Publ. RIMS, Kyoto Univ.
7 (1971/72), 659-702

Über verallgemeinerte gewöhnliche Differentialoperatoren mit nichtlokalen Randbedingungen und die von ihnen erzeugten Markov-Prozesse

Von

H. LANGER*, L. PARTZSCH** und D. SCHÜTZE***

Einleitung

In den Arbeiten [1] und [2] gaben W. Feller und A. D. Wentzell die allgemeinsten Randbedingungen an, mit denen ein verallgemeinerter regulärer Differentialoperator $D_m D$ auf einem Intervall $[r_0, r_1]$ der reellen Achse eine stark stetige Halbgruppe von positiven Kontraktionen im Raum C der stetigen Funktionen über $[r_0, r_1]$ erzeugt. Eine systematische Untersuchung dieses Differentialoperators mit solchen i.a. nichtlokalen Randbedingungen in gewissen Räumen stetiger Funktionen über $[r_0, r_1]$ findet man in der unlängst erschienenen Monographie [3] von P. Mandl.

Im "klassischen" Fall lokaler Randbedingungen erzeugt der Differentialoperator $D_m D$ einen selbstadjungierten oder symmetrischen Operator in $L^2(\bar{m})$[1] (siehe z. B. [4]), und man erhält daraus bekanntlich Entwicklungen der Dichte der zugehörigen Übergangsfunktion nach Eigenfunktionen, Aussagen über die Lage und die Asymptotik der Eigenwerte usw. Sind die Randbedingungen nicht lokal, so ist der entsprechende Operator nicht mehr symmetrisch in $L^2(\bar{m})$. Wir zeigen jedoch, daß i.a. ein Maß M auf $[r_0, r_1]$ existiert, so daß er in $L^2(M)$ dissipativ ist oder sich von einem dissipativen Operator um einen höchstens zweidimensionalen Operator unterscheidet. Dieser Sachverhalt ist der Ausgangspunkt für unser Studium des Differentialoperators $D_m D$ mit nichtlokalen Randbedingungen.

Received October 5, 1971.
Communicated by K. Yosida.

*, **, *** Sektion Mathematik der Technischen Universität, 8027 Dresden, DDR.

1) Dabei unterscheidet sich $\bar{m}$ höchstens in den Randpunkten r_0, r_1 von m.

Dem Differentialausdruck $D_m D$ mit solchen Randbedingungen kann man bekanntlich einen Markov-Prozeß über dem Phasenraum $[r_0, r_1]$ zuordnen. Das Maß M erweist sich dabei in gewissen Fällen als ein subinvariantes Maß dieses Markov-Prozesses. Dann steht die Tatsache, daß $D_m D$ mit nichtlokalen Randbedingungen einen dissipativen Operator in $L^2(M)$ erzeugt, in engem Zusammenhang mit [5], XIII, Satz 1.1.[2]: Dieser sichert nämlich, daß die von dem Markov-Prozeß in $L^2(M)$ erzeugte Halbgruppe aus Kontraktionen besteht, also ist ihr infinitesimaler Generator maximal dissipativ.

In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich der reguläre Fall betrachtet, d.h. $-\infty < r_0 < r_1 < +\infty$ und $m(r_1) - m(r_0) < \infty$ vorausgesetzt. Wir bemerken jedoch, daß sich einige Ergebnisse aus den Paragraphen 1 und 4 ohne Schwierigkeit auf den singulären Fall übertragen lassen. Auch die Allgemeinheit der Randbedingungen schränken wir ein: Sie müssen zulässig sein, d.h., falls sie nichtlokal sind, muß ein "Reflexionsanteil" auftreten.[3] In Anlehnung an die Untersuchungen von M. G. Krein und I. S. Kac (siehe z.B. [6]) lassen wir jedoch auch solche Funktionen m zu, die in Teilintervallen von $[r_0, r_1]$ konstant sind. Die von uns getroffene Voraussetzung, daß r_0 und r_1 Punkte stetigen Wachstums von m sind, kann bei geeigneter Definition der Operatoren entbehrt werden. Dann lassen sich z.B. die in [7], Kap. IV, untersuchten Geburts und Todesprozesse mit dem erreichbaren Randpunkt ∞ auf die gleiche Weise behandeln.

Die ersten drei Paragraphen enthalten im wesentlichen die analytischen Hilfsmittel. Im vierten Paragraphen zeigen wir, daß die Übergangsfunktion des oben erwähnten Markov-Prozesses absolutstetig bezüglich des Maßes M ist. Das entsprechende Ergebnis für lokale Randbedingungen wurde (sogar im singulären Fall) von A. D. Wentzell [8] erhalten. Seine Beweismethode konnten wir nach den Vorbereitungen in den §§ 1–3 im wesentlichen übernehmen. Dasselbe gilt für die Ergebnisse in § 5, wo wir zeigen, daß diese Übergangsdichten den Kolmogorovschen Differentialglei-

2) Man sieht unschwer, daß dort an Stelle eines invarianten nur ein subinvariantes Maß benötigt wird.

3) Möglicherweise bleibt eine Reihe von Aussagen in den Paragraphen 4–6 auch im allgemeinen Fall richtig.

chungen genügen. Im Unterschied zu [8] sind die Übergangsdichten jedoch i.a. nicht mehr symmetrisch in den Ortsvariablen, deshalb ergeben sich zwei Differentialgleichungen.

In §6 untersuchen wir das Verhalten der Übergangsfunktion für $t\to\infty$; dabei enthält Satz 6.1 mit seiner Folgerung unter unseren etwas einschränkenderen Voraussetzungen eine Verschärfung (bezüglich der Konvergenzart) gewisser Aussagen von P. Mandl [3]. Falls die Werte dieser Übergangsfunktion für $t\to\infty$ gegen Null streben, zeigen wir in der Folgerung zu Satz 6.2 die Existenz eines Grenzwertes für den Quotienten zweier solcher Werte; diese Betrachtungen stehen in engem Zusammenhang mit der Note [9] eines der Verfasser.

Wir benutzen die Gelegenheit, den Herren I. S. Kac, M. G. Krein und A. D. Wentzell für wertvolle Hinweise zu danken.

§1. Der verallgemeinerte Differentialoperator D_mD im Raum C_m

1. Der Operator A_0. Es sei m eine auf dem beschränkten Intervall $[r_0, r_1]$ der reellen Achse definierte, nichtabnehmende und beschränkte Funktion, für die gilt:

$$\lim_{x\downarrow r_0} m(x)=m(r_0)<m(x)<m(r_1)=\lim_{x\uparrow r_1} m(x) \qquad (r_0<x<r_1).$$

Mit C_m bezeichnen wir denjenigen Teilraum von $C[r_0, r_1]$, dessen Elemente auf jeder Komponente des Komplementes des Trägers[4] von m linear sind. Für eine streng wachsende Funktion m gilt also insbesondere $C_m=C[r_0, r_1]$; ist m eine reine Sprungfunktion, so besteht C_m aus allen stückweise linearen, stetigen Funktionen mit "Knicken" in den Sprungpunkten von m.

Es sei weiter $\mathfrak{D}$ die Menge aller Elemente f aus C_m, die sich in der Form

$$f(x)=a+b(x-r_0)+\int_{r_0}^{x}\int_{r_0}^{y}\varphi(s)dm(s)dy \tag{1.1}$$

mit einem $\varphi\in C_m$ und (komplexen) Konstanten a, b schreiben lassen. Für

4) Der Träger von m ist die (abgeschlossene) Menge aller Wachstumspunkte von m.

$f \in \mathfrak{D}$ erklären wir zwei Funktion Df und $D_m Df$ auf folgende Weise:

$$(Df)(x) := b + \int_{r_0}^{x} \varphi(s) dm(s),\text{[5]}$$

$$(D_m Df)(x) := \varphi(x).$$

Man überlegt sich leicht, daß diese Definition korrekt ist, d.h., in der Darstellung (1.1) ist φ durch f eindeutig bestimmt. Die Zuordung $f \to D_m Df$ ist insbesondere ein linearer Operator von $\mathfrak{D}$ auf C_m.

Für Funktionen $f \in \mathfrak{D}$ führen wir Randbedingungen der Form

$$(1.2)\quad \Phi_i(f) := \kappa_i f(r_i) + \int_{r_0}^{r_1} \frac{f(r_i) - f(x)}{|r_i - x|} dq_i(x) + (-1)^{i+1} \pi_i (Df)(r_i) +$$
$$+ \sigma_i (D_m Df)(r_i) = 0, \quad i = 0, 1$$

ein, dabei seien κ_i, π_i, σ_i nichtnegative Zahlen, q_i eine auf $[r_0, r_1]$ definierte nichtfallende, beschränkte, bei $x = r_i$ stetige Funktion, und es sei stets vorausgesetzt, daß

$$\kappa_i + \int_{r_0}^{r_1} dq_i + \pi_i + \sigma_i > 0, \quad i = 0, 1,$$

gilt und die Randbedingungen (1.2) nicht zur Gleichung

$$(1.3)\quad f(r_0) = f(r_1)$$

entarten. Weiter setzen wir $Q_i := \pi_i + \int_{r_0}^{r_1} dq_i$, $Q_i' := \pi_i + \int_{r_0+}^{r_1-} dq_i$, $i = 0, 1$, und normieren die Koeffizienten von (1.2) in der Weise, daß stets $Q_i = 0$ oder $Q_i = 1$ gilt. Die Randbedingung (1.2) heiße *zulässig*, wenn

$$\int_{r_0}^{r_1} dq_i < 1$$

gilt. Offensichtlich ist das gleichbedeutend damit, daß die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\int_{r_0}^{r_1} dq_i > 0 \;\Rightarrow\; \pi_i > 0.$$

---

5) Unter $\int_{x_0}^{x_1}$ verstehen wir dabei stets $\int_{x_0-}^{x_1+}$, d.h., evtl. vorhandene Massen in den Randpunkten sind bei der Integration zu berücksichtigen.

In diesem Falle setzen wir noch

$$\pi'_i = \begin{cases} \pi_i & \pi_i > 0 \\ 1 & \pi_i = 0 \end{cases}.$$

Die Einschränkung des Operators $D_m D$ auf die Menge aller $f \in \mathfrak{D}$, die den Randbedingungen (1.2) genügen, bezeichnen wir mit A_0.

Behauptung 1.1. *Genau dann ist $\mathfrak{D}(A_0)$ dicht in C_m, wenn für die Randbedingungen* (1.2) *gilt*:

$$\pi_i + \sigma_i > 0 \quad oder \int_{r_0}^{r_1} \frac{dq_i(x)}{|x - r_i|} = \infty, \qquad i = 0, 1. \tag{1.4}$$

Zum Beweis überlegt man sich, daß kein Maß $\mu_0 \in C'_m$ auf $\mathfrak{D}$ orthogonal ist, also liegt $\mathfrak{D}$ dicht in C_m. Ebenso sieht man, daß auch die Menge aller Funktionen aus $\mathfrak{D}$, deren Träger z.B. ein kompakter Teil von $(r_0, r_1]$ ist, im Raume $C_{m;0}$ aller Funktionen aus C_m, die in r_0 verschwinden, dicht liegt. Die Behauptung folgt jetzt aus der Tatsache, daß Φ_i aus (1.2) genau dann ein unstetiges Funktional auf C_m ist, wenn (1.4) gilt, sowie der folgenden allgemeinen Aussage: Ist Φ ein auf einem dichten Teil $\mathfrak{D}$ eines Banachraumes $\mathfrak{B}$ definiertes additives und homogenes, unstetiges Funktional, so liegt die Menge der Nullstellen von Φ dicht in $\mathfrak{B}$.

2. Die Resolvente von A_0. Wir berechnen in diesem Abschnitt die Resolvente R_λ des Operators A_0 in C_m, d.h., wir lösen die Randwertaufgabe

$$\lambda g(x) - (D_m D g)(x) = f(x), \; \Phi_0(g) = \Phi_1(g) = 0 \tag{1.5}$$

für $f \in C_m$.

Die Funktionen w_0 und w_1 seien das Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung

$$\lambda g - D_m D g = 0 \tag{1.6}$$

mit den Anfangsbedingungen $w_0(r_0; \lambda) = 1$, $(Dw_0)(r_0; \lambda) = 0$; $w_1(r_0; \lambda) = 0$,

$(Dw_1)(r_0;\lambda)=1$. Dann hat die zugehörige Wronskische Determinante $W(w_0, w_1)$ für alle $x\in[r_0, r_1]$ den Wert

$$W(w_0, w_1)=w_0(x)(Dw_1)(x)-w_1(x)(Dw_0)(x)=1,$$

und jede Lösung von (1.6) die Gestalt $g=c_0w_0+c_1w_1$ mit gewissen Konstanten c_0, c_1. Die Eigenwerte der Randwertaufgabe (1.5) sind deshalb die Nullstellen der Funktion

$$\Delta(\lambda)=\det(\Phi_i(w_j(\cdot;\lambda)))_{i,j=0,1}.$$

Da die Randbedingungen (1.2) nicht mit (1.3) äquivalent sind, kann man sich wie z.B. in [3], II, (62) überlegen, daß für $\lambda>0$ stets $\Delta(\lambda)>0$ gilt.

Wir führen die Funktionen

$$u_0=-\Phi_1(w_0)w_1+\Phi_1(w_1)w_0$$

$$u_1=\Phi_0(w_0)w_1-\Phi_0(w_1)w_0$$

ein. Diese sind Lösungen der homogenen Gleichung (1.6), und es gilt $W(u_0, u_1)=\Delta$ sowie

$$\Phi_0(u_0)=\Delta,\ \Phi_0(u_1)=\Phi_1(u_0)=0;\ \Phi_1(u_1)=\Delta.$$

Weiter definieren wir Kerne V, K und G_0 durch die Gleichungen

$$\text{(1.7)}\qquad V(x, y;\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}[u_0(x;\lambda)u_1(y;\lambda)-u_1(x;\lambda)u_0(y;\lambda)]=$$
$$=w_0(x;\lambda)w_1(y;\lambda)-w_1(x;\lambda)w_0(y;\lambda),$$

$$K(x, y;\lambda)=\begin{cases} u_1(x;\lambda)\,u_0(y;\lambda) & r_0\leqq x\leqq y\leqq r_1\\ u_0(x;\lambda)\,u_1(y;\lambda) & r_1\geqq x\geqq y\geqq r_0,\end{cases}$$

$$G_0(x, y;\lambda)=\int_{s=y}^{r_1}\frac{V(s, y;\lambda)}{s-r_0}dq_0(s)u_0(x;\lambda)-$$
$$-\int_{s=r_0}^{y}\frac{V(s, y;\lambda)}{r_1-s}dq_1(s)u_1(x;\lambda)+K(x;y;\lambda).$$

Man sieht leicht, daß diese für $(x, y) \in [r_0, r_1] \times [r_0, r_1]$ stetig sind. Die Lösung g der Randwertaufgabe (1.5) läßt sich dann für Werte λ mit $\Delta(\lambda) \neq 0$ folgendermaßen darstellen:

$$(1.8) \qquad (R_\lambda f)(x) = g(x) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\{\sigma_0 f(r_0) u_0(x; \lambda) + \sigma_1 f(r_1) u_1(x; \lambda) + \\ + \int_{r_0}^{r_1} G_0(x, y; \lambda) f(y)\, dm(y)\};$$

der Beweis dafür kann dem Leser überlassen werden.

