

Comportement des Solutions de Quelques Problèmes Mixtes pour Certains Systèmes Hyperboliques Symétriques à Coefficients Constants

Par

Mutsuhidé MATSUMURA*

§1. Introduction

Le comportement pour $t \rightarrow \infty$ des solutions du problème mixte extérieur pour l'équation des ondes dans l'espace à trois dimensions ont été étudié par quelques auteurs, par exemple T. Carleman [3], P. D. Lax et R. S. Phillips [10], P. D. Lax, C. S. Morawetz et R. S. Phillips [11], C. S. Morawetz [16], S. Mizohata [14], [15] et d'autres. Ces travaux s'occupent du cas de l'obstacle borné. Il nous semble aussi intéressant d'étudier ce problème dans le demi-espace. Pour l'équation des ondes à n dimensions, on peut construire par la méthode des images la fonction de Green relative au problème de Dirichlet ou de Neumann. On en déduit la décroissance pour $t \rightarrow \infty$ des solutions ($n \geq 2$).

Dans cet article, nous établirons la décroissance pour $t \rightarrow \infty$ des solutions de certains problèmes mixtes bien posés dans le demi-espace \mathbf{R}_+^n ($n \geq 2$) pour des systèmes hyperboliques symétriques du premier ordre à coefficients constants.

A propos du problème de Cauchy, il y a une étude [13], d'après D. Ludwig à un point de vue différent, sur le comportement pour $t \rightarrow \infty$ de solutions de systèmes hyperboliques symétriques du premier ordre à coefficients constants.

Received July 4, 1968.

Communicated by S. Matsuura.

* Department of Engineering Mathematics, Kyoto University.

Quelques rappels sur le problème mixte.

Soit \mathbf{R}^n l'espace euclidien à n dimensions. Le point générique sera noté $x = (x_1 \cdots x_n)$ ou bien $y = (y_1 \cdots y_n)$ etc. t désigne la variable de temps. Pour $x = (x_1 \cdots x_n) \in \mathbf{R}^n$ on pose $x' = (x_1 \cdots x_{n-1})$ de sorte que $x = (x', x_n)$. Dans ce qui suit, on désigne par \mathbf{R}_+^n le demi-espace $\{x = (x', x_n); x_n > 0\}$ de \mathbf{R}^n .

Soit L un opérateur matriciel hyperbolique symétrique du premier ordre à coefficients constants :

$$(1.1) \quad L = I \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où I est la matrice unité d'ordre N et les A_j ($j=1, \dots, n$) sont des matrices hermitiennes d'ordre N dont les éléments sont constants. Nous considérons le problème mixte, dans le demi-espace \mathbf{R}_+^n pour l'équation homogène

$$(1.2) \quad L[u(t, x)] = 0 \quad \text{pour } t > 0, x \in \mathbf{R}_+^n$$

avec la "condition initiale"

$$(1.3) \quad u(0, x) = g(x) \quad \text{pour } x \in \mathbf{R}_+^n$$

et la "condition aux limites"

$$(1.4) \quad Bu(t, x) \Big|_{x_n=0} = 0 \quad \text{pour } t > 0$$

où $u(t, x)$ et $g(x)$ sont des matrices-colonnes de fonctions (ou de distributions) à valeurs complexes, et B une matrice à l lignes et N colonnes de rang l .

Soit \mathbf{C}^N l'espace complexe de dimension complexe N . Désignons alors par la même lettre B l'opérateur linéaire de \mathbf{C}^N dans \mathbf{C}^l dont la matrice de représentation par rapport aux bases canoniques de \mathbf{C}^N et de \mathbf{C}^l est la matrice B , quand il n'y aura pas de confusion. On l'appelle *opérateur-frontière*. On appelle le noyau de cet opérateur linéaire *espace-frontière* et désigne par $\mathcal{B} = \ker B$. C'est un sous-espace de \mathbf{C}^N . Rappelons ici quelques notions concernant les conditions aux limites.¹⁾

1) Quant aux détails, consulter Friedrichs [5] et Lax-Phillips [9], [10].

Définition 1.1. On dit que la condition B aux limites (ou l'opérateur-frontière ou encore l'espace-frontière \mathcal{B} par abus de langage) est conservative si la forme quadratique $A_n \zeta \cdot \bar{\zeta}$ s'annule sur \mathcal{B} :

$$(1.5) \quad A_n \zeta \cdot \bar{\zeta} = 0 \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathcal{B}.^{2)}$$

On peut aisément constater que si B est conservative, toute solution $u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ du problème mixte (1.2)-(1.4) satisfait à la loi qui exprime la conservation de l'énergie de la forme intégrale:

$$(1.6) \quad \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} = \|u(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Cette égalité implique évidemment l'unicité de la solution et sa dépendance de la condition initiale. Mais l'existence n'est pas affirmée en général par cette seule condition sur B . Pour l'existence nous avons en outre besoin de la notion suivante.

Définition 1.2. On dit que l'espace-frontière \mathcal{B} est maximal par rapport à la propriété (1.5) s'il est impossible d'élargir \mathcal{B} à un sous-espace de \mathbb{C}^N strictement plus large en gardant la propriété (1.5).

On peut alors appeler la condition B (ou l'opérateur-frontière B par abus de langage) *minimale* par rapport à la propriété (1.5) dans le sens qu'en gardant la propriété (1.5), on ne peut omettre aucune relation de B représentant l relations linéaires homogènes sur les solutions aux limites. Nous citons ici le lemme suivant dû à Lax et Phillips [10] qui élucide la structure des sous-espaces ayant la propriété (1.5) d'une façon maximale pour une matrice A_n hermitienne, non singulière de signature zéro.

Lemme 1.1. ([10] p. 199). Soit Q une matrice hermitienne d'ordre $2m$, non singulière et de signature zéro. On désigne par \mathcal{P} (resp. \mathcal{N}) le sous-espace de dimension m engendré par les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres positives (resp. négatives) de Q . Soit $\{e_1^+ \cdots e_m^+\}$ (resp. $\{e_1^- \cdots e_m^-\}$) une base orthonormale quelconque dans \mathcal{P} par rapport à Q (resp. dans \mathcal{N} par rapport à $-Q$). Désignons

2) Pour $\zeta, z \in \mathbb{C}^m$, le produit scalaire $\zeta_1 \bar{z}_1 + \cdots + \zeta_m \bar{z}_m$ est désigné par $\zeta \cdot \bar{z}$ ou par $\langle \zeta, \bar{z} \rangle$.

par \mathcal{E} le sous-espace de C^{2m} engendré par les vecteurs $e_1^+ + e_1^-$, $e_2^+ + e_2^-$, \dots , $e_m^+ + e_m^-$. On a alors

$$(1.5)' \quad Q\xi \cdot \bar{\xi} = 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{E}$$

et \mathcal{E} est maximal par rapport à cette propriété. Inversement tout sous-espace de C^{2m} ayant la propriété (1.5)' d'une façon maximale, peut être construit par un tel procédé.

Supposons maintenant que l'opérateur $A = -i \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ soit de type elliptique, en d'autres termes

$$(1.7) \quad \det \left(\sum_{j=1}^n \xi_j A_j \right) \neq 0 \quad \text{pour tout } \xi \neq 0 \text{ dans } \Xi^n.^{3)}$$

Définition 1.3. On dit qu'une condition B aux limites (ou opérateur-frontière B , aussi l'espace-frontière \mathcal{B}) est coercive⁴⁾ pour l'opérateur elliptique A s'il existe une constante $C > 0$ telle qu'on ait

$$(1.8) \quad \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\| < C \quad (\|Av\| + \|v\|)$$

pour toute fonction $v \in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^n})$ vérifiant la condition aux limites $Bv(x', 0) = 0$. $\|\cdot\|$ désigne la norme naturelle de $L^2(\mathbf{R}^n)$ ou $L^2(\mathbf{R}_+^n)$.

Posons

$$(1.9) \quad M(\xi'; \lambda) = A_n^{-1}(\lambda I - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j).$$

Alors il découle de l'hyperbolicité que $\forall \xi'$ réel et pour tout λ non réel, aucune des racines caractéristiques de $M(\xi'; \lambda)$ n'est réelle. Désignons par $E^+(\xi'; \lambda)$ (resp. $E^-(\xi'; \lambda)$) le sous-espace de C^N engendré par les vecteurs propres généralisés correspondant aux valeurs propres à partie imaginaire positive (resp. négative) de $M(\xi'; \lambda)$. On appelle $E^+(\xi'; \lambda)$ (resp. $E^-(\xi'; \lambda)$) *espace propre positif* (resp. *négatif*) de $M(\xi'; \lambda)$. Pour $\lambda \neq$ réel, on a

$$(1.10) \quad E^+(\xi'; \lambda) \oplus E^-(\xi'; \lambda) = C^N.$$

3) ξ désigne un point courant de l'espace numérique réel Ξ^n à n dimensions, le dual réel de \mathbf{R}^n .

4) Dans le sens de Aronszajn.

Si A est elliptique, on a d'ailleurs

$$(1.11) \quad \dim E^+(\xi'; \lambda) = \dim E^-(\xi'; \lambda) = \frac{N}{2}.^{5)}$$

Le lemme suivant doit aussi à Lax et Phillips [10].

Lemme 1.2. ([10], p. 202). *Pour que la condition B aux limites soit coercive pour l'opérateur elliptique symétrique $A = -i \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées*

$$i) \quad l = \frac{N}{2}$$

et

$$ii) \quad \mathcal{B} \cap E^+(\xi'; 0) = \{0\} \quad \text{pour } \xi' \neq 0$$

où l est le nombre des lignes de la matrice B .

Enoncé du théorème principal.

Dans ces préparatoires, explicitons nos hypothèses.

(I) "hypothèse sur l'opérateur L " :

$$(1.12) \quad \det(\lambda I - \sum_{j=1}^n \xi_j A_j) = (\lambda^2 - a_1^2 |\xi|^2) \cdots (\lambda^2 - a_m^2 |\xi|^2)$$

$$(1.13) \quad a_1 > a_2 > \cdots > a_m > 0.^{6)}$$

(II) "hypothèses sur la condition B aux limites" :

- 1) B est conservative.
- 2) B est minimale par rapport à la propriété 1) (\mathcal{B} est maximal par rapport à la propriété 1)).
- 3) B est coercive pour l'opérateur elliptique A .
- 4) Condition complémentaire stricte :
 B transforme biunivoquement l'espace linéaire $E^+(\xi'; \lambda)$ à m

5) Lorsque $n=2$, on le suppose.

6) Cette condition est équivalente aux suivantes :

- i) L'opérateur L est strictement hyperbolique.
- ii) L est isotrope, c'est-à-dire que les valeurs des racines caractéristiques de la matrice $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j$ dépendent seulement de $|\xi|$.
- iii) Les vitesses de propagation ne s'annulent jamais, c'est-à-dire que la matrice $\sum_{j=1}^n \xi_j A_j$ est régulière pour tout $\xi \neq 0$.

dimensions sur l'espace \mathbf{C}^m pour ξ' réel et λ non réel. Pour tout ξ' réel tel que $|\xi'| \leq 1$ et pour λ non réel dans un voisinage convenable de chaque point ($\neq 0$) sur l'axe réel, les normes des opérateurs linéaires $B^{-1}(\xi'; \lambda)$ de \mathbf{C}^m sur $E^+(\xi'; \lambda)$ est uniformément minorées par une constante positive.

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème principal.

Théorème. *Supposons que l'opérateur L et l'opérateur-frontière B satisfassent à toutes les conditions introduites ci-dessus. Soit $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$. Alors la solution $u(t, x)$ du problème mixte (1.2)–(1.4) converge vers zéro uniformément sur tout compact de \mathbf{R}^n , lorsque t tend vers l'infini.*

Nous allons ici indiquer en bref le principe de la démonstration du théorème. Nous traiterons ce problème dans le cadre de L^2 . A cause des hypothèses 1) et 2) de (II), et la symétrie des A_j , l'opérateur différentiel $A = -i \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ devient un opérateur autoadjoint H dans $L^2(\mathbf{R}_+^n)$ en prenant pour domaine

$$(1.14) \quad D(H) = \left\{ v(x); v \in \mathcal{E}_{L^2}^1(\mathbf{R}_+^n), Bv \Big|_{x_n=0} = 0 \right\}.$$

Alors en utilisant cet opérateur H , le problème mixte (1.2)–(1.4) peut s'écrire sous la forme de l'équation d'évolution

$$(1.15) \quad \frac{d}{dt} u(t) = iHu(t) \quad t > 0$$

$$(1.16) \quad u(0) = g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n) \subset D(H)$$

Par conséquent la solution est donnée par

$$(1.17) \quad u(t) = e^{itH}g = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\mu} dE_\mu g,$$

où $\{E_\mu\}_{-\infty < \mu < \infty}$ est la famille spectrale de l'opérateur autoadjoint H dans l'espace $L^2(\mathbf{R}_+^n)$.

La démonstration du théorème revient en essence à prouver que $E_\mu g$

7) $\mathcal{E}_{L^2}^1(\mathbf{R}_+^n) = H^1(\mathbf{R}_+^n) = W^{1,2}(\mathbf{R}_+^n)$ désigne l'espace des fonctions $v \in L^2(\mathbf{R}_+^n)$ dont toutes les dérivées distributions d'ordre un, sont dans $L^2(\mathbf{R}_+^n)$.

est absolument continue en μ à l'exception de l'origine $\mu=0$. Pour cela nous construisons d'abord le noyau de Green $G(x, y; \lambda)$ relatif au problème aux limites avec λ non réel :

$$(1.18) \quad (A - \lambda I)v(x) = g(x)$$

$$(1.19) \quad Bv(x) \Big|_{x_n=0} = 0$$

Ensuite nous établissons la relation suivante :

$$(1.20) \quad \frac{d}{d\mu} E_\mu g = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}^n_+} \{G(x, y; \mu + i0) - G(x, y; \mu - i0)\} g(y) dy$$

On observe alors que pour tout x fixé, le second membre de cette formule est une fonction continue de μ dans $\mathbf{R}^1 - \{0\}$. D'autre part on peut déduire de l'hypothèse 3) de (II) que $\mu=0$ n'est pas une valeur propre de H . Le théorème voulu se démontre alors en appliquant le théorème de Riemann-Lebesgue à l'expression (1.17).

Ainsi notre travail consiste à construire le noyau de Green $G(x, y; \lambda)$ du problème (1.18), (1.19) et à examiner l'allure de $G(x, y; \lambda)$ lorsque λ tend vers l'axe réel.

Le plan du reste de cet article est le suivant. Nous nous placerons désormais toujours sous les hypothèses précédentes sauf mention expresse du contraire.⁸⁾ Dans le § 2 nous construirons d'abord une solution élémentaire de l'opérateur elliptique $A - \lambda I$ pour λ non réel et ensuite montrerons, pour k réel $\neq 0$ et $x \neq 0$, l'existence des limites $E(x; k \pm i0)$ de $E(x; k \pm i\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers zéro. Dans la suite, nous obtiendrons une majoration pour $|x| \rightarrow \infty$ de $E(x; \lambda)$, uniforme par rapport à λ dans un petit voisinage de chaque point réel $\neq 0$. Nous construirons, dans le § 3, le noyau de Poisson relatif au problème aux limites (1.18), (1.19) et le noyau de Green dans le § 4. L'existence de $G(x, y; k \pm i0)$ se démontrera dans le § 4. Alors la majoration de $E(x; \lambda)$ obtenue dans le § 2 jouera un rôle

8) Notre hypothèse (I) sur l'opérateur hyperbolique L a été faite pour obtenir les résultats de §§ 3 et 4, donc le théorème principal. Mais pour des résultats centraux du § 2, on pourra remplacer la condition (I) par certaines conditions d'hyperbolicité plus générales.

important. Dans le § 5, nous donnerons la démonstration complète du théorème principal.

En terminant l'introduction, je voudrais exprimer ma vive gratitude à MM. les Professeurs S. Mizohata et M. Yamaguti pour leurs conseils bienveillants. Je devrais mentionner particulièrement Prof. Mizohata. Ce problème a suggéré par lui et l'idée dans le § 4 qui jouera le rôle essentiel doit à lui.

