Publ. RIMS, Kyoto Univ.
10 (1975), 669–690

Sur les Problèmes Mixtes pour l'Équation des Ondes

Par

Mitsuru IKAWA*

§1. Introduction

Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^n=\{(x_1,\ldots, x_n);\ x_i\in\mathbf{R}\}$ dont la frontière S est compacte et indéfiniment différentiable. Considérons le problème mixte

$$(1.1)\quad \begin{cases} \square u(x, t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=f(x, t) & \text{dans } \Omega\times]0, T[\\ Bu(x, t)=\dfrac{\partial u}{\partial \nu}+d(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}=g(x, t) & \text{sur } S\times]0, T[\\ u(x, 0)=u_0(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=u_1(x) & \end{cases}$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ et $\nu(x)=(\nu_1(x), \nu_2(x),\ldots, \nu_n(x))$ est un vecteur réel indéfiniment différentiable défini sur S. On suppose que $\nu(x)$ est toujours transversal par rapport à S, c'est-à-dire, si l'on désigne la normale extérieure unitaire de S par $n(x)=(n_1(x), n_2(x),\ldots, n_n(x))$ il a lieu

$$(1.2)\qquad \nu(x)n(x)=\sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)n_i(x)\neq 0 \qquad \text{sur } S.$$

Est-ce que la condition (1.2) *serait suffisante, si l'on prend* $d(x)\equiv 0$, *pour que le problème mixte* (1.1) *soit bien posé au sens de* C^∞?

Communiqué par S. Matsuura, le 15 juin 1974.
* Département de Mathématique, Université d'Osaka, Osaka.

Ici, on dit que le problème mixte (1.1) est bien posé au sens de C^∞ quand pour toutes les données $\{u_0, u_1, f, g\}$ satisfaisant à la condition de compatibilité d'ordre infini (1.1) admet une solution unique u dans $C^\infty(\bar{\Omega}\times[0, T])$ et pour chaque $t_0\in[0, T]$ l'application $\{u_0, u_1, f, g\}\to u$ est continue de $C^\infty(\bar{\Omega})\times C^\infty(\bar{\Omega})\times C^\infty(\bar{\Omega}\times[0, t_0])\times C^\infty(S\times[0, t_0])$ dans $C^\infty(\bar{\Omega}\times[0, t_0])$.

La condition de compatibilité d'ordre infini pour les données $\{u_0, u_1, f, g\}$ signifie qu'il a lieu

$$\frac{\partial u_p}{\partial v}+d(x)u_{p+1}=\frac{\partial^p g}{\partial t^p}(x, 0) \qquad \text{sur } S$$

pour $p=0, 1, 2,\dots$, où $u_p(x)$, $p=2, 3,\dots$ sont définies par récurrence par la formule

$$u_p(x)=\Delta u_{p-2}(x)+\frac{\partial^{p-2}f}{\partial t^{p-2}}(x, 0)\,.$$

A propos de la question posée tout à l'heure, ou de savoir si le problème mixte (1.1) est bien posé au sens de C^∞ sous les conditions de $d(x)\equiv 0$ et de (1.2), la réponse est négative en général. Nous avons montré dans [4] et [5] que, au cas de $n=2$, on peut trouver un exemple d'un domaine Ω et d'un vecteur réel $v(x)$ défini sur $\partial\Omega$ tel que le problème mixte (1.1) n'est pas bien posé au sens de C^∞.

Le domaine Ω construit dans [5] est convexe, compact et à la frontière indéfiniment différentiable. La méthode de construction de Ω et de $v(x)$ n'est pas difficile mais nous ne pouvons pas dire que Ω, lui, est un domaine de la forme simple.

Dans cet article, nous allons montrer que, au cas de $n=3$, on peut trouver des exemples de Ω et de B en forme très simple pour lesquels le problème mixte (1.1) est mal posé au sens de C^∞.

Théorème 1. *Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^3$ compact et convexe dont la frontière S est indéfiniment différentiable et contient*

$$S_0=\{x\in\mathbf{R}^3;\ x_1^2+x_2^2=1,\ |x_3|\leqq 1\}\,.$$

Etant donné $v(x)$ un vecteur réel indéfiniment différentiable défini sur S vérifiant sur S_0 la condition suivante:

$$(1.3)\qquad \begin{cases} x_1v_1(x)+x_2v_2(x)=a\neq 0 \\ x_1v_2(x)-x_2v_1(x)=b \\ v_3(x)=c \end{cases}$$

où a, b, c sont des constantes réelles. Alors, à la condition

$$(1.4)\qquad d(x)=d \quad \text{sur} \quad S_0$$

pour d une constante réelle, le problème mixte (1.1) *n'est pas bien posé au sens de C^∞ si*

$$(1.5)\qquad \sqrt{b^2+c^2}>d\geqq -\sqrt{b^2+c^2}, \quad d^2+c^2\neq 0.$$

D'après le théorème 1 il est immédiat de voir que pour l'opérateur frontière B vérifiant (1.3), au cas de $d(x)\equiv 0$, le problème mixte (1.1) n'est pas bien posé au sens de C^∞ si $c\neq 0$.

Comme on l'aperecevra tout de suite par la méthode de démonstration du théorème, le problème (1.1) est mal posé au sens de C^∞ au cas que le domaine Ω soit convexe et que $\partial\Omega$ contienne un ouvert de S_0 où B satisfait à (1.3), à (1.4) et à (1.5).

Nous allons démontrer le théorème 1 dans les paragraphes 2 et 3. En ce moment là, la méthode de Ludwig [8] pour construire des solutions asymptotiques à une caustique convexe joue un rôle essentiel.

Considérons le cas où $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^3;\ x_1^2+x_2^2<1\}$. S'il a lieu (1.3) et (1.4) pour tout $x_3\in\mathbf{R}$ on peut caractériser les constantes $\{a, b, c, d\}$ pour lesquelles le problème mixte (1.1) est bien posé. Nous le considérerons brièvement dans le paragraphe 4.

