynôme hypoelliptique, puisque $1+|\xi|^2$ et $1+|P(\xi)|$ appartiennent à $\mathcal{K}_0$.

Lemme 2. (*cf.* [9]). *Soit* $\varphi\in\mathcal{S}$[5] *et* $k\in\mathcal{K}_0$. *Il existe alors une constante* $C>0$ *telle que*

---

4) $\mathcal{K}\ni k(\xi)$ si et seulement si $k(\xi)$ est une fonction positive sur R^n et il existe des constantes $C>0$, $N>0$ tells que

$$k(\xi+\eta)\leq(1+C|\xi|)^N k(\eta).\ \xi,\eta\in R^n$$

(cf. Chap. II de Hörmander [2]).

5) $\mathcal{S}$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur R^n et décroissant pour $|x|\to\infty$. plus rapidement que toute puissance de $1/|x|$, ainsi que chacune de leurs dérivées.

(2) $$\|\varphi u\|_k \leq \sup|\varphi(x)|\,\|u\|_k + C\|u\|_{k'}{}^{6)},\quad u\in\mathcal{S}.$$

Démonstration. Soit $u\in\mathcal{S}$. Posons $\varphi u=v$. D'après (1) on a

(3) $$|k(\xi)\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)-k(\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)|$$
$$\leq C(1+|\xi-\eta|)^N k'(\eta)|\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)|,\ \xi,\ \eta\in R^n.$$

En intègrant deux membres de (3) par rapport à η on obtient

$$|k(\xi)\int\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)\,d\eta-\int k(\eta)\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)d\eta|$$
$$\leq C\int(1+|\xi-\eta|)^N k'(\eta)|\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)|d\eta,$$

d'où résulte

$$|k(\xi)\hat{v}(\xi)|\leq(2\pi)^{-n}|\int\hat{\varphi}(\xi-\eta)k(\eta)\hat{u}(\eta)d\eta|$$
$$+(2\pi)^{-n}C\int(1+|\xi-\eta|)^N|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|k'(\eta)|\hat{u}(\eta)|d\eta,\ \xi\in R^n.$$

De là, en utilisant l'inégalité de Young et la formule de Parseval, on déduit

$$\|v\|_k\leq(\int|\varphi(x)U(x)|^2dx)^{1/2}+C'\|u\|_{k'},$$

où $U(x)$ est la transformée réciproque de Fourier de $k(\xi)\hat{u}(\xi)$, C' une constante indépendante de u, ce qui montre (2). c.q.f.d.

Lemme 3. (*cf. le lemme* 3.4.1 *de* [1]). *Soient* $P(\xi)$ *et* $Q(\xi)$ *deux polynômes hypoelliptiques et* $a\geq 0$, $b\geq 0$. *Si un polynôme* $R(\xi)$ *vérifie l'inégalité*

(4) $$|R(\xi)|(1+|P(\xi)|)^a\leq C(1+|Q(\xi)|)^b,\ \xi\in R^n,$$

avec une constante $C>0$, *il existe alors un nombre* $d>0$ *tel que pour tout* $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in N^n$ (*N désignant l'ensemble des entiers* ≥ 0)

$$|R^\alpha(\xi)|(1+|P(\xi)|)^a(1+|\xi|)^{d|\alpha|}\leq C_\alpha(1+|Q(\xi)|)^b,\ \xi\in R^n,$$

avec des constantes convenables $C_\alpha>0$, *où* $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ *et*

$$R^\alpha(\xi)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\cdots\partial\xi_n^{\alpha_n}}R(\xi).$$

Démonstration. Soit m un entier positif. Notons d'abord que

---

6) Pour $u\in\mathcal{S}$ on pose

$$\|u\|_k=((2\pi)^{-n}\int k(\xi)^2|\hat{u}(\xi)|^2d\xi)^{1/2}$$

$\hat{u}(\xi)$ étant transformée de Fourier de $u(\hat{u}(\xi)=\int e^{-ix\xi}u(x)dx,\ x\xi=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)$.

l'on peut trouver les vecteurs $\eta^{(i)}\in R^n$ et les polynômes $M_i(\xi)$ $(1\leq i\leq r)$ tels que

$$S(\xi+\eta)=\sum_{i=1}^{r}S(\xi+\eta^{(i)})M_i(\eta),\ \xi,\ \eta\in R^n,$$

pour tout polynôme $S(\xi)$ d'ordre $\leq m$. On peut en facilement déduire

$$t^{|\alpha|}R^{\alpha}(\xi)=\sum_i R(\xi+t\eta^{(i)})M_i^{\alpha}(0),\ t\ \textit{réel},\ \xi\in R^n \tag{5}$$

