Publ. RIMS, Kyoto Univ.
9 (1974), 261-284

Sur la Condition Nécessaire du Problème Mixte Bien Posé pour les Systémes Hyperboliques à Coefficients Variables

Par

Kunihiko KAJITANI*

§1. Introduction

Dans cet article, nous traiterons les systèmes hyperboliques du premier ordre à coefficients variables. Notre but est d'envisager la nécessité de la condition de Lopotinski, pour que le problème mixte pour ces systémes soit bien posé dans l'espace L^2 ou $\mathscr{E}$. Dans le cas des coefficients constants, dans [2] et [3] R. Hersh a prouvé que la condition de Lopatinski est nécessaire et suffisante pour que le problème mixte soit bien posé dans l'espace $\mathscr{E}$.

Nous considérons le problème mixte du systéme suivant; $R^k_+=\{x\in R^k, x_k>0\}$,

$$(1.1)\qquad \begin{cases} L[u(x, t)]=f(x, t), & t>0, \quad x\in R^k_+, \\ u(x, 0)=g(x), & x\in R^k_+, \\ P[u(x', 0, t)]=h(x', t), & t>0, \quad x'\in R^{k-1}, \end{cases}$$

où $L=\dfrac{\partial}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^{k} A_j(x, t)\dfrac{\partial}{\partial x_j}-B(x, t)$ et $A_j(x, t)$, $j=1,\dots, k$, et $B(x, t)$ sont des matrices d'ordre m dont les éléments sont des fonctions suffisamment régulières, et $P(x', t)$ une matrice à l lignes et m colonnes de rang l, d'élément suffisamment régulières. Nons supposons que $A_k(0, 0)$ a la forme suivante,

Communicated by S. Matsuura, November 15, 1972.

* Department of Applied Mathematics and Physics, Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto.

$$A_k(0, 0)=\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & a_2 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_p & & \\ & 0 & & & a_{p+1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & a_m \end{pmatrix},$$

où a_j, $j=1, 2,\dots, p$ sont des nombres négatifs et a_j, $j=p+1,\dots, m$, sont positifs.

Nous supposons désormais que L est hyperbolique, à savoir que toutes les valeurs propres de la matrice $\sum_{j=1}^{k} A_j(x, t)\xi_j$ soient réelles pour tout $\xi\in R^k-\{0\}$ et $(x, t)\in R^k\times[0, T]$, et que $A_k(x', 0, t)$ est non singulière pour tout $(x', t)\in R^{k-1}\times[0, T]$. On considére la matrice suivante dépendante des paramétres λ complexes, $\mathrm{Re}\lambda>0$, et $\eta\in R^{k-1}$,

$$M(x, t; \lambda, i\eta)=A_k^{-1}(x, t)(\lambda-i\sum_{j=1}^{k-1} A_j(x, t)\eta_j).$$

Alors il découle de l'hyperbolicité de L que pour tout $\eta\in R^{k-1}$ et λ complexe, $\mathrm{Re}\,\lambda>0$, aucune des valeurs propres de $M(x, t; \lambda, i\eta)$ n'est imaginaire pure. Donc, on a une matrice non singulière $N(x, t; \lambda, i\eta)$, dont les éléments varient continûment en $(x, t; \lambda, i\eta)$, telle que

$$N^{-1}MN=\begin{pmatrix} M^- & * \\ 0 & M^+ \end{pmatrix},$$

où $M^-(x, t; \lambda, i\eta)$ (resp. $M^+(x, t; \lambda, i\eta)$) est une matrice d'ordre p (resp. d'ordre $m-p$), dont les valeurs propres ont la paritie réelle négative (resp. positive), p désigne ici le nombre de la valeur propre négative de A_k. On décompose $N=(N^-, N^+)$, où N^- (resp. N^+) est une matrice à m lignes et p (resp. $m-p$) colonnes.

Définition 1.1. *On dit que* (L, P) *satisfait à la condition de Lopatinski, si les propriétées suivantes sont vérifiées,*

i) $l=p$ *et*

ii) *la* $l\times l$ *matrice* $P(x', t)N^-(x', 0, t; \lambda, i\eta)$ *est non singulière pour tout* $(x', t)\in R^{k-1}\times[0, T]$, λ *complexe*, $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ *et*

$\eta \in R^{k-1}$.

Définition 1.2. *On dit que le problème mixte* (L, P) *est bien posé dans l'espace* L^2, *si pour tout* $f(t) \in \mathscr{E}_t^1(L^2) \cap \mathscr{E}_t^0(H^1)$, $g=0$ *et* $h=0$, *il existe une solution* $u(t) \in \mathscr{E}_t^1(L^2) \cap \mathscr{E}_t^0(H^1)$ *vérifiant* (1.1) *avec* $g=0$ *et* $h=0$ *telle qu'on ait*, $T>0$,

$$\|u(t)\| \leqq \text{const.} \int_0^t \|f(s)\| ds, \ pour \ t \in (0, T). \tag{1.2}$$

$\|\cdot\|$ *désigne ici la norme naturelle de* $L^2(R_+^k)$, $H^1 = H^1(R_+^k)$ *l'espace de Sobolev et* $\mathscr{E}_t^p(L^2)$ *(resp.* $\mathscr{E}_t^p(H^1)$), $p=0, 1, 2, \ldots$, *ast constitué des foncitions p fois continûment différentiables dans l'espace* L^2 *(resp.* H^1).

Nous allons maintenant énoncer notre résultat.

Théorème 1.1. *On suppose que le problème mixte* (L, P) *est bien posé dans l'espace* L^2. *Alors il faut que la matrice* $P(x', t)$ *satisfasse la condition de Lopatinski.*

On va établir ce théorème dans le paragraphe 2. Nous devons signaler que récemment R. Sakamoto, [7], a dérivé la condition nécessaire, pour que les équations hyperboliques d'ordre supérieur soient bien posées dans l'espace L^2. Elle analyse dans [7] des éléments de la matrice de Lopatinski. De plus, nous remarquons que dans [1] R. Agemi et T. Shirota envisagent la condition nécessaire pour que les équations hyperboliques d'ordre supérieur soient bien posées dans l'espace L^2.

Dans le paragraphe 4, nous allons envisager la condition nécessaire, pour que la solution du problème mixte (1.1) avec $g=0$ vérifie, au lieu de (1.2) l'inégalite suivante, pour tout $\mu > \mu_0 > 0$,

$$\begin{aligned} \mu \int_0^T \|e^{-\mu t} u(t)\|^2 dt + \int_0^T < e^{-\mu t} u(t) >^2 dt \\ \leqq \text{const.} \left\{ \frac{1}{\mu} \int_0^T \|e^{-\mu t} f(t)\|^2 dt + \int_0^T < e^{-\mu t} h(t) >^2 dt \right\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

où la constante ne dépend pas de μ. $<\cdot>$ désigne ici la norme frontière de $L^2(R^{k-1})$.

Définition 1.3. *On dit que* $P(x', t)$ *satisfait à la condition uniforme de Lopatinski, si les conditions suivantes sont vérifiées*

(i) $p=l$ *et*

(ii) $P(x', t)(N^- x', 0, t; \lambda, i\eta)$ *est non singulier pour tout* $(x', t) \in R^{k-1} \times [0, T]$, $\eta \in R^{k-1}$ *et* λ *complexe*, $\mathrm{Re}\,\lambda \geqq 0$.