§ 2. Construction d'une Solution Élémentaire de l'Opérateur $A - \lambda I$ dans l'Espace \mathbf{R}^n

Nous considérons le problème stationnaire attaché au problème mixte (1.2)-(1.4) pour l'opérateur hyperbolique L , plus précisément le problème aux limites dans le demi-espace \mathbf{R}_+^n pour l'opérateur elliptique $A - \lambda I$:

$$(2.1) \quad (A - \lambda I)v(x; \lambda) = g(x), \quad x \in \mathbf{R}_+^n$$

$$(2.2) \quad Bv(x; \lambda) \Big|_{x_n=0} = 0.$$

La *matrice-noyau de Green* $G(x, y; \lambda)$ relative au problème avec λ non réel, est par définition une solution de l'équation

$$(2.3) \quad (A - \lambda I)G(x, y; \lambda) = \delta(x - y)I \quad \text{pour } x, y \in \mathbf{R}_+^n$$

vérifiant la condition aux limites

$$(2.4) \quad BG(x, y; \lambda) \Big|_{x_n=0} = 0$$

où $\delta(x - y)$ est la distribution de Dirac au point y de \mathbf{R}_+^n . Pour étudier l'allure de $G(x, y; \lambda)$ quand λ tend vers l'axe réel, nous voulons explicitement construire le noyau. Conformément à un habituel procédé, on le cherche sous la forme

$$(2.5) \quad G(x, y; \lambda) = E(x - y; \lambda) - E_c(x, y; \lambda)$$

où $E(x; \lambda)$ est une solution élémentaire de l'opérateur $A - \lambda I$ dans tout l'espace \mathbf{R}^n . Alors $E_c(x, y; \lambda)$, appelée *noyau compensateur*, s'obtiendra comme solution du problème aux limites:

$$(2.6) \quad (A - \lambda I)E_c(x, y; \lambda) = 0 \quad \text{pour } x, y \in \mathbf{R}_+^n,$$

$$(2.7) \quad BE_c(x, y; \lambda) \Big|_{x_n=0} = BE(x-y; \lambda) \Big|_{x_n=0}.$$

Pour affirmer l'existence de $E_c(x, y; \lambda)$, y compris $\lambda = k \pm i0$, on devra choisir comme $E(x; \lambda)$ une solution élémentaire ayant les limites $E(x; k \pm i0)$ à un bon comportement à l'infini $|x| \rightarrow \infty$. Dans ce paragraphe nous construisons la matrice-noyau de Green dans l'espace libre \mathbf{R}^n relative au problème :

$$(2.8) \quad (A - \lambda I)v = g \in L^2(\mathbf{R}^n) \quad \text{avec } \lambda \text{ non réel,}$$

et montrons qu'elle jouit les propriétés désirées. L'opérateur différentiel $A = -i \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ définit une transformation linéaire fermée A dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ de domaine :

$$(2.9) \quad D(A) = \left\{ v; v, Av \in L^2(\mathbf{R}^n) \right\},$$

la dérivation étant prise au sens des distributions. On voit alors aisément que A est un opérateur autoadjoint dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$. De l'ellipticité de A , on peut déduire

$$(2.10) \quad D(A) = \mathcal{E}_{L^2}^1(\mathbf{R}^n).$$

D'après la théorie générale, le spectre $\sigma(A)$ de l'opérateur A est contenu dans l'axe réel, c'est-à-dire que λ non réel appartient à la résolvante $\rho(A)$ de A . Autrement dit, pour tout λ non réel il existe l'opérateur résolvant $\mathbf{R}_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ comme opérateur linéaire continu dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ où I est l'opérateur identique. Pour tout $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$, la fonction $v = \mathbf{R}_\lambda g$ donne une solution unique dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ de l'équation (2.8) au sens des distributions. On sait que l'application $\lambda \mapsto \mathbf{R}_\lambda g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ est analytique en λ dans $\rho(A)$ qui est un ouvert du plan complexe. Nous allons définir la solution élémentaire $E(x; \lambda)$ telle que $E(x-y; \lambda)$ soit le noyau intégral de l'opérateur de Green $\mathbf{R}_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ relatif au problème (2.8). Posons, pour simplifier les notations,

$$(2.11) \quad A(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j A_j$$

Par l'hypothèse (I), l'équation algébrique en λ

$$(2.12) \quad p(\lambda, \xi) \equiv \det(\lambda I - A(\xi)) = 0$$

admet les $2m$ racines

$$(2.13) \quad \lambda_j^\pm(\xi) = \pm a_j |\xi| \quad (j=1, \dots, m).$$

Alors la matrice hermitienne $A(\xi)$ admet la représentation spectrale :

$$(2.14) \quad A(\xi) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^+(\xi) P_j^+(\xi) + \lambda_j^-(\xi) P_j^-(\xi).$$

Les $P_j^\pm(\xi)$. ($j=1, \dots, m$) sont ici des matrices symétriques définissant les projections, orthogonaux deux à deux, qui appliquent C^{2m} sur les espaces propres correspondant aux valeurs propres λ_j^\pm ($j=1, \dots, m$). Dans le cas actuel elles se donnent par les formules explicites :

$$(2.15) \quad P_j^\pm(\xi) = \frac{Q(\lambda, \xi)}{\frac{d}{d\lambda} P(\lambda, \xi)} \Big|_{\lambda=\lambda_j^\pm(\xi)}$$

où $Q(\lambda, \xi)$ est la matrice adjointe réduite de $\lambda I - A(\xi)$, c'est-à-dire le transposé de la matrice des cofacteurs (ou compléments algébriques) des éléments de $\lambda I - A(\xi)$. De ces formules on voit que les $P_j^\pm(\xi)$ sont positivement homogènes de degré zéro en ξ et indéfiniment dérivables (analytiques) en ξ dans $\Xi^n - \{0\}$. Pour tout λ non réel, la fonction $(A(\xi) - \lambda I)^{-1}$ de la matrice hermitienne $A(\xi)$ peut être représentée comme suit :

$$(2.16) \quad (A(\xi) - \lambda I)^{-1} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j^+(\xi) - \lambda} P_j^+(\xi) + \frac{1}{\lambda_j^-(\xi) - \lambda} P_j^-(\xi).$$

Des propriétés des $P_j^\pm(\xi)$ et des inégalités évidentes

$$|\lambda_j(\xi) - \lambda|^2 \geq C(1 + |\xi|^2)$$

on a pour tout $\zeta \in C^{2m}$,

$$(2.17) \quad \begin{aligned} |(A(\xi) - \lambda I)^{-1} \zeta|^2 &= \sum_{j=1}^m \frac{|P_j^+(\xi) \zeta|^2}{|\lambda_j^+(\xi) - \lambda|^2} + \frac{|P_j^-(\xi) \zeta|^2}{|\lambda_j^-(\xi) - \lambda|^2} \\ &\leq C' \frac{|\zeta|^2}{(1 + |\xi|^2)} \end{aligned}$$

où les constantes C et C' dépendent de $\text{Im } \lambda$, mais pas de ζ et pas de ξ . Pour $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ on a donc

$$(1 + |\xi|^2)^{1/2}(A(\xi) - \lambda I)^{-1} \hat{g}(\xi) \in L^2(\Xi^n).$$

Par suite si l'on pose

$$(2.18) \quad v(x; \lambda) = \mathcal{F}^{-1}[(A(\xi) - \lambda I)^{-1} \hat{g}(\xi)],^9$$

on en déduit

$$v \in \mathcal{E}'_2(\mathbf{R}^n).$$

Cette fonction v est évidemment une solution et une seule dans l'espace \mathcal{S}'_x (en particulier dans L^2) de l'équation $(A - \lambda I)v = g$ au sens des distributions. On a donc

$$(2.19) \quad v = \mathbf{R}_\lambda g = (A - \lambda I)^{-1} g.$$

Pour λ non réel $(A(\xi) - \lambda I)^{-1}$ est une fonction indéfiniment dérivable en ξ dans tout l'espace Ξ^n et on a

$$(2.20) \quad (A(\xi) - \lambda I)^{-1} = O(|\xi|^{-1}), \quad \text{quand } |\xi| \rightarrow \infty.$$

En particulier

$$(A(\xi) - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{S}'_\xi.$$

Il est donc possible de définir son image réciproque de Fourier dans le sens des distributions. Posons

$$(2.21) \quad E(x; \lambda) = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}^{-1}[(A(\xi) - \lambda I)^{-1}].$$

Alors $E(x; \lambda)$ est une solution élémentaire de $A - \lambda I$. En effet on a

$$(A - \lambda I)E(x; \lambda) = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}^{-1}[I] = \delta(x)I.$$

En utilisant $E(x; \lambda)$, on peut écrire

$$(2.22) \quad v(x; \lambda) = (A - \lambda I)^{-1} g = E(x; \lambda)_{(\infty)}^* g(x).$$

9) On désigne par $\mathcal{S}'_x(\mathcal{S}'_\xi)$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbf{R}^n(\Xi^n)$. Pour $f \in \mathcal{S}'_x$ on désigne par \hat{f} ou $\mathcal{F}[f]$ la transformée de Fourier. Si $f \in L^1$, \hat{f} prend la forme

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i \langle x, \xi \rangle} f(x) dx.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}'_\xi$, $\mathcal{F}^{-1}[\varphi]$ désigne l'image réciproque de Fourier de φ . Si $\varphi \in L^1$ on a

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi] = (2\pi)^{-n/2} \int_{\Xi^n} e^{i \langle x, \xi \rangle} \varphi(\xi) d\xi.$$

Quant aux espaces de fonctions ou de distributions, nous nous conformerons aux définitions et notations de L. Schwartz [19]. Mais nous utiliserons souvent l'habituelle notation C_0^∞ au lieu de \mathcal{D} .

Or à l'aide des propriétés de $E(x; \lambda)$ que nous allons énoncer ci-dessous, ce produit de convolution peut s'exprimer par une forme intégrale. Ainsi la solution élémentaire $E(x; \lambda)$ définie plus haut pour λ non réel, donne le noyau intégral de l'opérateur de Green (ou résolvant) $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$.

$E(x; \lambda)$ jouit les propriétés suivantes :

(E. 1) Elle est une fonction analytique en (x, λ) dans le domaine $(\mathbf{R}^n - \{0\}) \times (\mathbf{C} - l'$ axe réel). De plus on a, pour tout indice multiple ν et un entier $\iota \geq 0$ quelconque

$$(2.23) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x; \lambda) \right| \leq C_{\nu, \iota} |x|^{-\iota} \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty,$$

où la constante $C_{\nu, \iota}$ ne dépend pas de λ lorsque λ varie dans un compact du domaine \mathbf{C} -l'axe réel.

(E. 2) Pour tout indice multiple ν , on a autour de l'origine $x=0$

$$(2.24) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x; \lambda) \right| \leq C_\nu^0 + C_\nu^1 |x|^{1-n-|\nu|}.$$

Si $1-n-|\nu|=0$, on remplace le second membre par $C_\nu^0 + C_\nu^1 \log \frac{1}{|x|}$. Les constantes C_ν^0, C_ν^1 ne dépendent pas de λ lorsque λ varie dans un compact du domaine \mathbf{C} -l'axe réel.

Ces propriétés sont bien connues. Donc nous ne donnons pas ici la démonstration. Mais ajoutons les remarques suivantes.

1. On peut démontrer les propriétés immédiatement de la formule (2.21). Mais il est possible de les déduire des résultats sur les opérateurs elliptiques d'ordre supérieur. En effet, $E(x; \lambda)$ satisfait à l'équation

$$(2.25) \quad p(D; \lambda)E(x; \lambda) = -Q(D; \lambda)\delta(x)I$$

où $p(\xi, \lambda) = \det(\lambda I - A(\xi))$ et $Q(\xi; \lambda) = {}^T \text{cof}(\lambda I - A(\xi))$ c'est-à-dire la matrice adjointe de $\lambda I - A(\xi)$.

2. La majoration (2.23) est une conséquence immédiate du lemme 2.1 que nous donnerons plus tard. Car on a

$$(2.26) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\nu (A(\xi) - \lambda I)^{-1} \zeta \right|^2 \leq C_\nu (1 + |\xi|^2)^{-|\nu|-1} |\zeta|^2$$

pour tout $\zeta \in C^{2m}$.

Nous nous intéressons maintenant à la limite de $E(x; \lambda)$ lorsque λ tend vers l'axe réel. On écrit $\lambda = k \pm i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Nous allons établir le

Théorème 1.2. *Pour tout indice multiple ν et pour $x \neq 0$ et k réel $\neq 0$ arbitrairement fixés, les limites suivantes existent :*

$$E^{(\nu)}(x; k+i0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x; k+i\varepsilon)$$

$$E^{(\nu)}(x; k-i0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x; k-i\varepsilon)$$

où la convergence est uniforme dans tout compact de $\mathbf{R}^n - \{0\}$. De plus, $E^{(\nu)}(x; k \pm i0)$ sont des fonctions continues en (x, k) dans le domaine $(\mathbf{R}^n - \{0\}) \times (\mathbf{R} - \{0\})$.¹⁰⁾

Démonstration. Il suffit de montrer que $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x; \lambda)$ considérée comme une fonction définie dans le domaine $(\mathbf{R}^n - \{0\}) \times \{\lambda; \text{Im} \lambda > 0\}$ (resp. $(\mathbf{R}^n - \{0\}) \times \{\lambda; \text{Im} \lambda < 0\}$), peut être prolongée continûment en (x, λ) dans le domaine $(\mathbf{R}^n - \{0\}) \times \{\lambda; \text{Im} \lambda \geq 0$ et $\lambda \neq 0$ (resp. $(\mathbf{R}^n - \{0\}) \times \{\lambda; \text{Im} \lambda \leq 0$ et $\lambda \neq 0\}$).

Pour le voir, on va modifier la formule (2.21) définissant $E(x; \lambda)$.

Soit k_0 un nombre réel $\neq 0$ et arbitrairement fixé. On choisit un nombre $\delta (0 < \delta < 1)$ de sorte que les intervalles $[-3\delta, 3\delta]$, $\left[\frac{k_0 - 3\delta}{a_j}, \frac{k_0 + 3\delta}{a_j} \right]$ ($j=1, \dots, m$) soient disjoints. En prenant des fonctions $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$ ($j=1, \dots, m$) telles que

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \phi_0(r) &= \begin{cases} 1 & \text{pour } |r| \leq 2\delta \\ 0 & \text{pour } |r| \geq 3\delta \end{cases} \quad \text{et} \\ \phi_j(r) &= \begin{cases} 1 & \text{pour } \left| r - \frac{k_0}{a_j} \right| \leq \frac{2\delta}{a_j} \\ 0 & \text{pour } \left| r - \frac{k_0}{a_j} \right| \geq \frac{3\delta}{a_j} \end{cases} \quad (j=1, \dots, m) \end{aligned}$$

10) Pour chaque $x \neq 0$ et fixé, on peut considérer $E(x; \lambda)$ comme une fonction analytique de λ , définie dans le demi-plan supérieur $\text{Im} \lambda > 0$ ou dans le demi-plan inférieur $\text{Im} \lambda < 0$. Alors elle peut être prolongée analytiquement au delà de l'axe réel dans une partie de l'autre demi-plane. Mais nous n'avons pas besoin de ce fait.

nous récrivons la formule (2.21) sous la forme :

Cas où $k_0 > 0$.

$$\begin{aligned}
 (2.28) \quad E(x; \lambda) &= \mathcal{F}^{-1}[(A(\xi) - \lambda I)^{-1}] \\
 &= \mathcal{F}^{-1}[\phi_0(|\xi|)(A(\xi) - \lambda I)^{-1}] + \sum_{j=1}^m \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\phi_j(|\xi|)}{a_j|\xi| - \lambda} P_j^+(\xi)\right] \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{(1 - \phi_0(|\xi|))(1 - \phi_j(|\xi|))}{a_j|\xi| - \lambda} P_j^+(\xi)\right] \\
 &\quad + \frac{(1 - \phi_0(|\xi|)) P_j^-(\xi)}{-a_j|\xi| - \lambda} \\
 &\equiv I_1(x; \lambda) + I_2(x; \lambda) + I_3(x; \lambda)
 \end{aligned}$$

Cas où $k_0 < 0$.

$$\begin{aligned}
 (2.29) \quad E(x; \lambda) &= \mathcal{F}^{-1}[\phi_0(|\xi|)(A(\xi) - \lambda I)^{-1}] + \sum_{j=1}^m \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\phi_j(|\xi|)}{-a_j|\xi| - \lambda} P_j^-(\xi)\right] \\
 &\quad + \sum_{j=1}^m \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{(1 - \phi_0(|\xi|))(1 - \phi_j(|\xi|))}{-a_j|\xi| - \lambda} P_j^-(\xi)\right] \\
 &\quad + \frac{(1 - \phi_0(|\xi|)) P_j^+(\xi)}{a_j|\xi| - \lambda} \Big].
 \end{aligned}$$

Considérons seulement le cas où $k_0 > 0$, parce que nous pouvons aussi traiter le cas où $k_0 < 0$ de la même manière. Envisageons tout d'abord le premier terme $I_1(x; \lambda)$. Si $\lambda \in$ la région $\{\lambda; |Re \lambda - k_0| < 3\delta\}$ la fonction $\phi_0(|\xi|)(A(\xi) - \lambda I)^{-1}$ est indéfiniment dérivable en ξ dans Ξ^n et son support est compact. On en déduit que pour tout ν , $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu I_1(x; \lambda)$ est une fonction continue de (x, λ) dans $\mathbf{R}^n \times \{\lambda; |Re \lambda - k_0| < 3\delta\}$ et décroît plus vite que toute puissance de $1/|x|$ lorsque $|x| \rightarrow \infty$. De plus la convergence est uniforme en λ dans un compact de $\{\lambda; |Re \lambda - k_0| < 3\delta\}$. Examinons ensuite le second terme :

$$I_2(x; \lambda) = \sum_{j=1}^m \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\phi_j(|\xi|)}{a_j|\xi| - \lambda} P_j^+(\xi)\right].$$

Pour $\lambda = k \pm i\varepsilon$ tels que $|k - k_0| < 3\delta$ et $\varepsilon > 0$, les fonctions entre crochet sont des fonctions indéfiniment dérivables de ξ et à support compact.