(on a supposé que l'ordre de $R(\xi)\leq m$). De (4) et (5) on déduit

$$\begin{aligned} t^{|\alpha|}|R^{\alpha}(\xi)|(1+|P(\xi)|)^{a} \\ \leq C_{\alpha}\sum_i\left\{\frac{1+|P(\xi)|}{1+|P(\xi+t\eta^{(i)})|}\right\}^{a}\ (1+|Q(\xi+t\eta^{(i)})|)^{b}, \end{aligned} \tag{6}$$

C_{α} étant une constante positive indépendante de ξ.

Maintenant rappelons que l'on peut trouver un nombre $d>0$ et des constantes $C'_{\alpha}>0 (\alpha\in N^n)$ tels que

$$\begin{cases} |P^{\alpha}(\xi)|(1+|\xi|)^{d|\alpha|}\leq C'_{\alpha}(1+|P(\xi)|), \\ |Q^{\alpha}(\xi)|(1+|\xi|)^{d|\alpha|}\leq C'_{\alpha}(1+|Q(\xi)|),\ \xi\in R^n \end{cases} \tag{7}$$

(on n'a qu'à remarquer que $P(\xi)$, $Q(\xi)$ sont hypoelliptiques).

Prenons $t=\varepsilon(1+|\xi|)^d (0<\varepsilon\leq 1)$ dans (6). D'après (7) et le développement de Taylor, on a alors

$$\begin{cases} 1+|Q(\xi+t\eta^{(i)})|\leq(1+\varepsilon C)(1+|Q(\xi)|), \\ 1+|P(\xi+t\eta^{(i)})|\geq(1-\varepsilon C)(1+|P(\xi)|),\ \xi\in R^n \end{cases} \tag{8}$$

où C est une constante positive. De (6) et (8) on peut conclure le lemme 3 si l'on prend ε assez petit pour que $1-\varepsilon C>0$.

c.q.f.d.

3. Démonstration de théorème

Supposons que $\mathcal{P}(x, D)$ vérifie la condition (FH) dans Ω avec $s_1, \cdots, s_{\mu}, t_1, \cdots, t_{\nu}$ et $A(x,\xi)$, $B(x,\xi)$. Posons $A(\xi)=A(0,\xi)$ et $B(\xi)=B(0,\xi)$, où on a supposé $0\in\Omega$. Soit Λ un ensemble de $\mu\times\nu$-matrices $\mathcal{R}(\xi)=[R_{ij}(\xi)]$ de polynômes tels qu'il existe une constante C vérifiant

$$|R_{ij}(\xi)|(1+|A(\xi)|)^{s_i/2}\leq C(1+|B(\xi)|)^{t_j/2},\ \xi\in R^n,$$

pour tout i, j.

Définition 2. (a) $\mathcal{F}^l \ni f$ (l *réel*) *si*

(i) $f=(f_1,\cdots,f_\mu)$, $f_i \in \mathcal{S}'$[7] $(i=1,\cdots,\mu)$,

(ii) $\displaystyle (\sum_{i=1}^{\mu}\int(1+|\xi|^2)^l(1+|A(\xi)|)^{s_i}|\hat{f}_i(\xi)|^2 d\xi)^{1/2} \ (=\|\hat{f}\|_{\mathcal{F}^l})<\infty$.

(b) $\mathcal{U}^l \ni u$ (l *réel*) *si*

(i) $u=(u_1,\cdots,u_\nu)$, $u_j \in \mathcal{S}'(j=1,\cdots,\nu)$,

(ii) $\displaystyle (\sum_{j=1}^{\nu}\int(1+|\xi|^2)^l(1+|B(\xi)|)^{t_j}|\hat{u}_j(\xi)|^2 d\xi)^{1/2}(=\|u\|_{\mathcal{U}^l})<\infty$.

(a′) $\mathcal{F}^l_{loc}(\Omega) \ni f$ *si* $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $(i=1,\cdots,\mu)$ (*i.e.* f_i *est une distribution sur* Ω) *et* $\varphi f \in \mathcal{F}^l$ *pour tout* $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ *à support contenu dans* Ω (*i.e.* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$).