Théorème 1.2. *Supposons que la solution du problème mixte* (1.1) *avec* $g=0$ *soit vérifiée* (1.3). *Alors* $P(x', t)$ *satisfait à la condition uniforme de Lopatinski.*

Remarque. L'évaluation (1.3) a été dérivée par O.K. Kreiss [3] sous l'hyperbolicité stricte de L et la condition uniforme de Lopatinski. De plus, dans le cas des coefficients constants, Kreiss a déduit que la condition uniforme de Lopatinski est nécessaire.

Le principe de la démonstration du Théorème 1.1. et du Théorème 1.2. est le même que la méthode de [5], où l'on traite le problème de Cauchy bien posé dans l'espace L^2.

Daus le cas $m=2$ dans les systèmes (1.1) à coefficients analytiques, on peut obtenir la condition de Lopatinski comme la condition nécessaire, pour que les systèmes (1.1) soient bien posés dans l'espace $\mathscr{E}$, à savoir au sens de la définition suivante.

Définition 1.4. *On dit que le problème mixte* (1.1) *est bien posé dans l'espace* $\mathscr{E}$ *au voisinage de l'origine, si pour tout voisinage* U *de l'origine on a un voisinage* $\Omega \subset U$ *telle que pour tout* $f \in C^\infty(\overline{R^k_+} \times [0, T])$, $g \in C^\infty(R^k_+)$ *et* $h \in C^\infty(R^{k-1} \times [0, T])$ *satisfaisant à la condition de la compatibilité, il existe une solution unique* $u \in C^1(\bar{\Omega})$ *vérifiant*

$$(1.4) \qquad \begin{cases} L[u]=f & \textit{dans } \Omega, \\ u|_{t=0}=g & \textit{dans } D=\Omega \cap \{t=0\}, \\ Pu|_{x_k=0}=h & \textit{dans } G=\Omega \cap \{x_k=0\}, \end{cases}$$

et

$$(1.5) \qquad |u|_{0,\Omega} \leqq \text{const.}\, \{|g|_{s,D} + |f|_{s,\Omega} + |h|_{s,G}\},$$

où s *étant un entier posifif, et* $|\circ|_{p,\Omega}$, $p=0, 1, 2, \ldots$ *désigne la norme naturelle de* $C^p(\bar{\Omega})$.

Dans le paragraphe 5, nous allons considérer les systémes (1.1) dont $A_j(x, t)$, $j=1, 2, \ldots, k$, et B sont des matrices d'ordre 2 et les éléments des $A_j(x, t)$, $j=1, 2,\dots, k$, B et P sont des fonctions analytiques. De plus A_k et P ont la forme suivante,

$$A_k=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad a_1<0, a_2>0, \text{ et} \tag{1.6}$$

$$P=(a, b), \qquad a(0, 0)\neq 0,$$

respectivement.

On a alors

Théorème 1.3. *Supposons que L et P satisfassent à toutes les conditions énumérées ci-dessus. Si le problème mixte* (1.1) *est bien posé au sens de la Définition* 1.3., *alors P satisfait à la condition de Lopatinski à l'origine.*

La méthode de la démonstration du Théorème 1.3. doit à P.D. Lax [6].

§2. Préliminaires

Avant d'entrer dans la démonstration du Théorème 1.1 et 1.2, nous définissons une suite $\{\alpha_{n,\mu}(x', t)\}$ des fonctions, qui jouera un rôle important dans notre raisonnement qui suit. Soit $\alpha(x', t)\in C_0^\infty$ tel que supp $[\alpha]\subset R^{k-1}\times(0, T)$ qui vérifie

$$\int_0^T\int_{R^{k-1}}|\alpha(x', t)|^2dx'dt=1.$$

Posons pour n et μ des nombres positives,

$$\alpha_{n,\mu}(x', t)=n^{\frac{p}{4}}\alpha(n^{\frac{1}{2}}x', n^{\frac{1}{2}}t)\exp(ix'\cdot\eta^0 n+(\mu+i\sigma_0 n)t), \tag{2.1}$$

où $\eta^0=(\eta_1^0,\dots, \eta_{k-1}^0)\in R^{k-1}$, σ_0 réel et $x'\cdot\xi^0$ signifie $x_1\xi_1^0+\cdots+x_{k-1}\xi_{k-1}^0$.

On va introduire la norme sous la forme suivante,

$$[u]_{\mu,s}^2=\sum_{i+j+|\nu|=s}\int_0^T\left\|e^{-\mu t}\,\mu^i\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^i\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\nu u(t)\right\|^2dt,$$

où $s=0, 1, 2,\dots$, $u(t)\in C_0^\infty(\overline{R_+^k}\times[0, T])$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme de $L^2(R_+^k)$. De plus on définit la norme frontière telle que pour $v\in C_0^\infty(R^{k-1}\times(0, T))$,

$$<v>^2_{\mu,s}=\int_{R^k}|\Lambda^s_\mu v|^2 dx'dt, \tag{2.2}$$

où s étant réel et l'opérateur Λ^s_μ désigne par

$$(\Lambda^s_\mu v)(x',t)=\int_{R^k} e^{\lambda t+ix'\cdot\eta}(\lambda+|\eta|)^s\hat{v}(\eta,\lambda)\,d\sigma\,d\eta,$$

ici $\lambda=\mu+i\sigma$ et $\hat{v}(\eta,\lambda)$ exprime l'image de Fourier-Laplace par raport à x' et t, à savoir que

$$\hat{v}(\eta,\lambda)=\int_{R^k} e^{-ix'\cdot\eta-\lambda t}v(x',t)\,dx'dt.$$

Notons que, car s est un entier non négatif, la norme $<v>^2_{\mu,s}$ définie par (2.2) équivant à

$$\sum_{i+j+|\nu|=s}\int_0^T\int_{R^{k-1}}\left|e^{-\mu t}\mu^i\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x'}\Big)^\nu v(x',t)\right|^2 dx'dt.$$

On définit les opérateurs $F_0^{(n,\mu)}$ et $F_j^{(n)}$, $j=1,2,\dots,k-1$, par

$$\begin{cases} F_0^{(n,\mu)}u=\Big(\dfrac{\partial}{\partial t}-(\mu+i\sigma_0 n)\Big)u, \text{ et} \\ F_j^{(n)}\ u=\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_j}-in\eta_j^0\Big)u,\quad j=1,\dots,k-1, \end{cases} \tag{2.3}$$

où n et μ sont des nombres positifs, $\eta^0=(\eta_1^0,\dots,\eta_{k-1}^0)\in R^{k-1}$ et σ_0 réel. Dans ce qui suit, pour simplifier, nous écrirons F_0 et F_j $(j=1,\dots,k-1)$ au lieu de $F_0^{(n,\mu)}$ et de $F_j^{(n)}$ respectivement.