Par suite $I_2(x; \lambda)$ s'exprime par la forme intégrale :

$$(2.30) \quad I_2(x; k \pm i\varepsilon) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=1}^m \int_{\Xi^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\phi_j(|\xi|)}{a_j |\xi| - (k \pm i\varepsilon)} P_j^+(\xi) d\xi.$$

En passant alors dans l'intégrale en coordonnées sphériques, il devient

$$(2.31) \quad = (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=1}^m \int_{\Omega} \int_0^{\infty} e^{i\langle x, \omega \rangle r} \frac{r^{n-1} \phi_j(r)}{a_j r - (k \pm i\varepsilon)} dr \Big\} P_j^+(\omega) d\omega$$

où Ω désigne la sphère unité dans l'espace Ξ^n et $d\omega$ l'élément de surface de Ω . La fonction

$$e^{i\langle x, \omega \rangle r} \frac{r^{n-1} \phi_j(r)}{a_j r - (k + i\varepsilon)} \quad \left(\text{resp. } e^{i\langle x, \omega \rangle r} \frac{r^{n-1} \phi_j(r)}{a_j r - (k - i\varepsilon)} \right)$$

peut se prolonger analytiquement en r dans le domaine

$$\left\{ z ; \left| z - \frac{k_0}{a_j} \right| < \frac{2\delta}{a_j} \text{ et } \text{Im } z < \frac{\varepsilon}{a_j} \right\} \left(\text{resp. } \left\{ z ; \left| z - \frac{k_0}{a_j} \right| < \frac{2\delta}{a_j} \right. \right. \\ \left. \left. \text{et } \text{Im } z > -\frac{\varepsilon}{a_j} \right\} \right)$$

du plan complexe. Par conséquent on peut déplacer, en vertu du théorème de Cauchy, le chemin d'intégration $[0, \infty)$ par le suivant :

$$\Gamma_- = \left[0, \frac{k_0 - \frac{3}{2}\delta}{a_j} \right] \cup \left(\text{la demi-circonférence de centre } \frac{k_0}{a_j} \text{ et de} \right. \\ \left. \text{rayon } \frac{\frac{3}{2}\delta}{a_j} \text{ dans le sens direct, situé dans le demi-plan} \right.$$

$$\left. \text{inférieur} \right) \cup \left[\frac{k_0 + \frac{3}{2}\delta}{a_j}, +\infty \right) \quad (\text{fig. 1})$$

$$\left(\text{resp. } \Gamma_+ = \left[0, \frac{k_0 - \frac{3}{2}\delta}{a_j} \right] \cup \left(\text{la demi-circonférence de centre } \frac{k_0}{a_j} \right. \right.$$

$$\left. \text{et de rayon } \frac{\frac{3}{2}\delta}{a_j} \text{ dans le sens flèche situé dans le demi-plan} \right.$$

$$\left. \text{supérieur} \right) \cup \left[\frac{k_0 + \frac{3}{2}\delta}{a_j}, +\infty \right) \quad (\text{fig. 2})$$

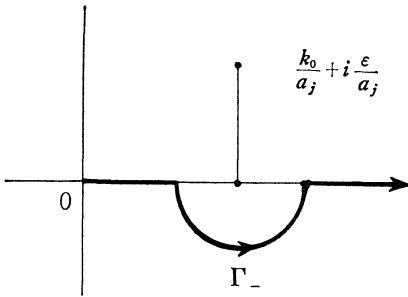


Fig. 1

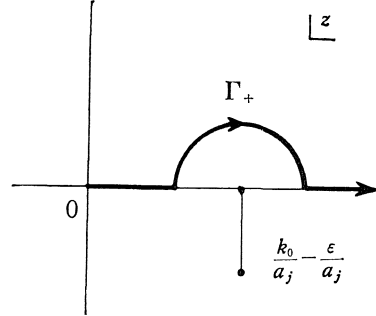


Fig. 2

Considérons les fonctions de (x, λ)

$$(2.32) \quad \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Gamma_{\pm}} e^{i \langle x, \omega \rangle z} \frac{z^{n-1} \phi_j(z)}{a_j z - \lambda} dz \right\} (i\omega)^{\nu} P_j^{\pm}(\omega) d\omega.$$

Elles sont visiblement continues par rapport à (x, λ) dans $\mathbf{R}^n \times \{\gamma; |Re \lambda - k_0| < \delta \text{ et } |Im \lambda| < \varepsilon_0\}$. Cela signifie que la fonction $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} I_2(x; \lambda)$ définie dans $\mathbf{R}^n \times \{\lambda; |Re \lambda - k_0| < \delta \text{ et } Im \lambda > 0\}$ (resp. $\mathbf{R}^n \times \{\lambda; |Re \lambda - k_0| < \delta, Im \lambda < 0\}$) se prolonge par continuité dans $\mathbf{R}^n \times \{\lambda; |Re \lambda - k_0| < \delta, Im \lambda \geq 0\}$ (resp. $\mathbf{R}^n \times \{\lambda; |Re \lambda - k_0| < \delta, Im \lambda \leq 0\}$).

Passons maintenant au troisième :

$$(2.33) \quad I_3(x; \lambda) = \sum_{j=1}^m \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{(1 - \phi_0(|\xi|))(1 - \phi_j(|\xi|))}{a_j |\xi| - \lambda} P_j^+(\xi) + \frac{(1 - \phi_0(|\xi|))}{-a_j |\xi| - \lambda} P_j^-(\xi) \right].$$

Nous montrons que $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} I_3(x; \lambda)$ est continue en $(x; \lambda)$ dans $(\mathbf{R}^n - \{0\}) \times \{\lambda; |Re \lambda - k_0| < 2\delta\}$. On écrit, pour simplifier l'écriture, la fonction entre crochet dans (2.33) par $\psi_j(\xi; \lambda)$.

Alors les $\psi_j(\xi; \lambda)$ ont les propriétés :

- (i) Elles sont indéfiniment dérivables en ξ dans Ξ^n si $\lambda \in \{\lambda; |Re \lambda - k_0| < 2\delta\}$.
- (ii) On a pour tout indice multiple ν

$$(2.34) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\nu \psi_j(\xi; \lambda) \right| \leq C(1 + |\xi|)^{-|\nu|-1} \quad 11)$$

où C est une constante qui ne dépend pas de λ lorsque λ décrit dans un compact du domaine $\{\lambda; |Re \lambda - k_0| < 2\delta\}$.

L'assertion voulue est alors une conséquence immédiate du lemme élémentaire :

Lemme 2.1. Soit $\{T_\lambda\}$ une famille de distributions tempérées dépendant d'un paramètre λ qui parcourt dans un domaine Λ du plan complexe \mathbf{C} , telles qu'on ait les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\hat{T}_\lambda(\xi)$ est une fonction indéfiniment dérivable en ξ dans Ξ^n .
- (ii) Pour tout ν , $\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\nu \hat{T}_\lambda(\xi)$ est une fonction continue de (ξ, λ) dans $\Xi^n \times \Lambda$.
- (iii) Pour tout ν , il existe une constante C_ν telle que

$$(2.35) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^\nu \hat{T}_\lambda(\xi) \right| \leq C_\nu (1 + |\xi|)^{-|\nu|d}$$

où $d > 0$, et C_ν ne dépend pas de λ dans Λ .

Alors,

- 1° Si l'on prend α tel que $|\alpha| \geq \left[\frac{n + \iota + \rho}{d} \right] + 1$, $x^\alpha T_\lambda$ est, dans \mathbf{R}^n , une fonction ρ -fois continûment différentiable de x . Pour tout ν ($|\nu| \leq \rho$), $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu (x^\alpha T_\lambda)$ est une fonction continue de (x, λ) dans $\mathbf{R}^n \times \Lambda$.
- 2° Dans le complémentaire de l'origine $\mathbf{R}^n - \{0\}$, T_λ est une fonction indéfiniment différentiable de x . Pour tout ν , $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu T_\lambda$ est une fonction continue de (x, λ) dans $(\mathbf{R}^n - \{0\}) \times \Lambda$.
- 3° T_λ décroît quand $|x| \rightarrow \infty$, plus rapidement que toute puissance de $1/|x|$, ainsi que chacune de ses dérivées. De plus

11) $\psi_j(\xi; \lambda)$ est une matrice. Donc on entend (2.34) par l'inégalité pour chaque élément, ou par $|\psi_j(\xi; \lambda)\zeta| \leq C(1 + |\xi|)^{-|\nu|-1}|\zeta|$ pour $\zeta \in \mathbf{C}^{2m}$.

la convergence est uniforme par rapport à λ dans Λ .

Preuve. En tenant compte de la condition (2.35) l'assertion 1° n'est qu'une petite modification du lemme de Sobolev.

Dans l'ouvert complémentaire de l'origine $x=0$, on a l'égalité

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} T_{\lambda} = |x|^{-2p} \left[|x|^{2p} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} T_{\lambda}\right) \right].$$

Or la condition (2.35) nous fournit

$$\mathcal{F} \left[|x|^{2p} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} T_{\lambda}\right) \right] = (-\Delta_{\xi})^p ((i\xi)^{\nu} \hat{T}_{\lambda}(\xi)) \in L^1(\Xi^n)$$

pour tout entier p assez grand, où Δ_{ξ} est l'opérateur de Laplace. Donc $|x|^{2p} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} T_{\lambda}\right)$ est une fonction continue de (x, λ) dans $\mathbf{R}^n \times \Lambda$ et on a d'ailleurs la majoration :

$$\left| |x|^{2p} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} T_{\lambda}\right)(x) \right| \leq (2\pi)^{-n/2} \| (-\Delta_{\xi})^p (i\xi)^{\nu} \hat{T}_{\lambda}(\xi) \|_{L^1(\Xi^n)}.$$

On en déduit les assertions 2° et 3°. Nous avons ainsi terminé la démonstration du lemme 2.1 et, par conséquent, celle du théorème 2.1 lui-même.

Il est bien connu que lorsque ε tend vers zéro en restant positif, la fonction $\frac{1}{r+i\varepsilon}$ (resp. $\frac{1}{r-i\varepsilon}$) tend vers une distribution $\text{vp} \frac{1}{r} - i\pi\delta(r)$ (resp. $\text{vp} \frac{1}{r} + i\pi\delta(r)$) dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^1)$ ou $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$.

On a ainsi le

Corollaire 1. Les $E(x; k \pm i0)$ sont des solutions élémentaires de l'opérateur elliptique $A - kI$ et se définissent par les formules: Soient $k_0 > 0$ et $|k - k_0| < g$.

$$(2.36) \quad E(x; k \pm i0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\Xi^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \phi_0(|\xi|) (A(\xi) - \lambda I)^{-1} d\xi \\ + \sum_{j=1}^m \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{(1 - \phi_0(|\xi|))(1 - \phi_j(|\xi|))}{a_j |\xi| - k} P_j^+(\xi) + \frac{(1 - \phi_0(|\xi|))}{-a_j |\xi| - k} P_j^-(\xi) \right] \\ + \sum_{j=1}^m \frac{1}{a_j} \int_{\Omega} \langle \text{vp} \frac{1}{r - k/a_j} \pm i\pi\delta(r - k/a_j), e^{i\langle x, \omega \rangle} \varphi(r) \rangle P_j^+(\omega) d\omega$$

où \langle, \rangle désigne la dualité entre $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ et $\mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$.

Dans le cas où $k < 0$, on obtient les formules correspondantes.

Remarque. Pour k réel $\neq 0$, la fonction $(A(\xi) - kI)^{-1}$ a des singularités non intégrables aux surfaces des sphères de rayons $\gamma_j = \frac{k}{a_j}$ ($j = 1, \dots, m$), centrées à l'origine $\xi = 0$.¹²⁾ Par conséquent elle ne définit pas une distribution sur Ξ^n .

Mais la discussion précédente montre le fait suivant.

Ses singularités sont tempérées et lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers zéro, $(A(\xi) - (k + i\varepsilon)I)^{-1}$ (resp. $(A(\xi) - (k - i\varepsilon)I)^{-1}$) tend vers une distribution de la forme suivante dans l'espace $\mathcal{S}'(\Xi^n)$.

$\text{vp} (A(\xi) - kI)^{-1} + (\text{une mesure concentrée sur les surfaces})$. D'après la continuité de la transformation de Fourier, cette distribution est égale à

$$\mathcal{F}[E(x; k + i0)] \text{ (resp. } \mathcal{F}[E(x; k - i0)] \text{)}.$$

Le théorème 2.1 implique aussi le corollaire suivant que nous utiliserons dans le § 5 pour démontrer le théorème principal.

Corollaire 2. Soit $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Pour tout indice multiple ν , $(\frac{\partial}{\partial x})^\nu E(x; k \pm i0) * g(x)$ sont des fonctions continues de (x, k) dans $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^1 - \{0\})$.

Désignons par $\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^+(k_0)$ (resp. $\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^-(k_0)$) la région $\{\lambda = k + i\varepsilon; |k - k_0| < \delta, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}$ (resp. $\{\lambda = k - i\varepsilon; |k - k_0| < \delta, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}$) dans le plan complexe. Nous allons maintenant établir une majoration pour $|x| \rightarrow \infty$ de $E(x; k \pm i\varepsilon)$, uniforme par rapport à $\lambda = k + i\varepsilon$ (resp. $\lambda = k - i\varepsilon$) dans $\overline{\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^+}(k_0)$ (resp. $\overline{\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^-}(k_0)$).¹³⁾ Pour le faire, nous préparons deux lemmes. Le premier est ce qui concerne le comportement asymptotique de transformées de Fourier de mesures

12) Les surfaces sont ce qu'on appelle surfaces normales ou de lenteur de l'opérateur hyperbolique $L = I \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

13) Soit G un ensemble de \mathbf{C} ou \mathbf{R}^n . \overline{G} désigne l'adhérence de G . Pour $\varepsilon = 0$ on entend $\lambda = k \pm i\varepsilon$ par $\lambda = k \pm i0$.

concentrées sur la sphère.

Lemme 2. 2. Soient Ω la surface de la sphère unité dans l'espace numérique Ξ^n de dimension n et $\mu(\omega)$ une fonction indéfiniment différentiable sur la variété Ω . On considère la fonction

$$(2.37) \quad I(x) \equiv \int_{\Omega} e^{i\langle x, \omega \rangle} \mu(\omega) d\omega,$$

$d\omega$ désignant la mesure superficielle de Ω . Lorsque $|x|$ tend vers l'infini, on a alors pour $x = |x|\theta$ la représentation asymptotique

$$(2.36) \quad I(x) = \mu(\theta) \left(\frac{2\pi}{|x|} \right)^{(n-1)/2} e^{i(|x| - (\pi/4)(n-1))} \\ + \mu(-\theta) \left(\frac{2\pi}{|x|} \right)^{(n-1)/2} e^{-i(|x| - (\pi/4)(n-1))} + q(x)$$

avec

$$|q(x)| + \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) \right| \leq \frac{\text{Const}}{|x|^{(n+1)/2}}.$$

Pour des mesures sur certaines surfaces plus générales on a un résultat analogue dépendant de la courbure totale de la surface. En effet il y a quelques résultats concernant ce problème, par exemple Grušin [7], Littman [12], etc. Mais nous avons besoin d'estimer plus précisément l'ordre de la décroissance de $q(x)$ quand $|x| \rightarrow \infty$. Pour compléter, nous donnerons la démonstration de ce lemme dans l'appendice.

Lemme 2. 3. Soient k_0 réel $\neq 0$ et δ un nombre positif tel que l'intervalle $[k_0 - 3\delta, k_0 + 3\delta]$ ne contienne pas zéro. Soit $\varphi \in C_0^\infty(k_0 - 3\delta, k_0 + 3\delta)$. Il existe alors des constantes C (dépendant de φ et de $\mu(\omega)$ mais pas de $\varepsilon > 0$) et R positives telles qu'on ait

$$(2.40) \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(r)}{r - (k \pm i\varepsilon)} I(rx) dr \right| \leq C |x|^{-(n-1)/2}$$

pour tout x ($|x| \geq R$) et $|k - k_0| < \delta$, $I(x)$ étant la fonction définie par (2.37).