§2. Construction des Solutions Asymptotiques de l'Équation des Ondes (d'après la méthode de Ludwig [8] pour l'expansion asymptotique uniforme à une caustique convexe)

D'abord introduisons l'espace $S^p(D)$. Etant donnés D un domaine et p un réel. $w(x;k)\in S^p(D)$ signifie que pour tout $k\geqq 1$ $w(x;k)$ appartient à $C^\infty(D)$ et que $\{k^{-p}w(x;k);\ k\geqq 1\}$ est borné dans $C^\infty(D)$.

Notons que si $w_j(x;k)\in S^{p_j}(D)$, $j=0, 1, 2,\dots$ et $p_0\geqq p_1\geqq\cdots\geqq p_j\geqq p_{j+1}\cdots\to-\infty$, on peut trouver $w\in S^{p_0}(D)$ telle que pour tout j

$$w-\sum_{l=0}^{j-1} w_l \in S^{p_j}(D).$$ [1]

Dès maintenant nous désignons un point de $\mathbf{R}^3$ par (x, y, z) au lieu de (x_1, x_2, x_3). Dans ce paragraphe en suivant Ludwig [8] nous cherchons une solution de l'équation des ondes sous la forme suivante:

$$\text{(2.1)} \quad u(x, y, z, t; k)=\exp\left\{ik\left(\theta(x, y)+\zeta z+\frac{z}{\sqrt{k}}-\tau t-\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\zeta}{\tau}t\right)\right\}$$
$$\times\left\{g_0(x, y, z, t; k)V(\rho(x, y)k^{\frac{2}{3}})\right.$$
$$\left.+g_1(x, y, z, t; k)\frac{1}{ik^{\frac{1}{3}}}V'(\rho(x, y)k^{\frac{2}{3}})\right\},$$

où $g_i\in S^p(\mathbf{R}^4)$, $i=0, 1$, ζ et τ sont des constantes réelles telles que

$$\text{(2.2)} \qquad \tau=\sqrt{1+\zeta^2},$$

et $V(z)$ est la fonction d'Airy.[2]

Nous prenons $\theta(x, y)$ et $\rho(x, y)$ des fonctions à valeurs réels indéfiniment différentiables de façon qu'il ait lieu

$$\text{(2.3)} \qquad \rho(x, y)=0 \qquad \text{sur} \quad x^2+y^2=r_0^2$$

$$\text{(2.4)} \qquad (\nabla\theta)^2+\rho(\nabla\rho)^2=1$$

$$\text{(2.5)} \qquad \nabla\theta\cdot\nabla\rho=0,$$

où $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$. Dès maintenant Δ signifie Laplacien par rapport à (x, y), c'est-à-dire, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Notons que les fonctions vérifiant (2.3)$\sim$(2.5) s'écrivent pour (x, y), $x^2+y^2\geqq r_0^2$ comme suit: désignons par (r, ω) les coordonnées polaires de l'espace (x, y), c'est-à-dire,

$$x=r\cos\omega$$
$$y=r\sin\omega,$$

1) Voir, par exemple, Hörmander, le théorème 2.7 de Pseudo-differential operators and hypoelliptic operators, Proc. Symp., on singular integrals, Chicago, 1966.

2) Voir, A. Erdélyi, Asymptotic expansions, Dover Publ., New York, 1965, page 94.

alors quand $r \geqq r_0$

$$\theta = \frac{r_0}{r}\omega$$

$$\rho = \left[\frac{3}{2}\left\{\sqrt{r^2 - r_0^2} - \text{Arc}\cos\frac{r_0}{r}\right\}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Posons

$$\psi(x, y, z, t; k) = k\left(\theta + \zeta z + \frac{1}{\sqrt{k}}z - \tau t - \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\zeta}{\tau}t\right).$$

Appliquons $\square$ à $u(x, y, z, t; k)$ donnée par (2.1) et nous avons, en utilisant les propriétés de la fonction d'Airy

$$V''(z) + zV(z) = 0$$

$$V'''(z) + zV'(z) + V(z) = 0,$$

(2.6)
$$\begin{aligned}
&-\exp(-i\psi)\square u \\
&= -k^2 V g_0[(\nabla\theta)^2 + \rho(\nabla\rho)^2] \\
&\quad - \frac{k^{\frac{5}{3}}}{i} V' g_1[(\nabla\theta)^2 + \rho(\nabla\rho)^2] \\
&\quad + ik^{\frac{5}{3}} V' g_0 2[\nabla\theta\cdot\nabla\rho] + k^{\frac{4}{3}} V'' g_1 2[\nabla\theta\cdot\nabla\rho] \\
&\quad + ikV[2\nabla\theta\cdot\nabla g_0 + \Delta\theta\cdot g_0 + 2\rho\nabla\rho\cdot\nabla g_1 \\
&\qquad\qquad + \rho\Delta\rho\cdot g_1 + (\nabla\rho)^2 g_1] \\
&\quad + k^{\frac{2}{3}} V'[2\nabla\rho\cdot\nabla g_0 + \Delta\rho\cdot g_0 + 2\nabla\theta\cdot\nabla g_1 + \Delta\theta\cdot g_1] \\
&\quad + V\cdot\Delta g_0 + ik^{-\frac{1}{3}} V'\Delta g_1 \\
&\quad + (i(k\zeta + \sqrt{k}))^2\left(g_0 V + \frac{1}{ik^{\frac{1}{3}}} g_1 V'\right) \\
&\quad + 2i(k\zeta + \sqrt{k})\left(\frac{\partial g_0}{\partial z}V + \frac{1}{ik^{\frac{1}{3}}}\frac{\partial g_1}{\partial z}V'\right)
\end{aligned}$$

$$-\left(-i\left(k\tau+\sqrt{k}\frac{\zeta}{\tau}\right)\right)^2\left(g_0V+\frac{1}{ik^{\frac{1}{3}}}g_1V'\right)$$

$$+2i\left(k\tau+\sqrt{k}\frac{\zeta}{\tau}\right)\left(\frac{\partial g_0}{\partial t}V+\frac{1}{ik^{\frac{1}{3}}}\frac{\partial g_1}{\partial t}V'\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 g_0}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 g_0}{\partial t^2}\right)V+\frac{1}{ik^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2}\right)V'.$$