Ceci préparé, on a facilement le

Lemme 2.1. *Soit $\alpha_{n,\mu}(x',t)$ défini par (2.1). Alors on a pour n et μ des nombres positifs arbitraires, $\mu\leqq n$ et pour s le nombre non négatif,*

(i) $<\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0}=1$,

(ii) $<\alpha_{n,\mu}>_{\mu,s}\leqq$ const. n^s,

(iii) $\sum_{j=0}^{k-1}<x_j\alpha_{n,\mu}>_{\mu,s}\leqq$ const. $n^{s-\frac{1}{2}}$

où on a écrit $t=x_0$,

(iv) $<F_0^{(n,\mu)}\alpha_{n,\mu}>_{\mu,s}\leqq$ const. $n^{s+\frac{1}{2}}$,

$<F_j^{(n)}\ \alpha_{n,\mu}>_{\mu,s}\leqq$ const. $n^{s+\frac{1}{2}}$, *où toutes les constantes sont indépendantes de μ et de n.*

Preuve. (i) est évident d'après la définition de $\alpha_{n,\mu}$. (ii). On peut écrire,

$$<\alpha_{n,\mu}>^2_{\mu,s}=n^{-\frac{k}{4}}\int|\lambda+|\eta||^{2s}|\hat{\alpha}(n^{-\frac{1}{2}}(\eta-n\eta^0),\ n^{-\frac{1}{2}}(\lambda-\mu-i\sigma_0 n))|^2 d\sigma\, d\eta,$$

où $\hat{\alpha}(\eta, \lambda)$ est l'image de Fourier-Laplace. Cela entraîne l'assertion (ii). (iii). Puisqu'on a

$$<x_j\alpha_{n,\mu}>^2_{\mu,s}=n^{-\frac{k}{4}}\int|\lambda+|\eta||^{2s}|n^{-\frac{1}{2}}\hat{\alpha}_{\eta_j}(n^{-\frac{1}{2}}(\eta-n\eta^0),$$

$$n^{-\frac{1}{2}}(\lambda-\mu-i\sigma_0 n))|^2 d\sigma\, d\eta,$$

on peut obtenir (iii). Enfin, notons qu'on a

$$F_j\alpha_{n,\mu}=n^{\frac{1}{2}+\frac{k}{4}}\exp(ix'\cdot\eta^0 n+(\mu+i\sigma_0 n)t)\alpha_{x_j}(n^{\frac{1}{2}}x',\ n^{\frac{1}{2}}t),$$

on obtient (iv).

Dans la suite, on pose

$$\beta_n(x', t)=n^{\frac{k}{4}}\alpha(n^{\frac{1}{2}}x',\ n^{\frac{1}{2}}t)e^{nt}. \tag{2.4}$$

Corollaire 2.1. *La fonction $\beta_n(x', t)$ vérifie,*

(i) $<\beta_n>_{n,0}=1$

(ii) $\sum_{j=1}^{k-1}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_j}\beta_n\right\rangle_{n,\frac{1}{2}}+\sum_{j=0}^{k-1}<x_j\beta_n>_{n,\frac{3}{2}}\leqq \text{const. } n$

(iii) $\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}-n\right)\beta_n\right\rangle_{n,\frac{1}{2}}\leqq \text{const. } n,$

où toutes les constantes sont indépendantes de n.

§3. La Condition de Lopatinski

Dans ce paragraphe, nous allons établir le Théorème 1.2. Pour cela, nous utiliserons l'inégalité de l'énergie dérivé de l'inégalité (1.2).

Considérons le problème mixte (1.1) avec $g=0$, c'est-à-dire,

$$(3.1)\qquad \begin{cases} L[u]=f, \\ u|_{t=0}=0, \\ Pu|_{x_k=0}=g. \end{cases}$$

Alors on a

Proposition 3.1. *Supposons que le problème mixte* (L, P) *soit bien posé dans l'espace* L^2. *Alors il exsite une solution du problème* (3.1) *pour tout* $f\in C_0^\infty(R_+^k\times(0, T))$ et $h\in C_0^\infty(R^{k-1}\times(0, T))$, supp $[h]$ *assez petit, telle qu'on ait, pour* $\mu>0$,

$$(3.2)\qquad \mu[u]_{\mu,0}\leqq \text{const. }\{[f]_{\mu,0}+<h>_{\mu,\frac{1}{2}}\},$$

plus généralement, on a pour s *un entier positif*

$$(3.3)\qquad \mu[u]_{\mu,s}\leqq \text{const. }\{[f]_{\mu,s}+<h>_{\mu,s+\frac{1}{2}}\},$$

où const. *est indépendant de* μ.

Preuve. Puisque le rang de P est constant et supp $[h]$ est assez petit, on peut construire une fonction $v\in H^1(R_+^k\times(0, T))$ telle que

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} &Pv|_{x_k=0}=h, \text{ et} \\ &[v]_{\mu,1}\leqq \text{const.} <h>_{\mu,\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De l'hypothèse il découle qu'il existe une solution w pour l'équation suivante

$$L[w]=f-L[v],$$

$$w|_{t=0}=0,$$

$$Pw|_{x_k=0}=0,$$

et de plus on a

$$||w(t)||\leqq \text{const. }\int_0^t(||f(s)||+||L[v](s)||)\,ds.$$

En le multipliant par $e^{-\mu t}$ et intégrant en t, on obtient, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\mu[w]_{\mu,0} \leqq \text{const. } \{[f]_{\mu,0}+[v]_{\mu,1}\},$$

qui et (3.4) entraînent (3.2). Généralement, on remarque que $\Lambda_\mu^s u$ saitsfait à

$$L[\Lambda_\mu^s u]=A_k \Lambda_\mu^s A_k^{-1} f + A_k[M, \Lambda_\mu^s]u,$$

$$\Lambda_\mu^s u\,|_{t=0}=0,$$

$$P\Lambda_\mu^s u\,|_{x_k=0}=[\Lambda_\mu^s, P]u\,|_{x_k=0}+\Lambda_\mu^s h,$$

où $M=A_k^{-1}\Big(\dfrac{\partial}{\partial t}-\sum A_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big)$. $[M, \Lambda_\mu^s]$ et $[\Lambda_\mu^s, P]$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre s et $s-1$ respectivement. Donc, en appliquant (3.2) à $\Lambda_\mu^s u$, on a (3.3).

Dans la suite, on considère le problème mixte suivant,

$$\text{(3.5)} \qquad \begin{cases} L[u]=0, \\ u\,|_{t=0}=0, \\ Pu\,|_{x_k=0}=h, \end{cases}$$

où $h \in C_0^\infty(R^{k-1}\times(0, T))$ et supp $[h]$ assez petit.

On a alors, en vertu de la Proposition 3.1.

Proposition 3.2. *Supposons que* (L, P) *soit bien posé dans l'espace* L^2. *Alors la solution* u *du problème mixte* (3.5) *satisfait à*

$$\text{(i)} \quad \sum_{j=0}^{k} [x_j u]_{\mu,s} \leqq \text{const. } \{\mu^{-1}\sum_{j=0}^{k-1} \langle x_j h\rangle_{\mu, s+\frac{1}{2}} + \mu^{-2}\langle h\rangle_{\mu,\frac{1}{2}+s}\},$$

où on a écrit $t=x_0$,

$$\text{(ii)} \quad \sum_{j=0}^{k-1} [F_j u]_{\mu,0} \leqq \text{const. } \{\mu^{-1}\sum_{j=0}^{k-1} \langle F_j h\rangle_{\mu,\frac{1}{2}} + \mu^{-2}\langle h\rangle_{\mu,\frac{3}{2}}\},$$

où les F_j *se définissent par* (2.3), *et toutes les constantes sont indépendantes de* n *et* μ.