Démonstration : On pose

$$(2.41) \quad \Phi^\pm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(r)}{r - (k \pm i\varepsilon)} I(rx) dr.$$

En appliquant le lemme précédent à $I(rx)$ dans l'intégrale, on peut écrire

$$(2.42) \quad \begin{aligned} \Phi^\pm(x) &= C_1\mu(\theta) |x|^{-(n-1)/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|x|r} \frac{r^{-(n-1)/2} \varphi(r)}{r - (k \pm i\varepsilon)} dr \\ &\quad + C_2\mu(-\theta) |x|^{-(n-1)/2} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-i|x|r} \frac{r^{-(n-1)/2} \varphi(r)}{r - (k \pm i\varepsilon)} dr \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(r)q(rx)}{r - (k \pm i\varepsilon)} dr \\ &\equiv \Phi_1^\pm(x) + \Phi_2^\pm(x) + \Phi_3^\pm(x). \end{aligned}$$

Rappelons ici les formules bien connues qui donnent les inverses de Fourier de $\frac{1}{r - (k \pm i\varepsilon)}$, $\varepsilon \geq 0$:

$$(2.43) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\sigma r}}{r - (k + i\varepsilon)} dr = 2\pi i Y(\sigma) e^{i(k+i\varepsilon)\sigma}, \quad \varepsilon \geq 0,$$

$$(2.44) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\sigma r}}{r - (k - i\varepsilon)} dr = -2\pi i Y(-\sigma) e^{i(k-i\varepsilon)\sigma}, \quad \varepsilon \geq 0,$$

$Y(\sigma)$ étant la fonction d'Heaviside, égale à 0 pour $\sigma < 0$ à 1 pour $\sigma > 0$. De ces formules on trouve

$$(2.45) \quad \Phi^+(x) = 2\pi i C_1\mu(\theta) |x|^{-(n-1)/2} \{e^{i(k+i\varepsilon)|x|} {}_*\psi(r(|x|))\} + \Phi_3^+(x)$$

$$(2.46) \quad \Phi^-(x) = -2\pi i C_2\mu(-\theta) |x|^{-(n-1)/2} \{e^{-i(k-i\varepsilon)|x|} {}_*\psi(r(|x|))\} + \Phi_3^-(x)$$

où $\psi(r) = r^{-(n-1)/2} \varphi(r)$. Or on a

$$(2.47) \quad |e^{\pm i(k \pm i\varepsilon)|x|} {}_*\psi(r(|x|))| \leq \int |\psi(|y|) dy = \text{const.},$$

puisque $\varepsilon \geq 0$. Par suite il nous reste à montrer

$$(2.48) \quad |\Phi_3^\pm(x)| \leq \text{const.} |x|^{-(n-1)/2} \text{ quand } |x| \rightarrow \infty.$$

Si $|k - k_0| < \delta$, on peut écrire

$$(2.49) \quad \begin{aligned} \Phi_3^\pm(x) &= \int_{-3\delta}^{3\delta} \frac{\varphi(r+k)q((r+k)x)}{r \pm i\varepsilon} dr = \varphi(k)q(kx) \int_{-3\delta}^{3\delta} \frac{1}{r \pm i\varepsilon} dr \\ &\quad + \int_{-3\delta}^{3\delta} \varphi(r+k) \frac{[q(r+k)x - q(kx)]}{r \pm i\varepsilon} dr \\ &\quad + \int_{-3\delta}^{3\delta} \frac{\varphi(r+k) - \varphi(k)}{r \pm i\varepsilon} q(kx) dr. \end{aligned}$$

Grâce à (2.39), le premier terme est majoré par $\text{const.} |x|^{-(n+1)/2}$ quand $|x| \rightarrow \infty$, car on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{-3\delta}^{3\delta} \frac{dr}{r \pm i\varepsilon} \right| &= \left| \int_0^{3\delta} \left(\frac{1}{r \pm i\varepsilon} - \frac{1}{r \mp i\varepsilon} \right) dr \right| \\ &\leq 2 \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{r^2 + \varepsilon^2} dr = \pi, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Considérons le second terme. En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction de r entre crochet dans l'intégrale, il vient

$$\int_{-3\delta}^{3\delta} \varphi(r+k) \left\{ \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial q}{\partial x_j} ((k + \Theta r)x) \right\} \frac{r}{r \pm i\varepsilon} dr,$$

où $0 < \Theta < 1$. Or on a

$$\int_{-3\delta}^{3\delta} \left| \frac{r}{r \pm i\varepsilon} \right| dr \leq \text{const.}, \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

et d'après (2.39)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial q}{\partial x_j} ((k + \Theta r)x) \right| &\leq \text{const.} |x| \cdot |x|^{-(n+1)/2} \\ &= \text{const.} |x|^{-(n-1)/2}, \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$|\text{le second terme}| \leq \text{const.} |x|^{-(n-1)/2}, \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty.$$

D'une manière analogue, on verra que le troisième terme de (2.49) est majoré par $\text{const.} |x|^{-(n+1)/2}$ quand $|x| \rightarrow \infty$. On a ainsi la majoration (2.48). De (2.41), (2.45), (2.46), (2.47) et (2.48), on déduit (2.40). Le lemme 2.3 est donc démontré.

De ces lemmes préparatoires, il découle le

Théorème 2.2. *Soient k_0 un nombre réel $\neq 0$ et ν un indice multiple quelconque. Si l'on prend $\delta > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ convenablement, il existe une constante C telle que*

$$(2.50) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x; k + i\varepsilon) \right| \leq C |x|^{-(n-1)/2}, \quad \text{pour tout } \lambda = k + i\varepsilon$$

dans $\overline{\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^+}(k_0)$, quand $|x| \rightarrow \infty$, et que

$$(2.51) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x; k - i\varepsilon) \right| \leq C |x|^{-(n-1)/2}, \quad \text{pour tout } \lambda = k - i\varepsilon$$

dans $\overline{\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^-(k_0)}$, quand $|x| \rightarrow \infty$.

Preuve. Soit $k_0 > 0$ par exemple. Des formules (2.28) et (2.29), on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x; k \pm i\varepsilon) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} [\phi_0(|\xi|)(i\xi)^\nu (A(\xi) - (k \pm i\varepsilon)I)^{-1}] d\xi \\ &+ (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=1}^m \int_0^\infty \frac{r^{n-1+|\nu|} \phi_j(r)}{a_j r - (k \pm i\varepsilon)} \left\{ \int_\Omega e^{i\langle x, \omega \rangle r} (i\omega)^\nu P_j^+(\omega) d\omega \right\} dr \\ &+ \sum_{j=1}^m \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{(1 - \phi_0(|\xi|))(1 - \phi_j(|\xi|))}{a_j |\xi| - (k \pm i\varepsilon)} (i\xi)^\nu P_j^+(\xi) \right. \\ &\left. + \frac{(1 - \phi_0(|\xi|))}{-a_j |\xi| - (k \pm i\varepsilon)} (i\xi)^\nu P_j^-(\xi) \right] \end{aligned}$$

Dans le second membre, le premier terme décroît plus rapidement, lorsque $|x| \rightarrow \infty$, que toute puissance de $1/|x|$, puisque pour chaque $\lambda = k + i\varepsilon$ (ou $k - i\varepsilon$) tel que $|k - k_0| < \delta$ et $\varepsilon > 0$, la fonction entre crochet est indéfiniment différentiable en ξ et son support compact. Il est aussi aisé de voir que la convergence est uniforme par rapport à λ lorsque $\lambda = k + i\varepsilon$ (ou $k - i\varepsilon$) parcourt dans $\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^+(k_0)$ (resp. $\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^-(k_0)$).

En appliquant le lemme 2.3 au deuxième et le lemme 2.1 au troisième on en conclut (2.50) et (2.51).

Le corollaire suivant qui est une conséquence immédiate du théorème 2.2, nous servira pour construire le noyau compensateur $E_c(x, y; \lambda)$ dans le §4.

Corollaire. Soit $y = (y_1, \dots, y_n)$ un point de \mathbf{R}^n tel que $y_n \neq 0$. Pour tout ν et tout $q > 2$ les traces de $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\lambda E(x - y; k \pm i\varepsilon)$, $\varepsilon \geq 0$, sur l'hyperplan $x_n = 0$ appartiennent à $L^q(\mathbf{R}_x^{n-1})$.

En outre, l'application

$$\mathbf{R}_+^n \times \overline{\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^+(k_0)} \text{ (resp. } \overline{\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^-(k_0)}) \ni (y, \lambda) \rightsquigarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\nu E(x - y; \lambda) \Big|_{x_n=0} \in L^q(\mathbf{R}_x^{n-1}),$$

est continue.

**§ 3. Problème aux Limites $\{A - \lambda I, B\}$ dans le Demi-Espace \mathbf{R}_+^n
Matrice-Noyau de Poisson Relatif au Problème**

Nous commençons par quelques éléments préliminaires. Soient M une matrice d'éléments constants d'ordre N , non singulière et B une matrice d'éléments constants de type (l, N) de rang l . Considérons un système d'équations différentielles ordinaires

$$(3.1) \quad \frac{1}{i} \frac{d}{ds} U(s) = MU(s) \quad \text{pour } s > 0,$$

avec la condition

$$(3.2) \quad BU(0) = \mathbf{b} \quad \mathbf{b} \in \mathbf{C}^l.$$

Nous nous proposons le problème suivant :

“Chercher les conditions qu'il faut imposer à B pour que, quel que soit $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^l$, il existe une solution à croissance lente (ou dans $L^2(\mathbf{R}_+^1)$) et une seule du problème (3.1), (3.2).”

On peut discuter ce problème pour M général, mais nous nous limitons ici au cas restrictif suivant dont nous aurons besoin par la suite.

“*Toutes les racines caractéristiques de M sont distinctes et différentes des réels.*”

Soient τ_1, \dots, τ_m les racines à partie imaginaire positive et $\tau_{m+1}, \dots, \tau_N$ les racines à partie imaginaire négative. Soit \mathbf{h}_j un vecteur propre de M correspondant à τ_j . Désignons par E^+ (resp. E^-) le sous-espace de \mathbf{C}^N , engendré par $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_m$ (resp. engendré par $\mathbf{h}_{m+1}, \dots, \mathbf{h}_N$) et appelons E^+ (resp. E^-) *espace propre positif* (resp. *espace propre négatif*). Alors on a

$$\mathbf{C}^N = E^+ \oplus E^-.$$

Toute solution $U(s)$, $s > 0$, à croissance lente (ou dans $L^2(\mathbf{R}_+^1)$) de l'équation (3.1) peut être représenté de façon unique par la forme :

$$(3.3) \quad U(s) = \sum_{j=1}^m \alpha_j e^{i\tau_j s} \mathbf{h}_j.$$

Autrement dit, toute solution $U(s)$, $s > 0$, est à croissance lente si

et seulement si $U(0) \in E$. Notre problème revient donc à trouver les conditions sur B telles que pour tout $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^l$, il existe une solution $U(0)$ et une seule dans E^+ de l'équation linéaire $BU(0) = \mathbf{b}$. Nous avons ainsi le

Lemme 3.1. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

- 1° *Quel que soit $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^l$, il existe une solution $U(s)$, $s > 0$, à croissance lente (ou dans $L^2(\mathbf{R}_+^1)$) et une seule du problème (3.1), (3.2).*
- 2° *L'opérateur linéaire B limité sur E^+ est biunivoque de E^+ sur \mathbf{C}^l .*
- 3° *i) $l = m$
ii) $\mathcal{B} (= \ker B) \cap E^+ = \{0\}$*
- 4° *La matrice carrée $B\mathcal{A}$ d'ordre m est régulière, c'est-à-dire $\det(B\mathcal{A}) \neq 0$, \mathcal{A} étant la matrice $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_m)$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est \mathbf{h}_j .*

La démonstration de ce lemme est élémentaire.

On désigne par $\mathcal{A}_{\rho j}$ la matrice obtenue en remplaçant la $j^{\text{ième}}$ colonne de $B\mathcal{A}$ par la colonne $\overset{\rho}{T}(0 \dots 1 \dots 0)$. Alors une solution unique à croissance lente du problème (3.1) (3.2) avec $\mathbf{b} = \overset{\rho}{T}(0 \dots 1 \dots 0)$ est donnée par la forme

$$(3.4) \quad U_{\rho}(s) = \sum_{j=1}^m \frac{\det(\mathcal{A}_{\rho j})}{\det(B\mathcal{A})} e^{i\tau_j s} \mathbf{h}_j.$$

Revenons maintenant au problème aux limites $\{A - \lambda I, B\}$ dans le demi-espace \mathbf{R}_+^n . Considérons l'équation

$$(A - \lambda I)v(x; \lambda) = 0$$

En prenant formellement la transformation de Fourier partielle par rapport à la variable $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, on obtient

$$(3.5) \quad \frac{1}{i} \frac{d}{dx_n} \bar{v}(\xi', x_n; \lambda) = A_n^{-1} (\lambda I - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j) \bar{v}(\xi', x_n; \lambda)$$

où \bar{v} désigne la transformée de Fourier de v par rapport à x' . C'est un système d'équations différentielles ordinaires de x_n , dépendant des paramètres $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ et λ . En posant

$$(3.6) \quad M(\xi'; \lambda) \equiv A_n^{-1}(\lambda I - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j)$$

(3.5) s'écrit

$$(3.7) \quad \frac{1}{i} \frac{d}{dx_n} \bar{v}(\xi', x_n; \lambda) = M(\xi'; \lambda) \bar{v}(\xi', x_n; \lambda)$$

Les racines caractéristiques de $M(\xi', \lambda)$ sont, à cause de notre hypothèse (I) dans le §1,

$$(3.8) \quad \tau_j = \tau_j(\xi'; \lambda) = \left\{ \left(\frac{\lambda}{a_j} \right)^2 - |\xi'|^2 \right\}^{1/2} \quad (j=1, \dots, m).$$

Les valeurs de ces fonctions $\tau_j(\xi'; \lambda)$ ne sont pas réelles pour ξ' réel et tout λ non réel. Désignons par $\tau_j^+ = \tau_j^+(\xi'; \lambda)$ la valeur à partie imaginaire positive de $\tau_j(\xi'; \lambda)$. $\tau_j^+(\xi'; \lambda)$ devient une fonction *continue* de $(\xi'; \lambda)$ dans $\Xi^{n-1} \times \bar{C}_+$ (on $\Xi^{n-1} \times \bar{C}_+$) en définissant les valeurs sur l'axe réel par $\tau_j^+(\xi', k+i0)$ (resp. $\tau_j^+(\xi', k-i0)$), où \bar{C}_+ et \bar{C}_- désignant le demi-plan supérieur $\{\lambda; \text{Im } \lambda \geq 0\}$ et le demi-plan inférieur $\{\lambda; \text{Im } \lambda \leq 0\}$ respectivement. Pour λ non réel, on désigne par $E^+(\xi', \lambda)$ le sous-espace de C^N ($N=2m$) engendré par les vecteurs propres de $M(\xi'; \lambda)$ correspondant aux $\tau_1^+(\xi'; \lambda), \dots, \tau_m^+(\xi'; \lambda)$ et on l'appelle *espace propre positif* de $M(\xi'; \lambda)$. Pour notre besoin ultérieur, nous voulons choisir une base $\{\mathbf{h}_1^+(\xi'; \lambda), \dots, \mathbf{h}_m^+(\xi'; \lambda)\}$ de $E^+(\xi'; \lambda)$ telle que les fonctions $\mathbf{h}_j^+(\xi'; \lambda)$ de (ξ', λ) aient de bonnes propriétés lorsque λ se trouve près de l'axe réel. Pour cela nous allons construire une telle base explicitement. Compte tenu de l'utilisation d'une partition de l'unité par rapport à λ , on le fera localement par rapport à λ . Fixons donc un nombre réel k_0 arbitrairement et on suppose souvent dans la suite que $\lambda = k + i\varepsilon$ (resp. $k - i\varepsilon$) parcourt $\bar{\Lambda}_{\delta, \varepsilon_0}^+(k_0)$ (resp. $\bar{\Lambda}_{\delta, \varepsilon_0}^-(k_0)$), δ et ε_0 étant deux petits nombres positifs. Ceci remarqué, on écrit, pour simplifier les notations, Λ^+ (ou Λ^-) au lieu de $\bar{\Lambda}_{\delta, \varepsilon_0}^+(k_0)$ (resp. $\bar{\Lambda}_{\delta, \varepsilon_0}^-(k_0)$).