Donc si l'on pose

$$g_i(x, y, z, t; k)=\sum_{j\geqq 0} k^{p-\frac{j}{2}}g_{ij}(x, y, z, t; k) \qquad i=0, 1, \tag{2.7}$$

$g_{ij}\in S^0(\mathbf{R}^4)$, grâce à (2.2), à (2.3), à (2.4) et à (2.5), pour que $\Box u=0$ soit satisfait asymptotiquement, il suffit que g_{ij} vérifient pour tout j

$$\begin{aligned}(2.8)\qquad & 2\nabla\theta\cdot\nabla g_{0j}+\Delta\theta\cdot g_{0j}+2\rho\nabla\rho\cdot\nabla g_{1j}+\rho\Delta\rho\cdot g_{1j}+(\nabla\rho)^2 g_{1j}\\ &+2\zeta\frac{\partial g_{0j}}{\partial z}+2\tau\frac{\partial g_{0j}}{\partial t}+\frac{i}{\tau^2}g_{0j}\\ &+2\frac{\partial g_{0j-1}}{\partial z}+2\frac{\zeta}{\tau}\frac{\partial g_{0j-1}}{\partial t}-i\Box g_{0j-2}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.9)\qquad & 2\nabla\rho\cdot\nabla g_{0j}+\Delta\rho\cdot g_{0j}+2\nabla\theta\cdot\nabla g_{1j}+\Delta\theta\cdot g_{1j}\\ &+2\zeta\frac{\partial g_{1j}}{\partial z}+2\tau\frac{\partial g_{1j}}{\partial t}+\frac{i}{\tau^2}\cdot g_{1j}\\ &+2\frac{\partial g_{1j-1}}{\partial z}+2\frac{\zeta}{\tau}\frac{\partial g_{1j-1}}{\partial t}-i\Box g_{1j-2}=0.\end{aligned}$$

Pour trouver $\{g_{0j}, g_{1j}\}$ successivement, d'abord considérons le système suivant:

$$\begin{aligned}(2.10)\qquad & 2\nabla\theta\cdot\nabla h_0+\Delta\theta\cdot h_0+2\rho\nabla\rho\cdot\nabla h_1+\rho\Delta\rho\cdot h_1+(\nabla\rho)^2 h_1\\ &+2\zeta\frac{\partial h_0}{\partial z}+2\tau\frac{\partial h_0}{\partial t}+\frac{i}{\tau^2}h_0=f_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.11)\qquad & 2\nabla\rho\cdot\nabla h_0+\Delta\rho\cdot h_0+2\nabla\theta\cdot\nabla h_1+\Delta\theta\cdot h_1\\ &+2\zeta\frac{\partial h_1}{\partial z}+2\tau\frac{\partial h_1}{\partial t}+\frac{i}{\tau^2}h_1=f_1.\end{aligned}$$

En posant $H=\{h_0, h_1\}$ et $F=\{f_0, f_1\}$ nous désignons (2.10) et (2.11) par

$$\mathscr{L}H=F. \tag{2.12}$$

Soit Γ_{r_0} un cylindre $\{(x, y, z, t); x^2+y^2=r_0^2\}$. Etant donné un point $(x_0, y_0, z_0, t_0)\in\Gamma_{r_0}$. Une droite

$$\left\{\left(x_0+\frac{y_0}{r_0}l,\ y_0-\frac{x_0}{r_0}l,\ z_0+\zeta l,\ t_0+\tau l\right);\ -\infty<l<\infty\right\}$$

est tangente à Γ_{r_0} en (x_0, y_0, z_0, t_0).

Pour chaque point $P=(x, y, z, t)$ tel que $x^2+y^2>r_0^2$ il existe un et un seul point (x_0, y_0, z_0, t_0) de Γ_{r_0} tel qu'il a lieu pour certain $l<0$

$$\left(x_0+\frac{y_0}{r_0}l,\ y_0-\frac{x_0}{r_0}l,\ z_0+\zeta l,\ t_0+\tau l\right)=(x, y, z, t).$$

Désignons ce point $(x_0, y_0, z_0, t_0)\in\Gamma_{r_0}$ par $Q(P)$ et la droite passant P et $Q(P)$ par $L(P)$.

Quand on écrit $P=(r, \omega: z, t)$ il signifie que (x, y) s'exprime en les coordonnées polaires, à savoir,

$$P=(r\cos\omega,\ r\sin\omega,\ z,\ t).$$

Et nous décrivons aussi $g(x, y, z, t)$ par $g(r, \omega: z, t)$, c'est-à-dire,

$$g(r, \omega: z, t)=g(r\cos\omega,\ r\sin\omega,\ z,\ t).$$

Pour $P=(r, \omega: z, t)$ et $W=(\omega_0, z_0, t_0)$ on désigne par P_{jW} le point $(r, \omega-j\omega_0: z-jz_0, t-jt_0)$.

Pour $H=\{h_0, h_1\}$ posons sur $\rho(x, y)\geqq 0$

$$H^{\pm}=h_0(x, y, z, t)\pm\sqrt{\rho(x, y)}\,h_1(x, y, z, t).$$

Lemme 2.1. *Soit* $r_1>r_0$. *Pour* $H_0^-(r_1, \omega: z, t)\in C^\infty(\Gamma_{r_1})$ *quelconque il existe une fonction appartenant à* $(C^\infty(\mathbf{R}^4))^2$ *avec les propriétés suivantes*:

$$H^-(x, y, z, t)=H_0^-(x, y, z, t) \quad \textit{sur} \quad \Gamma_{r_1} \tag{2.13}$$

$$\mathscr{L}H=F \quad \textit{dans} \quad \{(x, y, z, t); x^2+y^2\geqq r_0^2\} \tag{2.14}$$

$$(2.15)\qquad \operatorname{supp} H \cap \{(x, y, z, t);\ x^2+y^2 \geqq r_0^2\}$$
$$\subset \{L(P);\ P \in \operatorname{supp} H_0^- \cup \operatorname{supp} F \cap \{\rho \geqq 0\}\}.$$

Et plus, si $F\equiv 0$, *en posant*

$$(2.16)\qquad W_r=(\varphi_r,\ \zeta(\sqrt{r^2-r_0^2}+\sqrt{r_1^2-r_0^2}),\ \tau(\sqrt{r^2-r_0^2}+\sqrt{r_1^2-r_0^2}))$$

où $\varphi_r=\operatorname{Arc}\cos\frac{r_0}{r_1}+\operatorname{Arc}\cos\frac{r_0}{r}$, *pour tout* $P=(r, \omega\colon z, t)$, $r\geqq r_0$, *on a*

$$(2.17)\qquad H^+(P)=c(r, r_1, r_0)H_0^-(P_{W_r})$$

où $c(r, r_1, r_0)$ *est une constante positive déterminée par* r, r_0 *et* r_1.