3. Positivität der Resolvente von A_0. Analog wie in [3], II, Beweis von Satz 4, kann man zeigen, daß in der Randwertaufgabe (1.5) für $\lambda > 0$ aus $f \geqq 0$ stets auch $g \geqq 0$ folgt. Wir benötigen jedoch in § 6 eine etwas schärfere Aussage.

Eine Funktion $g \in C_m$ heiße *positiv* (*nichtnegativ*), wenn $g(x) > 0$ $(g(x) \geqq 0)$ für alle $x \in [r_0, r_1]$ gilt.

Behauptung 1.2. *Es sei $\lambda > 0$. Genau dann ist $R_\lambda f$ positiv für jedes nichtnegative $f \in C_m$, $f \neq 0$, wenn $Q_0 Q_1 (Q_0' + Q_1') > 0$ gilt. Das trifft insbesondere für $\pi_0 \pi_1 > 0$ zu; in diesem Falle ist der Kern G_0 positiv:*

$$(1.9) \qquad G_0(x, y; \lambda) > 0, \quad x, y \in [r_0, r_1].$$

Bei den folgenden Betrachtungen zum Beweis dieser Behauptung sei λ stets eine feste positive Zahl, die wir im Argument von u_0, u_1, V oft nicht aufschreiben. Wir untersuchen zunächst das Verhalten der Funktion $V(x, y)$ aus (1.7). Es gilt offensichtlich $V(x, y) = -V(y, x)$, und $V(x, .)$ ist bei festem $x \in [r_0, r_1]$ die eindeutige Lösung der Randwertaufgabe

$$\lambda V - (D_m D)_2 V = 0, \quad V(x, x) = 0, \quad (D_2 V)(x, x) = 1.$$ [6)]

Daraus ergibt sich ohne Schwierigkeit, daß $V(x, .)$ eine streng wachsende

6) D_j und $(D_m D)_j$ bedeutet, daß der Operator D bzw. $D_m D$ bezüglich der j-ten Variablen angewandt wird ($j = 1, 2$).

Funktion in $[r_0, r_1]$ ist, während $(D_2V)(x, .)$ im Intervall $[r_0, x]$ streng fallend und im Intervall $[x, r_1]$ streng wachsend ist; dabei gilt

$$(D_1V)(x, y) = -(D_2V)(y, x) \leqq -1.$$

Es besteht weiter die Beziehung

$$(1.10) \quad u_0(x) = \Phi_1(V(x, .)) = \kappa_1 V(x, r_1) + \pi_1(D_2V)(x, r_1) +$$

$$+ \int_{r_0}^{r_1} \frac{V(x, r_1) - V(x, y)}{r_1 - y} dq_1(y) + \sigma_1 \lambda V(x, r_1) > 0 \quad \text{für } x \in [r_0, r_1),$$

und $u_0(r_1) = 0$ gilt genau dann, wenn $\pi_1 = \int_{r_0}^{r_1} dq_1 = 0$ ist. Eine entsprechende Darstellung ergibt sich für u_1:

$$(1.11) \quad u_1(x) = -\Phi_0(V(x, .)) = -\kappa_0 V(x, r_0) + \pi_0(D_2V)(x, r_0) +$$

$$+ \int_{r_0}^{r_1} \frac{V(x, y) - V(x, r_0)}{y - r_0} dq_0(y) - \sigma_0 \lambda V(x, r_0) > 0 \quad \text{für } x \in (r_0, r_1],$$

und $u_1(r_0) = 0$ gilt genau dann, wenn $\pi_0 = \int_{r_0}^{r_1} dq_0 = 0$ ist.

Mit Hilfe der Beziehungen (1.10) und (1.11) überzeugt man sich von der für $r_0 \leqq x \leqq y < r_1$ bestehenden Identität

$$(1.12) \quad G_0(x, y) = [\pi_0(D_2V)(x, r_0) - (\kappa_0 + \sigma_0\lambda)V(x, r_0)]\Gamma(y) +$$

$$+ \int_{s=r_0}^{y} \frac{V(x, s) - V(x, r_0)}{s - r_0} dq_0(s)\Gamma(y) +$$

$$+ (\kappa_1 + \sigma_1\lambda) \int_{s=y}^{r_1} \frac{V(s, r_1)V(x, y) - V(x, r_0)V(y, r_1)}{s - r_0} dq_0(s) +$$

$$+ \pi_1 \int_{s=y}^{r_1} \frac{(D_2V)(s, r_1)V(x, y) - V(x, r_0)(D_2V)(y, r_1)}{s - r_0} dq_0(s) +$$

$$+ \int_{s=y}^{r_1} \int_{\sigma=y}^{r_1} \frac{V(x, y)(V(s, r_1) - V(s, \sigma)) - V(x, r_0)(V(y, r_1) - V(y, \sigma))}{(s - r_0)(r_1 - \sigma)}$$

$$dq_1(\sigma)\, dq_0(s) +$$

$$+\int_{s=y}^{r_1}\int_{\sigma=r_0}^{y}\frac{V(s, r_1)V(x, y)-V(s, y)V(x, \sigma)-V(x, r_0)V(y, r_1)}{(s-r_0)(r_1-\sigma)}$$

$$dq_1(\sigma)\ dq_0(s);$$

$$\Gamma(y)=(\kappa_1+\sigma_1\lambda)V(y, r_1)+\pi_1(D_2V)(y, r_1)+\int_{s=y}^{r_1}\frac{V(y, r_1)-V(y, s)}{r_1-s}dq_1(s)+$$

$$+V(y, r_1)\int_{s=r_0}^{y}\frac{dq_1(s)}{r_1-s}.$$

Da jeder der sechs Summanden der rechten Seite von (1.12) nichtnegativ ist, gilt $G_0(x, y)\geqq 0$. Wir überlassen es dem Leser, sich zu überlegen, daß im Falle $y\neq r_0$ für $x\neq r_0$ oder $x=r_0$, $Q_0(Q_0'+Q_1')>0$ sogar $G_0(x, y)>0$ gilt.

Im Falle $y=r_0$ ist $G_0(x, r_0)=\pi_0\, u_0(x)\geqq 0$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $\pi_0=0$ oder $x=r_1$, $Q_1=0$ gilt. Entsprechende Aussagen erhält man im Falle $r_0<y<x\leqq r_1$ sowie für $G_0(x, r_1)$. Aus der Beziehung (1.8) ergibt sich jetzt ohne Schwierigkeit die Behauptung.

§2. Der verallgemeinerte Differentialoperator D_mD im Raum $L^2(M)$

1. Das Maß M. Für unser Studium des Differentialoperators D_mD mit den Randbedingungen (1.2) spielt das folgende Maß $M\in C_m'$ eine wesentliche Rolle:[7]

$$dM(x)=\sigma_0\, d\mu_{r_0}(x)+\sigma_1\, d\mu_{r_1}(x)+\rho(x)\,dm(x).$$

Dabei bezeichnet $d\mu_{r_i}$ das Maß mit der Einheitsmasse im Punkte r_i, $i=0, 1$, und

$$\rho(x)=1-\int_{y=x}^{r_1}\frac{y-x}{y-r_0}dq_0(y)-\int_{y=r_0}^{x}\frac{x-y}{r_1-y}dq_1(y).$$

Die Funktion ρ ist stetig im Intervall $[r_0, r_1]$, und es gilt $0\leqq\rho(x)\leqq 1$; ihre Werte in den Randpunkten lauten

7) Zur Bedeutung von M siehe auch §4.5.

$$\rho(r_i)=\pi_i \text{ falls } Q_i=1;\ \rho(r_i)=1 \text{ falls } Q_i=0,\ i=0, 1. \tag{2.1}$$

Im Inneren des Intervalls $[r_0, r_1]$ hat ρ in jedem Punkte eine links- und rechtsseitige Ableitung:

$$\left(\frac{d^{\pm}}{dx}\rho\right)(x)=\int_{x\pm}^{r_1}\frac{dq_0(s)}{s-r_0}-\int_{r_0}^{x\pm}\frac{dq_1(s)}{r_1-s};$$

dabei gilt offensichtlich für $r_0<x<x'<r_1$

$$\left(\frac{d^-}{dx}\rho\right)(x)\geqq\left(\frac{d^+}{dx}\rho\right)(x)\geqq\left(\frac{d^-}{dx}\rho\right)(x'),$$

also ist ρ in $[r_0, r_1]$ konvex von oben. Sind beide Randbedingungen zulässig, so folgt damit aus (2.1)

$$1\geqq\rho(x)\geqq\min(\pi_0', \pi_1')>0.$$

2. Der Operator A_0 in $L^2(M)$. Ein linearer Operator in einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ heißt *dissipativ* ([10], [11]), wenn

$$\operatorname{Re}(Bf, f)\leqq 0 \text{ für alle } f\in\mathfrak{D}(B)$$

gilt; ist insbesondere $(Bf, f)<0$ (bzw. $\leqq 0$) für alle $f\in\mathfrak{D}(B)$, $f\neq 0$, so heißt B *negativ* (*nichtpositiv*). Der dissipative Operator B in $\mathfrak{H}$ heißt *maximal dissipativ*, wenn er keine dissipative Erweiterung in $\mathfrak{H}$ gestattet. Bekanntlich trifft das für einen dicht definierten Operator B genau dann zu, wenn die offene rechte Halbebene zur Resolventenmenge von B gehört. Wir sagen, B sei *dissipativ* (bzw. *nichtpositiv* usw.) in einem Teilraum $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{H}$, wenn gilt:

$$B(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{D}(B))\subset\mathfrak{L} \text{ und } \operatorname{Re}(Bf, f)\leqq 0 \text{ (bzw. } (Bf, f)\leqq 0)$$

$$\text{für alle } f\in\mathfrak{L}\cap\mathfrak{D}(B).$$

Mit $\bar{m}$ bezeichnen wir im folgenden das Maß

$$d\bar{m}(x)=\sigma_0\, d\mu_{r_0}(x)+\sigma_1\, d\mu_{r_1}(x)+dm(x)$$

und betrachten neben C_m die Hilberträume $L^2(M)$ und $L^2(\bar{m})$ der auf $[r_0, r_1]$ bezüglich M bzw. $\bar{m}$ quadratisch integrierbaren Funktionen. Da ein Element f eines dieser Hilberträume höchstens einen Repräsentanten in C_m besitzt, kann man die in § 1.1 eingeführte Abbildung A_0 auch als Operator in $L^2(M)$ oder $L^2(\bar{m})$ ansehen.

Ist $\sigma_i \neq 0$ (bzw. $\sigma_0\sigma_1 \neq 0$), so bezeichnen wir denjenigen Teilraum von $L^2(M)$, der aus allen bei $x=r_i$ (bzw. bei $x=r_0$ und $x=r_1$) verschwindenden Funktionen besteht, mit $L_i^2(M)$ (bzw. mit $L_{01}^2(M)$)), $i=0, 1$; entsprechend wird der Raum $L_{01}^2(\bar{m})$ definiert.

Behauptung 2.1. I. *Es sei* $Q_0Q_1=1$.

a) *Falls* $Q_0'+Q_1'>0$ *gilt, ist* A_0 *dissipativ in* $L^2(M)$;

b) *falls* $Q_0'=Q_1'=0$ *und* $\sigma_0\sigma_1>0$ *gilt, ist* A_0 *nichtpositiv in* $L_{01}^2(\bar{m})$.[8)]

II. *Es sei* $Q_i=0, Q_j=1$ *für* $i, j=0, 1, \quad i\neq j$.

a) *Falls* $\sigma_i=0$ *gilt, ist* A_0 *dissipativ in* $L^2(M)$;

b) *falls* $\sigma_i>0$ *gilt, ist* A_0 *dissipativ in* $L_i^2(M)$.

III. *Es sei* $Q_0=Q_1=0$.

a) *Falls* $\sigma_0=\sigma_1=0$ *gilt, ist* A_0 *negativ in* $L^2(M)=L^2(m)$;

b) *falls* $\sigma_i=0, \sigma_j>0$ *gilt, ist* A_0 *negativ in* $L_j^2(M), i, j=0, 1, i\neq j$;

c) *falls* $\sigma_0\,\sigma_1>0$ *gilt, ist* A_0 *nichtpositiv in* $L_{01}^2(M)$.

Wir beweisen nur die Aussage Ia); die Beweise der übrigen Teile verlaufen entsprechend, jedoch mit teilweise wesentlichen Vereinfachungen.