Rappelons tout d'abord l'identité suivante bien connue dans la théorie des matrices

$$\begin{aligned} & (\tau A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I) \cdot {}^T \text{cof} (\tau A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I) \\ & = \det (\tau A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I) \cdot I. \end{aligned}$$

Lorsque l'on substitue τ par une racine $\tau(\xi', \lambda)$ de $\det(\lambda A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I) = 0$, cette identité montre que toute la colonne $\neq 0$ de la matrice ${}^T\text{cof}(\tau A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I)$ est un vecteur annulé à droite¹⁴⁾, non trivial par la matrice $(\tau A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I)$, autrement dit, un vecteur propre de $M(\xi'; \lambda)$ correspondant à la valeur propre $\tau(\xi'; \lambda)$ puisque

$$(3.9) \quad \tau I - M(\xi'; \lambda) = A_n^{-1}(\tau A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I)$$

Les éléments de la matrice ${}^T\text{cof}(\tau A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I)$ sont des polynômes de $\tau, \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ et λ . Donc les éléments de la matrice ${}^T\text{cof}(\tau_j^+(\xi'; \lambda) A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I)$ sont des fonctions continues de (ξ', λ) dans $\Xi^{n-1} \times \overline{\Lambda^+}$ (resp. $\Xi^{n-1} \times \overline{\Lambda^-}$) et positivement homogènes de degré $2m-1$ par rapport à (ξ', λ) . Nous voulons prendre comme $\mathbf{h}_j^+(\xi'; \lambda)$ une colonne de la matrice ${}^T\text{cof}(\tau_j^+(\xi'; \lambda) A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I)$. Pour cela, il faut montrer l'existence d'une colonne non triviale pour ξ' et pour $\lambda \in \overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$) On ne pourra pas expecter qu'il existe une colonne qui ne s'annule jamais en ξ' ($\xi' \neq 0$) lorsque λ varie dans $\overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$) Notre tâche, maintenant, va être de trouver un recouvrement de l'espace Ξ^{n-1} par un nombre fini d'ouverts de sorte qu'il existe une colonne qui ne s'annule jamais quand ξ' parcourt chaque ouvert et que λ parcourt $\overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$) On pourra alors construire le noyau de Poisson à l'aide d'une partition de l'unité subordonnée au recouvrement.

On pose

$$(3.10) \quad P(\tau, \xi'; \lambda) = \tau A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I$$

et

$$(3.11) \quad Q(\tau, \xi'; \lambda) = {}^T\text{cof} P(\tau, \xi'; \lambda)$$

Montrons d'abord l'existence d'une colonne de la matrice $Q(\tau_j^+(\xi'; \lambda), \xi'; \lambda)$ qui ne s'annule jamais localement par rapport à ξ' lorsque λ parcourt $\overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$) On fixe arbitrairement un point ξ'_0 dans

14) En anglais, "right nul vector".

l'espace Ξ^{n-1} .¹⁵⁾ Si $|\xi'_0| \neq |k_0|/a_j$, la racine caractéristique $\tau_j^+(\xi'_0; k_0 + i0)$ (resp. $\tau_j^+(\xi'_0; k_0 - i0)$) est simple. D'autre part si $|\xi'_0| = |k_0|/a_j$, la racine caractéristique $\tau_j^+(\xi'_0; k_0 \pm i0) = 0$ de la matrice $M(\xi'; k_0)$ est double. Mais par l'hyperbolicité stricte de l'opérateur L , c'est-à-dire, dans le cas actuel, par l'hypothèse (I), la dimension de l'espace des vecteurs annulés à droite par la matrice $P(\tau_j^+(\xi'; k_0 \pm i0), \xi'; k_0)$ (l'espace propre stricte de $M(\xi'; k_0)$, correspondant à la valeur propre $\tau_j^+(\xi'_0; k_0 \pm i0) = 0$) est un. Par conséquent, dans tous les cas, le rang de la matrice $P(\tau_j^+(\xi'_0; k_0 + i0), \xi'_0; k_0)$ (resp. $P(\tau_j^+(\xi'_0; k_0 - i0), \xi'_0; k_0)$) est $2m - 1$. Cela signifie qu'il existe au moins un cofacteur $\neq 0$ parmi les cofacteurs des éléments de la matrice $P(\tau_j^+(\xi'_0; k_0 + i0), \xi'_0; k_0)$. Alors la colonne de $Q(\tau_j^+(\xi'; \lambda), \xi'; \lambda)$ contenant au $(\xi', \lambda) = (\xi'_0, k_0)$ le cofacteur, ne s'annule jamais lorsque ξ' parcourt un petit voisinage de ξ'_0 et $\lambda = k + i\varepsilon$ (resp. $\lambda = k - i\varepsilon$) parcourt $\overline{\Lambda^+} = \overline{\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^+}(k_0)$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$) en reprenant δ et ε_0 plus petits si nécessaire.

Passons déterminer un recouvrement fini de Ξ^{n-1} par des ouverts comme mentionné au précédent. Fixons un point η' quelconque sur la sphère unité $|\xi'| = 1$ de l'espace Ξ^{n-1} et prenons une colonne $Q_i(\tau_j^+(\eta', 0), \eta', 0) \neq 0$ de la matrice $Q(\tau_j^+(\eta', 0), \eta', 0)$. Alors on peut choisir un voisinage V' (sur la sphère) de η' et un nombre positif R_0 suffisamment grand tel qu'on ait, pour tout $\eta' \in V'$ et tout $\lambda \in \overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$)

$$(3.12) \quad Q_i\left(\tau_j^+\left(\eta'; \frac{\lambda}{R}\right), \eta'; \frac{\lambda}{R}\right) \neq 0 \quad \text{si } R \geq R_0$$

On peut aussi supposer $R_0 > \frac{k_0}{a_m} + 1$ où a_m est la vitesse minimale de propagation. On recouvre la sphère unité par un nombre fini de tels voisinage $\{V_\rho\}$. En posant $V_\rho = \{\xi'; |\xi'| > R_0, \frac{\xi'}{|\xi'|} \in V_\rho\}$ nous déterminons $h_j^+(\xi'; \lambda)$ dans $V_\rho \times \overline{\Lambda^+}$ (resp. $V_\rho \times \overline{\Lambda^-}$) par la colonne $Q_{i\rho}(\tau_j^+(\xi'; \lambda), \xi'; \lambda)$. Considérons ensuite dans la boule $\{\xi'; |\xi'| \leq R\}$. Soit η' un point quelconque dans la boule. Alors on peut trouver un voisinage W_σ de η' et une colonne $Q_{i\sigma}(\tau_j^+(\xi'; \lambda), \xi'; \lambda)$ de la

15) On suppose $\xi'_0 \neq 0$ ou $k_0 \neq 0$.

matrice $Q(\tau_j^+(\xi'; \lambda), \xi'; \lambda)$ tel que

$$(3.13) \quad Q_{i\sigma}(\tau_j^+(\xi'; \lambda), \xi'; \lambda) \neq 0 \quad \text{pour tout } \xi' \in W_\sigma$$

et tout $\lambda \in \overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$). On recouvre la boule $|\xi'| \leq R_0$ par un nombre fini de tels voisinages $\{W_\sigma\}$. On détermine $\mathbf{h}_j^+(\xi'; \lambda)$ dans $W_\sigma \times \overline{\Lambda^+}$ (resp. $W_\sigma \times \overline{\Lambda^-}$) par la colonne $Q_{i\sigma}(\tau_j^+(\xi'; \lambda), \xi'; \lambda)$. Nous avons ainsi un recouvrement de Ξ^{n-1} par un nombre fini d'ouverts $\{V_\rho, W_\sigma\}$ et $\mathbf{h}_j^+(\xi'; \lambda)$ définie dans chaque $V_\rho \times \overline{\Lambda^+}$ et $W_\sigma \times \overline{\Lambda^+}$ (resp. $V_\rho \times \overline{\Lambda^-}$ et $W_\sigma \times \overline{\Lambda^-}$).

Nous allons maintenant définir la matrice-noyau de Poisson relative au système $\{A - \lambda I, B\}$. On va chercher une matrice-distribution tempérée $K(x; \lambda)$ à $2m$ lignes et m colonnes vérifiant

$$(3.14) \quad (A - \lambda I)K(x; \lambda) = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}_+^n$$

et

$$(3.15) \quad BK(x', 0; \lambda) = \delta(x')I_m,$$

I_m étant la matrice unité d'ordre m et $\delta(x')$ la distribution de Dirac dans l'espace \mathbf{R}^{n-1} . On peut évidemment construire une telle matrice-distribution d'une manière heuristique. En tenant formellement la transformation de Fourier partielle de (3.14) et (3.15), on obtient

$$(3.16) \quad \frac{1}{i} \frac{d}{dx_n} \tilde{K}(\xi', x_n; \lambda) = M(\xi'; \lambda) \tilde{K}(\xi', x_n; \lambda)$$

$$(3.17) \quad B\tilde{K}(\xi', 0; \lambda) = (2\pi)^{-(n-1)/2} I_m$$

Compte tenu de la formule (3.4), on pose

$$(3.18) \quad U_i(\xi', x_n; \lambda) = (2\pi)^{(n-1)/2} \sum_{j=1}^m \frac{\det \mathcal{A}_{ij}(\xi'; \lambda)}{\det (B\mathcal{A}(\xi'; \lambda))} e^{i\tau_j^+(\xi'; \lambda)x_n} \mathbf{h}_j^+(\xi'; \lambda)^{16)}$$

dans chaque $V_\rho \times \overline{\Lambda^-}$ et $W_\sigma \times \overline{\Lambda^+}$ (resp. $V_\rho \times \overline{\Lambda^-}$ et $W_\sigma \times \overline{\Lambda^-}$), où $\mathcal{A}(\xi'; \lambda)$ est la matrice $(\mathbf{h}_1^+(\xi'; \lambda), \dots, \mathbf{h}_m^+(\xi'; \lambda))$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est $\mathbf{h}_j^+(\xi'; \lambda)$, et $\mathcal{A}_{ij}(\xi'; \lambda)$ la matrice obtenue en remplaçant la $j^{\text{ième}}$ colonne de $B\mathcal{A}(\xi'; \lambda)$ par la colonne ${}^T(0 \dots \underset{j}{1} \dots 0)$. Prenons une

16) Il faut discerner l'unité imaginaire i et l'indice i .

partition de l'unité $\{\alpha_k(\xi')\}^{17)}$ dans l'espace Ξ^{n-1} subordonné au recouvrement $\{V_\rho, W_\sigma\}$ déterminé dans ce qui précède, et considérons la matrice-fonction

$$\sum_k \alpha_k(\xi')(U_1(\xi', x_n; \lambda), \dots, U_m(\xi', x_n; \lambda)).$$

De (3.18), on voit qu'elle est tempérée par rapport à ξ' . Par suite

$$\mathcal{F}_{\xi'}^{-1}[\sum_k \alpha_k(\xi')(U_1(\xi', x_n; \lambda), \dots, U_m(\xi', x_n; \lambda))]$$

a un sens au sens des distributions. On pose ici à nouveau

$$(3.19) \quad K(x', x_n; \lambda) = \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}[\sum_k \alpha_k(\xi')(U_1(\xi', x_n; \lambda), \dots, U_m(\xi', x_n; \lambda))]$$

et on l'appelle *matrice-noyau de Poisson* relative au problème $\{A - \lambda I, B\}$. Cette appellation se justifie par le fait suivant. $K(x', x_n; \lambda)$ satisfait à (3.14) et (3.15) et on a donc le

Théorème 3.1. *Pour $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_x^{n-1})$, la fonction*

$$(3.20) \quad v(x; \lambda) = K(x', x_n; \lambda) *_{(x')} g(x') \quad (\lambda \neq \text{réel})$$

est la solution unique dans $L^2(\mathbf{R}_x^n)$, du problème :

$$(3.21) \quad (A - \lambda I)v(x; \lambda) = 0, \quad x_n > 0$$

$$(3.22) \quad Bv(x; \lambda) \Big|_{x_n=0} = g(x').$$

Nous avons construit la matrice-noyau de Poisson qui dépend continûment de λ dans $\overline{\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^+}(k_0)$ (resp. $\overline{\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^-}(k_0)$). Mais, en utilisant une partition de l'unité par rapport à λ , on peut la construire de sorte qu'elle dépende continûment de λ dans la région $\{\lambda; 0 \leq \text{Im } \lambda < \varepsilon_1\}$ (resp. $\{\lambda; -\varepsilon_1 < \text{Im } \lambda \leq 0\}$).

§ 4. Matrice-Noyau de Green du Problème aux Limites

$\{A - \lambda I, B\}$

Dans ce paragraphe, nous construisons la matrice-noyau de Green du problème aux limites $\{A - \lambda I, B\}$ avec λ non réel et

17) La fonction $\alpha_\rho(\xi')$ correspondant à V_ρ , est définie comme le prolongement par homothétie de degré zéro d'une fonction sur la sphère unité $|\xi'| = 1$.

examinons sa limite lorsque λ tend vers l'axe réel.

Comme nous l'avons mentionné au début du § 2, nous posons le noyau de Green cherché sous la forme

$$(4.1) \quad G(x, y; \lambda) = E(x-y; \lambda) - E_c(x, y; \lambda),$$

où $E(x; \lambda)$ est la solution élémentaire de l'opérateur $A - \lambda I$, définie dans le § 2. Alors $E_c(x, y; \lambda)$ que l'on appelle *noyau compensateur*, s'obtient comme solution du problème aux limites

$$(4.2) \quad (A - \lambda I)E_c(x, y; \lambda) = 0$$

$$(4.3) \quad BE_c(x, y; \lambda) \Big|_{x_n=0} = BE(x-y; \lambda) \Big|_{x_n=0}.$$

Donc $E_c(x, y; \lambda)$ est donné formellement par

$$(4.4) \quad E_c(x, y; \lambda) = K(x; \lambda) *_{(x')} (BE(x-y; \lambda) \Big|_{x_n=0}).$$

où $K(x; \lambda)$ est le noyau de Poisson. Notre tâche est maintenant de montrer que, même aux limites de $\lambda = k \pm i\varepsilon$ quand $\varepsilon > 0$ tend vers zéro, le produit de convolution ci-dessus est définie et que $E_c(x, y; k \pm i0)$ sont des fonction de x , dépendant continûment (dans un certain sens) des paramètres $y = (y_1 \dots y_n)$ et k .

Fixons un nombre réel $k_0 \neq 0$ arbitrairement et comme dans le § 3, supposons que le paramètre $\lambda = k + i\varepsilon$ (resp. $\lambda = k - i\varepsilon$) parcoure la région $\overline{\Lambda^+} = \overline{\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^+(k_0)} = \{k + i\varepsilon; |k - k_0| \leq \delta, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ (resp. $\overline{\Lambda^-} = \overline{\Lambda_{\delta, \varepsilon_0}^-(k_0)}$), les δ et ε_0 étant deux nombres positifs suffisamment petits. Soit y un point arbitraire et fixé dans \mathbf{R}_+^n . Désignons par $\psi(x'; \lambda)$ (plus précisément, $\psi(x', y; \lambda)$) un élément quelconque de la matrice $BE(x-y; \lambda) \Big|_{x_n=0} = 0$ et par $\Phi(x; \lambda)$ celui de la matrice-noyau de Poisson $K(x; \lambda)$.

On prend une fonction $e \in C_0^\infty(\Xi^{n-1})$ égale à 1 pour $|\xi'| \leq \iota$ et au zéro pour $|\xi'| \geq \iota + 1$, ι étant un nombre positif tel que $\iota > \frac{|k_0| + \delta}{a_m}$.

On décompose $\Phi(x; \lambda)$ en deux parties :

$$(4.5) \quad \Phi(x; \lambda) = \Phi_1(x; \lambda) + \Phi_2(x; \lambda)$$

où

$$(4.6) \quad \tilde{\Phi}_1(\xi', x_n; \lambda) = e(\xi')\tilde{\Phi}(\xi', x_n; \lambda)$$

$$(4.7) \quad \tilde{\Phi}_2(\xi', x_n; \lambda) = (1 - e(\xi'))\tilde{\Phi}(\xi', x_n; \lambda)$$

Alors on peut constater les suivants.

(1) Si $n \geq 2$, $\tilde{\Phi}_1(\xi', x_n; \lambda)$ et toutes ses dérivées d'ordre un par rapport à ξ' prises au sens des distributions sont des fonctions de ξ' (dépendant des paramètres $(x_n, \lambda) \in [0, \infty) \times \overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$)) telles qu'on ait les propriétés :

$$(i) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\beta \tilde{\Phi}_1(\cdot, x_n; \lambda), \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\beta \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \xi_j}(\cdot, x_n; \lambda) \in L^s(\Xi_{\xi'}^{n-1})$$

($j=1, \dots, n-1$) pour tout entier $\beta \geq 0$ et pour tout s tel que $1 \leq s < 2$.

(ii) les applications

$$[0, \infty) \times \overline{\Lambda^+} \text{ (resp. } \overline{\Lambda^-}) \ni (x_n, \lambda) \rightsquigarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\beta \tilde{\Phi}_1(\cdot, x_n; \lambda),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\beta \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \xi_j}(\cdot, x_n; \lambda) \in L^s(\Xi_{\xi'}^{n-1})$$

sont continues.