Démonstration. Puisque pour M une constante positive arbitraire, on a

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}\geqq c_M>0 \qquad \text{si } |\rho|\leqq M,$$

nous pouvons prendre θ et ρ comme un système des coordonnées de l'espace (x, y). En utilisant (2.5) on a

$$\nabla\theta\cdot\nabla u=(\nabla\theta)^2\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\nabla\rho\cdot\nabla u=(\nabla\rho)^2\frac{\partial u}{\partial\rho}.$$

Si l'on pose $\eta=\sqrt{\rho}$ dans $\{(x, y, z, t);\ x^2+y^2\geqq r_0^2\}$, on déduit de (2.10)

$$(2.10)'\qquad 2(\nabla\theta)^2\frac{\partial h_0}{\partial\theta}+\Delta\theta\cdot h_0+2(\nabla\rho)^2\frac{\partial\eta h_1}{\partial\eta}+\eta\Delta\rho\cdot\eta h_1$$
$$+2\zeta\frac{\partial h_0}{\partial z}+2\tau\frac{\partial h_0}{\partial t}+\frac{i}{\tau^2}h_0=f_0.$$

Multiplier (2.11) par η et on obtient

$$(2.11)'\qquad 2(\nabla\rho)^2\frac{\partial h_0}{\partial\eta}+\eta\Delta\rho\cdot h_0+2(\nabla\theta)^2\frac{\partial\eta h_1}{\partial\theta}+\Delta\theta\cdot\eta h_1$$
$$+2\zeta\frac{\partial\eta h_1}{\partial z}+2\tau\frac{\partial\eta h_1}{\partial t}+\frac{i}{\tau^2}\eta h_1=\eta f_1.$$

Puisque $H^{\pm}=h_0\pm\eta h_1$, de (2.10)' et de (2.11)' on déduit

$$(2.18)^{\pm}\qquad 2(\nabla\theta)^2\frac{\partial H^{\pm}}{\partial\theta}\pm 2(\nabla\rho)^2\frac{\partial H^{\pm}}{\partial\eta}+2\zeta\frac{\partial H^{\pm}}{\partial z}+2\tau\frac{\partial H^{\pm}}{\partial t}$$

$$+(\Delta\theta\pm\eta\Delta\rho)H^{\pm}+\frac{i}{\tau^2}H^{\pm}=F^{\pm}.$$

Rappelons que $\nabla\theta$, $\nabla\rho$, $\Delta\theta$ et $\Delta\rho$ sont des fonctions indéfiniment différentiables de θ et de η^2. D'après $(\nabla\rho)^2\geqq c_M>0$ pour tout $|\eta|\leqq M^{\frac{1}{2}}$, si l'on prend

$$\eta=\sqrt{\rho(r_1\cos\omega,\,r_1\sin\omega)}\qquad(=\eta_1)$$

comme le plan initial, $(2.18)^{-}$ admet une solution unique $H^{-}(\eta,\theta,z,t)$ $(-\infty<\eta<\infty)$ pour la donnée initiale

$$H^{-}(\eta_1,\theta,z,t)=H_0^{-}(r_1,\frac{r_0}{r}\theta : z,t).$$

En tenant compte de la forme des coefficients de (2.18) et de $F^{\pm}$, si l'on pose

$$H^{+}(\eta,\theta,z,t)=H^{-}(-\eta,\theta,z,t)$$

H^{+} vérifie $(2.18)^{+}$. Donc

$$\tilde{h}_0(\eta,\theta,z,t)=H^{+}(\eta,\theta,z,t)+H^{-}(\eta,\theta,z,t)$$

$$\tilde{h}_1(\eta,\theta,z,t)=\frac{1}{\eta}(H^{+}(\eta,\theta,z,t)-H^{-}(\eta,\theta,z,t))$$

satisfont à (2.10)' et à (2.11)'. D'autre part il existe $h_i(\sigma,\theta,z,t)\in C^{\infty}(\mathbf{R}^4)$ telles que

$$h_i(\eta^2,\theta,z,t)=\tilde{h}_i(\eta,\theta,z,t),\qquad i=0,1.$$

Alors on voit immédiat que $H=\{h_0(\rho,\theta,z,t),\,h_1(\rho,\theta,z,t)\}$ satisfait à (2.14).

Notons que $(\nabla\theta\pm\sqrt{\rho}\,\nabla\rho,\zeta,\tau)$ est constant sur $L(P)$ parce que $(\nabla\theta\pm\sqrt{\rho}\,\nabla\rho)^2+\zeta^2=\tau^2$. Donc si $F\equiv 0$, puisque $H^{\pm}$ est une solution de

$$2(\nabla\theta\pm\sqrt{\rho}\,\nabla\rho)\nabla H^{\pm}+2\zeta\frac{\partial H^{\pm}}{\partial z}+2\tau\frac{\partial H^{\pm}}{\partial t}$$

$$+(\Delta\theta \pm \sqrt{\rho}\,\Delta\rho)H^{\pm} + \frac{i}{\tau^2}H^{\pm} = 0$$

(2.17) déduit de la définition de H^{+}.