(b′) $\mathcal{U}^l_{loc}(\Omega) \ni u$ *si* $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $(j=1,\cdots,\nu)$ *et* $\varphi u \in \mathcal{U}^l$ *pour tout* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

D'abord on va énoncer deux propositions suivantes:

Proposition 1. *Soit* $x_o \in \Omega$ *et* l', l $(l'<l)$ *deux nombres réels. Il existe alors un voisinage* U_{x_o} *de* x_o *contenu dans* Ω *et une constante* $C>0$ *tels que*

$$\|v\|_{\mathcal{U}^l} \leq C(\|\mathcal{P}(x, D)v\|_{\mathcal{F}^l}+\|v\|_{\mathcal{U}^{l'}}), \quad v \in C_0^\infty(U_{x_o})^\nu.$$

Démonstration. D'abord on note que le système $\mathcal{P}(x,\xi)$ est s'écrit sous la forme

$$\mathcal{P}(x,\xi)=\mathcal{P}_0(\xi)+\sum_\omega a_\omega(x)\mathcal{P}_\omega(\xi), \tag{9}$$

où $\qquad \mathcal{P}_0(\xi)=\mathcal{P}(x_o,\xi),\ \mathcal{P}_\omega \in \Lambda,\ a_\omega \in C^\infty(\Omega)$ et $a_\omega(x_o)=0$.

Soit $u \in \mathcal{S}^\nu$ et posons $\mathcal{P}_0(D)u=f$. D'après l'égalité

$$\hat{f}_i(\xi)=\sum_j P_{0ij}(\xi)\hat{u}_j(\xi)$$

on aura

$$\sum_i \overline{P_{0ik}(\xi)}\,|A(x_o,\xi)|^{s_i}\hat{f}_i(\xi)=\sum_j [\mathcal{Q}(x_o,\xi)\mathcal{P}(x_o,\xi)]_{kj}\hat{u}_j(\xi),$$

où $P_{0ij}(\xi)=[\mathcal{P}_0(\xi)]_{ij}$. Par conséquent, grâce à $(\mathrm{FH})_I$ on a

$$\sum_{i,k} Q^{kj}(\xi)\overline{P_{0ik}(\xi)}\,|A(x_o,\xi)|^{s_i}\hat{f}_i(\xi)=|B(x_o,\xi)|^q\hat{u}_j(\xi), \tag{10}$$

$Q^{kj}(\xi)$ étant le (k,j)-cofacteur de la $\nu\times\nu$-matrice $\mathcal{Q}(x_o,\xi)\mathcal{P}(x_o,\xi)$.

7) Nous désignons par $\mathcal{S}'$ l'espace des distributions tempérées.

D'autre par, de $(\mathrm{FH})_{II}$ on déduit

$$|[\mathcal{Q}(x_0,\xi)\mathcal{P}(x_0,\xi)]_{kj}|\leq C_1(1+|B(\xi)|)^{1/2(t_k+t_j)},\ \xi\in R^n,$$

d'où

$$|Q^{kj}(\xi)|\leq C_2(1+|B(\xi)|)^{q-1/2(t_k+t_j)},\ \xi\in R^n.$$

Il vient donc, d'après (10) et $(\mathrm{FH})_{II}$,

$$|B(\xi)|^q|\hat{u}_j(\xi)|\leq C_3\sum_{i,k}(1+|B(\xi)|)^{q-t_j/2}(1+|A(\xi)|)^{s_i/2}|\hat{f}_i(\xi)|,\ \xi\in R^n.$$

Comme

$$\begin{aligned}&(1+|\xi|^2)^{l/2}(1+|B(\xi)|)^q\\ &\leq C_4\{(1+|\xi|^2)^{l/2}|B(\xi)|^q+(1+|\xi|^2)^{l'/2}\ (1+|B(\xi)|)^q\}\end{aligned}$$

pour tout $\xi\in R^n$, il en résulte

$$\begin{aligned}&(1+|\xi|^2)^{l/2}(1+|B(\xi)|)^{t_j/2}|\hat{u}_j(\xi)|\\ &\leq C_5\{(1+|\xi|^2)^{l/2}\sum_i(1+|A(\xi)|)^{s_i/2}|\hat{f}_i(\xi)|\\ &+(1+|\xi|^2)^{l'/2}(1+|B(\xi)|)^{t_j/2}|\hat{u}_j(\xi)|\},\end{aligned}$$

ce qui montre qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\|u\|_{\mathcal{U}^l}\leq C(\|\mathcal{P}_0(D)u\|_{\mathcal{F}^l}+\|u\|_{\mathcal{U}^{l'}}),\ u\in\mathcal{S}^\nu. \tag{11}$$

Ici $C_1,\cdots,C_5$ sont des constantes indépendantes de ξ.