(2) $\tilde{\Phi}_2(\xi', x_n; \lambda)$ est une fonction indéfiniment dérivable de (ξ', x_n, λ) dans $\Xi^{n-1} \times (0, \infty) \times \Lambda^+$ (resp. Λ^-) et ses dérivées $\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^\nu \tilde{\Phi}_2(\xi', x_n; \lambda)$ sont continues en (ξ', x_n, λ) dans $\Xi^{n-1} \times [0, \infty) \times \overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$).

Selon la définition (4.7) le support de $\tilde{\Phi}_2$ par rapport à ξ' est contenu dans la région $|\xi'| \geq \iota$.

On a d'ailleurs la majoration

$$(4.8) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^\nu \tilde{\Phi}_2(\xi', x_n; \lambda) \right| \leq C_{\beta, \nu} (1 + |\xi'|^2)^{d_{\beta, \nu}}$$

pour chaque entier $\beta \geq 0$ et chaque indice multiple ν . $C_{\beta, \nu}$ est ici une constante qui ne dépend pas de (x_n, λ) dans {un compact de $[0, \infty)\} \times \overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$) et $d_{\beta, \nu}$ est un entier ≥ 0 dépendant de β et ν .

En effet, d'après les formules (3.18) et (3.19) on voit que

$\tilde{\Phi}(\xi', x_n; \lambda)$ possède la forme :

$$(4.9) \quad \frac{\text{un polynôme d'éléments de } B\mathcal{H}(\xi'; \lambda)}{\det(B\mathcal{H}(\xi'; \lambda))} e^{i\tau_j^+(\xi'; \lambda)x_n} \\ \times (\text{une composante de } \mathbf{h}_j^+(\xi'; \lambda)) \quad \text{dans chaque } V_\rho \times \overline{\Lambda}^+ \text{ et } \\ W_\sigma \times \overline{\Lambda}^+ \text{ (resp. } V_\rho \times \overline{\Lambda}^-, W_\sigma \times \overline{\Lambda}^-).$$

Rappelons ici que dans chacune de ces régions, $\mathbf{h}_j^+(\xi'; \lambda)$ est obtenu en remplaçant τ par $\tau_j^+(\xi'; \lambda)$ dans une certaine colonne de la matrice $Q(\tau, \xi'; \lambda) = {}^T \text{cof}(\tau A_n + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j A_j - \lambda I)$ dont les éléments sont des polynômes de τ , ξ' et λ , homogènes de degré $2m-1$. Par conséquent, de la définition de la matrice $\mathcal{H}(\xi'; \lambda)$ et de l'hypothèse (4) de (II), on déduit

$$(4.10) \quad \left| \det(B\mathcal{H}(\xi'; \lambda)) \right| \geq \begin{cases} C & \text{pour } |\xi'| \leq \iota + 1 \\ C(1 + |\xi'|)^d & \text{pour } |\xi'| \geq \iota. \end{cases}$$

D'autre part, la forme explicite de $\tau_j^+(\xi'; \lambda)$ est la suivante.

$$(4.11) \quad \tau_j^+(\xi'; k + i\varepsilon) \\ = \text{sqn } k \sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + (2k\varepsilon/a_j)^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + (2k\varepsilon/a_j)^2}}{2}}$$

$$(4.12) \quad \tau_j^+(\xi'; k - i\varepsilon) \\ = -\text{sqn } k \sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + (2k\varepsilon/a_j)^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + (2k\varepsilon/a_j)^2}}{2}}$$

où $\varepsilon \geq 0$ et $\gamma = \frac{k^2 - \varepsilon^2}{a_j^2} - |\xi'|^2$.

En particulier

$$(4.13) \quad \tau_j^+(\xi'; k \pm i0) = \begin{cases} \pm \text{sqn } k \sqrt{\left(\frac{k}{a_j}\right)^2 - |\xi'|^2} & \text{pour } |\xi'| \leq \frac{|k|}{a_j} \\ i \sqrt{|\xi'|^2 - \left(\frac{k}{a_j}\right)^2} & \text{pour } |\xi'| \geq \frac{|k|}{a_j}. \end{cases}$$

De ces formules, on observe que pour tout s tel que $1 \leq s < 2$, on a

$$(4.14) \quad e(\xi') \tau_j^+(\xi'; \lambda), \frac{\partial}{\partial \xi_i} (e(\xi') \tau_j^+(\xi'; \lambda)) \in L^s(\Xi_{\xi'}^{n-1}) \\ (i = 1, \dots, n-1).$$

De (4. 6), (4. 7), (4. 9), (4. 10), (4. 11), (4. 12) et (4. 14), on déduit les propriétés (1) et (2).

Nous allons maintenant envisager $\Phi_1(x; \lambda) *_{(x')} \psi(x'; \lambda)$. D'après le corollaire du théorème 2. 2, si $\lambda \in \overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$) on a

$$(4. 15) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^\nu \psi(\cdot; \lambda) \in L^q(\mathbf{R}^{n-1}) \quad \text{pour tout indice } \nu \text{ et tout } q > 2.$$

En outre, l'application

$$(4. 16) \quad \mathbf{R}_+^n \times \overline{\Lambda^+} \text{ (resp. } \overline{\Lambda^-}) \ni (y, \lambda) \rightsquigarrow \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^\nu \psi(\cdot, y; \lambda) \in L^q(\mathbf{R}^{n-1})$$

est continue. D'autre part, $\Phi_1(x', x_n; \lambda)$ est une fonction (analytique) de x' , dépendant continûment de (x_n, λ) dans $[0, \infty) \times \overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$). Par suite, si l'on montre qu'il existe un nombre p tel qu'on ait

$$(4. 17) \quad 1 \leq p < 2 \quad \text{et} \quad \Phi_1(\cdot, x_n; \lambda) \in L^p(\mathbf{R}_{x'}^{n-1}),$$

l'existence du produit de convolution $\Phi_1(x', x_n; \lambda) *_{(x')} \psi(x'; \lambda)$ est affirmée. En effet on peut alors trouver un nombre $r > 1$ tel qu'on ait

$$(4. 18) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \Phi_1(\cdot, x_n; \lambda) *_{(x')} \psi(\cdot; \lambda) \in L^r(\mathbf{R}_{x'}^{n-1})$$

en choisissant $q > 2$ convenablement.

Donc, en vertu du théorème de Riesz, la convolution $\Phi_1 *_{(x')} \psi$ existe pour tout $\lambda \in \overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$) et de plus on a

$$(4. 19) \quad \|\Phi_1(\cdot, x_n; \lambda) *_{(x')} \psi(\cdot; \lambda)\|_{L^r} \leq \|\Phi_1(\cdot, x_n; \lambda)\|_{L^p} \cdot \|\Phi(\cdot; \lambda)\|_{L^q}.$$

D'où, on en conclut que l'application

$$(4. 20) \quad [0, \infty) \times \mathbf{R}_+^n \times \overline{\Lambda^+} \text{ (resp. } \overline{\Lambda^-}) \ni (x_n, y, \lambda) \rightarrow \Phi_1 *_{(x')} \psi \in L^r(\mathbf{R}_{x'}^{n-1})$$

est continue. Ainsi il nous reste à montrer qu'il existe p tel que (4. 17). Pour démontrer cela, considérons

$$(4. 21) \quad \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |\Phi_1(x', x_n; \lambda)|^p dx' \\ = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} (1 + |x'|)^{-p} (1 + |x'|) |\Phi_1(x', x_n; \lambda)|^p dx'.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder au second membre, le premier

est majoré par

$$(4.22) \leq \left\{ \int_{\mathbf{R}^{n-1}} (1 + |x'|)^{-ap} dx' \right\}^{1/a} \left\{ \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |(1 + |x'|)\Phi_1(x', x_n; \lambda)|^{bq} dx' \right\}^{1/b}$$

où $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, $a, b \geq 1$.

L'intégrale $\int_{\mathbf{R}^{n-1}} (1 + |x'|)^{-ap} dx'$ est convergente, si et seulement si $ap > n - 1$. D'autre part, on a

$$(4.23) \quad \|(1 + |x'|)\Phi_1(x', x_n; \lambda)\|_{L^{bp}} \\ \leq \|\Phi_1(x', x_n; \lambda)\|_{L^{bp}} + \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i \Phi_1(x', x_n; \lambda)\|_{L^{bp}}.$$

Si $bp > 2$, on a

$$1 < s = \frac{bp}{bp-1} < 2.$$

On peut alors appliquer au second membre de (4.23) le Théorème de Titchmarsh et M. Riesz sur les transformées de Fourier de fonctions dans L^p . D'où, on obtient

$$(4.24) \quad \|(1 + |x'|)\Phi_1(x', x_n; \lambda)\|_{L^{bp}} \\ \leq \|\tilde{\Phi}_1(\xi', x_n; \lambda)\|_{L^s} + \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \xi_i}(\xi') \right\|_{L^s}.$$

Grâce à la propriété (1) de la fonction $\tilde{\Phi}_1(\xi', x_n; \lambda)$, le second membre de (4.24) reste fini, si $bp > 2$. Or il est facile de voir qu'il existe des nombres p , a et b vérifiant les conditions :

$$1 \leq p < 2, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \quad a, b \geq 1 \\ ap > n - 1 \quad \text{et} \quad bp > 2.$$

Ainsi on déduit de (4.21), (4.22) et (4.24),

$$(4.25) \quad \Phi_1(\cdot, x_n; \lambda) \in L^p(\mathbf{R}^{n-1}) \quad \text{pour un tel } p.$$

De la même manière, on conclut que pour chaque indice multiple $(\nu, \beta) = (\nu_1 \cdots \nu_{n-1}, \beta)$, il existe un nombre p tel qu'on ait

$$(4.25') \quad 1 \leq p < 2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\beta \Phi_1(\cdot, x_n; \lambda) \in L^p(\mathbf{R}_x^{n-1}).$$

De plus, on voit que l'application

$$(4.26) \quad (0, \infty) \times \overline{\Lambda^+} \text{ (resp. } \overline{\Lambda^-}) \ni \rightsquigarrow \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\beta \Phi_1(\cdot, x_n; \lambda) \\ \in L^p(\mathbf{R}_x^{n-1})$$

est continue.

On déduit alors de (4.16) et (4.19) que l'application

$$(4.27) \quad (0, \infty) \times \mathbf{R}_+^n \times \overline{\Lambda^+} \text{ (resp. } \overline{\Lambda^-}) \ni (x_n, y, \lambda) \\ \rightsquigarrow \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\beta \Phi_1(x', x_n; \lambda) *_{(x')} \psi(x', y; \lambda) \in L^r(\mathbf{R}_x^{n-1})$$

est continue.

Envisageons ensuite $\Phi_2(x; \lambda) *_{(x')} \psi(x'; \lambda)$, ce produit de convolution est défini au sens des distributions, puisque

$$\tilde{\Phi}_2(\cdot, x_n; \lambda) \in \mathcal{O}_M(\Xi^{n-1})^{18)} \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(\cdot; \lambda) \in \mathcal{S}'(\Xi^{n-1})$$

pour $(x_n, \lambda) \in [0, \infty) \times \overline{\Lambda^+}$ (resp. $\overline{\Lambda^-}$). Donc, on peut l'écrire comme suit :

$$(4.28) \quad \Phi_2(x', x_n; \lambda) *_{(x')} \psi(x'; \lambda) \\ = (1 - \Delta')^{-N} \Phi_2(x', x_n; \lambda) *_{(x')} (1 - \Delta')^N \psi(x'; \lambda),$$

Δ' étant l'opérateur de Laplace $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)^2$ et N un nombre > 0 qui va être déterminé. D'après (4.15) (le corollaire du théorème 2.2) on a

$$(4.29) \quad (1 - \Delta')^N \psi(x'; \lambda) \in L^q(\mathbf{R}^{n-1}) \quad \text{pour tout } q > 2.$$

Montrons que pour $p \geq 1$ on a

$$(4.30) \quad (1 - \Delta')^{-N} \Phi_2(x', x_n; \lambda) \in L^p(\mathbf{R}^{n-1}),$$

si N est assez grand. En effet, on a

$$\mathcal{F}_{x'}[(1 - \Delta')^{-N} \Phi_2(x', x_n; \lambda)] = \frac{\tilde{\Phi}_2(\xi', x_n; \lambda)}{(1 + |\xi'|^2)^N}.$$

Pour un entier $\beta \geq 0$ quelconque, en vertu de la propriété (2) de la fonction $\Phi_2(\xi', x_n; \lambda)$, on a

18) \mathcal{O}_M désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente.

$$\mathcal{F}_{x'}[(1 + |x'|^2)^\beta (1 - \Delta')^{-N} \Phi_2(x', x_n; \lambda)] \in L^1(\Xi^{n-1}),$$

si l'on prend $N > 0$ suffisamment grand.

D'où

$$|(1 + |x'|^2)^\beta (1 - \Delta')^{-N} \Phi_2(x', x_n; \lambda)| \leq M,$$

$M = M_{\beta, N, x_n}$ étant une constante qui ne dépend pas de (x', x_n) dans $\mathbf{R}^{n-1} \times \{\text{un compact de } [0, \infty)\}$. Pour un nombre $p \geq 1$ quelconque on a (4.30) en prenant β assez élevé, donc N aussi suffisamment grand. De (4.28), (4.29) et (4.30) on déduit

$$(4.31) \quad \Phi_2(\cdot, x_n; \lambda) *_{(x')} \psi(\cdot; \lambda) \in L^r(\mathbf{R}^{n-1})$$

pour un nombre $r \geq 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$. On observe d'ailleurs que l'application

$$(4.32) \quad (0, \infty) \times \mathbf{R}_+^n \times \overline{\Lambda^+} \quad (\text{resp. } \overline{\Lambda^-}) \ni (x_n, y, \lambda) \\ \rightsquigarrow \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\beta \Phi_2(\cdot, x_n; \lambda) *_{(x')} \psi(\cdot; \lambda) \in L^r(\mathbf{R}^{n-1})$$

est continue. De (4.27) et (4.32), on peut déduire le suivant. Pour $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$, la fonction définie par

$$\int_{\mathbf{R}_+^n} E_c(x, y; k + i0) g(y) dy,$$

est indéfiniment différentiable en x et continue par rapport à (x, k) dans $\mathbf{R}_+^n \times (\mathbf{R}^1 - \{0\})$.

Posons

$$(4.33) \quad G_{k \pm i0} \cdot g(x) = \int_{\mathbf{R}_+^n} G(x, y; k \pm i0) g(y) dy.$$

En combinant l'énoncé ci-dessus avec le corollaire 2 du théorème 2.1, nous avons le

Théorème 4.1. *Soit $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$. Pour tout indice multiple $\nu = (\nu_1 \cdots \nu_n)$, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu (G_{k \pm i0} \cdot g)(x)$ sont des fonctions continues de (x, k) dans $\mathbf{R}_+^n \times (\mathbf{R}^1 - \{0\})$.*

§ 5. Démonstration du Théorème Principal

Dans ce paragraphe, nous revenons au problème original. Nous allons d'abord récrire le problème mixte (1.2)-(1.4) sous la forme de l'équation d'évolution dans $L^2(\mathbf{R}_+^n)$. L'opérateur différentiel $A = -i \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ définit une transformation linéaire \mathcal{A} non bornée dans $L^2(\mathbf{R}_+^n)$ de domaine de définition :

$$(5.1) \quad D(\mathcal{A}) = \left\{ v(x); v \in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^n}), Bv(x', 0) = 0 \right\}.$$

L'opérateur \mathcal{A} est fermable et nous désignons par H sa fermeture. On a alors le

Lemme 5.1. *H est un opérateur autoadjoint (strict) dans l'espace hilbertien $L^2(\mathbf{R}_+^n)$ de domaine*

$$(5.2) \quad D(H) = \left\{ v(x); v \in \mathcal{E}_{L^2}^1(\mathbf{R}_+^n), Bv(x) \Big|_{x_n=0} = 0 \right\},$$

où l'on interprète $v(x) \Big|_{x_n=0}$ comme la trace de $v(x)$ sur l'hyperplan $x_n=0$.

Preuve. Ceci est dû à Lax et Phillips [9], [10]. Donc nous nous bornons ici à esquisser les procédés de la démonstration. L'adjoint formel $A^{(*)}$ de l'opérateur différentiel A coïncide avec A lui-même puisque les matrices A_j sont supposées hermitiennes. Soit $\mathcal{A}^{(*)}$ l'opérateur dans $L^2(\mathbf{R}_+^n)$ défini par $\mathcal{A}^{(*)} = A$ de domaine

$$(5.3) \quad D(\mathcal{A}^{(*)}) = \left\{ v(x); v \in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}_+^n}), v(x) \Big|_{x_n=0} \in (A_n \mathcal{B})^\perp \right\}^{19)}$$

Alors la fermeture de $\mathcal{A}^{(*)}$ coïncide avec l'adjoint stricte H^* de H au sens de la théorie de l'espace hilbertien. (Lax et Phillips [9] p. 430). Pour démontrer $H = H^*$, il nous reste à montrer

$$(5.4) \quad \mathcal{B} = (A_n \mathcal{B})^\perp, \quad \text{où } \mathcal{B} = \ker B.$$

De l'hypothèse 1) de (II), il découle $\mathcal{B} \subset (A_n \mathcal{B})^\perp$. D'autre part on a $\dim \mathcal{B} = m$ en vertu du lemme 1.1 sur la structure de \mathcal{B} . D'où,

19) Soit \mathcal{R} un sous-ensemble de \mathbf{C}^{2m} . \mathcal{R}^\perp désigne le sous-espace des vecteurs orthogonaux aux éléments de \mathcal{R} par rapport au produit scalaire ordinaire.