Nous etendrons H dans $\{\rho \leqq 0\}$ de sorte que H appartienne à $C^{\infty}(\mathbf{R}^4)$. C'est possible parce que $H \in C^{\infty}(\mathbf{R}^4 \cap \{\rho \geqq 0\})$. c.q.f.d.

Etant données $G_{j0}^{-}(r_1, \omega: z, t; k) \in S^0(\Gamma_{r_1})$, $r_1 > r_0$, $j = 0, 1, 2, \dots$ en appliquant le lemme 2.1 on peut obtenir successivement $G_j(x, y, z, t; k) = \{g_{0j}, g_{1j}\}$ de façon que

$$G_j^{-}(r_1, \omega: z, t) = G_{j0}^{-}(r_1, \omega: z, t)$$

et qu'ils vérifient (2.8) et (2.9) pour $j = 0, 1, \dots$, dans $\{\rho \geqq 0\}$ en posant $G_{-2} \equiv G_{-1} \equiv 0$. Donc il existe $G = \{g_0, g_1\} \in (S^p(\mathbf{R}^4))^2$ telle que

$$g_i(x, y, z, t; k) - \sum_{j=0}^{N} k^{p-\frac{j}{2}} g_{ij}(x, y, z, t; k) \in S^{p-\frac{N}{2}}(\mathbf{R}^4).$$

Alors pour la fonction u définie par (2.1) avec $\{g_0, g_1\}$ ci-dessus il a lieu

$$\square u \in S^{-\infty}(\mathbf{R}^4). \tag{2.19}$$

En effet, $\square u \in S^{-\infty}(\mathbf{R}^4 \cap \{\rho \geqq 0\})$ se déduit immédiat du fait que (2.8) et (2.9) sont vérifiés dans $\{\rho \geqq 0\}$.

Notons que pour tous $j \geqq 0$ et $N > 0$ il existe une constante $C_{jN} > 0$ telle que

$$\left| \mathscr{L}G_j + 2\frac{\partial G_{j-1}}{\partial z} + 2\frac{\zeta}{\tau}\frac{\partial G_{j-1}}{\partial t} - i\square G_{j-2} \right| \leqq C_{jN}|\rho|^N.$$

Cela se déduit de $G_j \in C^{\infty}(\mathbf{R}^4)$ et de

$$\mathscr{L}G_j + 2\frac{\partial G_{j-1}}{\partial z} + 2\frac{\zeta}{\tau}\frac{\partial G_{j-1}}{\partial t} - i\square G_{j-2} = 0 \qquad \text{dans } \{\rho \geqq 0\}.$$

Notons que l'on a pour $\rho < 0$

$$V(\rho k^{\frac{2}{3}}) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}(-\rho k^{\frac{2}{3}})^{-1/4} e^{-(2/3)\sqrt{-\rho}\,k}\left(1 + 0\left(\frac{3}{2}(-\rho k^{\frac{2}{3}})^{-2/3}\right)\right)$$

lorsque $k \to \infty$ (Erdélyi, page 94). En utilisant une estimation

$$|e^{-\frac{2}{3}\sqrt{-\rho}\,k}(-\rho)^l| = \left|\left(\frac{2}{3}k\right)^{-2l} e^{-\frac{2}{3}\sqrt{-\rho}\,k}\left(-\frac{2}{3}k\sqrt{-\rho}\right)^{2l}\right|$$

$$\leqq k^{-2l}C_l,$$

on obtient $\Box u \in S^{-\infty}(\mathbf{R}^4 \cap \{\rho \leqq 0\})$ de la forme de $\Box u$ et du comportement asymptotique de $V(\rho k^{\frac{2}{3}})$. Donc (2.19) est démontré.

Si l'on utilise le comportement asymptotique de $V(\rho k^{\frac{2}{3}})$ pour $\rho > 0$ (Erdélyi, page 94) on obtient, en posant

$$\varphi^{\pm} = k\left(\theta \pm \frac{2}{3}\rho^{\frac{3}{2}}\right) + k\zeta z + \sqrt{k}\, z - k\tau t - \sqrt{k}\,\frac{\zeta}{\tau}t,$$

(2.20)
$$u = \exp(i\psi)\{g_0 V(\rho k^{\frac{2}{3}}) + \frac{1}{ik^{\frac{1}{3}}} g_1 V'(\rho k^{\frac{2}{3}})\}$$

$$= \frac{k^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \Big\{ e^{i\varphi^+}\left(Z^+ + \frac{1}{k}\tilde{Z}^+\right)$$

$$+ e^{i\varphi^- + \frac{\pi i}{2}}\left(Z^- + \frac{1}{k}\tilde{Z}^-\right)\Big\}$$

$$= u^+ + u^-,$$

où

(2.21)
$$Z^{\pm} = \rho^{-\frac{1}{4}}(g_0 \pm \sqrt{\rho}\, g_1) = \rho^{-\frac{1}{4}} G^{\pm},$$

et $\tilde{Z}^{\pm} \in S^p(\mathbf{R}^4)$. Par la même sorte nous avons

$$u_j = \exp(i\psi)\left(g_{0j}V + \frac{1}{ik^{\frac{1}{3}}} g_{1j}V'\right)$$

$$= \frac{k^{-\frac{1}{6}}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\pi}{4}i} \Big\{ e^{i\varphi^+}\left(Z_j^+ + \frac{1}{k}\tilde{Z}_j^+\right)$$

$$+ e^{i\varphi^- + \frac{\pi i}{2}}\left(Z_j^- + \frac{1}{k}\tilde{Z}_j^-\right)\Big\}$$

$$= u_j^+ + u_j^-.$$

Alors il est évident que

$$u^{\pm}=\sum_{j\geqq 0} k^{p-\frac{j}{2}}u_j^{\pm} \qquad \text{asymptotiquement}. \tag{2.22}$$