Unter den Voraussetzungen von Ia) gilt für $f\in\mathfrak{D}(A_0)$

$$
\begin{aligned}
(2.2)\quad (A_0f, f) &= \int_{r_0}^{r_1}\varphi(x)\,\overline{f(x)}\,dM(x) = \sigma_0\varphi(r_0)\,\overline{f(r_0)} + \sigma_1\varphi(r_1)\,\overline{f(r_1)} + \\
&\quad + \int_{r_0}^{r_1}\varphi(x)\,\overline{f(x)}\,\rho(x)\,dm(x) = \\
&= \sigma_0\varphi(r_0)\overline{f(r_0)} + \sigma_1\varphi(r_1)\overline{f(r_1)} + (Df)(r_1)\rho(r_1)\overline{f(r_1)} - \\
&\quad - (Df)(r_0)\rho(r_0)\overline{f(r_0)} - \int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\overline{f(x)}\,d\rho(x) -
\end{aligned}
$$

8) Wir bemerken, daß sich im Falle $Q_0\,Q_1=1$, $Q_0'=Q_1'=0$ und $\sigma_0\sigma_1=0$ die Randbedingungen so umformen lassen, daß einer der Fälle II) oder III) vorliegt.

$$-\int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\rho(x)\,d\overline{f(x)}=$$

$$=\overline{f(r_0)}\left(-\kappa_0 f(r_0)-\int_{r_0}^{r_1}\frac{f(r_0)-f(x)}{x-r_0}dq_0(x)\right)+$$

$$+\overline{f(r_1)}\left(-\kappa_1 f(r_1)-\int_{r_0}^{r_1}\frac{f(r_1)-f(x)}{r_1-x}dq_1(x)\right)-$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\overline{f(x)}\,d\rho(x)-\int_{r_0}^{r_1}|(Df)(x)|^2\rho(x)\,dx\,;$$

dabei haben wir die Beziehungen (2.1) sowie die Randbedingungen benutzt. Weiter ist

$$2\,\mathrm{Re}(A_0 f, f)=-2\kappa_0|f(r_0)^2|-2\kappa_1|f(r_1)|^2-2\int_{r_0}^{r_1}|(Df)(x)|^2\rho(x)dx-$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}(2|f(r_0)|^2-\overline{f(r_0)}f(x)-f(r_0)\,\overline{f(x)})\,\frac{dq_0(x)}{x-r_0}-$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}(2|f(r_1)|^2-\overline{f(r_1)}\,f(x)-f(r_1)\,\overline{f(x)})\,\frac{dq_1(x)}{r_1-x}-$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\;\overline{f(x)}\;d\rho(x)-\int_{r_0}^{r_1}\overline{(Df)}\,(x)f(x)d\rho(x).$$

Das vorletzte Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung läßt sich folgendermaßen umformen:

$$-\int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\,\overline{f(x)}\;d\rho(x)=\int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\,\overline{f(x)}\;d\left[\int_{s=x}^{r_1}\frac{s-x}{s-r_0}dq_0(s)\right]+$$

$$+\int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\,\overline{f(x)}\;d\left[\int_{s=r_0}^{x}\frac{x-s}{r_1-s}dq_1(s)\right]=$$

$$=-\int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\overline{f(x)}\int_{s=x}^{r_1}\frac{dq_0(s)}{s-r_0}dx+\int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\,\overline{f(x)}\int_{s=r_0}^{x}\frac{dq_1(s)}{r_1-s}dx=$$

$$=-\int_{s=r_0}^{r_1}\int_{x=r_0}^{s}(Df)(x)\overline{f(x)}dx\frac{dq_0(s)}{s-r_0}+\int_{s=r_0}^{r_1}\int_{x=s}^{r_1}(Df)(x)\overline{f(x)}\,dx\frac{dq_1(s)}{r_1-s}=$$

$$=\int_{s=r_0}^{r_1}\left[|f(x)|^2\Big|_{r_0}^{s}-\int_{x=r_0}^{s}\overline{(Df)}(x)f(x)dx\right]\frac{dq_0(s)}{s-r_0}+\int_{s=r_0}^{r_1}\left[|f(x)|^2\Big|_{s}^{r_1}-\right.$$

$$\left.-\int_{x=s}^{r_1}\overline{(Df)}(x)f(x)dx\right]\frac{dq_1(s)}{r_1-s}=$$

$$=-\int_{s=r_0}^{r_1}\frac{|f(s)|^2-|f(r_0)|^2}{s-r_0}dq_0(s)+\int_{s=r_0}^{r_1}\frac{|f(r_1)|^2-|f(s)|^2}{r_1-s}dq_1(s)+$$

$$+\int_{r_0}^{r_1}\overline{(Df)}(x)f(x)d\rho(x).$$

Damit erhalten wir schließlich

$$2\operatorname{Re}(A_0f,f)=-2\kappa_0|f(r_0)|^2-2\kappa_1|f(r_1)|^2-2\int_{r_0}^{r_1}|(Df)(x)|^2\rho(x)dx \tag{2.3}$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}\frac{|f(x)-f(r_0)|^2}{x-r_0}dq_0(x)-\int_{r_0}^{r_1}\frac{|f(r_1)-f(x)|^2}{r_1-x}dq_1(x).$$

Den in Behauptung 2.1 auftretenden Raum $L^2(M)$, $L^2_j(M)$ oder $L^2_{01}(M)$, in dem der Operator A_0 dissipativ ist, bezeichnen wir mit $L^2_{A_0}$ und bemerken noch, daß die Beziehung (2.3) bei beliebigen Randbedingungen für $f\in\mathfrak{D}(A_0)\cap L^2_{A_0}$ gilt.

Behauptung 2.2. *Die Menge $\mathfrak{D}(A_0)$ liegt dicht in $L^2(M)$ und $\mathfrak{D}(A_0)\cap L^2_{A_0}$ liegt dicht in $L^2_{A_0}$.*

Beweis. Ist (1.4) für beide Randpunkte erfüllt, so liegt $\mathfrak{D}(A_0)$ dicht in C_m, also auch in $L^2(M)$. Ist (1.4) z.B. für r_i erfüllt und für r_j nicht erfüllt $(i\neq j)$, so gilt

$$\Phi_j(f)=\left(\kappa_j+\int_{r_0}^{r_1}\frac{dq_j(x)}{|r_j-x|}\right)f(r_j)-\int_{r_0}^{r_1}f(x)\frac{dq_j(x)}{|r_j-x|}.$$

Diese Randbedingung ist wegen $\sigma_j=0$ ein auf der in $L^2(M)$ dichten Menge aller $f\in\mathfrak{D}$ mit $\Phi_i(f)=0$ definiertes unstetiges lineares Funktional, woraus die erste Aussage folgt.

Ist z.B. $Q_0=0$, $\sigma_0>0$, $Q_1>0$ und (1.4) für $i=1$ erfüllt, so liegt

$\mathfrak{D}(A_0) \cap C_{m,0}$ dicht in $C_{m,0}$ (vgl. den Beweis von Behauptung 1.1), also auch dicht in $L^2_{A_0} = L^2_0(M)$. Entsprechend folgt die Aussage in den übrigen Fällen.

3. Der Operator A **in** $L^2(M)$. Wir setzen von jetzt an stets voraus, daß beide Randbedingungen zulässig sind, und vermerken das in den folgenden Aussagen mit (Z). Weiter bezeichne A_0 den im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Operator in $L^2(M)$. Der Kern

$$G(x, y; \lambda) = \frac{G_0(x, y; \lambda)}{\rho(y)} \tag{2.4}$$

ist dann eine stetige Funktion in $(x, y) \in [r_0, r_1] \times [r_0, r_1]$, und die Resolvente R_λ gestattet für alle λ mit $\Delta(\lambda) \neq 0$ die Darstellung

$$(R_\lambda f)(x) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \Big\{ \sigma_0 f(r_0) u_0(x; \lambda) + \sigma_1 f(r_1) u_1(x; \lambda) + \tag{2.5}$$

$$+ \int_{r_0+}^{r_1-} G(x, y; \lambda) f(y) dM(y) \Big\}.$$

Sie läßt sich also durch Stetigkeit auf ganz $L^2(M)$ fortsetzen; diese Fortsetzung bezeichnen wir wieder mit R_λ.

Man überzeugt sich leicht davon, daß R_λ den Raum $L^2_{A_0}$ in sich abbildet und $-R_\lambda$ für $\lambda > 0$ dort dissipativ ist.

Aus $R_\lambda f_0 = 0$ für ein Element $f_0 \in L^2_{A_0}$ folgt auf Grund der Dissipativität von R_λ in $L^2_{A_0}$, daß f_0 auf $R_\lambda L^2_{A_0}$ orthogonal ist ([12], V. §1). Andererseits enthält dieser Wertebereich die auf Grund von Behauptung 2.2 in $L^2_{A_0}$ dichte Menge $\mathfrak{D}(A_0) \cap L^2_{A_0}$. Somit gilt $f_0 = 0$, und man überlegt sich jetzt leicht, daß R_λ auch in $L^2(M)$ invertierbar ist.

Da weiter die Operatoren R_λ in $L^2(M)$ der Resolventengleichung genügen, bilden sie die Resolvente eines Operators A; dieser ist die Abschließung von A_0. Damit haben wir den ersten Teil des folgenden Satzes bewiesen:

Satz 2.1. *(Z) Der Operator A_0 hat eine Abschließung A in $L^2(M)$, die in $L^2_{A_0}$ maximal dissipativ ist. Dabei liegt (Af, f) für $f \in \mathfrak{D}(A) \cap L^2_{A_0}$*

im abgeschlossenen Winkelraum

$$+\pi-\alpha \leqq \arg (Af, f) \leqq +\pi+\alpha \tag{2.6}$$

mit $\tan \alpha = 2\left(\frac{1}{\min(\pi_0', \pi_1')}-1\right),\ 0 \leqq \alpha < \pi/2.$

Es bleibt nur die letzte Aussage zu beweisen; dabei kann man sich auf die Betrachtung von Elementen $f \in \mathfrak{D}(A_0)$ beschränken. Liegt der Fall III aus Behauptung 2.1 vor, so ist (2.6) offensichtlich richtig ($\alpha=0$). Wir betrachten hier wieder nur den Fall Ia, im Falle II verläuft der Beweis entsprechend.

Gemäß (2.2) gilt für $f \in \mathfrak{D}(A_0)$

$$\begin{aligned}(Af, f) &= -\kappa_0 |f(r_0)|^2 - \kappa_1 |f(r_1)|^2 - \int_{r_0}^{r_1} |(Df)(x)|^2 \rho(x)dx - \\ &\quad - \overline{f(r_1)} \int_{r_0}^{r_1} \frac{f(r_1)-f(x)}{r_1-x} dq_1(x) + \overline{f(r_0)} \int_{r_0}^{r_1} \frac{f(x)-f(r_0)}{x-r_0} dq_0(x) - \\ &\quad - \int_{r_0}^{r_1} (Df)(x)\, \overline{f(x)}\, d\rho(x) = \\ &= -\kappa_0 |f(r_0)|^2 - \kappa_1 |f(r_1)|^2 - \int_{r_0}^{r_1} |(Df)(x)|^2 \rho(x)dx + \\ &\quad + \int_{r_0}^{r_1} \overline{(Df)(x)} f(x) d\rho(x) + \int_{r_0}^{r_1} \frac{f(x)(\overline{f(r_1)}-\overline{f(x)})}{r_1-x} dq_1(x) - \\ &\quad - \int_{r_0}^{r_1} \frac{f(x)(\overline{f(x)}-\overline{f(r_0)})}{x-r_0} dq_0(x)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}2i \operatorname{Im}(Af, f) &= -\int_{r_0}^{r_1} \frac{(f(r_1)-f(x))(\overline{f(r_1)}+\overline{f(x)})}{r_1-x} dq_1(x) + \\ &\quad + \int_{r_0}^{r_1} \frac{(f(x)-f(r_0))(\overline{f(x)}+\overline{f(r_0)})}{x-r_0} dq_0(x) - \\ &\quad - 2\int_{r_0}^{r_1} (Df)(x)\overline{f(x)}\, d\rho(x).\end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\overline{f(x)}\,d\rho(x)=-\int_{r_0}^{r_1}\int_{x=s}^{r_1}(Df)(x)\overline{f(x)}\,dx\,\frac{dq_1(s)}{r_1-s}+$$

$$+\int_{r_0}^{r_1}\int_{x=r_0}^{s}(Df)(x)\overline{f(x)}\,dx\frac{dq_0(s)}{s-r_0}$$

und

$$2\int_{x=s}^{r_i}\overline{f(x)}(Df)(x)dx-(f(r_i)-f(s))(\overline{f(r_i)}+\overline{fs)})=$$

$$=2i\,\mathrm{Im}\int_{x=s}^{r_i}\int_{u=x}^{r_i}(Df)(u)(\overline{Df})(x)du\;dx$$

ist schließlich

$$\mathrm{Im}\,(Af,f)=\mathrm{Im}\left\{\int_{r_0}^{r_1}\int_{x=r_0}^{s}\int_{u=r_0}^{x}(Df)(u)(\overline{Df})(x)du\;dx\frac{dq_0(s)}{s-r_0}+\right.$$

$$\left.+\int_{r_0}^{r_1}\int_{x=s}^{r_1}\int_{u=x}^{r_1}(Df)(u)(\overline{Df})(x)du\;dx\frac{dq_1(s)}{r_1-s}\right\}.$$

Mit der Schwarzschen Ungleichung erhält man daraus zunächst

$$|\mathrm{Im}(Af,f)|\leqq\int_{r_0}^{r_1}\int_{u=r_0}^{s}|(Df)(u)|^2du\;dq_0(s)+\int_{r_0}^{r_1}\int_{u=s}^{r_1}|(Df)(u)|^2du\;dq_1(s)$$

und auf Grund der Normierung $\pi_i+\int dq_i=1,\ i=0,\ 1$:

$$|\mathrm{Im}\,(Af,f)|\leqq(2-\pi_0-\pi_1)\int_{r_0}^{r_1}|(Df)(u)|^2du\leqq$$

$$\leqq 2\,(1-\min\,(\pi_0,\ \pi_1))\int_{r_0}^{r_1}|(Df)(u)|^2du.$$

Da andererseits $-\mathrm{Re}(Af,f)\geqq\min\,(\pi_0,\ \pi_1)\int_{r_0}^{r_1}|(Df)(u)|^2du$ gilt, folgt

$$-\frac{|\mathrm{Im}(Af,f)|}{\mathrm{Re}(Af,f)}\leqq 2\left(\frac{1}{\min\,(\pi_0,\ \pi_1)}-1\right),$$

woraus sich leicht die Behauptung ergibt.

4. Vollständigkeit des Systems der Eigenräume. Den Ausgangspunkt der Überlegungen dieses Abschnittes bildet der

Satz 2.2. *(Z) Der Operator* $R_\lambda(\Delta(\lambda)\neq 0)$ *ist nuklear*[9] *in* $L^2(M)$.

Beweis. Die Operatoren $\Delta(\lambda)R_\lambda$ und K_λ:

$$(K_\lambda f)(x)=\int_{r_0}^{r_1} K(x,\ y;\ \lambda)f(y)\ dm(y)$$

sowie K_λ und $\tilde{K}_\lambda$:

$$(\tilde{K}_\lambda f)(x)=\int_{r_0}^{r_1} K(x,\ y;\ \lambda)f(y)\ d\bar{m}(y)$$

unterscheiden sich jeweils durch einen höchstens zweidimensionalen Operator. Somit ist R_λ genau dann nuklear, wenn dies für $\tilde{K}_\lambda$ zutrifft.

Die Räume $L^2(M)$ und $L^2(\bar{m})$ bestehen aus denselben Elementen, ihre Normen sind äquivalent. Deshalb genügt es zu zeigen, daß $\tilde{K}_\lambda$ in $L^2(\bar{m})$ nuklear ist.

Zu diesem Zweck betrachten wir den Operator J:

$$(Jf)\,(x)=\int_{y=x}^{r_1}\int_{s=r_0}^{y} f(s)d\bar{m}(s)dy, \qquad f\in L^2(\bar{m}).$$

Dann gilt $J=J^*$, die Funktion $g=Jf$ genügt den Randbedingungen

$$(Dg)\,(r_0)+\sigma_0 f(r_0)=0, \qquad g(r_1)=0, \tag{2.7}$$

und die Beziehung $Jf=\lambda f$ ist äquivalent der folgenden Randwertaufgabe in C_m:

$$D_m\,Df=-\frac{1}{\lambda}f,\ (Df)\,(r_0)-\sigma_0(D_m\,Df)\,(r_0)=0, \quad f(r_1)=0.$$

Für die Eigenwerte dieser Randwertaufgabe gilt aber (vgl. [6]) $\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|<\infty$, also ist J nuklear.