Preuve. (i), en multipliant (3.5) par x_j, $(j=0, 1,\dots, k)$, on a

$$L[x_j u]=Qu,$$

$$x_j u|_{t=0}=0,$$

$$P[x_j u]_{x_k=0}=x_j h,$$

où Q est un opérateur borné. En vertu de la Proposition 3.1, on a

$$\begin{aligned}[x_j u]_{\mu,s} &\leqq \text{const. } \mu^{-1}\{<x_j h>_{\mu,\frac{1}{2}+s}+[u]_{\mu,s}\},\\ &\leqq \text{const. } \{\mu^{-1}<x_j h>_{\mu,\frac{1}{2}+s}+\mu^{-2}<h>_{\mu,s+\frac{1}{2}}\},\end{aligned}$$

où on remarque que $x_j h$ s'annule pour $j=k$. (ii), faisons opérer F_j à (3.5), on a

$$L[F_j u]=B_j u,$$

$$F_j u|_{t=0}=0,$$

$$P[F_j u]|_{x_k=0}=F_j h+Qu,$$

où $B_j(j=0, 1,\dots, k-1)$ sont des opérateurs différentiels du premier ordre et un opérateur Q borné. Donc, compte tenu de (3.2), on a

$$\begin{aligned}[F_j u]_{\mu,0} &\leqq \text{const. } \mu^{-1}\{<F_j h>_{\mu,\frac{1}{2}}+[u]_{\mu,1}+<u>_{\mu,\frac{1}{2}}\},\\ &\leqq \text{const. } \mu^{-1}\{<F_j h>_{\mu,\frac{1}{2}}+[u]_{\mu,1}\},\end{aligned}$$

d'où on obtient (ii), en utilisant (3.3).

Corollaire 3.1. *On a*

$$\text{(i)}\quad \sum_{j=1}^{k-1}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}u\right]_{\mu,0} \leqq \text{const.}\left\{\mu^{-1}\sum_{j=1}^{k-1}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_j}h\right\rangle_{\mu,\frac{1}{2}}+\mu^{-2}<h>_{\mu,\frac{3}{2}}\right\},$$

$$\text{(ii)}\quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-n\right)u\right]_{\mu,0} \leqq \text{const.}\left\{\mu^{-1}\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}-n\right)h\right\rangle_{\mu,\frac{1}{2}}+\mu^{-2}<h>_{\mu,\frac{3}{2}}\right\}.$$

Démonstration du Théorème 1.1. D'abord on va montre que $l=p$. Supposons que $l>p$. On décompose

$$P(0, 0)=\begin{pmatrix} P_{11}, & P_{12} \\ P_{21}, & P_{22}\end{pmatrix},$$

où P_{11} est une matrice d'ordre p. On prouve que P_{11} est non singulier.

Si P_{11} est singulier, on a la matrice T non singulière d'ordre p telle que

$$TP_{11}T^{-1} = \begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \ \dots \ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

où R_0 est une matrice à $p-1$ lignes et p colonnes. On pose

$$v = \begin{pmatrix} T & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} u \equiv Su.$$

Alors (3.5) s'écrit

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_k} v = nSA^{-1}(0, 0)S^{-1}v + f, \\ &P(0, 0)S^{-1}v|_{x_k=0} + \varphi = h, \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $\quad f = S(A^{-1}\frac{\partial}{\partial t} - nA^{-1}(0, 0))u - SA^{-1}\Sigma A_j \frac{\partial}{\partial x_j} u$ et

$\varphi = (P - P(0, 0))u|_{x_k=0}$.

On remarque que

$$[f]_{n,0} \leqq \text{const.} \left\{ \sum_{j=0}^{k} [x_j u]_{n,1} + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - n\right)u\right]_{n,0} + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} u\right]_{n,0} \right\} \text{ et} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} <\varphi>_{n,0} &\leqq \text{const.} \sum_{j=0}^{k-1} <x_j u>_{n,0} \\ &\leqq \text{const.} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} n^{-1/2}[x_j u]_{n,1} + n^{1/2}[x_j u]_{n,0} \right\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

On écrit $v = {}^t(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_m) = {}^t(v^{(1)}, v^{(2)})$. Alors on a

$$v^{(2)} = nA_+^{-1}v^{(2)} + f^{(2)}.$$

Puisque toutes les valeurs propres de A_+ sont positives, on a

$$<v^{(2)}>_{n,0}^2 + n[v^{(2)}]_{n,0}^2 \leqq \text{const.} \frac{1}{n}[f^{(2)}]_{n,0}^2. \tag{3.10}$$

Maintenant on choisit h tel que $(T, 0)h={}^t(0,\dots, 0, h_p, 0\dots 0)$. Alors compte tenu de (3.6), de (3.7), de (3.8), de (3.9) et de (3.10), on a

$$\begin{aligned}<h_p>_{n,0} &\leqq \text{const.} <v^{(2)}>_{n,0}+<\varphi>_{n,0},\\ &\leqq \text{const.} \Big\{n^{-1/2}\Big(\sum_{j=0}^{k}[x_j u]_{n,1}+\sum_{j=1}^{k-1}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}u\Big]_{n,0}+\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t}-n\Big)u\Big]_{n,0}\Big)\\ &\qquad \sum_{j=0}^{k-1} n^{1/2}[x_j u]_{n,0}\Big\},\end{aligned}$$

d'où l'on a en utilisant le Proposition 3.2 et le Corollaire 3.1 avec $\mu=n$,

$$\begin{aligned}(3.11)\qquad <h_p>_{n,0} \leqq \text{const.} &\Big\{n^{-3/2}\Big(\sum_{j=1}^{k-1}<x_j h_p>_{n,\,3/2}+\sum_{j=1}^{k-1}\Big\langle\frac{\partial}{\partial x_j}h_p\Big\rangle_{n,\frac{1}{2}}\\ &+\Big\langle\Big(\frac{\partial}{\partial t}-n\Big)h_p\Big\rangle_{n,\frac{1}{2}}\Big)+n^{-1/2}<h_p>_{n,\frac{1}{2}}\\ &+n^{-5/2}<h_p>_{n,\frac{3}{2}}+n^{-1/2}\sum_{j=1}^{k-1}<x_j h>_{n,\frac{1}{2}}\Big\}.\end{aligned}$$

On ici choisit $h_p=\beta_n(x', t)$ défini par (2.4) comme h_p. Alors, le terme à droite de (3.11) se majore par *const.* $n^{-1/2}$ en vertu du Lemme 2.1 et du Corollaire 2.1. D'autre part, le terme à gauche de (3.11) prend 1 d'après (i) du Corollaire 2.1. Cela implique contradiction pour n assez grand. Ce prouve ainsi que P_{11} est nonsingulier.

Maintenant nous revenons de nouveau au problème (3.7). On décompose $S^{-1}v=u={}^t(u^{(1)}, u^{(2)})$. Alors (3.7) se récrit

$$(3.12)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_k}u=n\begin{pmatrix}A_-^{-1} & 0\\ 0 & A_+^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^{(1)}\\ u^{(2)}\end{pmatrix}+f,\\[2ex] \begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^{(1)}\\ u^{(2)}\end{pmatrix}_{x_k=0}+\varphi=h.\end{cases}$$

Puisque P_{11} est non singulier, d'après (3.12) on a

$$h^{(2)}=\varphi^{(2)}+P_{22}u^{(2)}|_{x_k=0}+P_{21}P_{11}^{-1}(h^{(1)}-\varphi^{(1)}-P_{12}u^{(2)}|_{x_k=0}),$$

d'où, on peut évaluer, en choisissant $h=(0,\dots, 0, \beta_n)$,

$$<\beta_n>_{n,0} \leqq \text{const. } \{<u^{(2)}>_{n,0}+<\varphi>_{n,0}\}.$$

Notons que $u^{(2)}$ satisfait à (3.10), de la même manière ci-dessus on a l'inégalité (3.11). Cela implique une contradiction. Donc, on a montré que $l \leqq p$.