Supposons que $0<r_0<1$ et ζ sont des constantes rélles vérifiant

$$-a\sqrt{1-r_0^2}+br_0+c\zeta-d\sqrt{1+\zeta^2}=0. \tag{2.23}$$

Etant donnée

$$m(\omega\colon z,t;k)=\exp\left\{ik\left(r_0\omega+\zeta z+\frac{1}{\sqrt{k}}z-\tau t-\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\zeta}{\tau}t\right)\right\} \tag{2.24}$$

$$\times\sum_{j\geqq 0}k^{q-\frac{j}{2}}m_j(\omega\colon z,t;k),$$

$m_j(\omega\colon z,t;k)\in S^0(\Gamma_1)$. Supposons que

$$\operatorname{supp} m_j\subset\{(\omega,z,t);\,t\geqq t_0\}. \tag{2.25}$$

Nous allons construire une fonction $u(x,y,z,t;k)$ telle que

$$\square u\in S^{-\infty}(\mathbf{R}^4) \tag{2.26}$$

$$Bu^- -m\in S^{-\infty}(\Gamma_1) \tag{2.27}$$

$$\operatorname{supp} u\subset\{(x,y,z,t);\,t\geqq t_0\}. \tag{2.28}$$

D'abord notons que

$$\left.\frac{\partial\varphi^{\pm}}{\partial r}\right|_{r=1}=\pm\sqrt{1-r_0^2},\qquad \left.\frac{\partial\varphi^{\pm}}{\partial\omega}\right|_{r=1}=r_0. \tag{2.29}$$

D'après (2.20), (2.22) et (2.29)

$$\left.Bu^-\right|_{r=1}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}k^{-1/6}e^{-\frac{\pi i}{4}}\exp(i\varphi^-)$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}k^{p-\frac{j}{2}}\left[\left\{ik(-a\sqrt{1-r_0^2}+br_0+c\zeta-d\tau)\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\sqrt{k}\left(c-\frac{d\zeta}{\tau}\right)\right\}\left(Z_j^-+\frac{1}{k}\tilde{Z}_j^-\right)+\left(BZ_j^-+\frac{1}{k}B\tilde{Z}_j^-\right)\right].$$

Donc on obtient (2.27) pourvu que

$$p-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=q \tag{2.30}$$

et que

$$i\Big(c-d\frac{\zeta}{\tau}\Big)Z_j^-\Big|_{r=1}=2\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}\Big\{m_j-i\Big(c-d\frac{\zeta}{\tau}\Big)(BZ_{j-1}^- + B\tilde{Z}_{j-3}^-+\tilde{Z}_{j-2})\Big\} \tag{2.31}$$

pour $j=0, 1, 2,\dots$ Supposons

$$c-d\frac{\zeta}{\tau}\neq 0. \tag{2.32}$$

Alors puisque

$$G_j^-\Big|_{r=1}=\rho^{\frac{1}{4}}Z_j^-\Big|_{r=1},$$

nous pouvons trouver en récurrence $G_j=\{g_{0j}, g_{1j}\}$, $j=0, 1, 2,\dots$ vérifiant (2.8), (2.9) et (2.31). Alors on voit immédiat que $u(x, y, z, t; k)$ définie par (2.1) avec les G_j construites au-dessus satisfait à (2.26), à (2.27) et à (2.28).

D'après (2.20)

$$Bu^+\Big|_{r=1}=\exp(i\varphi^+)\sum_{j=0}^{\infty}k^{q-\frac{j+1}{2}}\Big[\Big\{ik(a\sqrt{1-r_0^2}+br_0+c\zeta-d\tau)+i\sqrt{k}\Big(c-d\frac{\zeta}{\tau}\Big)\Big\}\Big(Z_j^+ +\frac{1}{k}\tilde{Z}_j^+\Big)+\Big(B\tilde{Z}_j^+ +\frac{1}{k}B\tilde{Z}_j^+\Big)\Big].$$

Donc on a pour $k\to\infty$

$$Bu^+\Big|_{r=1}\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\,(i\varphi^+)k^{q+\frac{1}{2}}\,2ia\sqrt{1-r_0^2}\,e^{-\frac{\pi i}{4}}\,Z_0^+.$$

D'autre part en appliquant à G_0 le résultat (2.17)

$$\begin{aligned}Z_0^+(P)&=c(r_0)Z_0^-(P_W)\\&=c(r_0)\Big\{i\Big(c-d\frac{\zeta}{\tau}\Big)\Big\}^{-1}\,2\sqrt{\pi}\,e^{\frac{\pi i}{4}}\,m_0(P_W)\end{aligned}$$

où

$$W=(2\operatorname{arc}\cos r_0,\ 2\zeta\sqrt{1-r_0^2},\ 2\tau\sqrt{1-r_0^2}).$$

Donc nous avons

Proposition 2.2. *Soit*

$$B=a\frac{\partial}{\partial r}+b\frac{\partial}{\partial\omega}+c\frac{\partial}{\partial z}+d\frac{\partial}{\partial t}\ .$$

Etant données r_0, ζ *des constantes réelles telles que* $0<r_0<1$ *et que*

$$-a\sqrt{1-r_0^2}+br_0+c\zeta-d\sqrt{1+\zeta^2}=0.$$

Prenons une fonction de $C^\infty(\Gamma_1)$ *de la forme*

$$m(\omega\colon z, t; k)=\exp\left\{ik\left(r_0\omega+\zeta z+\frac{z}{\sqrt{k}}-\tau t-\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\zeta}{\tau}t\right)\right\}$$

$$\times k^q n(\omega\colon z, t; k),$$

où $n\in S^0(\Gamma_1)$ *et* $n-n_0(\omega\colon z, t)\in S^{-\frac{1}{2}}$ *pour une certaine fonction* $n_0(\omega\colon z, t)\in C^\infty(\Gamma_1)$.