Es sei weiter P der orthogonale Projektor auf den durch die Funk-

9) Die Definition der Nuklearität findet man *z. B.* in [12], III, §8.

tionen $f_0(x)\equiv 1, f_1(x)\equiv x$ aufgespannten Teilraum von $L^2(\overline{m})$ und $Q= =I-P$. Wir betrachten den Operator $K_\lambda' = \tilde{K}_\lambda Q$. Für $f\in C_m$ folgt mit $h=JQf$ aus $(Qf, f_0)_{\overline{m}}=(Qf, f_1)_{\overline{m}}=0$ zunächst leicht

$$h(r_0)=0, \quad \sigma_1(Qf)(r_1)-(Dh)(r_1)=0 \tag{2.8}$$

und

$$\begin{aligned}(K_\lambda' f)(x) &= \sigma_0 K(x, r_0; \lambda)(Qf)(r_0)+\sigma_1 K(x, r_1; \lambda)(Qf)(r_1)+\\ &+\int_{r_0}^{r_1} K(x, y; \lambda)(Qf)(y)\, dm(y)=\\ &=K(x, r_0; \lambda)[\sigma_0(Qf)(r_0)+(Dh)(r_0)]+K(x, r_1; \lambda)[\sigma_1(Qf)(r_1)-\\ &-(Dh)(r_1)]+\int_{r_0}^{r_1}(Dh)(y)\, d_y K(x, y; \lambda).\end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden verschwinden auf Grund von (2.7) und (2.8), für den dritten Summanden ergibt sich durch partielle Integration $\Delta(\lambda)h(x)-\lambda\int_{r_0}^{r_1} K(x, y; \lambda)h(y)\, dm(y)$. Daraus folgt

$$K_\lambda' = -\lambda K_\lambda JQ + \Delta(\lambda)JQ,$$

also ist K_λ' und somit auch $\tilde{K}_\lambda$ nuklear in $L^2(\overline{m})$.

Behauptung 2.3. *(Z) Die algebraischen Eigenräume des Operators R_λ und die algebraischen Eigenräume des Operators R_λ^* bilden vollständige Systeme in $L^2(M)$.*

Beweis. Der Operator $-R_\lambda$, $\lambda>0$, ist in $L_{A_0}^2$ dissipativ und nuklear, hat also dort ein vollständiges System algebraischer Eigenräume ([12], V, Satz 2.3). Wir stellen $L^2(M)$ in der Form $L_{A_0}^2\oplus L_0$ mit einem höchstens zweidimensionalen Teilraum L_0 dar. Bezüglich dieser Zerlegung hat R_λ die Matrixdarstellung

$$R_\lambda = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man die Resolvente $(zI-R_\lambda)^{-1}$ und integriert diese nach

Multiplikation mit $\frac{1}{2\pi i}$ längs einer geschlossenen Kontur in der z-Ebene, die ganz in $\rho(R_\lambda)$ verläuft und $\sigma(R_{22})$ genau einmal umschließt, so hat der erhaltene Rieszsche Projektor die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt leicht die Behauptung.

Betrachtet man R_λ als Operator in C_m, so hat er dort die gleichen Eigenwerte und algebraischen Eigenräume wie in $L^2(M)$.

Wir setzen jetzt

$$C_{A_0}=\begin{cases} C_m & \text{falls } \pi_i+\sigma_i>0, \quad i=0,1, \\ C_{m;i} & \text{falls } \pi_i+\sigma_i=0,\ \pi_j+\sigma_j>0, \quad i\neq j, \quad i,j=0,1, \\ C_{m;0,1} & \text{falls } \pi_i+\sigma_i=0, \quad i=0,1, \end{cases}$$

wobei $C_{m;i}$ (bzw. $C_{m;0,1}$) die Menge aller Funktionen aus C_m bezeichnet, die bei $x=r_i$ (bzw. $x=r_0$ und $x=r_1$) verschwinden ($i=0, 1$). Weiter sei $\hat{A}_0$ die größte Einschränkung von A_0 in C_{A_0}. Wir vermerken, daß der Definitionsbereich $\mathfrak{D}(\hat{A}_0)$ in C_{A_0} dicht liegt (vgl. den Beweis von Behauptung 1.1).

Behauptung 2.4. (Z) *Die algebraischen Eigenräume von R_λ bilden ein vollständiges System in C_{A_0}.*

Beweis. Wäre die lineare Hülle $\mathfrak{L}$ des Systems der algebraischen Eigenräume von R_λ nicht dicht in C_{A_0}, so gäbe es ein $\mu\in C'_{A_0}$ mit $\int_{r_0}^{r_1} f\,d\mu=0$ für alle $f\in\mathfrak{L}$. Wegen $R_\lambda\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}$ folgt $\int_{r_0}^{r_1} R_\lambda f\,d\mu=0$, *d.h.*

$$0=\sigma_0 f(r_0)\int_{r_0}^{r_1} u_0(x;\lambda)\,d\mu(x)+\sigma_1 f(r_1)\int_{r_0}^{r_1} u_1(x;\lambda)\,d\mu(x)+\int_{r_0+}^{r_1-}\int_{r_0}^{r_1} G(x,y;\lambda)\,d\mu(x) f(y)\,dM(y).$$

Für die Funktion $g\in L^2(M)$:

$$g(y)=\int_{r_0}^{r_1} G(x,\ y;\ \lambda)\, d\mu(x),\ r_0<y<r_1;\ \sigma_i g(r_i)=\sigma_i\int_{r_0}^{r_1} u_i\,(x\,;\ \lambda)\ d\mu\,(x)$$

gilt somit $(f,\ \bar{g})=0$ für alle $f\in\mathfrak{L}$, also ist $g=0$ auf Grund von Behauptung 2.3. Für ein beliebiges $h\in\mathfrak{D}(A_0)$, $\tilde{h}=-A_0h+\lambda h$, ergibt sich dann

$$\int_{r_0}^{r_1} h(x)d\mu(x)=\int_{r_0}^{r_1} R_\lambda\,\tilde{h}\ d\mu=(\tilde{h},\ \bar{g})=0.$$

Da andererseits $\mathfrak{D}(A_0)$ in C_{A_0} dicht liegt, folgt $\mu=0$.

Der Operator R_λ in C_m hat einen adjungierten Operator R'_λ im dualen Raum C'_m von C_m, und zwar folgt aus (2.5), daß für beliebiges $\mu\in C'_m$ das Bild $R'_\lambda\mu$ absolutstetig ist bezüglich M. Den Raum aller bezüglich M absolutstetigen Elemente von C'_m bezeichnen wir mit $C'_m(M)$.

Der Beweis der folgenden Behauptung sei dem Leser überlassen.

Behauptung 2.5. (Z) *Das System der algebraischen Eigenräume von R'_λ ist vollständig in $C'_m(M)$.*

Der Operator R_λ in C_m bzw. $L^2(M)$ ist die Resolvente von A_0 bzw. A, R^*_λ ist die Resolvente von A^*. Bekanntlich ist die komplexe Zahl λ_0 genau dann ein Eigenwert von A oder A^*, wenn $\dfrac{1}{\lambda-\lambda_0}$ ein Eigenwert von R_λ oder R^*_λ ist, und die zugehörigen algebraischen Eigenräume stimmen überein. Deshalb kann man in Behauptung 2.3 R_λ und R^*_λ durch A bzw. A^* und in Behauptung 2.4 R_λ durch A_0 ersetzen. Ist $\overline{\mathfrak{D}(A_0)}=C_m$, so bleibt die Aussage von Behauptung 2.5 auch für A'_0 an Stelle von R'_λ richtig, im Falle $\overline{\mathfrak{D}(A_0)}\neq C_m$ gilt das noch für die Adjungierte von $\hat{A}_0$.

5. Im Falle $L^2_{A_0}\neq L^2(M)$ hat der Operator A höchstens zwei Eigenwerte, deren zugehörige algebraische Eigenräume nicht ganz in $L^2_{A_0}$ liegen.

Behauptung 2.6. (Z) *Es sei $Q_i=0$, $\sigma_i>0$ für $i=0$ oder 1. Dann ist $-\dfrac{\kappa_i}{\sigma_i}$ ein Eigenwert von A, für dessen zugehörige Rieszsche Projektion P_i gilt: $(P_if)\,(r_i)=f(r_i)$.*

Beweis. Es sei z.B. $i=0$. Dann ergibt sich $\Delta(\lambda)=(\kappa_0+\sigma_0\lambda)\ \Phi_1(w_1(\cdot\,;\ \lambda))$, also ist $-\frac{\kappa_0}{\sigma_0}$ Eigenwert von A. Für die zugehörige Rieszsche Projektion folgt bei Wahl einer geeigneten Kontur C_0

$$(P_0 f)(r_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}(R_\lambda f)(r_0)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\sigma_0 f(r_0)u_0(r_0;\lambda)}{(\kappa_0+\sigma_0\lambda)\Phi_1(w_1(\cdot;\lambda))}d\lambda=f(r_0);$$

dabei haben wir die Beziehungen $u_1(r_0;\lambda)=0$, $G_0(r_0, y;\lambda)=0$ und $u_0(r_0;\lambda)=\Phi_1(w_1(\cdot;\lambda))$ benutzt.

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Behauptung 2.6 gilt also für alle Funktionen f aus dem Wertebereich von $I-P_i$: $f(r_i)=0$. Deshalb liegen alle algebraischen Eigenräume zu Eigenwerten $\lambda\neq-\frac{\kappa_i}{\sigma_i}$, $i=0, 1$, ganz in $L^2_{A_0}$.

§3. Der adjungierte Operator A^*

Der Operator A ist in $L^2(M)$ gemäß den Ergebnissen der Punkte 2 und 3 von §2 dicht definiert und abgeschlossen. Er hat folglich einen adjungierten Operator A^*, dessen Gestalt wir in diesem Paragraphen für den Fall zulässiger Randbedingungen bestimmen wollen.

Es sei im folgenden stets $\lambda>0$. Wir berechnen zunächst den Operator R^*_λ, wenn R_λ wieder die Resolvente von A bezeichnet. Für beliebige f, $g\in L^2(M)$ gilt gemäß (2.5)

$$(R_\lambda f, g)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\{\sigma_0 f(r_0)\int_{r_0}^{r_1}u_0(x;\lambda)\overline{g(x)}dM(x)+$$

$$+\sigma_1 f(r_1)\int_{r_0}^{r_1}u_1(x;\lambda)\overline{g(x)}dM(x)+\int_{r_0}^{r_1}\int_{r_0+}^{r_1-}G(x, y;\lambda)f(y)dM(y)\overline{g(x)}dM(x)$$

$$=\sigma_0 f(r_0)\overline{(R^*_\lambda)(r_0)}+\sigma_1 f(r_1)\overline{(R^*_\lambda)(r_1)}+\int_{r_0+}^{r_1-}f(y)\overline{(R^*_\lambda)(y)}\,dM(y),$$

also ist

$$(R^*_\lambda)(y)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_{r_0}^{r_1}G(x, y;\lambda)g(x)dM(x),\qquad r_0<y<r_1, \tag{3.1}$$

$$(R^*_\lambda g)(r_i)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_{r_0}^{r_1}u_i(x;\lambda)g(x)dM(x)\qquad \text{falls } \sigma_i>0.$$

Wir bemerken, daß $R_\lambda^* g$ im Intervall (r_0, r_1) stetig ist und in den Randpunkten den Grenzwert

$$(3.2) \qquad \lim_{y\to r_i} (R_\lambda^* g)(y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \pi_i = 0 \\ \dfrac{1}{\Delta(\lambda)} \displaystyle\int_{r_0}^{r_1} u_i(x;\lambda) g(x) dM(x) & \text{falls } \pi_i > 0 \end{cases}$$

hat. Im Sinne des $L^2(M)$ können wir also

$$(3.3) \qquad (R_\lambda^* g)(r_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta(\lambda)} \displaystyle\int_{r_0}^{r_1} u_i(x;\lambda) g(x) dM(x) & \text{falls } \pi_i + \sigma_i > 0 \\ 0 & \text{falls } \pi_i = \sigma_i = 0 \end{cases}$$

setzen; dann ist $R_\lambda^* g$ für $\pi_i > 0$ oder $\pi_i = \sigma_i = 0$ stetig in r_i.

Für Funktionen f auf $[r_0, r_1]$, die im Inneren dieses Intervalls stetig sind und in den Randpunkten einseitige Grenzwerte haben, erklären wir eine neue Funktion Bf auf (r_0, r_1) durch die Gleichung

$$(Bf)(y) = \rho(y) f(y) + f(r_0+) \int_{s=y}^{r_1} \frac{s-y}{s-r_0} dq_0(s) + f(r_1-) \int_{s=r_0}^{y} \frac{y-s}{r_1-s} dq_1(s).$$

Dann ergibt sich bei Beachtung der Beziehungen (3.1) und (3.2)

$$(BR_\lambda^* g)(y) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_{r_0}^{r_1} [G_0(x, y) + u_0(x) \int_y^{r_1} \frac{s-y}{s-r_0} dq_0(s) +$$

$$+ u_1(x) \int_{r_0}^{y} \frac{y-s}{r_1-s} dq_1(s)] g(x) dM(x) =$$

$$= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_{r_0}^{r_1} [u_0(x) \int_y^{r_1} \frac{s-y+V(s, y)}{s-r_0} dq_0(s) - u_1(x) \int_{r_0}^{y} \frac{s-y+V(s, y)}{r_1-s} dq_1(s) +$$

$$+ K(x, y)] g(x) dM(x).$$

Mit Hilfe der Gleichung

$$V(x, y) = y - x - \lambda \int_{t=y}^{x} (y-t) V(x, t)\, dm(t)$$

folgt daraus

$$(3.4)\quad (BR_\lambda^* g)(y)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big\{-\lambda\int_{t=y}^{r_1}(y-t)\int_{s=t}^{r_1}\frac{V(s,t)}{s-r_0}dq_0(s)\,dm(t)\int_{r_0}^{r_1}u_0 g dM-$$

$$-\lambda\int_{t=r_0}^{y}(y-t)\int_{s=r_0}^{t}\frac{V(s,t)}{r_1-s}dq_1(s)\,dm(t)\int_{r_0}^{r_1}u_1 g\,dM+$$

$$+\sigma_0 u_1(r_0)u_0(y)g(r_0)+\sigma_1 u_0(r_1)u_1(y)g(r_1)+$$

$$+\int_{r_0+}^{r_1-}K(x,y)g(x)dM(x)\Big\}.$$

Ist insbesondere $g\in C_m$, so gilt also $BR_\lambda^* g\in\mathfrak{D}(D_{M_0}D)$[10] und

$$(D_{M_0}D)BR_\lambda^* g(y)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big\{\frac{\lambda}{\rho(y)}\int_{s=y}^{r_1}\frac{V(s,y)}{s-r_0}dq_0(s)\int_{r_0}^{r_1}u_0 g dM-$$

$$-\frac{\lambda}{\rho(y)}\cdot\int_{s=r_0}^{y}\frac{V(s,y)}{r_1-s}dq_1(s)\int_{r_0}^{r_1}u_1 g dM+\frac{1}{\rho(y)}\sigma_0 u_1(r_0)\lambda u_0(y)g(r_0)+$$

$$+\frac{1}{\rho(y)}\sigma_1 u_0(r_1)\lambda u_1(y)g(r_1)+\frac{\lambda}{\rho(y)}\int_{r_0+}^{r_1-}K(x,y)g(x)dM_0(x)-\Delta(\lambda)g(y)\Big\}=$$

$$=\lambda(R_\lambda^* g)(y)-g(y)=(A^*R_\lambda^* g)(y),$$

d.h., für beliebiges $f\in\mathfrak{D}(A^*)$ und $y\in(r_0,r_1)$ erhalten wir

$$(Bf)(y)=a+b(y-r_0)+\int_{r_0}^{y}(y-s)(A^*f)(s)dM_0(s).$$

Es sei jetzt wieder $g\in C_m$. Dann gilt auf Grund von (3.4)

$$DBR_\lambda^* g(y)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big\{-\lambda\int_{t=y}^{r_1}\int_{s=t}^{r_1}\frac{V(s,t)}{s-r_0}dq_0(s)\,dm(t)\int_{r_0}^{r_1}u_0 g\,dM-$$

$$-\lambda\int_{t=r_0}^{y}\int_{s=r_0}^{t}\frac{V(s,t)}{r_1-s}dq_1(s)\,dm(t)\int_{r_0}^{r_1}u_1 g dM+g(r_0)\sigma_0 u_1(r_0)(Du_0)(y)+$$

$$+g(r_1)\sigma_1 u_0(r_1)(Du_1)(y)+\int_{r_0+}^{y+}u_1 g\,dM(Du_0)(y)+\int_{y+}^{r_1-}u_0 g\,dM(Du_1)(y)\Big\}$$

---

10) Es sei $dM_0(x)=\rho(x)\,dm(x)$.