Ensuite, supposons que $l<p$. On décompose

$$P(0, 0)=(P_1, P_2),$$

où P_1 est une matrice à l lignes et p colonnes. Puisque $l<p$, il existe un vecteur $w={}^t(w_1,\dots, w_p)\neq 0$ tel que

$$P_1 w=0 \tag{3.13}$$

On note que $A_k(0, 0)$ a la forme suivante

$$A_k(0, 0)=\begin{pmatrix} a_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_p & & & \\ & & & a_{p+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & a_m \end{pmatrix},$$

où a_j, $(j=1,\dots, p)$, sont réels négatifs et a_j, $(j=p+1\dots, m)$ réels positifs. On pose

$$u(x, t)=\sum_{i=1}^{P} c_i n^{k/4} \exp(a_i^{-1} nx+nt)\alpha(n^{1/2}x', n^{1/2}t)e_i,$$

où $e_j={}^t(0,\dots, 0, 1^j, 0\dots 0)$, $j=1, 2,\dots, p$ sont des vecteurs dan R^m. Alors on a

$$[u]_{n,0}^2=\sum_{i=1}^{p}|c_i a_i|^2\neq 0. \tag{3.14}$$

En appliquant $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_k}-M\right)$ à la fonction $u(x, t)$, on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)u=(A^{-1}(0, 0)-A^{-1}(x, t))\frac{\partial}{\partial t}u+A_k^{-1}\sum_{j=1}^{k-1}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}u\equiv f.$$

De plus (3.13), on obtient

$$Pu|_{x_k=0}=(P(x, t)-P(0, 0))u|_{x_k=0}\equiv h.$$

Donc, de la définition de $u(x, t)$, on peut évaluer,

$$
(3.15)\qquad \begin{aligned} &[f]_{n,0} \leqq \text{const. } n^{1/2}, \text{ et} \\ &<h>_{n,1/2} \leqq \text{const. } n^{1/2}. \end{aligned}
$$

D'autre part, puisque (L, P) est bien posé dans l'espace L^2, on a, compte tenu de (3.15),

$$
\begin{aligned} [u]_{n,0} &\leqq \text{const. } \frac{1}{n}\{[f]_{n,0} + <h>_{n,1/2}\}, \\ &\leqq \text{const. } n^{-1/2}, \end{aligned}
$$

qui n'est pas compatible avec (3.14) pour n assez grand. Cela prouve que $p=l$.

Dans la suite, on va prouver que la propriété (ii) de la Définition 1.1, c'est-à-dire,

$$
\text{dét } PN^{-}(x', t; \lambda, i\eta) \neq 0
$$

pour tout λ complexe, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\eta \in R^{k-1}$ et $(x', t) \in R^{k-1} \times [0, T]$.

Supposons que PN^{-} est singulier pour λ_0, $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$, $\eta^0 \in R^{k-1}$ et (x_0, t_0). Pour simplifier, on prend $(x_0, t_0) = (0, 0)$. On considère le problème mixte (3.5). On pose $N^{-1}(0, 0; \lambda_0, i\eta^0)u = v = {}^t(v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_m) = {}^t(v^{(1)}, v^{(2)})$. Alors (3.5) s'ecrit,

$$
(3.16)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_k} v = n \begin{pmatrix} M^{-}(0, 0; \lambda_0, i\eta^0) & * \\ 0 & M^{+}(0, 0; \lambda_0, i\eta^0) \end{pmatrix} v + f, \\ &P(0, 0)N(0, 0; \lambda_0, i\eta^0)v|_{x_k=0} + \varphi = h, \end{aligned}
$$

où f et φ expriment,

$$
\begin{aligned} &f = N^{-1}\Big(M\Big(x, t; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x'}\Big) - nM(0, 0; \lambda_0, i\eta^0)\Big)u, \text{ et} \\ &\varphi = (P(x', t) - P(0, 0))u|_{x_k=0}, \end{aligned}
$$

respectivement. Nous notons que nous avons

$$
(3.17)\qquad [f]_{\mu,0} \leqq \text{const. } \{\sum_{j=0}^{k} [x_j u]_{\mu,1} + \sum_{j=0}^{k-1} [F_j u]_{\mu,0}\} \quad \text{et}
$$

$$(3.18)\qquad <\varphi>_{\mu,0} \leqq \text{const.}\{\sum_{j=0}^{k-1} <x_j u>_{\mu,0}\},$$

$$\leqq \text{const.}\ \{n^{-1/2}\sum_{j=0}^{k-1}[x_j u]_{\mu,1}+n^{1/2}\sum_{j=0}^{k-1}[x_j u]_{\mu,0}+n^{-1/2}[u]_{\mu,0}\}.$$

La dernière inégalité peut se prouver de la manière suivante,

$$<x_j u>^2_{\mu,0} = -2\mathrm{Re}\int_0^T (e^{-\mu t}(Mx_j u+Bu),\ e^{-\mu t}x_j u)\ dt,$$

$$\leqq \text{const.}\left\{\frac{1}{n}[Mu]^2_{\mu,0}+n[x_j u]^2_{\mu,0}+\frac{1}{n}[u]^2_{\mu,0}\right\}.$$

Soit w le vecteur-nul à ganche de $PN^-(0, 0;\ \lambda_0,\ i\eta^0)$, c'est-à-dire

$$(3.19)\qquad w.\ PN^-(0, 0;\ \lambda_0,\ i\eta^0)=0.$$

Maintenant on choisit h tel que $w.h=\alpha_{n,\mu}$, qui se définit par (2.1). En multipliquant par w le second terme de (3.16), d'après (3.19) on a

$$\alpha_{n,\mu}=w.PN^+(0, 0;\ \lambda_0,\ i\eta^0)v^{(2)}|_{x_k=0}+\varphi^{(2)},$$

d'où l'on peut évaluer

$$(3.20)\qquad <\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0} \leqq \text{const.}\ \{<v^{(2)}>_{\mu,0}+<\varphi^{(2)}>_{\mu,0}\}.$$

Puisque $M^+(0, 0;\ \lambda_0,\ i\eta^0)$ a seulement les valeurs propres à partie réelle positive, compte tenu du premier terme de (3.16), on obtient

$$<v^{(2)}>^2_{\mu,0}+n[v^{(2)}]^2_{\mu,0} \leqq \text{const.}\ n^{-1}[f^{(2)}]^2_{\mu,0}$$

qui et (3.20) entraînent

$$(3.21)\qquad <\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0} \leqq \text{const.}\ \{n^{-1/2}[f]_{\mu,0}+<\varphi^{(2)}>_{\mu,0}\}.$$

On pose $\mu=\mathrm{Re}\,\lambda_0\cdot n$. Alors, d'après (3.17), (3.18) et Proposition 3.2, on dérive de (3.21)

$$(3.22)\qquad <\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0} \leqq \text{const.}\ \{n^{\frac{3}{2}}\sum_{j=0}^{k-1}(<x_j\alpha_{n,\mu}>_{\mu,\frac{3}{2}}+<F_j\alpha_{n,\mu}>_{\mu,\frac{1}{2}}$$

$$+n<x_j\alpha_{n,\mu}>_{\mu,\frac{1}{2}})+n^{-5/2}<\alpha_{n,\mu}>_{\mu,\frac{3}{2}}\}.$$

Compte tenu du Lemme 2.1 avec $\mu=\mathrm{Re}\,\lambda_0 n$, le terme à gauche de (3.22) est égale à 1 et terme à droite se majore par const. $n^{-\frac{1}{2}}$. Cela implique une contradition pour n assez grand. Ce prouve le Théorème 1.1.

§4. La Condition Uniforme de Lopatinski

Dans ce paragraphe, nous allons établir le Théorème 1.2, qui, se prouve de la même façon que le Théorème 1.1.