Alors il existe une fonction $u(x, y, z, t; k)$ *de la forme* (2.1) *satisfaisant à*

$$\Box u\in S^{-\infty}(\mathbf{R}^4)$$

$$[Bu^- - m]_{r=1}\in S^{-\infty}(\Gamma_1)$$

et à

$$\operatorname{supp} u\cap\{\rho\geqq 0\}\subset\bigcup_{P\in\operatorname{supp} m}L(P)\ . \tag{2.33}$$

Et plus

$$Bu^+|_{r=1}=\exp\left\{ik\left(r_0\omega+\zeta z+\frac{z}{\sqrt{k}}-\tau t-\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\zeta}{\tau}t\right)\right\} \tag{2.34}$$

$$\times k^{q+\frac{1}{2}}n_1(\omega\colon z, t; k)$$

où $n_1\in S^0(\Gamma_1)$ *et*

$$n_1(P)-c(r_0)(-2a\sqrt{1-r_0^2})\left(c-d\frac{\zeta}{\tau}\right)^{-1}n_0(P_W)\in S^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\ .$$

§3. La Démonstration du Théorème 1

Soit $\Omega_1=\{(x, y, z, t);\ x^2+y^2<1\}$. Nous nous plaçons sous les hypothèses de la proposition 2.2 sur l'opérateur frontière B et des constantes r_0 et ζ.

Etant donnée

$$m(\omega: z, t; k)=\exp\left\{ik\left(r_0\omega+\zeta z+\frac{z}{\sqrt{k}}-\tau t-\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\zeta}{\tau}t\right)\right\}\times n(\omega: z, t), \tag{3.1}$$

où $n(\omega: z, t)\in C^\infty(\Gamma_1)$ telle que

$$\operatorname{supp} n(\omega: z, t)\subset\{(\omega, z, t);\ 0\leqq t\leqq\varepsilon_0\} \tag{3.2}$$

$$n(0: 0, \varepsilon_0/2)=1. \tag{3.3}$$

Appliquons la proposition 2.2 à $m(\omega: z, t; k)$ de (3.1). Alors il existe $u_0(x, y, z, t; k)$ satisfaisant à

$$\Box u_0\in S^{-\infty}(\bar{\Omega}_1)$$

$$[Bu_0^- - m]_{r=1}\in S^{-\infty}(\Gamma_1)$$

$$Bu_0^+|_{r=1}=\exp(i\varphi^+)(k^{\frac{1}{2}}m_0+\tilde{m}_0),$$

où

$$m_0(P)=c_0 n(P_W),$$

$$c_0=-c(r_0)\,2a\sqrt{1-r_0^2}\left(c-d\frac{\zeta}{\tau}\right)^{-1}$$

et

$$\tilde{m}_0\in S^0(\Gamma_1).$$

Nous avons

$$\operatorname{supp} u_0\cap\Omega_1\subset\Omega_1\cap\{0\leqq t\leqq 2\tau\sqrt{1-r_0^2}+\varepsilon_0\}$$

et

$$\operatorname{supp} Bu_0^+\Big|_{r=1} \subset \{2\tau\sqrt{1-r_0^2} \leqq t \leqq 2\tau\sqrt{1-r_0^2}+\varepsilon_0\}.$$

Appliquons encore la proposition 2.2 à $-[Bu_0^+]_{r=1}$. Il existe une fonction u_1 vérifiant

$$\Box u_1 \in S^{-\infty}(\bar{\Omega}_1)$$

$$[Bu_1^- + Bu_0^+]_{r=1} \in S^{-\infty}(\Gamma_1)$$

et

$$[Bu_1^+]_{r=1} = \exp(i\varphi^+)(km_1 + \tilde{m}_1)$$

où

$$m_1(P) = c_0^2 n(P_{2W}),$$

$$\tilde{m}_1 \in S^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Et nous avons aussi

$$\operatorname{supp} u_1 \cap \Omega_1 \subset \Omega_1 \cap \{2\tau\sqrt{1-r_0^2} \leqq t \leqq 4\tau\sqrt{1-r_0^2}+\varepsilon_0\}$$

$$\operatorname{supp}[Bu_1^+]_{r=1} \subset \{4\tau\sqrt{1-r_0^2} \leqq t \leqq 4\tau\sqrt{1-r_0^2}+\varepsilon_0\}.$$

En répétant cette procédure nous obtenons u_j, $j=1, 2,\ldots$ avec les propriétés suivantes:

$$\Box u_j \in S^{-\infty}(\bar{\Omega}_1)$$

$$[Bu_{j-1}^+ + Bu_j^-]_{r=1} \in S^{-\infty}(\Gamma_1)$$

$$[Bu_j^+]_{r=1} = \exp(i\varphi^+)\ (k^{\frac{j+1}{2}} m_j + \tilde{m}_j)$$

où

$$m_j(P) = c_0^{j+1} n(P_{(j+1)W}), \tag{3.4}$$

$$\tilde{m}_j \in S^{\frac{j}{2}}(\Gamma_1),$$

$$\operatorname{supp} u_j \cap \Omega_1 \subset \{2j\tau\sqrt{1-r_0^2} \leqq t \leqq 2(j+1)\tau\sqrt{1-r_0^2}+\varepsilon_0\}.$$

Fixons ε_0 de sorte que $0<\varepsilon_0<\tau\sqrt{1-r_0^2}$. Définissons $u(x, y, z, t; k)$ par

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j .$$

C'est bien possible parce que pour tout $(x, y, x, t) \in \bar{\Omega}_1$ au plus deux u_j ne sont pas nulles. On voit immédiat

$$\Box u \in S^{-\infty}(\bar{\Omega}_1)$$

$$[Bu - m]_{r=1} \in S^{-\infty}(\Gamma_1)$$

$$\operatorname{supp} u \cap \Omega_1 \subset \{t \geqq 0\} .$$

D'autre part dans un voisinage de

$$P_j = (1, (j+1)\varphi_0 : 2(j+1)\zeta \sqrt{1-r_0^2}, 2(j+1)\tau \sqrt{1-r_0^2})$$

u s'exprime

$$u = u_{j+1}^- + \sum_{l \leqq j} u_l .$$

Et plus

$$u_{j+1}^- \sim \exp(i\varphi^-) k^{\frac{j}{2}} c_0^{j+1} m_j(P)$$

$$|\sum_{l=0}^{j} u_l| \leqq C k^{\frac{j-1}{2}} .$$

Donc on obtient grâce à (3.3) et à (3.4)

$$\sup_{\Omega_1 \cap \{0 \leqq t \leqq 2(j+1)\tau\sqrt{1-r_0^2} + \varepsilon_0\}} |u(x, y, z, t; k)| \geqq c_0^{j+1} k^{\frac{j}{2}} .$$