Für $y \downarrow r_0$ folgt daraus

$$(DBR_\lambda^* g)(r_0+) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big\{-\lambda\int_{r_0}^{r_1}\int_{s=t}^{r_1}\frac{V(s,t)}{s-r_0}dq_0(s)\,dm(t)\int_{r_0}^{r_1}u_0 g\,dM +$$

$$+\int_{r_0}^{r_1}u_0 g\,dM(Du_1)(r_0) - \sigma_0\Delta(\lambda)g(r_0)\Big\} =$$

$$= -\sigma_0 g(r_0) + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_{r_0}^{r_1}u_0 g\,dM(\kappa_0+\sigma_0\lambda) =$$

$$= \kappa_0\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_{r_0}^{r_1}u_0 g\,dM + \sigma_0(A^* R_\lambda^* g)(r_0).$$

Der erste Summand der rechten Seite ist für $\pi_0+\sigma_0>0$ gleich $(R_\lambda^* g)(r_0)$, deshalb genügen in diesem Falle die Elemente $f\in\mathfrak{D}(A^*)$ der Randbedingung

$$\kappa_0 f(r_0) + \sigma_0(A^* f)(r_0) - DBf(r_0+) = 0.$$

Ist $\pi_0=\sigma_0=0$, so wählen wir als Randbedingung gemäß (3.3) $f(r_0)=0$. Entsprechende Betrachtungen gelten für den rechten Randpunkt r_1.

Wir führen jetzt auf den geeigneten Funktionen $f\in L^2(M)$ die folgenden Funktionale ein:

$$\Phi_i^*(f) = \begin{cases} \kappa_i f(r_i) + (-1)^{i+1}\lim\limits_{x\to r_i} DBf(x) + \sigma_i(A^* f)(r_i) & \text{falls } \pi_i+\sigma_i>0,\\ f(r_i) & \text{falls } \pi_i=\sigma_i=0.\end{cases}$$

Die obigen Überlegungen ergeben dann einen Teil der Aussage des folgenden Satzes.

Satz 3.1. *(Z) Das Element $f\in L^2(M)$ gehört genau dannzu $\mathfrak{D}(A^*)$, wenn es die folgenden Eigenschaften hat:*

1) *f ist stetig in (r_0, r_1);*
2) *die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to r_i} f(x)$ existieren, im Falle $\pi_i=0$ ist $\lim\limits_{x\to r_i} f(x)=0$, im Falle $\pi_i>0$ oder $\sigma_i=0$ ist f (einseitig) stetig in r_i;*
3) *es gibt ein $f^*\in L^2(M)$, so daß gilt:*

$$(Bf)(x)=a+b(x-r_0)+\int_{r_0+}^{x}(x-s)f^*(s)\,dM(s),\ r_0<x<r_1;$$

4) *f genügt den Randbedingungen*

$$\Phi_i^*(f)=0,\quad i=0,1.$$

In diesem Falle ist $A^*f=f^*$, *wobei der Funktionswert* $A^*f(r_i)$ *für* $\sigma_i>0$ *durch die Randbedingung definiert ist.*

Es bleibt noch zu zeigen, daß für $f\in L^2(M)$ mit den Eigenschaften 1)–4) und das zugehörige Element f^* aus Punkt 3) die Beziehung $(g,f^*)=$ $=(A_0g,f)$ für alle $g\in\mathfrak{D}(A_0)$ besteht. Das ergibt sich folgendermaßen:

$$(g,f^*)=g(r_0)[\sigma_0\overline{f^*(r_0)}-\overline{(DBf)(r_0+)}]+g(r_1)[\sigma_1\overline{f^*(r_1)}+\overline{(DBf)(r_1-)}]-$$

$$-\int_{r_0+}^{r_1-}(\bar b+\int_{r_0+}^{x}\overline{f^*(s)}\,dM(s))dg(x)=$$

$$=-\kappa_0g(r_0)\overline{f(r_0)}-\kappa_1g(r_1)\overline{f(r_1)}-\int_{r_0+}^{r_1-}(Dg)(x)d\overline{(Bf)(x)}=$$

$$=-\int_{r_0+}^{r_1-}(Dg)(x)d\overline{(\rho f)(x)}-\overline{f(r_0)}[\kappa_0g(r_0)-\int_{r_0}^{r_1}\frac{g(s)-g(r_0)}{s-r_0}dq_0(s)]-$$

$$-\overline{f(r_1)}[\kappa_1g(r_1)+\int_{r_0}^{r_1}\frac{g(r_1)-g(s)}{r_1-s}dq_1(s)]=$$

$$=-\rho(x)\overline{f(x)}(Dg)(x)\Big|_{r_0+}^{r_1-}+\int_{r_0+}^{r_1-}\rho(x)\overline{f(x)}\,d(Dg)\,(x)+$$

$$+\overline{f(r_0)}[-\pi_0(Dg)(r_0)+\sigma_0(A_0g)(r_0)]+$$

$$+\overline{f(r_1)}[\pi_1(Dg)(r_1)+\sigma_1(A_0g)(r_1)]=(A_0g,f).$$

§4. Absolutstetigkeit der Übergangsfunktion

1. Die Operatoren $T_t^{(n)}$. Im folgenden bezeichnen wir für $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ mit $\Theta_{\alpha,\gamma}^-$ den abgeschlossenen Winkelraum aller Punkte z mit $\pi-\alpha\leqq$ $\leqq\arg(z-\gamma)\leqq\pi+\alpha$ und setzen $\Theta_\alpha^-=\Theta_{\alpha,0}^-$, $\Theta_\alpha^+=-\Theta_\alpha^-$. Für eine solche Menge Θ sei $\mathring{\Theta}$ ihr offener Kern; $C_{\alpha,\gamma}$ bezeichne den positiv orientierten

Rand von $\Theta^-_{\alpha,\gamma}$.

Wir setzen weiter $P=P_0+P_1$ und $Q=I-P$, wenn P_i dieselbe Bedeutung wie in Behauptung 2.6 hat; sind deren Voraussetzungen für den Randpunkt r_i nicht erfüllt, so sei $P_i=0$ $(i=0, 1)$. Dann gestattet $L^2(M)$ die Darstellung

$$L^2(M)=\mathfrak{L}_1\dot{+}\mathfrak{L}_2,$$

dabei sind die Teilräume $\mathfrak{L}_1:=QL^2(M)$ und $\mathfrak{L}_2:=PL^2(M)$ invariant bezüglich A, es gilt $\mathfrak{L}_1\subset L^2_{A_0}$, und $\mathfrak{L}_2$ ist endlichdimensional. Der Operator $A_{11}:=A|_{\mathfrak{L}_1}$ ist maximal dissipativ in $\mathfrak{L}_1$, genauer, für $f\in\mathfrak{L}_1\cap\mathfrak{D}(A)$ gilt mit einer Konstanten $\alpha>0$ gemäß Satz 2.1

$$(Af, f)\in\Theta^-_{\alpha}. \tag{4.1}$$

Wir setzen noch $A_{22}=A|_{\mathfrak{L}_2}$.

Lemma 4.1. *(Z) Wählen wir* $\gamma>\dfrac{\|A_{22}\|}{\sin\alpha}$, *so gilt* $\sigma(A)\subset\mathring{\Theta}^-_{\alpha,\gamma}$; *für* $n\geqq 0$ *und* $t\in\mathring{\Theta}^+_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ *konvergieren die Integrale*

$$T^{(n)}_t=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\alpha\,\gamma}}\lambda^n\, e^{\lambda t}\, R_\lambda d\lambda \tag{4.2}$$

in der gleichmäßigen Operatortopologie und sind unabhängig von γ; $T^{(0)}_t$ *ist eine stark-stetige Halbgruppe, in* $\mathring{\Theta}^+_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ *ist* $T^{(n)}_t$ *eine holomorphe Funktion von* t *und es gilt*

$$\frac{d}{dt}T^{(n)}_t=T^{(n+1)},\qquad n\geqq 0.\,^{11)} \tag{4.3}$$

Beweis. Der Operator A ist der infinitesimale Generator einer stark-stetigen Halbgruppe (S_t), dabei gilt für $\gamma>\dfrac{\|A_{22}\|}{\sin\alpha}$ gemäß [13], XI, §2, (E_6)

11) Die Holomorphie von $T^{(0)}_t$ ergibt sich auch aus [5], IX. 10 (vgl. ebenfalls [14], Folgerung 2.5).

$$S_t f = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\tau}^{\gamma + i\tau} e^{\lambda t} (\lambda I - A)^{-1} f \, d\lambda, \qquad f \in \mathfrak{D}(A).$$

Aus (4.1) und einer leichten Verallgemeinerung von [12], IV., Satz 4.1 auf unbeschränkte maximal dissipative Operatoren folgt für alle $\lambda \notin \Theta_{\alpha}^{-}$ mit hinreichend großem Betrag und eine geeignete Konstante C die Abschätzung

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqq \frac{C}{\cos\alpha |\operatorname{Im}\lambda| + \sin\alpha \operatorname{Re}\lambda}. \tag{4.4}$$

Mit dem Cauchyschen Integralsatz erhält man dann nach einer einfachen Rechnung

$$S_t f = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\alpha,r}}' e^{\lambda t} (\lambda I - A)^{-1} f \, d\lambda, \qquad f \in \mathfrak{D}(A),$$

wobei der Strich am Integral besagt, daß bei $\lambda = \infty$ wieder der Cauchysche Hauptwert zu nehmen ist.

Andererseits ergibt sich bei Beachtung von (4.4), daß die Integrale (4.2) für Werte aus $\Theta_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{+}$ in der gleichmäßigen Operatortopologie konvergieren und die Beziehung (4.3) besteht.

Wir bemerken, daß die Halbgruppe $(T_t^{(0)})$ gleichmäßig beschränkt ist; im Falle $L_{A_0}^2 = L^2(M)$ besteht sie aus Kontraktionen, denn dann ist A maximal dissipativ in $L^2(M)$.

2. Neben der Norm des Raumes $L^2(M)$ führen wir für $f \in C_m$ noch die Norm

$$\|f\|_\rho = \left(\int_{r_0}^{r_1} |f(x)|^2 \rho(x) dx \right)^{1/2}$$

ein. Ist $f \in \mathfrak{D}$ (siehe §1.1), so gilt für $r_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq r_1$:

(4.5)

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \int_{x_1}^{x_2} |(Df)(x)| \, dx \leqq \left(\int_{x_1}^{x_2} |(Df)(x)|^2 dx \right)^{1/2} (x_2 - x_1)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq\left(\frac{r_1-r_0}{\min(\pi_0', \pi_1')}\right)^{1/2}\left(\int_{r_0}^{r_1}|(Df)(x)|^2\rho(x)\,dx\right)^{1/2}=\left(\frac{r_1-r_0}{\min(\pi_0', \pi_1')}\right)^{1/2}\|Df\|_\rho.$$

Lemma 4.2. (*Z*) *Für* $f\in\mathfrak{D}$ *gilt*

$$|f(x)|\leqq\|f\|\left(\int_{r_0}^{r_1}dM\right)^{-1/2}+\|Df\|_\rho\left(\frac{r_1-r_0}{\min(\pi_0', \pi_1')}\right)^{1/2}.$$

Beweis. Angenommen, für ein $x\in[r_0, r_1]$ wäre diese Ungleichung nicht richtig. Dann ergäbe sich für beliebiges $w\in[r_0, r_1]$ auf Grund von (4.5)

$$\|f\|\left(\int_{r_0}^{r_1}dM\right)^{-1/2}+\|Df\|_\rho\left(\frac{r_1-r_0}{\min(\pi_0', \pi_1')}\right)^{1/2}<|f(x)|\leqq|f(x)-f(w)|+$$

$$+|f(w)|\leqq|f(w)|+\|Df\|_\rho\left(\frac{r_1-r_0}{\min(\pi_0', \pi_1')}\right)^{1/2},$$

also $|f(w)|>\|f\|\left(\int_{r_0}^{r_1}dM\right)^{-1/2}$, woraus leicht ein Widerspruch folgt.

Für beliebiges $f\in L^2(M)$ gilt weiter

$$(Pf)(x)=\sum(f, \varphi_j)\,\psi_j(x)$$

mit stetigen Funktionen $\psi_j(x)$, also ist

$$|(Pf)(x)|\leqq C\|f\| \tag{4.6}$$

für alle $x\in[r_0, r_1]$.