$\dim (A_n \mathcal{B})^\perp = m$. Donc on a (5.4). On déduit (5.2) de l'ellipticité de A et de la coercivité de B .

En utilisant l'opérateur autoadjoint H défini comme plus haut, on peut écrire le problème (1.2)-(1.4) sous la forme de l'équation d'évolution

$$(5.5) \quad \frac{d}{dt} u(t) = iHu(t)$$

$$(5.6) \quad u(0) = g \in D(H).$$

On considère comme solution de cette équation une fonction $t \rightarrow u(t) \in D(H)$, une fois continûment différentiable de t dans $L^2(\mathcal{R}^n)$ (au sens de la topologie forte), vérifiant l'équation (5.5) et (5.6). On peut alors interpréter cette solution comme solution du problème mixte (1.2)-(1.4).

L'opérateur autoadjoint H admet la décomposition spectrale

$$(5.7) \quad H = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu dE_\mu$$

où $\{E_\mu\}_{-\infty < \mu < \infty}$ est une famille spectrale déterminée par H d'une manière univoque. On peut alors supposer $E_{\mu+0} = E_\mu$ sans diminuer la généralité. On sait bien que la solution unique du problème (5.5)-(5.6) est donnée par la formule

$$(5.8) \quad u(t) = e^{itH} g = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\mu} dE_\mu g.$$

Nous allons maintenant établir une relation entre la famille spectrale $\{E_\mu\}_{-\infty < \mu < \infty}$ et le noyau de Green $G(x, y; \lambda)$ du problème aux limites $\{A - \lambda I, B\}$, construit au paragraphe précédent.

Théorème 5.1. Soit $g \in C_0^\infty(\mathcal{R}_+^n)$. Alors

1° $E_\mu g$ est une fonction continue de (x, μ) dans $\mathcal{R}_+^n \times (-\infty, \infty)$

et

2° $E_\mu g$ est une fois continûment différentiable en μ (x étant fixé), excepté $\mu = 0$ et de plus on a

$$(5.9) \quad \frac{d}{d\mu} E_\mu g(x) = \frac{1}{2\pi i} \{G_{\mu+i_0} \cdot g(x) - G_{\mu-i_0} \cdot g(x)\}.$$

Démonstration. Montrons d'abord que pour μ fixé, $E_\mu g$ est une fonction indéfiniment dérivable en x dans $\overline{\mathbf{R}_+^n}$. L'élément $E_\mu g$ peut être représenté comme une intégrale

$$E_\mu g = \int_{-\infty}^{\mu} dE_\nu g.$$

D'où, il résulte

$$H^l E_\mu g = \int_{-\infty}^{\mu} \nu^l dE_\nu g.$$

Ceci implique $E_\mu g \in D(H^l)$ pour tout entier $l \geq 0$. Car on a évidemment $C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n) \subset D(H^l)$, d'où

$$\|H^l E_\mu g\|^2 = \int_{-\infty}^{\mu} \nu^{2l} d\|E_\nu g\|^2 < +\infty.$$

Comme H est un opérateur linéaire dans $L^2(\mathbf{R}_+^n)$ associé au problème coercif aux limites pour l'opérateur elliptique A , on a en utilisant le lemme de Sobolev

$$(5.10) \quad \bigcap_{l \geq 1} D(H^l) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}_+^n}).$$

Ainsi, pour $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ on voit que $E_\mu g$ peut être identifié avec un élément de l'espace $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}_+^n})$ des fonctions indéfiniment dérivables dans $\overline{\mathbf{R}_+^n}$, dont toutes les dérivées sont bornées. Pour montrer la continuité et la différentiabilité de $E_\mu g$ par rapport à μ , il faut utiliser une relation avec $G_\lambda \cdot g$. Pour λ non réel, l'opérateur $(H - \lambda I)^{-1}$ admet, comme fonction de H , la représentation

$$(5.11) \quad (H - \lambda I)^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - \lambda} dE_\mu.$$

D'autre part nous avons la relation

$$(5.12) \quad (H - \lambda I)^{-1} g = \int_{\mathbf{R}_+^n} G(\cdot, y; \lambda) g(y) dy.$$

Par conséquent on a pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ quelconque

$$(5.13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - \lambda} d(E_\mu g, \psi) = \int_{\mathbf{R}_+^n} \left\{ \int_{\mathbf{R}_+^n} G(x, y; \lambda) g(y) dy \right\} \overline{\psi(x)} dx.$$

En y appliquant la formule d'inversion de Stieltjes,²⁰⁾ on obtient

$$(5.14) \quad \left(\frac{\mathbf{E}_\mu + \mathbf{E}_{\mu-0}}{2} g, \psi \right) - \left(\frac{\mathbf{E}_\nu + \mathbf{E}_{\nu-0}}{2} g, \psi \right) \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu}^{\mu} d\sigma \int_{\mathbf{R}_+^n} \{G_{\sigma+i\varepsilon} \cdot g(x) - G_{\sigma-i\varepsilon} \cdot g(x)\} \overline{\psi(x)} dx.$$

Dans le second membre, les fonction $G_{\sigma+i\varepsilon} \cdot g(x)$ et $G_{\sigma-i\varepsilon} \cdot g(x)$ sont continues par rapport à σ, ε et x dans la région $\{(\sigma, \varepsilon, x); \sigma \neq 0, 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0, x \in \mathbf{R}_+^n\}$ et le support de ψ est compact. Il est donc d'après un théorème de Lebesgue, permis d'effectuer le passage à la limite sous le signe d'intégration. Il s'ensuit alors

$$(5.15) \quad \left(\frac{\mathbf{E}_\mu + \mathbf{E}_{\mu-0}}{2} g, \psi \right) - \left(\frac{\mathbf{E}_{\nu+0} + \mathbf{E}_{\nu-0}}{2} g, \psi \right) \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu}^{\mu} d\sigma \int_{\mathbf{R}_+^n} (G_{\sigma+i0} \cdot g(x) - G_{\sigma-i0} \cdot g(x)) \overline{\psi(x)} dx.$$

Le second membre de (5.15) est continu par rapport à μ et ν , et ψ est arbitraire dans $C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$. Par suite on a pour presque tous les x

$$(5.16) \quad \mathbf{E}_\mu g(x) - \mathbf{E}_\nu g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu}^{\mu} \{G_{\sigma+i0} \cdot g(x) - G_{\sigma-i0} \cdot g(x)\} d\sigma.$$

Comme deux membres sont des fonctions continues de x , cette égalité est valable pour tout $x \in \mathbf{R}_+^n$. D'où il résulte, en dérivant par rapport à μ ,

$$(5.17) \quad \frac{d}{d\mu} \mathbf{E}_\mu g(x) = \frac{1}{2\pi i} (G_{\mu+i0} \cdot g(x) - G_{\mu-i0} \cdot g(x)).$$

20) Soit $\phi(\mu)$ une fonction à variation bornée dans $[-\infty, +\infty]$. Considérons la fonction suivante de z , définie pour z non réel par

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - z} d\phi(\mu),$$

l'intégrale étant prise au sens de Lebesgue-Stieltjes. On a alors la formule d'inversion de Stieltjes :

$$\frac{\phi(\mu+0) + \phi(\mu-0) - \phi(\nu+0) + \phi(\nu-0)}{2} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu}^{\mu} \{\Phi(\sigma+i\varepsilon) - \Phi(\sigma-i\varepsilon)\} d\sigma.$$

Il nous reste à montrer que $E_\mu g$ est continue en $\mu=0$. Si $E_\mu - E_{\mu-0} \neq 0$ pour $\mu=0$, $\mu=0$ est un spectre ponctuel, c'est-à-dire une valeur propre de l'opérateur H . Cela signifie qu'il existe dans $L^2(\mathbf{R}_+^n)$ une solution non identiquement nulle du problème aux limites

$$(5.18) \quad Av(x) = 0, \quad Bv(x) \Big|_{x_\mu=0} = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbf{R}_+^n.$$

D'autre part on voit aisément que sous l'hypothèse 3) de (II), le problème (5.18) n'admet pas de solutions (non identiquement nulle) qui soit à carré intégrable dans \mathbf{R}_+^n . On arrive ainsi à une contradiction. Donc l'application $\mu \rightarrow E_\mu g \in L^2(\mathbf{R}_+^n)$ doit être continue à $\mu=0$ pour tout $g \in L^2(\mathbf{R}_+^n)$. On termine la démonstration du théorème 5.1.

Passons maintenant à la

Démonstration du principal théorème.

Comme nous l'avons remarqué dans ce qui précède, la solution du problème mixte (1.2)-(1.4) avec $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ est donnée par la formule (5.8)

$$u(t, \cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu} dE_\mu g.$$

Décomposons cette intégrale comme suit :

$$(5.19) \quad \begin{aligned} &= \int_N^\infty + \int_\delta^N + \int_{-\delta}^\delta + \int_{-N}^{-\delta} + \int_{-\infty}^{-N} \\ &= u_1(t, x) + u_2(t, x) + u_3(t, x) + u_4(t, x) + u_5(t, x), \end{aligned}$$

N et δ étant des nombres positifs qui vont être déterminés plus tard. Considérons d'abord la fonction

$$(5.20) \quad u_1(t, x) = \int_N^\infty e^{it\mu} dE_\mu g.$$

Nous avons :

$$(5.21) \quad \|H^k u_1(t, \cdot)\|^2 = \int_N^\infty \mu^{2k} d\|E_\mu g\|^2 < +\infty, \quad \text{pour tout entier } k \geq 0,$$

puisque $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n) \subset \bigcap_{k=1}^\infty D(H^k)$.

Du lemme de Sobolev et de l'inégalité coercive pour l'opérateur H , il résulte

$$(5.22) \quad \begin{aligned} |u_1(t, x)| &\leq \text{const.} \|u_1(t, \cdot)\| |\mathcal{E}_{L^2}^{[n/2]+1}(\mathbf{R}_+^n)| \\ &\leq \text{const.} \sum_{k=0}^{[n/2]+1} \|H^k u_1(t, \cdot)\|. \end{aligned}$$

Soit ε un nombre positif arbitraire. De (5.20), (5.21) et (5.22), on a, en choisissant $N > 0$ suffisamment grand

$$(5.23) \quad |u_1(t, x)| \leq \text{const.} \sum_{k=0}^{[n/2]+1} \int_N^\infty \mu^{2k} d\|\mathbf{E}_\mu g\|^2$$

pour $t \in \mathbf{R}^1$ et $x \in \mathbf{R}_+^n$. Par le même raisonnement, on a aussi

$$(5.24) \quad |u_5(t, x)| < \varepsilon \quad \text{pour } t \in \mathbf{R}^1 \text{ et } x \in \mathbf{R}_+^n.$$

Passons ensuite à

$$u_3(t, x) = \int_{-\delta}^{\delta} e^{it\mu} d\mathbf{E}_\mu g.$$

De la même manière qu'au précédent, on a

$$|u_3(t, x)| \leq \text{const.} \sum_{k=0}^{[n/2]+1} \int_{-\delta}^{\delta} \mu^{2k} d\|\mathbf{E}_\mu g\|^2.$$

D'où

$$|u_3(t, x)| \leq \text{const.} (1 + \delta^2 + \dots + \delta^{2([n/2]+2)}) (\|\mathbf{E}_\delta g\|^2 - \|\mathbf{E}_{-\delta} g\|^2).$$

Si l'on prend δ suffisamment petit, on a, en vertu de la continuité de $\mathbf{E}_\mu g$ à $\mu = 0$,

$$(5.25) \quad |u_3(t, x)| < \varepsilon \quad \text{pour } t \in \mathbf{R}^1 \text{ et } x \in \mathbf{R}_+^n.$$

Envisageons

$$u_2(t, x) = \int_{\delta}^N e^{it\mu} d\mathbf{E}_\mu g.$$

En utilisant le théorème 5.1, on peut l'écrire sous la forme :

$$u_2(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta}^N e^{it\mu} \{G_{\mu+i0} \cdot g(x) - G_{\mu-i0} \cdot g(x)\} d\mu.$$

Pour un point x fixé quelconque de \mathbf{R}_+^n , $G_{\mu \pm i0} \cdot g(x)$ sont des fonctions continues de μ dans l'intervalle $[\delta, N]$. Donc, si l'on pose $\Theta(\mu, x) = G_{\mu+i0} \cdot g(x) - G_{\mu-i0} \cdot g(x)$, pour chaque $x \in \mathbf{R}_+^n$ l'intégrale

$$\int_{\delta}^N e^{it\mu} \Theta(\mu, x) d\mu$$

tend vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$ (aussi $t \rightarrow -\infty$). Soit K un ensemble compact quelconque de \mathbf{R}_+^n . Alors la famille $\{\Theta(\cdot, x)\}_{x \in K}$ est précompact dans l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[\delta, N]$ avec la topologie de la convergence uniforme sur $[\delta, N]$. Car les fonctions $\Theta(\mu, x)$ et $\frac{\partial \Theta}{\partial x_j}(\mu, x)$ sont continues par rapport à (μ, x) dans $[\delta, N] \times K$, donc les fonctions $\{\Theta(\cdot, x)\}_{x \in K}$ de μ sont uniformément bornées. Par suite $\sup_{x \in K} |u_2(t, x)|$ tend vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$ (par exemple d'après de Banach-Steinhaus). Par le même raisonnement, $\sup_{x \in K} |u_4(t, x)|$ tend vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. De (5.23), (5.24), (5.25) et l'énoncé ci-dessus, nous concluons l'assertion du théorème principal.

APPENDICE

Démonstration du Lemme 2.2.

Il suffit d'étudier le comportement de la fonction $I(x)$ lorsque x tend vers l'infini suivant la direction $(0, \dots, 0, x_n)$. Parce que le cas général se déduit facilement du cas précédent par rotation dans l'espace \mathbf{R}^n . Pour abrégé, nous écrivons, par la suite $I(x_n)$ au lieu de $I(0, \dots, 0, x_n)$:

$$(1) \quad I(x_n) = \int_{\Omega} i^{x_n \omega_n} \mu(\omega) d\omega.$$

Nous allons d'abord indiquer que la principale contribution au comportement pour $x_n \rightarrow +\infty$ de l'intégrale (1) sera du voisinage immédiat des points sur Ω tels que la normale à la sphère en un point est parallèle à l'axe x_n , c'est-à-dire, dans le cas actuelle pôle nord $(0, \dots, 0, 1)$ et le pôle sud $(0, \dots, 0, -1)$. Supposons que le support de $\mu(\omega)$ soit en dehors d'un petit voisinage de ces points. En utilisant d'une partition de l'unité sur Ω , on peut alors supposer que le support de $\mu(\omega)$ soit contenu dans un petit voisinage V d'un point ω^0 différent des pôles nord et sud. En considérant V comme une carte de la variété Ω indéfiniment différentiable, prenons au voisinage V un système local de coordonnées $(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})$ quelconque.

Alors le point $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ dans V admet la représentation paramétrique $\omega_k = \omega_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ ($k=1, \dots, n$) où les fonctions $\omega_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ sont indéfiniment dérivables en $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$. Pour simplifier nous écrirons souvent ω' et σ' au lieu de $(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ et de $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$. Comme les vecteurs $\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \sigma_k}(\sigma'), \dots, \frac{\partial \omega_n}{\partial \sigma_k}(\sigma')\right)$ ($k=1, \dots, n-1$) sont tangents à la surface de la sphère. Ils ne sont pas orthogonaux au vecteur $(0, \dots, 0, \sigma_n)$ par l'hypothèse faite ci-dessus si $x_n \neq 0$ et $\sigma' \in V$. On a donc

$$(2) \quad x_n \frac{\partial \omega_n}{\partial \sigma_k}(\sigma') \neq 0 \quad \text{si } x_n \neq 0 \text{ et } \sigma' \in V.$$

Ceci remarqué, faisons dans l'intégrale (1) le changement de variables $\omega \rightarrow \sigma'$. Alors

$$(3) \quad I(x_n) = \int_{\mathbb{E}^{n-1}} e^{ix_n \omega_n(\sigma')} \mu(\omega(\sigma')) \frac{d\omega}{d\sigma'} d\sigma',$$

$\frac{d\omega}{d\sigma'}$ étant le jacobien de ce changement de variables. Grâce à (2) on peut effectuer l'intégration par parties par rapport à σ_k dans le second membre. En continuant à intégrer par parties on verra que la fonction $I(x_n)$ décroît plus vite, lorsque $|x_n| \rightarrow \infty$, que toute puissance de $1/|x_n|$ puisque $\mu(\omega)$ et la variété Ω sont de classe indéfiniment différentiable.