Nous supposons ici que (L, P) soit bien posé dans l'espace L^2 et de plus la solution du problème mixte suivant,

$$(4.1)\qquad \begin{cases} L[u]=f, \\ u|_{t=0}=0, \\ Pu|_{x_k=0}=h, \end{cases}$$

vérifie (1.2) pour tout $\mu>0$, c'est-à-dire,

$$(4.2)\qquad \mu[u]^2_{\mu,0}+<u>^2_{\mu,0} \leqq \text{const.}\ \{\mu^{-1}[f]^2_{\mu,0}+<h>^2_{\mu,0}\}$$

pour tout $f\in C_0^\infty(R_+^k\times(0, T))$ et tout $h\in C_0^\infty(R^{k-1}\times(0, T))$.

Il découle facilement de (4.2) que l'on a

Proposition 4.1. *Supposons que* (4.2). *Alors il existe une constante* μ_s *pour* s *entier non négatif telle que pour* $f\in C_0^\infty(R_+^k\times(0, T))$ *et* $h\in C_0^\infty$ $(R^{k-1}\times(0, T))$,

$$(4.3)\qquad \mu[u]^2_{\mu,s}+<u>^2_{\mu,s} \leqq \text{const.}\ \{\mu^{-1}[f]^2_{\mu,s}+<h>^2_{\mu,s}\}$$

pour $\mu\geqq\mu_s$.

Maintenant, nous considérons le problème mixte (4.1) avec $f=0$, à savoir,

$$(4.4)\qquad \begin{cases} L[u]=0 \\ u|_{t=0}=0 \\ Pu|_{x_k=0}=h\,. \end{cases}$$

Alors on a

Proposition 4.2. *Supposons que* (L, P) *vérifie l'évalution* (4.2). *Alors la solution de* (4.4) *satisfait aux suivants*

$$\text{(i)}\quad \mu\sum_{j=0}^{k}[x_j u]^2_{\mu,s}+\sum_{j=0}^{k-1}<x_j u>^2_{\mu,s} \leqq \text{const.}\left\{\sum_{j=0}^{k-1}<x_j h>^2_{\mu,s}+\frac{1}{\mu}<h>^2_{\mu,s}\right\}$$

pour tout $\mu\geqq\mu_s$, *s étant un entier non négatif, et on a écrit* $x_0=t$,

$$\text{(ii)}\quad \sum_{j=0}^{k-1}\mu[F_j u]^2_{\mu,0}+<F_j u>^2_{\mu,0} \leqq \text{const.}\left\{\sum_{j=0}^{k-1}<F_j h>^2_{\mu,0}+\mu^{-1}<h>^2_{\mu,0}\right\},$$

pour $n\geqq\mu$, *où l'on définit* F_j *par* (2.3).

Cette proposition se prouve par la même manière que le Proposition 3.2. *Démonstration du Théorème* 1.2. Nous allons prouver ce théorème par contradiction. Supposons que dét (PN^-) soit nul pour (x'_0, t_0), et (λ_0, η^0), Re $\lambda_0\geqq 0$. Il découle du Théorème 1.1 que la partie réelle de λ_0 est zèro. On écrit $\lambda_0=i\sigma_0$. Pour simplifier notre resonnement, supposons désormais que $(x'_0, t_0)=(0, 0)$. On pose

$$R(\varepsilon)=PN^-(0, 0; \varepsilon+i\sigma_0, i\eta^0), \qquad \varepsilon\geqq 0.$$

Puisque les éléments des N se constituent en des fonctions continues, $R(\varepsilon)$ varie continûment en ε. Donc, de l'hypothése il découle que $R(0)$ est singulier. Soit $c=(c_1,\dots, c_l)$ un vecteur-nul à gauche de $R(0)$. On pose $w(\varepsilon)=cR(\varepsilon)$. Alors, par continuité, on a

$$|w(\varepsilon)|\to 0, \text{ quand } \varepsilon\to 0. \tag{4.5}$$

Maintenent, nous revenons de nouveau au problème mixte (4.4). On pose $v=N^{-1}(0, 0; \mu/n+i\sigma_0, i\eta^0)u=(v^{(1)}, v^{(2)})$. Alors, on peut écrire à la maniére suivante

$$\frac{\partial}{\partial x_k}v=n\begin{pmatrix} M^-(0, 0; \mu/n+i\sigma_0, i\eta^0) & * \\ 0 & M^+(0, 0; \mu/n+i\sigma_0, i\eta^0)\end{pmatrix}v+f,$$

(4.6)

$$R(\mu/n)v^{(1)}|_{x_k=0}+PN^+v^{(2)}|_{x_k=0}+\varphi=h,$$

où f et φ expriment

$$f=N^{-1}(0, 0; \mu/n+i\sigma_0, i\eta^0)\Big(M\Big(x, t; \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x'}\Big) \tag{4.7}$$
$$-nM(0, 0; \mu/n+i\sigma_0, i\eta^0)u \text{ et}$$
$$\varphi=(P(x', t)-P(0, 0))u\,|_{x_k=0}$$

On ici choisit h tel que $c.h=\Sigma c_i h_i=\alpha_{n,\mu}(x', t)$ défini par (2.1). En multipliant par c le second membre de (4.6), on a

$$\alpha_{n,\mu}=w(\mu/n)v^{(1)}|_{x_k=0}+c\cdot PN^+(0, 0; \mu/n+i\sigma_0, i\eta^0)v^{(2)}|_{x_k=0}+c\cdot\varphi,$$

d'où l'on peut évaluer

$$<\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0}\leqq|w(\mu/n)|<v^{(1)}>_{\mu,0}+\text{const.}\ (<v^{(2)}>_{\mu,0}+<\varphi>_{\mu,0}), \tag{4.8}$$

où const. est independant de μ et de n. En utilisant le premier membre de (4.6), nous allons évaluer $v^{(2)}$, qui satisfait à

$$v^{(2)}=nM^+(\mu/n)v^{(2)}+f^{(2)}, \tag{4.9}$$

où $M^+(\mu/n)=M^+(0, 0; \mu/n+i\sigma_0, i\eta^0)$. Nous notons qu'il découle de l'hyperbolicité de L que la partie réelle des racines caractéristiques de $M^+(\mu/n)$ se minore par const. μ/n. On a donc pour tout $\xi\in R^1$,

$$|(i\xi-M(\mu/n))^{-1}|\leqq \text{const.}\ (n/\mu)^{m-l}\times(|\xi|+\mu)^{-1}. \tag{4.10}$$

On represente, du (4.9),

$$v^{(2)}(x', 0, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\xi-M(\mu/n))^{-1}\hat{f}^{(2)}(\xi)\,d\xi, \tag{4.11}$$

où $\hat{f}(\xi)$ exprime l'image de Fourier par rapport à x_k, à savoir,

$$\widehat{f^{(2)}}(\xi)=\int_0^{\infty}e^{-ix_k\xi}f^{(2)}(x_k)\,dx_k.$$

Compte tenu de (4.11) on a, en utilisant (4.10) et l'inéqualité de Schwarz,

$$<v^{(2)}>_{\mu,0}\leqq \text{const.}\ (n/\mu)^{m-l}\mu^{-\frac{1}{2}}[f^{(2)}]_{\mu,0},$$

d'où, on a en vertu de (4.9),

$$<\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0}\leqq \text{const.}\ \{|w(\mu/n)|<u>_{\mu,0} \tag{4.12}$$
$$+(n/\mu)^{m-l}\mu^{-\frac{1}{2}}[f]_{\mu,0}+<\varphi>_{\mu,0}\}.$$