Ist $g\in C_m\cap L^2_{A_0}$, so gehört die Funktion $R_\lambda g$ zu $\mathfrak{D}(A_0)$, und es ergibt sich auf Grund der Bemerkung im Anschluß an (2.3)

$$\|DR_\lambda g\|_\rho^2=\int_{r_0}^{r_1}|(DR_\lambda g)(x)|^2\rho(x)dx\leqq-\mathrm{Re}(AR_\lambda g, R_\lambda g)= \tag{4.7}$$

$$=-\mathrm{Re}\,\lambda\|R_\lambda g\|^2+\mathrm{Re}(g, R_\lambda g)\leqq(|\lambda|\,\|R_\lambda\|+1)\|R_\lambda\|\|g\|^2.$$

Da der Projektor Q den Raum $L^2(M)$ in $L^2_{A_0}$ abbildet, folgt aus Lemma 4.2, (4.6) und (4.7) für $f\in C_m$

$$(4.8)\qquad |(R_\lambda f)(x)|\leqq|(PR_\lambda f)(x)|+|(R_\lambda Qf)(x)|\leqq C\|R_\lambda\|\|f\|+$$

$$+\left\{\|R_\lambda\|\left(\int_{r_0}^{r_1}dM\right)^{-1/2}+(|\lambda|\|R_\lambda\|^2+\|R_\lambda\|)^{1/2}\left(\frac{r_1-r_0}{\min(\pi_0',\pi_1')}\right)^{1/2}\right\}\|Q\|\|f\|.$$

Da aus $f_n\to f$ in $L^2(M)$ stets $(R_\lambda f_n)(x)\to(R_\lambda f)(x)$, $x\in[r_0, r_1]$, folgt, besteht die Abschätzung (4.8) sogar für alle $f\in L^2(M)$.

Lemma 4.3. *(Z) Ist* $f\in L^2(M)$, $n\geqq 0$, $t\in\mathring{\Theta}^+_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ *und* $\gamma>\dfrac{\|A_{22}\|}{\sin\alpha}$, *so kann für* $T_t^{(n)}f\in L^2(M)$ *der folgende Repräsentant gewählt werden:*

$$(4.9)\qquad (T_t^{(n)}f)(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\alpha,\gamma}}\lambda^n e^{\lambda t}(R_\lambda f)(x)d\lambda,\qquad x\in[r_0, r_1];$$

dabei existiert das Integral gleichmäßig bezüglich x *und ist unabhängig von* γ. *Die Funktion* $(T_t^{(n)}f)(x)$ *ist auf* $[r_0, r_1]$ *stetig in* x, *für festes* $x\in[r_0, r_1]$ *in* $\mathring{\Theta}^+_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ *holomorph in* t *und es gilt*

$$(4.10)\qquad \frac{d}{dt}(T_t^{(n)}f)(x)=(T_t^{(n+1)}f)(x).$$

Beweis. Für $\lambda\in C_{\alpha,\gamma}$, $\lambda=\tau\pm i(\gamma-\tau)\tan\alpha$, $-\infty<\tau<\gamma$, gilt $(\mathrm{Re}\lambda)\cdot$ $\cdot\sin\alpha+|\mathrm{Im}\,\lambda|\cos\alpha=\gamma\sin\alpha$. Deshalb ist $\|R_\lambda\|$ auf $C_{\alpha,\gamma}$ gemäß (4.4) beschränkt, und wir erhalten aus (4.8)

$$(4.11)\qquad |(R_\lambda f)(x)|\leqq(C_1+C_2|\lambda|^{1/2})\|f\|.$$

Der Ausdruck unter dem Integral der rechten Seite von (4.9) läßt sich für $|\tau|$ hinreichend groß folgendermaßen abschätzen ($r=\mathrm{Re}\,t$, $s=\mathrm{Im}\,t$):

$$|\lambda^n e^{\lambda t}(R_\lambda f)(x)|\leqq C_3\|f\|(\tau^2+(\gamma-\tau)^2\tan^2\alpha)^{\frac{2n+1}{4}}e^{\tau r\pm s(\gamma-\tau)\tan\alpha};$$

also existiert dieses Integral für festes t aus dem angebenen Bereich gleichmäßig bezüglich $x\in[r_0, r_1]$. Dann muß die rechte Seite von (4.9) in $L^2(M)$ aber mit $(T_t^{(n)}f)(x)$ für den in Lemma 4.1 eingeführten Operator $T_t^{(n)}$ übereinstimmen. Die Stetigkeit von $(T_t^{(n)}f)(x)$ bezüglich x ergibt sich leicht aus der Stetigkeit von $(R_\lambda f)(x)$ und (4.10) ebenso wie (4.3). Damit ist das Lemma bewiesen.

Im folgenden wählen wir für $T_t^{(n)} f \in L^2(M)$ stets den durch (4.9) definierten Repräsentanten.

3. Wir setzen jetzt für eine beliebige Borelmenge $\Gamma \subset [r_0, r_1]$ mit der charakteristischen Funktion χ_Γ:

$$P_n(t;\, x,\, \Gamma) := (T_t^{(n)} \chi_\Gamma)(x).$$

Satz 4.1. (Z) *Für feste* $t \in \overset{\circ}{\Theta}{}^{+}_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ *und* $x \in [r_0, r_1]$ *ist* $P_n(t;\, x,\, \cdot)$ *eine σ-additive, bezüglich des Maßes M absolutstetige Mengenfunktion. Die zugehörige Dichte* $p_n(t;\, x,\, y)$ *gestattet die Darstellung*

$$(4.12)\quad \begin{aligned} p_n(t;\, x,\, y) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\alpha,T}} \lambda^n e^{\lambda t} \frac{G(x,\, y;\, \lambda)}{\Delta(\lambda)}\, d\lambda, \quad x \in [r_0, r_1],\ y \in (r_0, r_1),\\ p_n(t;\, x,\, r_k) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\alpha,T}} \lambda^n e^{\lambda t} \frac{u_k(x;\, \lambda)}{\Delta(\lambda)}\, d\lambda, \quad x \in [r_0, r_1],\ \textit{falls } \sigma_k > 0 \\ &\qquad (k = 0,\, 1), \end{aligned}$$

dabei konvergieren die Integrale gleichmäßig in x, y bzw. x in den angegebenen Bereichen. Der Operator $T_t^{(n)}$, $t \in \overset{\circ}{\Theta}{}^{+}_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ *hat die Gestalt*

$$(T_t^{(n)} f)(x) = \int_{r_0}^{r_1} p_n(t;\, x,\, y) f(y)\, dM(y), \qquad f \in L^2(M),$$

er bildet C_m *in sich ab und ist vollstetig in* $L^2(M)$ *und* C_m.

Beweis. Wir setzen

$$\tilde{G}(x,\, y;\, \lambda) = \frac{G(x,\, y;\, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad x \in [r_0, r_1],\ y \in (r_0, r_1),$$

$$\tilde{G}(x,\, r_k;\, \lambda) = \frac{u_k(x;\, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad x \in [r_0, r_1], \text{ falls } \sigma_k > 0 \quad (k = 0,\, 1).$$

Dann ist $(R_\lambda f)(x) = \int_{r_0}^{r_1} \tilde{G}(x,\, y;\, \lambda) f(y)\, dM(y)$, $f \in L^2(M)$. Auf Grund von (4.11) ist $(R_\lambda\,.)(x)$ ein lineares beschränktes Funktional über $L^2(M)$, längs $C_{\alpha,\gamma}$ gilt deshalb

$$\|\tilde{G}(x, .; \lambda)\| \leqq C_1 + C_2 |\lambda|^{1/2}.$$

Aus der Resolventengleichung $R_\lambda - R_\mu = (\mu-\lambda) R_\lambda R_\mu$ folgt

$$\tilde{G}(x, y; \lambda) = \tilde{G}(x, y; \mu) + (\mu-\lambda)\int_{r_0}^{r_1} \tilde{G}(x, s; \lambda)\tilde{G}(s, y; \mu)\, dM(s),$$

$x, y \in [r_0, r_1]$, und damit für festes $\mu > 0$ und $\lambda \in C_{\alpha,\gamma}$

$$|\tilde{G}(x, y; \lambda)| \leqq |\tilde{G}(x, y; \mu)| + |\mu-\lambda| \|\tilde{G}(x, .; \lambda)\| \|\tilde{G}(\,.\,, y; \mu)\| \leqq$$

$$\leqq \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 |\lambda|^{1/2} + \tilde{C}_3 |\lambda|^{3/2}$$

mit von x und y unabhängigen Konstanten $\tilde{C}_k$ $(k=1, 2, 3)$. Deshalb konvergiert $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\alpha,\gamma}} \lambda^n e^{\lambda t} \tilde{G}(x, y; \lambda) d\lambda$ absolut und gleichmäßig in x und y, und es gilt dann wegen Lemma 4.3 für $f \in L^2(M)$

$$(T_t^{(n)} f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\alpha,\gamma}} \lambda^n e^{\lambda t} \int_{r_0}^{r_1} \tilde{G}(x, y; \lambda) f(y)\, dM(y)\, d\lambda =$$

$$= \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\alpha,\gamma}} \lambda^n e^{\lambda t} \tilde{G}(x, y; \lambda)\, d\lambda f(y)\, dM(y),$$

woraus leicht die Behauptung folgt.

Aus (4.12) erhält man jetzt die folgenden Eigenschaften *der Dichten* $p_n(t; x, y)$: *Die Dichte* $p_n(t; x, y)$ *hängt in* $(0, \infty) \times [r_0, r_1] \times (r_0, r_1)$ *stetig von* (t, x, y), $p_n(t; x, r_i)$ *in* $(0, \infty) \times [r_0, r_1]$ *stetig von* (t, x) *ab*; *der* (*einseitige*) *Grenzwert* $\lim_{y \to r_i} p_n(t; x, y)$ *existiert gleichmäßig bezüglich* x *aus* $[r_0, r_1]$ *und* t *aus jedem kompakten Teil von* $(0, \infty)$ *und*

$$\lim_{y \to r_i} p_n(t; x, y) = \begin{cases} p_n(t; x, r_i) \text{ falls } \pi_i > 0 \text{ oder } \sigma_i = 0, \\ 0 \qquad \text{falls } \pi_i = 0, \end{cases} \qquad i = 0, 1;$$

für feste $x, y \in [r_0, r_1]$ *ist* $p_n(t; x, y)$ *holomorph in* $t \in \mathring{\Theta}^{+}_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ *und es gilt* (*gleichmäßig in* $x, y \in [r_0, r_1]$)

(4.13) $$\frac{\partial}{\partial t} p_n(t; x, y) = p_{n+1}(t; x, y);$$

es ist

$$|p_n(t; x, y)| \leqq C_n(t)$$

mit einer von x und y unabhängigen Konstanten $C_n(t)$, wobei für $t \geqq t_0 > 0$ die Abschätzung

(4.14) $$C_n(t) \leqq K_n e^{\gamma t}$$

mit einer geeigneten Konstanten K_n besteht.

4. Die Halbgruppe (T_t) in C_{A_0}. Für den in § 2.4 eingeführten Operator $\hat{A}_0$ gilt die

Behauptung 4.1. (*Z*) *Der Operator $\hat{A}_0$ ist der infinitesimale Generator einer stark-stetigen Halbgruppe nichtnegativer vollstetiger Kontraktionen T_t in C_{A_0}; dabei ist T_t für $t > 0$ die Einschränkung von $T_t^{(0)}$ auf C_{A_0}, $T_0 = I$.*

Beweis. Zunächst ist $\hat{A}_0$ auf einem dichten Teil von C_{A_0} definiert, und die Gleichung $(\lambda I - \hat{A}_0)f = g$ hat für $g \in C_{A_0}$ eine eindeutige Lösung. Die erste Aussage folgt damit aus dem Satz von Hille-Yosida, wenn wir noch zeigen, daß $\|(\lambda I - \hat{A}_0)^{-1}\| \leqq \frac{1}{\lambda}$ für $\lambda > 0$ gilt.

Auf Grund der im Beweis von Behauptung 1.2 benutzten Darstellungen für V und u_i sowie der Beziehung $W(u_0, u_1) = \Delta$ gilt für $\lambda > 0$

$$\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\sigma_0 u_0(x; \lambda) + \sigma_1 u_1(x; \lambda) + \int_{r_0}^{r_1} G_0(x, y; \lambda)\, dm(y)\right\} = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\sigma_0 u_0(x; \lambda) + \right.$$

$$+ \sigma_1 u_1(x; \lambda) + \int_{r_0}^{r_1}\int_{r_0}^{s} V(s, y; \lambda)\, dm(y) \frac{dq_0(s)}{s - r_0}\, u_0(x; \lambda) -$$

$$- \int_{r_0}^{r_1}\int_{s}^{r_1} V(s, y; \lambda) dm(y) \frac{dq_1(s)}{r_1 - s} u_1(x; \lambda) + \int_{r_0}^{x} u_1(y; \lambda) dm(y) u_0(x; \lambda) +$$

$$+\int_x^{r_1} u_0(y;\lambda)dm(y)u_1(x;\lambda)\Big\}=$$

$$=\frac{1}{\lambda\varDelta(\lambda)}\Big\{u_0(x;\lambda)\Big[\sigma_0\lambda-\int_{r_0}^{r_1}\frac{(D_2V)(s,r_0;\lambda)-1}{s-r_0}dq_0(s)-(Du_1)(r_0;\lambda)\Big]+$$

$$+u_0(x;\lambda)(Du_1)(x;\lambda)+u_1(x;\lambda)\Big[\sigma_1\lambda-\int_{r_0}^{r_1}\frac{(D_2V)(s,r_1;\lambda)-1}{r_1-s}dq_1(s)-$$

$$-(Du_0)(r_1;\lambda)\Big]-u_1(x;\lambda)(Du_0)(x;\lambda)\Big\}=$$

$$=\frac{1}{\lambda\varDelta(\lambda)}\{-\kappa_0u_0(x;\lambda)-\kappa_1u_1(x;\lambda)+\varDelta(\lambda)\}\leqq\frac{1}{\lambda},$$

woraus wegen $|(R_\lambda g)(x)|\leqq\frac{1}{\varDelta(\lambda)}\Big\{\sigma_0u_0(x;\lambda)+\sigma_1u_1(x;\lambda)+$ $+\int_{r_0}^{r_1}G_0(x,y;\lambda)\,dm(y)\Big\}\|g\|$ die gewünschte Ungleichung folgt.

Für $f\in C_{A_0}$ gilt weiter

$$(\lambda I-\hat{A}_0)^{-1}f=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,T_tf\,dt,$$

andererseits ist aber in $L^2(M)$

$$(\lambda I-A)^{-1}f=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,T_t^{(0)}f\,dt.$$

Auf Grund der Eindeutigkeit der Laplacetransformation und der Stetigkeit von $T_t^{(0)}f$ folgt daraus $T_t=T_t^{(0)}|_{C_{A_0}}$.

Wir setzen $P(t;x,\Gamma):=P_0(t;x,\Gamma)\ (t>0)$, $P(0;x,\Gamma)=\chi_\Gamma(x)$ für beliebiges $x\in[r_0,r_1]$ und jede Borelmenge $\Gamma\subset[r_0,r_1]$. Der Leser kann sich ohne Schwierigkeit davon überzeugen, daß für $t>0$ im Falle $\sigma_i=0$ stets $P(t;x,\{r_i\})=0$ $(x\in[r_0,r_1])$ und im Falle $\sigma_i=\pi_i=0$ stets $P(t;r_i,\Gamma)=0$ für jede Borelmenge $\Gamma\subset[r_0,r_1]$ gilt.