Nous allons maintenant étudier le comportement, quand $x_n \rightarrow +\infty$ de la fonction $I(x_n)$ dans le cas où le support de $\mu(\omega)$ est contenu dans un petit voisinage, sur Ω , des pôles nord et sud. Soient V^+ , V^- deux voisinages suffisamment petits sur Ω du pôle nord et du pôle sud respectivement. Dans V^\pm le point ω admet la représentation paramétrique

$$\begin{aligned} \omega_k &= \omega_k & (k=1, \dots, n-1) \\ \omega_n &= \pm \sqrt{1 - \omega_1^2 - \dots - \omega_{n-1}^2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\omega' = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ donne dans V^+ ou V^- un système local de coordonnées. En tenant compte du fait :

$$\omega_n = \pm \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k^2 + O(|\omega'|^3) \right\} \quad \text{pour } \omega' \rightarrow 0,$$

On peut introduire, d'après un lemme de M. Morse [17]²¹⁾ (comme un cas particulier du lemme) un système de nouvelles coordonnées $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ ayant les propriétés suivantes :

- i) la transformation $\omega' = (\omega_1 \cdots \omega_{n-1}) \leftrightarrow \sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ est indéfiniment différentiable
- ii) $\omega' = 0$ correspond à $\sigma' = 0$
- iii) $\sqrt{1 - \omega_1^2 - \dots - \omega_{n-1}^2} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k^2$
- iv) le jacobien $\frac{D(\omega')}{D(\sigma')}$ de cette transformation est égale à 1 en $\sigma' = 0$.

On peut supposer que le jacobien soit uniformément minoré par un nombre positif dans un petit voisinage de $\sigma' = 0$, contenant le support de $\mu(\omega(\sigma'))$. Avec les nouvelles coordonnées $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ nous pouvons écrire l'intégrales (1) :

$$\begin{aligned}
 (4) \quad I(x_n) &= \int e^{ix_n \sqrt{1 - |\omega'|^2}} \frac{\mu(\omega', \sqrt{1 - |\omega'|^2})}{\sqrt{1 - |\omega'|^2}} d\omega' \\
 &\quad + \int e^{-ix_n \sqrt{1 - |\omega'|^2}} \frac{u(\omega', -\sqrt{1 - |\omega'|^2})}{\sqrt{1 - |\omega'|^2}} d\omega' \\
 &= \int e^{ix_n(1 - |\sigma'|^2/2)} \psi^+(\sigma') d\sigma' + \int e^{-ix_n(1 - |\sigma'|^2/2)} \psi^-(\sigma') d\sigma'
 \end{aligned}$$

où

$$(6) \quad \psi^\pm(\sigma') = \frac{\mu\left(\omega_1(\sigma'), \dots, \omega_{n-1}(\sigma'), \pm \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k^2\right)\right)}{1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k^2} \frac{D(\omega')}{D(\sigma')}$$

et d'après iv)

$$(7) \quad \psi^\pm(0) = \mu(0, \dots, 0 \pm 1) .$$

Ainsi notre problème revient à étudier le comportement, quand $|s| \rightarrow \infty$, de l'intégrale $J(s)$ du type suivant :

$$(8) \quad J(s) = \int e^{i(s/2)|\sigma|^2} \psi(\sigma) d\sigma ,$$

$\psi(\sigma)$ étant une fonction indéfiniment dérivable en $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$,

21) Ou voir J. MILNOR, Morse Theory, Princeton University Press, Princeton.

à support compact, soit $\text{supp } \psi \subset \{\sigma; |\sigma| < d\}$. Pour simplifier l'écriture, nous écrirons désormais σ au lieu de σ' comme plus haut. Pour examiner le comportement pour $|s| \rightarrow \infty$ de $J(s)$, nous allons y appliquer la méthode classique de phase stationnaire. En prenant une fonction paire $\rho(t) \in C_0^\infty(\mathcal{R}^1)$ telle que

$$(9) \quad \rho(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq d \\ 0 & \text{pour } |t| \geq 2d, \end{cases}$$

posons

$$(10) \quad \phi(\sigma) = \rho(\sigma_1) \times \cdots \times \rho(\sigma_{n-1}).$$

On décompose J en deux parties

$$(11) \quad J(s) = \int e^{i(s/2)|\sigma|^2} \psi(\sigma) \phi(\sigma) d\sigma + \int e^{i(s/2)|\sigma|^2} \psi(\sigma) (1 - \phi(\sigma)) d\sigma \\ = J_1(s) + J_2(s).$$

Dans la deuxième intégrale, la fonction $\psi(\sigma)(1 - \phi(\sigma))$ à support compact s'annule au voisinage de l'origine $\sigma = 0$. Comme la fonction à intégrer s'écrit alors

$$\{(is\sigma_k) e^{i(s/2)|\sigma|^2}\} \left\{ \frac{1}{is\sigma_k} \psi(\sigma)(1 - \phi(\sigma)) \right\},$$

On a, en effectuant une intégration par parties par rapport à σ_k ,

$$J_2(s) = O(|s|^{-1}). \quad \text{quand } |s| \rightarrow \infty$$

En répétant l'intégration par parties de la même manière, on verra que $J_2(s)$ décroît plus vite, lorsque $|s| \rightarrow \infty$, que toute puissance de $1/|s|$:

$$(12) \quad J_2(s) = O(|s|^{-l}), \text{ pour tout entier } l \geq 0, \text{ quand } |s| \rightarrow \infty.$$

Passons maintenant à la recherche $J_1(s)$. En décomposant $\psi(\sigma)$ en forme

$$(13) \quad \psi(\sigma) = \psi(0) + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m-1} a_\alpha \sigma^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\sigma) \sigma^\alpha$$

où les $a_\alpha(\sigma)$ ($|\alpha| = m$) sont indéfiniment dérivables en σ , on a

$$(14) \quad J_1(s) = \psi(0) \prod_{k=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_k^2} \rho(\sigma_k) d\sigma_k$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{1 \leq |\omega| \leq m-1} a_\alpha \prod_{k=1}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_k^2} \sigma_k^\alpha \rho(\sigma_k) d\sigma_k + \sum_{|\omega|=m} \int e^{i(s/2)|\sigma|^2} a_\alpha(\sigma) \sigma^\omega \phi(\sigma) d\sigma \\
& \equiv \Phi_1(s) + \Phi_2(s) + \Phi_3(s).
\end{aligned}$$

Considérons tout d'abord $\Phi_1(s)$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
(15) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_k^2} \rho(\sigma_k) d\sigma_k &= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{i(s/2)\sigma_k^2} d\sigma_k \\
&+ 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{i(s/2)\sigma_k^2} (\rho(\sigma_k) - 1) d\sigma_k
\end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variable $\sqrt{\frac{|s|}{2}} \sigma_k = t$. D'après la formule bien connue de l'intégrale de Fresnel :

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{\pm i t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 \pm i) = \sqrt{\pi} e^{\pm i \pi/4},$$

on a alors

$$(17) \quad 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_k^2} d\sigma_k = \sqrt{\frac{\pi}{|s|}} (1 \pm i \operatorname{sgn} s) = \sqrt{\frac{2\pi}{|s|}} e^{i(\pi/4) \operatorname{sgn} s}.$$

Considérons la deuxième intégrale de (15).

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{i(s/2)\sigma_k^2} (\rho(\sigma_k) - 1) d\sigma_k \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ e^{i(s/2)\sigma_k^2} \left(\frac{\rho(\sigma_k) - 1}{i s \sigma_k} \right) \Big|_0^N - \int_0^N e^{i(s/2)\sigma_k^2} \frac{d}{d\sigma_k} \left(\frac{\rho(\sigma_k) - 1}{i s \sigma_k} \right) d\sigma_k \right\} \\
&= - \int_0^{\infty} e^{i(s/2)\sigma_k^2} \left[\frac{d}{d\sigma_k} \left(\frac{\rho(\sigma_k) - 1}{i s \sigma_k} \right) \right] d\sigma_k
\end{aligned}$$

La fonction entre crochet dans la dernière intégrale est une fonction indéfiniment dérivable s'annule au voisinage de l'origine $\sigma_k = 0$. On obtient donc, en répétant l'intégration par parties par rapport à σ_k ,

(18) la deuxième intégrale de (15) = $0(|s|^{-l})$, pour tout entier $l \geq 0$, quand $|s| \rightarrow \infty$. On déduit alors de (14), (15), (17) et (18) :

$$\begin{aligned}
(19) \quad \Phi_1(s) &= \psi(0) \left(\frac{2\pi}{|s|} \right)^{(n-1)/2} e^{i(\omega/4)(n-1) \operatorname{sgn} s} + 0(|s|^{-l}) \\
&= \psi(0) \left(\frac{\pi}{|s|} \right)^{(n-1)/2} (1 + i \operatorname{sgn} s)^{n-1} + 0(|s|^{-l})
\end{aligned}$$

pour tout entier $l \geq 0$, quand $|s| \rightarrow \infty$.

Envisageons ensuite $\Phi_2(s)$. Pour cela on considère l'intégrale :

$$(20) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)t^2} t^2 \rho(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{is} \right) (ist e^{i(s/2)t^2}) (t\rho(t)) dt .$$

Par une intégration par parties, il vient ;

$$(21) \quad = -\frac{1}{is} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)t^2} t \rho'(t) dt - \frac{1}{is} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)t^2} \rho(t) dt .$$

La fonction $t\rho'(t)$ à support compact s'annule au voisinage de l'origine $t=0$. On a donc, pour tout entier $l \geq 0$,

la première intégrale de (21) = $O(|s|^{-l})$ lorsque $|s| \rightarrow \infty$.

De (15), (17) et (18), on a

$$\begin{aligned} \text{la deuxième intégrale de (21)} &= \frac{1}{is} \sqrt{\frac{2\pi}{|s|}} e^{i(\pi/4)\text{sgn } s} + O(|s|^{-l}) \\ &= O(|s|^{-3/2}) \quad \text{quand } |s| \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

Ainsi

$$(22) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)t^2} t^2 \rho(t) dt = O(|s|^{-3/2}), \quad \text{quand } |s| \rightarrow \infty .$$

En général on peut démontrer de la même manière

$$(23) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)t^2} t^{2h} \rho(t) dt = O(|s|^{-(2h+1)/2}), \quad \text{pour tout entier } h \geq 0 ,$$

quand $|s| \rightarrow \infty$. Revenons maintenant à $\Phi_2(s)$. Comme nous avons choisi la fonction $\rho(t)$ paire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_k^2} \sigma_k^{\alpha_k} \rho(\sigma_k) d\sigma_k = 0 \quad \text{si } \alpha_k \text{ est impair.}$$

$\Phi_2(s)$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \Phi_2(s) &= a_{20 \dots 0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_1^2} \sigma_1^2 \rho(\sigma_1) d\sigma_1 \right\} \prod_{k=2}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_k^2} \rho(\sigma_k) d\sigma_k \\ &\quad + a_{02 \dots 0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_2^2} \sigma_2^2 \rho(\sigma_2) d\sigma_2 \right\} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_k^2} \rho(\sigma_k) d\sigma_k \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ a_{00\dots 2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_{n-1}^2} \sigma_{n-1}^2 \rho(\sigma_{n-1}) d\sigma_{n-1} \right\} \\
 &\quad \times \prod_{k=1}^{n-2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_k^2} \rho(\sigma_k) d\sigma_k \\
 &+ \sum_{4 \leq |\alpha| \leq m-1} a_\alpha \prod_{k=1}^{n-2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s/2)\sigma_k^2} \sigma_k^{\alpha_k} \rho(\sigma_k) d\sigma_k.
 \end{aligned}$$

De (23) on en déduit

$$(24) \quad \Phi_2(s) = O(|s|^{-3/2} \times |s|^{-(1/2)(n-2)}) = O(|s|^{-(n+1)/2}),$$

quand $|s| \rightarrow \infty$.

Il reste à étudier $\Phi_3(s)$. Soit l un entier positive quelconque. En prenant m suffisamment grand, par exemple $m > 2l$, on a

$$(25) \quad \Phi_3(s) = O(|s|^{-l}) \quad \text{quand } |s| \rightarrow \infty.$$

En effet, on peut facilement le constater d'une manière analogue au précédent en intégrant $\left[\frac{\alpha_k}{2} \right] + 1$ fois par parties par rapport à chaque variable σ_k .

On déduit de (11), (12), (14), (19), (24) et (25) :

$$\begin{aligned}
 (26) \quad J(s) &\equiv \int e^{i(s/2)|\sigma|^2} \psi(\sigma) d\sigma, \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \\
 &= \psi(0) \left(\frac{2}{|s|} \right)^{(n-1)/2} e^{i(\pi/4)(n-1) \operatorname{sgn} s} + O(|s|^{-(n+1)/2})
 \end{aligned}$$

quand $|s| \rightarrow \infty$.

Revenons maintenant au problème original. Soit $\mu(\omega)$ une fonction indéfiniment dérivable sur Ω . Alors nous tirons de (4), (7) et (26)

$$\begin{aligned}
 (27) \quad I(x_n) &\equiv \int_{\Omega} e^{ix_n \omega_n} \mu(\omega) d\omega \\
 &= \mu(0, \dots, 0, 1) \left(\frac{2\pi}{|x_n|} \right)^{(n-1)/2} e^{i(|x_n| - (\pi/4)(n-1) \operatorname{sgn} x_n)} \\
 &\quad + \mu(0, \dots, 0, -1) \left(\frac{2\pi}{|x_n|} \right)^{(n-1)/2} e^{-i(|x_n| - (\pi/4)(n-1) \operatorname{sgn} x_n)} + O(|x_n|^{-(n+1)/2})
 \end{aligned}$$

quand $|x_n| \rightarrow \infty$.

D'où on déduit par rotation autour de l'origine le développement asymptotique de $I(x)$ quand $|x| \rightarrow \infty$:

$$(28) \quad I(x) \equiv \int_{\Omega} e^{i\langle x, \omega \rangle} \mu(\omega) d\omega = \mu(\theta) \left(\frac{2\pi}{|x|} \right)^{(n-1)/2} e^{i(|x| - (\pi/4)(n-1))} \\ + \mu(-\theta) \left(\frac{2\pi}{|x|} \right)^{(n-1)/2} e^{-i(|x| - (\pi/4)(n-1))} + O(|x|^{-(n+1)/2})$$

où $x = |x|\theta$. Le lemme 2.2 est ainsi complètement démontré.

Bibliographie

- [1] Agmon, S., A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959), 623-727.
- [2] Agmon, S., Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur, *Colloques sur les Équations aux Dérivées Partielles*, C. N. R. S. (1962), 13-18.
- [3] Carleman, T., *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique*, Uppsala, 1923.
- [4] Erdélyi, A., *Asymptotic expansions*, Dover, New York, 1956.
- [5] Friedrichs, K. O., Symmetric positive linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **11** (1958), 333-418.
- [6] Gantmacher, F. R., *Théorie des matrices I*, Dunod, Paris, 1966.
- [7] Grusin, V. V., On Sommerfeld-type conditions for a certain class of partial differential equations, *A. M. S. Transl. series 2*, **51** (1966), 82-112 (*Mat. Sb. (N. S.)* **61** (103) (1963), 147-174).
- [8] Hersh, R., Mixed problems in several variables, *J. Math. Mech.* **12** (1963), 317-334.
- [9] Lax, P. D. and R. S. Phillips, Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 427-455.
- [10] Lax, P. D. and R. S. Phillips, *Scattering theory*, Academic press, New York 1967.
- [11] Lax, P. D., C. S. Morawetz and R. S. Phillips, The exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle, *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962), 593-595.
- [12] Littman, W., Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 766-770.
- [13] Ludwig, D. A., Examples of the behavior of solutions of hyperbolic equations for large times, *J. Math. Mech.* **12** (1963), 557-566.
- [14] Mizohata, S., Sur l'analyticité de la fonction spectrale de l'opérateur \mathcal{L} relatif au problème extérieur, *Proc. Japan Acad.* **39** (1963), 352-357.
- [15] ———, *Théorie des équations aux dérivées partielles*, Iwanami, Tokyo, 1965. (Japonais)
- [16] Morawetz, C. S., The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 561-569.
- [17] Morse, M., *The calculus of variations in the large*, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 18*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1934.
- [18] Sarason, L., On hyperbolic mixed problems, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **18** (1965), 310-334.
- [19] Schwartz, L., *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966. (Nouvelle édition)
- [20] Yosida, K., *Functional analysis*, Springer, Berlin, 1965.