Notons que f et φ vérifient les inégalités (3.22) et (3.23) respéctivement. Donc, on a finalement d'après (4.12) et Proposition 4.2,

$$
\begin{aligned}
<\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0} \leqq \text{const.}\ \{ |w(\mu/n)| <\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0} + \sum_{j=0}^{k-1} < x_j\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0} \\
+\mu^{-\frac{1}{2}}<\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0} + (n/\mu)^{m-l}\mu^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}(< x_j\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0} \\
+ < F_j\alpha_{n,\mu}>_{\mu,0} + \mu^{-1}<\alpha_{n,\mu}>_{\mu,1}\},
\end{aligned}
$$

qui entraîne avec le Lemme 2.1

$$
(4.13) \qquad 1 \leqq \text{const.}\ \{ |w(\mu/n)| + (\mu/n)^{\frac{1}{2}} + (n/\mu)^{m-l} n^{\frac{1}{2}} \mu^{-1} \}.
$$

On ici pose $\mu = n^{\delta}$, $1 > \delta > (m-l+1/2)/(m-l+1)$. Alors puisque tend vers zéro quand $n \to \infty$, (4.5) et (4.13) ne sont pas compatibles pour n assez grand. Le théorème est ainsi démonstré.

§5. Systèmes d'Ordre 2 à Coefficients Analytiques

Dans ce paragraphe, nous traiterons le problème mixte pour les sysèmes d'ordre 2 à coefficients anaytiques.

Nous supposons que $A_j(x, t)$ soient les matrices d'ordre 2, et que leurs éléments soient analytiques. De plus, supposons que $P(x', t)$ soit analytique, et $A_k(x, t)$ et $P(x', t)$ aient les formes (1.6), c'est-à-dire,

$$
(5.1) \qquad A(x, t) = \begin{pmatrix} a_1(x, t) & 0 \\ 0 & a_2(x, t) \end{pmatrix}, \ a_1 < 0 \text{ et, } a_2 > 0, \text{ et}
$$

$$
(5.2) \qquad P(x', t) = (b_1(x', t), b_2(x', t)),\ b_1(0, 0) \neq 0.
$$

Notre but de ce paragraph est de prouver le Théorème 1.5 sous les hypothèses ci-dessus. Nous utiliserons la méthode de Lax [3].

Démonstration du Théorème 1.5. Nous allons établir ce théorème par contradiction. Supposons que la fonction scalaire PN^- soit nul le pour $(x', t) = (0, 0)$ et $(\lambda, \eta) = (\lambda_0, \eta^0)$, Re $\lambda_0 > 0$. Alors on va construire une solution de (1.4), qui ne satisfait pas à (1.5) dans un voisinage de l'origine. Posons la fonction cherchée $u(x, t)$ sous la forme,

$$u(x, t)=e^{l(x,t)n}\sum_{j=0}^{N}\frac{u_j(x, t)}{n^j}, \tag{5.3}$$

n étant un entier positif, et N assez grand.

Faisons opérer $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)$ à (5.3). On a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)u &= n(l_{x_k}-M(l_t, l_{x'}))e^{nl}u_0 \\ &+\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{n^j}\left\{(l_{x_k}-M(l_t, l_y))u_{j+1}+\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)u_j\right\}e^{nl} \\ &+\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)u_N}{n^N}e^{nl},\end{aligned} \tag{5.4}$$

où $M(l_t, l_y)=A_k^{-1}(l_t-\sum_{j=1}^{k-1}A_jl_{x_j})$. Pour définir $l(x, t)$ et $u_0(x, t)$, on considère la propriété de la matrice $M(x, t; \lambda, i\eta)$ dans un voisinage de $(0, 0, \lambda_0, \eta^0)$. Puisque il découle de l'hyperbolicité que, pour Re $\lambda>0$, la partie réelle du valeur propre de $M(x, t; \lambda, i\eta)$ ne s'annule jamais, et A_k a une valeur propre positive et une valeur propre négative, $M(x, t; \lambda, i\eta)$ a une valeur propre à partie réelle positive, $\xi^+(x, t; \lambda, i\eta)$, et une valeur propre à partie réelle négative, $\xi^+(x, t; \lambda, i\eta)$. Notons que $\xi^\pm(x, t; \lambda, i\eta)$ est analytique en (x, t, λ, η), Re $\lambda>0$. On détermine $l(x, t)$ par l'équation

$$l_{x_k}=\xi^-(x, t, l_t, l_{x'}), \text{ et} \tag{5.5}$$

$$l|_{x_k=0}=l_0(x', t), \tag{5.6}$$

où $l_0(x', t)$ est la condition initiale, qui sera déterminée dans la suite. Soit v_0 (resp. w_0) un vecteur-nul à droite (resp. à gauche) de $(l_{x_k}-M(l_t, l_{x'}))$. On pose

$$u_0=\sigma^{(0)}v_0, \tag{5.7}$$

où $\sigma^{(0)}$ est la fonction scalaire. Alors, u_0 vérifie

$$(l_{x_k}-M(l_t, l_{x'}))u_0=0. \tag{5.8}$$

Pour faire (5.4) annuler pour $j=0$, il est nécessaire que u_1 et n_0 soient vérifiés

(5.9) $$(l_{x_k}-M(l_t,\, l_{x'}))u_1+\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)u_0=0.$$

Puisque $(l_{x_k}-M(l_t,\, l_{x'}))$ est la matrice singulière, (5.9) a une solution, si le terme non-homogène $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)u_0$ est orthogonal au vecteur-nul à droite w_0 de $(l_{x_k}-M(l_t,\, l_{x'}))$, c'est-à-dire,

(5.10) $$w_0\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)u_0$$

$$=\sigma^{(0)}_{x_k}-b_k\sigma^{(0)}_t+\sum_{j=1}^{k-1}b_j\sigma^{(0)}_{x_j}+b\sigma^{(0)}=0,$$

où $a_1=w_0\cdot A^{-1}v_0$, $b_j=w_0\cdot A^{-1}A_jv_0$ et $b=w_0\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)v_0$, et ici on a utilisé $w_0\cdot v_0=1$. Soit $u_1^{(0)}$ une solution particulière de (5.9).

On pose $u_1=u_1^{(0)}+\sigma^{(1)}v_0$. Alors u_1 et u_0 satisfont à (5.9).

De proche en proche, en posant au zéro les termes de la même puissance de n dans (5.4), on a les formes suivantes

(5.11) $$(l_{x_k}-M(l_t,\, l_{x'}))u_j+\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)u_{j-1}=0,$$

pour $j=1, 1, 2,\dots, N$. Alors, de la même manière que u_1 on peut construire u_j tel que

(5.12) $$u_j=u_j^{(0)}+\sigma^{(j)}v_0,$$

ici $\sigma^{(j)}$, $j=1,\dots, N$ vérifient

(5.13) $$\sigma^{(j)}_{x_k}-b_k\sigma^{(j)}_t+\sum_{s=1}^{k-1}b_s\sigma^{(j)}_{x_s}=-w_0\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)u_j^{(0)},$$

où $u_j^{(0)}$ étant des solutions particulières de (5.11).

On peut chercher les solutions des équations (5.5), (5.9) et (5.13), en utilisant le théorème de Cauchy-Kowalevski.