Maintenant en appliquant le lemme 3 à $P(\xi)=A(\xi)$, $Q(\xi)=B(\xi)$ et $a=\frac{s_i}{2}$, $b=\frac{t_j}{2}$, on obtiendra immédiatement

$$\|\mathcal{R}^\alpha(D)u\|_{\mathcal{F}^{l-d|\alpha|}}\leq C_\alpha\|u\|_{\mathcal{U}^l},\ u\in\mathcal{S}^\nu \tag{12}$$

pour tout $\alpha\in N^n$ si $\mathcal{R}\in\varLambda$, où $1\geq d>0$, $\mathcal{R}^\alpha(D)=[R^\alpha_{ij}(D)]$ et C_α est une constante positive indépendante de u.

En effet, en posant $\mathcal{R}^\alpha(D)u=f$, on a

$$\hat{f}_i(\xi)=\sum_j R^\alpha_{ij}(\xi)\hat{u}_j(\xi),$$

d'où

$$\begin{aligned}&(1+|\xi|^2)^{d|\alpha|/2}(1+|A(\xi)|)^{s_i/2}|\hat{f}_i(\xi)|\\ &\leq\sum_j(1+|\xi|^2)^{d|\alpha|/2}(1+|A(\xi)|)^{s_i/2}|R^\alpha_{ij}(\xi)|\,|\hat{u}_j(\xi)|,\end{aligned}$$

donc

$$(1+|\xi|^2))^{d|\alpha|/2+l/2}(1+|A(\xi)|)^{s_i/2}|\hat{f}_i(\xi)|$$
$$\leq C_\alpha \sum_j (1+|\xi|^2)^{l/2}(1+|B(\xi)|)^{t_j/2}|\hat{u}_j(\xi)|,\ \xi\in R^n,$$

avec une constante convenable $C_\alpha>0$, d'où résulte (12).

Finalement, en appliquant le lemme 2 à $k_i(\xi)=(1+|\xi|^2)^{l/2}(1+|A(\xi)|)^{s_i/2}$ et $k_i'(\xi)=(1+|\xi|^2)^{l'/2}(1+|A(\xi)|)^{s_i/2}$ $(l'=l-d)$, on obtient, grâce à (9) et (12)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{P}_0(D)v\|_{\mathcal{F}^l} &\leq \|\mathcal{P}(x,D)v\|_{\mathcal{F}^l}+\sum_\omega \|a_\omega \mathcal{P}_\omega(D)v\|_{\mathcal{F}^l} \\
&\leq \|\mathcal{P}(x,D)v\|_{\mathcal{F}^l}+\sum_\omega\Big(\sum_i \|a_\omega f_{\omega i}\|^2_{k_i}\Big)^{1/2} \\
&\leq \|\mathcal{P}(x,D)v\|_{\mathcal{F}^l}+\sum_\omega\Big\{\sum_i \big(\sup_{xU\in x_0}|a_\omega(x)|\|f_{\omega i}\|_{l_i}+C_1\|f_{\omega i}\|_{k_i'}\big)^2\Big\}^{1/2} \\
&\leq \|\mathcal{P}(x,D)v\|_{\mathcal{F}^l}+\sup_\omega \sup_{x\in U_{x_0}}|a_\omega(x)|\sum_\omega\|\mathcal{P}_\omega(D)v\|_{\mathcal{F}^l} \\
&\qquad +C_1\sum_\omega\|\mathcal{P}_\omega(D)v\|_{\mathcal{F}^{l'}} \\
&\leq \|\mathcal{P}(x,D)v\|_{\mathcal{F}^l}+C_2\big(\sup_\omega \sup_{x\in U_{x_0}}|a_\omega(x)|\,\|v\|_{\mathcal{U}^l}+\|v\|_{\mathcal{U}^{l'}}\big),\ v\in C_0^\infty(U_{x_0})^\nu
\end{aligned}$$

où U_{x_0} est un voisinage de x_0, $\mathcal{P}_\omega(D)v=(f_{\omega 1},\cdots,f_{\omega\mu})$ et C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de v. Si l'on prend U_{x_0} suffisamment petit, on peut conclure la proposition 1 pour $l'=l-d$ d'après (11). D'où résulte la proposition 1 pour tout $l'<l$.