Eine *normale* Übergangsfunktion verstehen wir im folgenden im Sinne von [15], II, §1; weiter sei

$$\mathscr{I}_{A_0}=\begin{cases}[r_0, r_1] & \text{falls } \pi_i+\sigma_i>0,\ i=0, 1;\\ [r_0,r_1]\setminus\{r_i\} & \text{falls } \pi_i+\sigma_i=0,\ \pi_j+\sigma_j>0,\ i\neq j,\ i, j=0, 1;\\ (r_0, r_1) & \text{falls } \pi_i+\sigma_i=0,\ i=0, 1.\end{cases}$$

Behauptung 4.2. *(Z) $P(t; x, \Gamma)$ ist eine normale Übergangsfunktion in $\mathscr{I}_{A_0}$; sie erzeugt die Halbgruppe (T_t), $t\geqq 0$, in C_{A_0}:*

$$(4.15)\qquad (T_tf)(x)=\int_{r_0}^{r_1}P(t;\ x,\ dy)f(y)\qquad (t\geqq 0;\ f\in C_{A_0}).$$

Beweis. Die Beziehung (4.15) ergibt sich unmittelbar aus der vorangehenden Behauptung, die Tatsache, daß $P(t; x, \Gamma)$ eine Übergangsfunktion ist, aus den Eigenschaften von (T_t) (vgl. [15], Satz 2.1).

Zum Beweis der Normalität wählen wir zu $x\in\mathscr{I}_{A_0}$ eine Funktion $f\in C_{A_0}$ mit $0\leqq f\leqq 1$ und $f(x)=1$. Dann gilt

$$(T_tf)(x)=\int_{r_0}^{r_1}f(y)P(t;\ x,\ dy)\leqq P(t;\ x,\ \mathscr{I}_{A_0})\leqq 1,$$

also auf Grund der starken Stetigkeit von (T_t) in C_{A_0} $P(t; x, \mathscr{I}_{A_0})\rightarrow 1$ für $t\downarrow 0$.

Wir bemerken, daß durch die Gleichung (4.15) auch eine Halbgruppe in C_m definiert wird, die jedoch nur in C_{A_0} stark-stetig ist. Der durch (4.15) für $t>0$ in C_m definierte Operator T_t bildet auf Grund der Bemerkung im Anschluß an den Beweis von Behauptung 4.1 den Raum C_m in C_{A_0} ab.

Schließlich vermerken wir noch die Gleichung von Chapman-Kolmogorov für die Übergangsdichten $p(t; x, y):=p_0(t;x, y)$:

$$p(t+t';\ x,\ y)=\int_{r_0}^{r_1}p(t;\ x,\ s)p(t';\ s,\ y)\,dM(s)\quad (t,\ t'>0;\ x,\ y\in[r_0,\ r_1]),$$

die sich unmittelbar aus $T_{t+t'}=T_tT_{t'}$ ergibt.

5. Subinvarianz des Maßes M. Es sei jetzt $Q_0Q_1>0$. Dann gilt für den Operator A_0 aus §1.1, $f\in\mathfrak{D}(A_0)$

$$(4.16)\qquad \int_{r_0}^{r_1}(A_0f)(x)dM(x)=\sigma_0(A_0f)(r_0)+\sigma_1(A_0f)(r_1)+$$

$$+\int_{r_0}^{r_1}(D_m Df)(x)\rho(x)dm(x)=\sigma_0(A_0 f)(r_0)-\pi_0(Df)(r_0)-$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\int_{s=x}^{r_1}\frac{dq_0(s)}{s-r_0}dx+\sigma_1(A_0 f)(r_1)+\pi_1(Df)(r_1)+$$

$$+\int_{r_0}^{r_1}(Df)(x)\int_{s=r_0}^{x}\frac{dq_1(s)}{r_1-s}dx=-\kappa_0 f(r_0)-\kappa_1 f(r_1).$$

Sind außerdem beide Randbedingungen zulässig, d.h., ist $\pi_0\pi_1>0$, so ergibt sich in $C_{A_0}=C_m$ mit $T_t f-f=A_0\int_{s=0}^{t}T_s f\, ds$ weiter

$$\int_{r_0}^{r_1}(T_t f-f)dM=\int_{r_0}^{r_1}A_0\int_{s=0}^{t}T_s f\, ds\, dM$$

$$=-\kappa_0\Big(\int_{s=0}^{t}T_s f\, ds\Big)(r_0)-\kappa_1\Big(\int_{s=0}^{t}T_s f\, ds\Big)(r_1),$$

für $f\geqq 0$ ist also $\int_{r_0}^{r_1}(T_t f-f)\, dM\leqq 0$, d.h.

$$\int_{r_0}^{r_1}\int_{r_0}^{r_1}f(y)P(t;\, x,\, dy)\, dM(x)\leqq\int_{r_0}^{r_1}f(x)dM(x).$$

Im Falle $\kappa_0=\kappa_1=0$ steht in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen.

Damit haben wir die folgende Behauptung bewiesen.[12)]

Behauptung 4.3. *Es sei $\pi_0\pi_1>0$. Dann ist das Maß M subinvariant für die Übergangsfunktion $P(t;\, x,\, \Gamma)$:*

$$\int_{r_0}^{r_1}P(t;\, x,\, \Gamma)\, dM(x)\leqq M(\Gamma) \tag{4.17}$$

für jede Borelmenge $\Gamma\subset[r_0,\, r_1]$; im Falle $\kappa_0=\kappa_1=0$ steht in (4.17) *das Gleichheitszeichen, d.h., M ist ein invariantes Maß für $P(t;\, x,\, \Gamma)$.*

Wir bemerken, daß für $Q_i=0$ die Beziehung (4.17) richtig bleibt für alle Borelmengen Γ mit $r_i\notin\Gamma$.

§5. Die Kolmogorovschen Differentialgleichungen

Der Operator A^* ist in $L^2(M)$ abgeschlossen und dicht definiert. Für

12) Der Beweis dieser Behauptung wurde nur der Vollständigkeit halber angegeben; sie folgt bei Beachtung von (4.16) auch aus [15], I, Lemma 1.7.

seine Resolvente bestehen dieselben Abschätzungen wie für die Resolvente von A, deshalb existieren auch die Integrale

$$S_t^{(n)} := \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\alpha,r}} e^{\lambda t}(\lambda I - A^*)^{-1}\lambda^n d\lambda, \quad t \in \overset{\circ}{\Theta}{}^{+}_{\frac{\pi}{2}-\alpha},$$

in der gleichmäßigen Operatortopologie, und es gilt im Sinne der gleichmäßigen Operatortopologie $\frac{d}{dt}S_t^{(n)} = S_t^{(n+1)}$ sowie

$$(S_t^{(n)}f,\ g) = (f,\ T_{\bar{t}}^{(n)}g), \quad f,\ g \in L^2(M) \tag{5.1}$$

d.h. $S_t^{(n)} = T_{\bar{t}}^{(n)*}$. Insbesondere ist der Operator A^* der infinitesimale Generator der stark-stetigen Halbgruppe $(T_t^{(0)*}) = (S_t^{(0)})$.

Aus (5.1) und Satz 4.1 ergibt sich weiter

$$(S_t^{(n)}f,\ g) = \int_{r_0}^{r_1} f(x)\int_{r_0}^{r_1} \overline{p_n(\bar{t};\ x,\ y)}\ \overline{g(y)}dM(y)\,dM(x) =$$

$$= \int_{r_0}^{r_1}\int_{r_0}^{r_1} p_n(t;\ x,\ y)f(x)dM(x)\,\overline{g(y)}\,dM(y),$$

d.h., $S_t^{(n)}$ gestattet die Darstellung

$$(S_t^{(n)}f)(y) = \int_{r_0}^{r_1} p_n(t;\ x,\ y)f(x)dM(x), \quad f \in L^2(M);$$

denn aus (4.12) folgt $p_n(t;\ x,\ y) = \overline{p_n(\bar{t};\ x,\ y)}$. Gemäß Satz 4.1 ist $S_t^{(n)}f$ stetig in (r_0, r_1), die (einseitigen) Grenzwerte $\lim\limits_{y\to r_i}(S_t^{(n)}f)(y)$ existieren, für $\pi_i = 0$ ist dieser Grenzwert gleich Null und für $\pi_i > 0$ oder $\sigma_i = 0$ ist $S_t^{(n)}f$ auch stetig in $r_i (i=0,\ 1;\ n \geqq 0)$. Auf Grund der Holomorphie liegt $T_t^{(n)}f$ bzw. $S_t^{(n)}f$ für beliebiges $f \in L^2(M)$ und $t \in \overset{\circ}{\Theta}{}^{+}_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ im Definitionsbereich von A^l bzw. A^{*l}, und es gilt

$$A^l T_t^{(n)} f = \frac{d^l}{dt^l} T_t^{(n)} f$$

bzw.

$$A^{*l}S_t^{(n)}f=\frac{d^l}{dt^l}S_t^{(n)}f,$$

woraus sich leicht

$$T_t^{(n)}=R_\lambda^l\Big(\lambda-\frac{d}{dt}\Big)^l\,T_t^{(n)}\text{ bzw. }S_t^{(n)}=R_\lambda^{*l}\Big(\lambda-\frac{d}{dt}\Big)^l\,S_t^{(n)}$$

ergibt ($n=0, 1, 2,\cdots,\quad l=1, 2, 3, \cdots, \lambda>0$).

Setzen wir in diesen Beziehungen $l=1$, so folgt

$$\begin{aligned}p_n(t;x,y)=&\frac{1}{\Delta(\lambda)}\{\sigma_0u_0(x;\lambda)[\lambda p_n(t;r_0,y)-p_{n+1}(t;r_0,y)]+\\&+\sigma_1u_1(x;\lambda)[\lambda p_n(t;r_1,y)-p_{n+1}(t;r_1,y)]+\\&+\int_{r_0+}^{r_1-}G(x,s;\lambda)[\lambda p_n(t;s,y)-p_{n+1}(t;s,y)]\,dM(s)\}\\&=\lambda(R_\lambda p_n(t;\,.\,,y))(x)-(R_\lambda p_{n+1}(t;\,.\,,y))(x)\end{aligned}$$

bzw. entsprechend

$$p_n(t;x,y)=\lambda(R_\lambda^*p_n(t;x,.\,))(y)-(R_\lambda^*p_{n+1}(t;x,.\,))(y).$$

Deshalb gehört $p_n(t;\,.\,,y)$ zu $\mathfrak{D}(A_0)$ und $p_n(t;x,.\,)$ zu $\mathfrak{D}(A^*)$, und es gilt mit (4.13) der

Satz 5.1. (*Z*) *Wählt man die Dichten* $p_n(t;x,y)$ *gemäß Satz* 4.1, *so gelten für festes* $(x,y)\in[r_0,r_1]\times[r_0,r_1]$ *die Kolmogorovschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial p_n(t;x,y)}{\partial t}=(A_0p_n(t;\,.\,,y))(x)=(A^*p_n(t;x,.\,))(y),\ t\in\mathring{\Theta}^+_{\frac{\pi}{2}-\alpha},\ n=0,1,2,\cdots$$

§6. Das Verhalten der Übergangsfunktion für $t\to\infty$

1. Der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty}T_t$. Das Spektrum des Operators A_0 liegt im Winkelraum Θ_α^-, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, deshalb kann auf der imaginären Achse höchstens der Eigenwert $\lambda=0$ auftreten.

Lemma 6.1. (*Z*) *Der Nullpunkt ist genau dann ein Eigenwert des Operators A_0 in C_{A_0}, wenn*

$$\rho_0:=2-\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}\kappa_0 & -Q_0\\ \kappa_1 & \kappa_1(r_1-r_0)+Q_1\end{pmatrix}>0$$

gilt; in diesem Falle ist ρ_0 seine geometrische und algebraische Vielfachheit. Der zugehörige Rieszsche Projektor P_N hat die folgende Gestalt:

a) $\pi_0\pi_1>0,\ \kappa_0=\kappa_1=0$: $(P_Nf)(x)=\dfrac{1}{\int_{r_0}^{r_1}dM(x)}\int_{r_0}^{r_1}f(x)dM(x)$;

b) $\pi_i+\kappa_i=0,\ \pi_j+\kappa_j>0$: $(P_Nf)(x)=\dfrac{\kappa_j|r_j-x|+Q_j}{\kappa_j|r_j-r_i|+Q_j}f(r_i),\ i,j=0,1;\ i\neq j$;

c) $\pi_0=\pi_1=\kappa_0=\kappa_1=0$: $(P_Nf)(x)=\dfrac{r_1-x}{r_1-r_0}f(r_0)+\dfrac{x-r_0}{r_1-r_0}f(r_1)$.

Beweis. Beachtet man, daß jede Lösung f_0 der Gleichung $D_mDf_0=0$ notwendig die Form $f_0(x)=\alpha+\beta(x-r_0)$ hat, so ergibt sich leicht die erste Aussage sowie die Gestalt der Eigenelemente. Im Falle a) ist die Funktion $f_0(x)\equiv 1$ ein Eigenelement. Da der Operator A maximal dissipativ in $L^2(M)$ ist, stimmen die geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwertes Null überein und P_N hat die angegebene Gestalt. Im Falle b) sei z.B. $i=0, j=1$, d.h., die Randbedingung bei r_0 hat die Form $\Phi_0(f)\equiv\sigma_0(A_0f)(r_0)=0$. Dann ergibt sich ohne Schwierigkeit für die in §1.2 eingeführten Funktionen

$w_0(x;0)=1$; $\quad w_1(x;0)=x-r_0$

$\Phi_0(w_0(.;\lambda))=\sigma_0\lambda$; $\quad \Phi_0(w_1(.;\lambda))=0$; $\quad \Delta(\lambda)=\lambda\sigma_0\Phi_1(w_1(.;\lambda))$;

$\Phi_1(w_1(.;0)=Q_1+\kappa_1(r_1-r_0)$; $\quad \Phi_1(w_0(.;0))=\kappa_1$;

$u_0(x;0)=Q_1+\kappa_1(r_1-x)$; $\quad u_1(x;0)=0$;

damit erhält man für einen hinreichend kleinen Kreis $\mathscr{C}_0$ um den Nullpunkt leicht

$$(P_N f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_0}(\lambda I - A_0)^{-1} f(x)\,d\lambda = \frac{Q_1 + \kappa_1(r_1 - x)}{Q_1 + \kappa_1(r_1 - r_0)} f(r_0).$$

Entsprechend ergibt sich die Gestalt der Projektion P_N im Falle c).

Ist der Nullpunkt kein Eigenwert des Operators A_0, so setzen wir $P_N = 0$.