Nous allons maintenant déterminer les conditions initiales telles que

(5.14) $$Pu_j|_{x_k=0}=0, \text{ pour } j=0, 1,\dots, N.$$

Pour cela, nous considérons PN^- au voisinage de $(0, 0;\, \lambda_0, \eta^0)$. Puisque les racines caractéristiques de $M(x, t;\, \lambda, i\eta)$ sont simples au voisinage de

$(0, 0, \lambda_0, \eta^0)$, on a

$$N^{-1}MN=\begin{pmatrix} \xi^+ & 0 \\ 0 & \xi^- \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Donc on peut poser $N^-=v_0$. Pour simplifier, on écrit $r(x', t; \lambda, i\eta)=P(x', t)v_0(x', 0, t; \lambda, i\eta)$. Alors, de l'hypothèse il décole que $r(0, 0, \lambda_0, i\eta^0)$ soit zéro.

Lemme 5.1. *Pour* (λ_0, η^0) *tel que* $r(0, 0; \lambda_0, i\eta^0)=0$, *on a* $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} r\right)(0, 0; \lambda_0, i\eta^0)\neq 0$.

Preuve. Pour simplifier la notation, on écrit $P_0=P(0, 0)$, $v_0(\lambda)=v_0(0, 0; \lambda, i\eta^0)$ et $r_0(\lambda)=r(0, 0; \lambda, i\eta^0)$. On a l'égalité $r_0(\lambda)=P_0v_0(\lambda)$. Puisque $v_0(\lambda)$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\xi_0^-(\lambda)=\xi^-(0, 0; \lambda, i\eta^0)$ de $M_0(\lambda)=M(0, 0; \lambda, i\eta^0)$, (5.15) se récrit

$$M_0(\lambda)v_0(\lambda)=\xi_0^-(\lambda)v_0(\lambda).$$

En le dérivant par repport à λ, on a

$$A_k^{-1}(0, 0)v_0(\lambda)+M_0(\lambda)v_0(\lambda)=\xi_{0\lambda}^-(\lambda)v_0(\lambda)+\xi_0^-(\lambda)v_{0\lambda}(\lambda). \tag{5.16}$$

Si $r_{0\lambda}(\lambda_0)=0$, d'après $r_{0\lambda}(\lambda_0)=P_0v_{0\lambda}(\lambda_0)$, on a $v_{0\lambda}(\lambda_0)=\alpha v_0(\lambda_0)$, où α est un scalaire. Donc, compte tenu de (5.16), on a la relation $A^{-1}(0, 0)v_0(\lambda_0)=\xi_0^-(\lambda_0)v_0(\lambda_0)$. Donc $v_0(\lambda_0)$ est le vecteur propre et $\xi_0^-(\lambda_0)$ est la valeur propre de $A^{-1}(0, 0)$. De la forme (5.1) de $A_k(0, 0)$ il découle que $v_0(\lambda_0)={}^t(1, 0)$. D'autre part, $r_0(\lambda_0)=P_0v_0(\lambda_0)=b_1(0, 0)$ ne s'annule pas de l'hypothèse (5.2). Cela implique une contradiction.

Il découle du Lemme 5.1 que l'on a une fonction $\lambda(x', t; i\eta)$ analytique en (x', t, η) au voisine de $(0, 0, \eta^0)$ telle que

$$r(x', t; \lambda(x', t; i\eta), i\eta)=0. \tag{5.17}$$

Maintenant on va déterminer la condition initiale de $l(x, t)$, solution de (5.5). On choisit la condition initiale $l_0(x', t)$, qui vérifie l'équation suivante

$$l_{0t}(x', t) = \lambda(x', t, l_{0x'}),$$
(5.18)
$$l_0(x', 0) = ix' \cdot \eta^0.$$

Du théorème Cauchy-Kowalevski il découle qu'il existe une solution de (5.18). Alors on a d'après (5.17) et (5.18),

(5.19) $$Pv_0|_{x_k=0} = r(x', t, l_{0t}, l_{0x'}), \\ = 0.$$

Dans la suite, nous allons déterminer la condition initiale de $\sigma^{(j)}$ telle que

(5.20) $$u_j^{(0)}|_{x_k=0} = 0, \ (j=1, 2, \dots, N),$$

où $u_j^{(0)}$ étant la solution particulière de (5.11). Pour cela, il faut et it suffit que pour $w_1(x, t)$ le vecteur-nul à gauche de $(\xi^+(x, t, l_t, l_{x'}) - M(l_t, l_{x'}))$, on ait

$$w_1 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - M\right) u_{j-1}|_{x_k=0} = 0,$$

ou en posant $\sigma^{(j-1)}(x', 0, t) = \sigma_0^{(j-1)}(x', t)$, on récrit

(5.21) $$d_k \sigma_{0t}^{(j-1)} + \sum_{j=1}^{k-1} d_j \sigma_{0x_j}^{(j-1)} + d\sigma_0^{(j-1)} = 0,$$

ici, $d_k = w_1 \cdot A_k^{-1} v_0$, $d_j = w_1 \cdot A_k^{-1} A_j v_0$ et $d = w_1 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - M\right) v_0$ et on a utilisé $w_1 \cdot v_0 = 0$. Notons qu'il découle de $w_1 \cdot v_0 = 0$ et de la forme de A_k que d_k ne s'annule pas. Donc, d'après le théorème de Cauchy-Kowalevski, on peut trouver la solution de (5.21).

Maintenant nous allons montrer que la fonction (5.3), dont nous avons construit, ne satisfait pas à (1.5). On pose

(5.22) $$\rho = \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}} \operatorname{Re} l(x, t) = \operatorname{Re} l(x_0, t_0).$$

Notons qu'il découle du primier terme de (5.18) que la partie réelle de $l_t(x, t)$ est positive dans Ω. Donc on a

(5.23) $$\rho > \rho_0 = \max_{x \in \bar{D}} \operatorname{Re} l(x, 0).$$

La fonction $u(x, t)$ définie par (5.3) vérifie

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)u=\frac{1}{n^N}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M\right)u_N e^{nl}\equiv f.$$

Donc on a

$$|f|_{s,\Omega}\leqq \text{const.}\frac{1}{n^{N-s}}e^{n\rho}. \tag{5.24}$$

De plus, la valeur initiale $u(x, 0)(=g(x))$ de $u(x, t)$ satisfait à

$$|g|_{s,D}\leqq \text{const. } n^s e^{\rho_0 n}. \tag{5.25}$$

En vertu de (5.19) et de (5.20), on a

$$Pu|_{x_k=0}=0.$$

D'autre part, d'après (5.22) on a

$$|u(x_0, t_0)|\geqq e^{\rho n}\left(|u_0(x_0, t_0)|-O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$\geqq \text{const. } e^{\rho n}.$$

Donc, il découle de (5.23) que $u(x, t)$ ne satisfait pas à (1.5) pour n assez grand et $N=s+1$. Cela prouve le Théorème 1.5.

References

[1] Agemi, R. and Shirota, T., On necessary and sufficient conditions for L^2-well-posedness of mixed problems for hyperbolic equations II. *Jour. Fac. Sci. Hokaido Univ.*, **22**, (1972), 137–149.

[2] Hersh, R., Mixed problem in several variables, *J. Math. Mech.* **12** (1963), 317–334.

[3] ———, Boundary conditions for equations of evolution, *Arch. Rational Mech. Anal.* **16** (1964) 243–264.

[4] Kreiss, O.K., Initial boundary value problems for hyperbolic systems, *Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), 277–298.

[5] Kajitani, K., A necessary condition for the L^2-well posed Cauchy problem with variable coefficients, *J. Math. Kyoto Univ.* **13** (1973), 701–711.

[6] Lax, P. D., Asymtotic solutions of oscillatory intial value problems, *Duke Math. J.* **24** (1957), 627–646.

[7] Sakamoto, R., L^2-well-posedeness for hyperbolic mixed problems, à paraitre.