Remarque. La proposition 1 est valable pour $v\in\mathcal{U}^l$ à support contenu à U_{x_0}, puisque $C_0^\infty(R^n)^\nu$ est dense dans $\mathcal{U}^l$ et l'inégalité (12) est vrai pour $u\in\mathcal{U}^l$ (cf. (2) et (9)).

Proposition 2. *Soit l réel. Une distribution vectorielle $u=(u_1,\cdots,u_\nu)$ sur Ω appartient à $\mathcal{U}^l_{loc}(\Omega)$ si $\mathcal{P}(x,D)u\in\mathcal{F}^l_{loc}(\Omega)$.*

Démonstration. Soit Ω' un ouvert d'adhérence contenue dans Ω et relativement compact. Il existe alors un réel λ tel que $u\in\mathcal{U}^\lambda_{loc}(\Omega')$.

Supposons que $\lambda+d\leq l$. D'après (9), (12), le lemme 2 et la formule de Leibniz et l'hypothèse sur u, on a

$$\mathcal{P}(x,D)(\varphi u)\in\mathcal{F}^{\lambda+d} \tag{13}$$

pour $\varphi\in C_0^\infty(\Omega')$. Car on voit facilement que

$$\mathcal{P}(x,D)(\varphi u)$$

$$=\varphi\mathcal{P}(x, D)u+\sum_{|\alpha|>0}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}\varphi(\mathcal{P}_0^{\alpha}(D)+\sum_{\omega}a_{\omega}\mathcal{P}_{\omega}^{\alpha}(D))(\psi u),^{8)}$$

où ψ est une fonction appartenant à $C_0^{\infty}(\Omega')$ et égale 1 sur le support de φ.

Maintenant soit x_0 un point arbitraire de Ω' et U_{x_0} le voisinage figurant dans la proposition 1. En appliquant la proposition 1 ($l=\lambda+d-1$, $l'=\lambda-1$) à

$$v=\Delta_h(\varphi u)=\frac{u(x+h)\varphi(x+h)-u(x)\varphi(x)}{|h|}\quad (h\in R^n),$$

on déduit de (13) que $\varphi u\in\mathcal{U}^{\lambda+d}$ pour tout $\varphi\in C_0^{\infty}(U_{x_0})$, puisque $\|\mathcal{P}(x, D)\Delta_h(\varphi u)\|_{\mathcal{F}^{\lambda+d-1}}$ et $\|\Delta_h(\varphi u)\|_{\mathcal{U}^{\lambda-1}}$ sont uniformément bornés pour $|h|\to 0$, de sorte que $\|\Delta_h(\varphi u)\|_{\mathcal{U}^{\lambda+d-1}}$ l'est (voir [7]).

En répétant le processus ci-dessus, si nécessaire, on aura $\varphi u\in\mathcal{U}^{l}$ pour tout $\varphi\in C_0^{\infty}(U_{x_0})$. Donc $u\in\mathcal{U}_{loc}^{l}(\Omega')$. D'où résulte la proposition 2, puisque Ω' était arbitraire.

Il est immédiat que la proposition 2 entraîne notre théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Frieberg, J., Estimates for partially hypoelliptic differential operators, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. **17** (1963). 1–97.

[2] Hörmander, L., Differentiability properties of solutions of systems of differential equations, Ark. Mat. **3** (1958), 527–534.

[3] ———, Linear differential operators, Springer-V., Berlin, 1963.

[4] ———, On interior regularity of the solutions of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **9** (1958), 197–218.

[5] Lech, C., A metric result about the zero of a complex polynomial ideal, Ark. Mat. **3** (1958), 543–554.

[6] Malgrange, B., Sur les systèmes différentiels à coefficients constants (suite), Sém. J. Leray (1961/62), *n°* 8.

[7] ———, Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 283–306,

[8] Matsuura, S., On general systems of partial differential operators with constant coefficients, J. Math. Soc. Japan, **13** (1961), 94–103.

[9] Peetre, J., A proof of the hypoellipticity of formally hypoelliptic differential operators, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 737–744.

[10] Volevič, L.R., Hypoelliptic systems with variable coefficients, Soviet Math. Dokl. **5** (1964), 797–800.

---

8) $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$ et $D^{\alpha}=(-i\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}\cdots(-i\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$.