Auf Grund des Spektralabbildungssatzes ([13], Satz 16.7.2) hat der Operator T_t, $t > 0$, in C_{A_0} auf der Einheitskreislinie höchstens den Eigenwert $\lambda = 1$, und der zugehörige Eigenraum ist der Wertebereich von P_N, genauer, es gilt $T_t P_N = P_N T_t = P_N$. Für ein beliebiges $t_0 > 0$ liegt dann das Spektrum des Operators $T_{t_0}(I - P_N)$ ganz im Inneren des Einheitskreises. Daraus folgt ohne Schwierigkeit (vgl. [5], Vlll. 2)

$$\| T_{nt_0} - P_N \|_{C_{A_0}} = \| T_{t_0}^n (I - P_N)^n \|_{C_{A_0}} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

woraus sich wegen $\| T_t \|_{C_{A_0}} \leqq 1$ auch

$$\| T_t - P_N \|_{C_{A_0}} \to 0 \ \text{für} \ t \to \infty \tag{6.1}$$

ergibt.

Wir zeigen, daß die Beziehung (6.1) sogar für die Operatornorm in C_m besteht. Aus $T_t - P_N = T_t(I - P_N)$ folgt nämlich $(T_t - P_N)C_m \subset C_{A_0}$, $t > 0$, und damit für ein festes $t_0 > 0$ und alle $f \in C_m$, $t > t_0$

$$\|(T_t - P_N) f \|_{C_m} = \|(T_{t-t_0} - P_N) T_{t_0} f \|_{C_{A_0}} \leqq \| T_{t-t_0} - P_N \|_{C_{A_0}} \| T_{t_0} \|_{C_m} \| f \|_{C_m}.$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen.

Satz 6.1. (*Z*) *Es gilt*

$$\lim_{t \to \infty} \| T_t - P_N \|_{C_m} = 0. \tag{6.2}$$ [13]

Mit T_t' und P_N' bezeichnen wir die adjungierten Operatoren von T_t

13) Dabei sei $P_N = 0$ in C_m, falls diese Gleichung in C_{A_0} gilt.

bzw. P_N im dualen Raum C'_m von C_m, mit μ_x das Maß mit der Einheitsmasse im Punkte x. Aus (6.2) ergibt sich dann

$$\lim_{t\to\infty} \|T'_t - P'_N\|_{C'_m} = 0$$

und daraus die

Folgerung. *(Z) Es gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in[r_0, r_1]} \operatorname{var}\,(P(t;\, x, .) - P'_N\mu_x) = 0;$$

dabei hat $P'_N\mu_x$ *die folgende Gestalt:*

a) $\pi_0\pi_1 > 0$, $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$: $(P'_N\mu_x)(\Gamma) = \left(\int_{r_0}^{r_1} dM\right)^{-1} \int_\Gamma dM$;

b) $\pi_i + \kappa_i = 0$, $\pi_j + \kappa_j > 0$: $P'_N\mu_x = \dfrac{\kappa_j |r_j - x| + Q_j}{\kappa_j(r_1 - r_0) + Q_j}\mu_{r_i}$, $i, j = 0, 1$; $i \neq j$;

c) $\pi_0 = \pi_1 = \kappa_0 = \kappa_1 = 0$: $P'_N\mu_x = \dfrac{r_1 - x}{r_1 - r_0}\mu_{r_0} + \dfrac{x - r_0}{r_1 - r_0}\mu_{r_1}$;

in allen übrigen Fällen ist $P'_N = 0$.

2. Ein Quotienten-Satz. Wir setzen jetzt $\pi_0\pi_1 > 0$ voraus. Ist $\kappa_0 + \kappa_1 > 0$, so strebt $P(t;\, x, \Gamma)$ gemäß der Folgerung aus Satz 6.1 gegen Null für $t \to \infty$ und alle Borelmengen $\Gamma \subset [r_0, r_1]$. In diesem Fall zeigen wir die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P(t;\, x, \Gamma)}{P(t+h;\, y, \Delta)}$$

für Borelmengen Γ, $\Delta \subset [r_0, r_1]$, $r_0 \leqq x$, $y \leqq r_1$ und reelles h.

Lemma 6.2. *Die Dichte* $p(t;\, x, y)$ *ist für* $t > 0$ *positiv auf* $[r_0, r_1] \times [r_0, r_1]$.

Beweis. Zunächst ist diese Dichte nichtnegativ gemäß Behauptung 4.1. Wir nehmen an, es gäbe Punkte $t^* > 0$, $(x^*, y^*) \in [r_0, r_1] \times [r_0, r_1]$

mit $p(t^*; x^*, y^*)=0$. Aus der Chapman-Kolmogorovschen Gleichung

$$p(t^*; x^*, y^*)=\int_{r_0}^{r_1} p(t^*-h; x^*, s)p(h; s, y^*)dM(s), \qquad 0<h<t^*,$$

folgt dann

$$p(t^*-h; x^*, s)p(h; s, y^*)\equiv 0 \text{ für alle } 0<h<t^*, s\in[r_0, r_1],$$

woraus sich ohne Schwierigkeit die Existenz eines Punktes $(x_0, y_0)\in[r_0, r_1]\times[r_0, r_1]$ ergibt, so daß $p(t; x_0, y_0)$ für alle t aus einem Intervall positiver Länge verschwindet. Da die Dichte in $\mathring{\Theta}^{+}_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ holomorph von der ersten Variablen abhängt, erhalten wir

$$p(t; x_0, y_0)=0 \text{ für alle } t>0. \tag{6.3}$$

Es gilt weiter für $h>0$, $f\in C_m$ und $\lambda>0$

$$T_h R_\lambda f=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T_{h+t} f\, dt=e^{\lambda h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}\, T_t f\, dt. \tag{6.4}$$

Nun gestattet die Resolvente R_λ im Falle $\pi_0\pi_1>0$ die Darstellung

$$(R_\lambda f)(x)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_{r_0}^{r_1} G(x, y; \lambda)f(y)\, dM(y)$$

mit dem Kern $G(x, y; \lambda)$ aus (2.4), also folgt aus (6.4) leicht

$$\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_{r_0}^{r_1} G(s, y_0; \lambda)p(h; x_0, s)\, dM(s)=e^{\lambda h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}\, p(t; x_0, y_0)\, dt,$$

wobei das Integral auf der rechten Seite dieser Beziehung auf Grund von (4.14) für $\lambda>\gamma$ existiert. Wegen (6.3) und (1.9) ergibt sich $p(h; x_0, y)=0$ für alle $h>0$ und $y\in[r_0, r_1]$, was auf Grund der starken Stetigkeit der Halbgruppe (T_t) in C_m unmöglich ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

Aus Lemma 6.2, [16], Satz 6.5 und der Tatsache, daß der Spektralradius ρ_t des Operators T_t positiv ist (beachte Behauptung 2.4), ergibt sich jetzt unmittelbar die

Behauptung 6.1. *Es sei $\pi_0\pi_1>0$. Dann ist ρ_t für $t>0$ ein einfacher Eigenwert von T_t und T'_t; beide Operatoren haben keine weiteren Eigenwerte vom Betrag ρ_t. Das Eigenelement $f_0\in C_m$: $T_t f_0=\rho_t f_0$ ist positiv, das Eigenelement $\Psi_0\in C'_m$: $T'_t\Psi_0=\rho_t\Psi_0$ ist ein auf C_m positives Funktional.*[14] *Beide Eigenelemente f_0 und Ψ_0 sind unabhängig von t; der Rieszsche Projektor $\hat{P}$ (bzw. $\hat{P}'$) auf den Eigenraum von T_t (bzw. T'_t) zum Eigenwert ρ_t hat die Gestalt*

$$\hat{P}f=\int_{r_0}^{r_1} f(y)d\Psi_0(y)f_0 \qquad (f\in C_m)$$

bzw.

$$\hat{P}'\Psi=\int_{r_0}^{r_1} f_0(y)d\Psi(y)\Psi_0 \qquad (\Psi\in C'_m).$$

Bezeichnet λ_1 den größten reellen Eigenwert von A_0 in C_m, so folgt aus dem Spektralabbildungssatz $\rho_t=e^{\lambda_1 t}$ und $Re\lambda<\lambda_1$ für alle übrigen Eigenwerte λ von A_0.

Man sieht weiter leicht, daß Ψ_0 bezüglich M absolutstetig ist mit der Dichte

$$\psi_0(y)=\frac{1}{\rho_t}\int_{r_0}^{r_1} p(t;\, x,\, y)d\Psi_0(x) \qquad (y\in[r_0,\, r_1]).$$

Auf Grund von Lemma 6.2 und der Positivität von Ψ_0 ist auch ψ_0 positiv.

Entsprechend Satz 6.1 ergibt sich jetzt

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_1 t}\, T_t f=\int_{r_0}^{r_1} f(y)d\Psi_0(y)f_0 \qquad (f\in C_m),$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_1 t}\, T'_t\Psi=\int_{r_0}^{r_1} f_0(y)d\Psi(y)\Psi_0 \qquad (\Psi\in C'_m),$$

wobei diese Beziehungen gleichmäßig bezüglich aller $f\in C_m$, $\Psi\in C'_m$ mit $\|f\|_{C_m}\leqq 1$, $\|\Psi\|_{C'_m}\leqq 1$ bestehen. Daraus erhalten wir leicht den

Satz 6.2. *Ist $\pi_0\pi_1>0$, so gibt es positive Funktionen f_0, $\psi_0\in C_m$, so daß gilt:*

14) D.h., es gilt $\Psi_0(f)>0$ für alle $f\in C_m$ mit $f\geqq 0$, $f\neq 0$.

$$\text{(6.5)} \qquad \text{a)} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{(T_t f)(x)}{(T_{t+h} g)(y)} = e^{-\lambda_1 h} \frac{\int_{r_0}^{r_1} f(s)\psi_0(s)\,dM(s)\,f_0(x)}{\int_{r_0}^{r_1} g(s)\psi_0(s)\,dM(s)\,f_0(y)}$$

für alle $x, y \in [r_0, r_1]$, $f, g \in C_m$ *mit* $\int_{r_0}^{r_1} g(y)\psi_0(y)\,dM(y) \neq 0$ *und reelles* h; *Beziehung* (6.5) *besteht gleichmäßig in allen* f, g, x, y *mit* $\|f\|_{C_m} \leqq 1$, $\|g\|_{C_m} \leqq 1$ *und* $\delta \leqq \left|\int_{r_0}^{r_1} g(s)\psi_0(s)\,dM(s)\right|$ ($\delta > 0$, *beliebig*);

$$\text{(6.6)} \qquad \text{b)} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{(T_t'\Phi)(\Gamma)}{(T_{t+h}'\Psi)(\Delta)} = e^{-\lambda_1 h} \frac{\int_{r_0}^{r_1} f_0(x)\,d\Phi(x) \int_\Gamma \psi_0(y)\,dM(y)}{\int_{r_0}^{r_1} f_0(x)\,d\Psi(x) \int_\Delta \psi_0(y)\,dM(y)}$$

für alle Borelmengen $\Gamma, \Delta \subset [r_0, r_1]$, $\Phi, \Psi \in C_m'$ *mit* $\int_{r_0}^{r_1} f_0(x)\,d\Psi(x) \int_\Delta \psi_0(y)\,dM(y) \neq 0$ *und reelles* h; *Beziehung* (6.6) *besteht gleichmäßig in allen* $\Phi, \Psi, \Gamma, \Delta$ *mit* $\|\Phi\|_{C_m'} \leqq 1$, $\|\Psi\|_{C_m'} \leqq 1$ *und* $\delta \leqq \left|\int_{r_0}^{r_1} f_0(x)\,d\Psi(x) \int_\Delta \psi_0(y)\,dM(y)\right|$ ($\delta > 0$, *beliebig*).

Folgerung. *Ist* $\pi_0\pi_1 > 0$, *so gilt für beliebige* $x, y \in [r_0, r_1]$ *und Borelmengen* $\Gamma, \Delta \subset [r_0, r_1]$ *mit* $M(\Delta) > 0$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P(t;\, x, \Gamma)}{P(t+h;\, y, \Delta)} = e^{-\lambda_1 h} \frac{f_0(x) \int_\Gamma \psi_0(s)\,dM(s)}{f_0(y) \int_\Delta \psi_0(s)\,dM(s)};$$

diese Beziehung besteht gleichmäßig in allen x, y, Γ, Δ *mit* $\delta \leqq \int_\Delta dM$ ($\delta > 0$, *beliebig*).

Wir bemerken schließlich, daß man mit derselben Methode auch entsprechende Aussagen erhalten kann, falls die Randbedingungen zulässig sind, die Voraussetzung $\pi_0\pi_1 > 0$ jedoch nicht erfüllt ist. Dabei hat man gegebenenfalls x, y, Γ, Δ auf Teilbereiche von $[r_0, r_1]$ einzuschränken, die gewisse Randpunkte nicht enthalten.

Literaturverzeichnis

[1] Feller, W., The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations, *Ann. of Math.* **55** (1952), 468-519.

[2] Wentzell, A.D., Halbgruppen von Operatoren, denen ein verallgemeinerter Differentialoperator zweiter Ordnung zugeordnet ist, *Dokl. AN SSSR*, **111** (1956), 269-272 [russisch].

[3] Mandl, P., *Analytical Treatment of One-dimensional Markov-processes*, Prag, Academia, 1968 u. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1968.

[4] Feller, W., Generalized second order differential operators and their lateral conditions, *Illinois J. Math.* **1** (1957) 459-504.

[5] Yosida, K., *Functional Analysis*, 2. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1968.

[6] Kac, I. S. und M. G., Kreĭn, *Über die Spektralfunktionen der Saite*, Anhang II zur russ. Übersetzung von Atkinson, F. V.: *Discrete and continuous boundary problems*, 1. Aufl., Moskau, Mir 1968 [russisch].

[7] Dynkin, E. B. und A. A. Juškevič, *Sätze und Aufgaben über Markovsche Prozesse*, 1. Aufl., Moskau, Nauka, 1967 [russisch].

[8] Wentzell, A.D., Über die Absolutstetigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten des eindimensionalen Diffusionsprozesses, *Teor. Verojatnost. i Primenen.* **6** (1961), 439-446 [russisch].

[9] Partzsch, L., Ein Ergodensatz für Markovsche Prozesse mit endlicher Lebenszeit, *Teor. Verojatnost. i Primenen.* **16** (1971), 711-714 [russisch].

[10] Phillips, R.S., Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **90** (1959), 193-254.

[11] Kato, T., Fractional powers of dissipative operators, *J. Math. Soc. Japan*, **13** (1961), 246-274.

[12] Gohberg, I. C. und M. G. Kreĭn, *Einführung in die Theorie linearer nichtselbstadjungierter Operatoren*, Moskau, Nauka, 1965 [russisch].

[13] Hille, E. and R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.* **31**, Providence, 1957.

[14] Pazy, A., On the differentiability and compactness of semigroups of linear operators, *J. Math. Mech.* **17** (12), (1968), 1131-1141.

[15] Dynkin, E.B., *Markov-Prozesse*, Moskau, Fismatgis, 1963 [russisch].

[16] Georg, K., Zur Spektraltheorie kegelinvarianter Operatoren, *Bericht der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung*, Bonn, Nr. **9** (1969).