Donc nous avons

Proposition 3.1. *Supposons que* $0 < r_0 < 1$ *et* ζ *vérifient*

$$-a\sqrt{1-r_0^2} + br_0 + c\zeta - d\sqrt{1+\zeta^2} = 0 .$$

Alors pour une fonction $m(\omega : z, t; k)$ *donnée par* (3.1), (3.2) *et* (3.3) *on peut trouver une fonction* $u(x, y, z, t; k)$ *satisfaisant à*

$$\Box u \in S^{-\infty}(\bar{\Omega}_1)$$

$$[Bu - m]_{r=1} \in S^{-\infty}(\Gamma_1)$$

$$\operatorname{supp} u \cap \Omega_1 \subset \{t \geqq 0\}$$

et à

$$\sup_{\Omega_1 \cap [0, t_0]} |u(x, y, z, t; k)| \geqq (c_0 k^{\frac{1}{2}})^{\left(\frac{t_0}{2\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1-r_0^2}} - 1\right)} \tag{3.5}$$

Nous nous mettons à démontrer le théorème 1 annoncé dans l'introduction. Avant tout, admettons le lemme suivant, dont la démonstration n'est pas difficile.

Lemme 3.2. *Supposons que des constantes réelles b, c et d vérifient*

$$\sqrt{b^2+c^2} > d \geqq -\sqrt{b^2+c^2}, \qquad d^2+c^2 \neq 0 .$$

Si $b \cdot d \geqq 0$, pour tout n entier positif on peut trouver des constantes réelles r_n et ζ_n telles que

$$1-\frac{1}{n} < r_n < 1 \qquad \left(1-\frac{1}{n} < -r_n < 1 \ \ si \ \ b \cdot d < 0\right)$$

$$-a\sqrt{1-r_n^2} + br_n + c\zeta_n - d\sqrt{1+\zeta_n^2} = 0$$

$$c - d\frac{\zeta_n}{\sqrt{1+\zeta_n^2}} \neq 0 .$$

Supposons que le problème mixte (1.1) soit bien posé au sens de C^∞ sous la condition (1.5). Alors d'après la définition pour toute $\{m, f\} \in C_0^\infty(S \times (0, t_0]) \times C_0^\infty(\bar{\Omega} \times (0, t_0])$ il existe une solution unique $u(x, y, z, t) \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, t_0])$ vérifiant

$$\begin{aligned} &\Box u = f && \text{dans} \quad \Omega \times [0, t_0] \\ &Bu = m && \text{sur} \quad S \times [0, t_0] \\ &u(x, y, z, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = 0 && \end{aligned}$$

et pour tous $t \in [0, t_0]$ et $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots\}^4$ il existe des constantes C_α, N_α telles que

$$\sup_{\bar{\Omega} \times [0, t]} |D^\alpha u(x, y, z, t)| \leqq C_\alpha \{|m|_{N, S \times [0, t]} + |f|_{N, \bar{\Omega} \times [0, t]}\} , \tag{3.6}$$

où

$$|m|_{N,S\times[0,t]}=\sup_{\substack{|\alpha|\leqq N\\(x,y,z,t)\in S\times[0,t]}}|D^{\alpha}m|\,.$$

D'après (1.5) le lemme 3.2 est applicable. On voit que $\{\zeta_n;\ n=1, 2,\dots\}$ est borné et $\zeta_n\to\zeta_\infty$ lorsque $n\to\infty$. Supposons que pour tout n

$$1-\frac{1}{n}<r_n<1\,.$$

Quand $1-\frac{1}{n}<-r_n<1$ il suffit de remplacer les rôle de u^+ et de u^- dans les considérations jusqu'à la proposition 3.1.

Prenons $t_0=\frac{1}{2}$ et $N=N_{(0,0,0,0)}$. Choisissons n de façon que

$$\frac{1/2}{2\sqrt{1-r_n^2}\sqrt{1+\zeta_n^2}}-1>2N+1\,, \tag{3.7.}$$

cela est possible puisque $r_n\to1$, $\zeta_n\to\zeta_\infty$ lorsque $n\to\infty$. Avec cet n définissons une fonction m par

$$m(\omega\colon z,t;k)=\exp\left\{ik\left(r_n\omega+\zeta_n z+\frac{z}{\sqrt{k}}-\tau_n t-\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\zeta_n}{\tau_n}t\right)\right\}$$
$$\times\, n(\omega\colon z,t;k)$$

où

$$\operatorname{supp} n\subset\{(\omega,z,t);\ 0<t<\tau_n\sqrt{1-r_n^2},\ |z|<|\zeta_n|\sqrt{1-r_n^2}\}\,. \tag{3.8}$$

En tenant compte de la définition de S nous pouvons considérer $m(\omega\colon z,t;k)$ comme une fonction définie sur $S\times[0,\infty)$. L'application de la proposition 3.1 à $m(\omega\colon z,t;k)$ nous donne l'existence d'une fonction $u(x,y,z,t;k)$ telle que

$$\Box u\in S^{-\infty}(\bar{\Omega}_1) \tag{3.9}$$

$$Bu-m\in S^{-\infty}(\Gamma_1) \tag{3.10}$$

$$\operatorname{supp} u\cap\Omega_1\subset\{t\geqq0\}$$

et

$$(3.11) \qquad \sup_{\Omega_1 \cap [0,1/2]} \left| u(x, y, z, t; k) \right| \geqq (c_0 k^{\frac{1}{2}})^{\left(\frac{1/2}{2\sqrt{1-r_n^2}\sqrt{1+\zeta_n^2}}-1\right)}.$$

Si l'on applique (2.32) à chaque u_j apparue en construction de u, on voit que pour tout $t \in [0, 2(j+1)\tau_n\sqrt{1-r_n^2}]$

$$\operatorname*{supp}_{(x,y,z)} u(x, y, z, t; k) \subset \{(x, y, z);\ x^2+y^2 \leqq 1,\ |z| < 2(j+1)\zeta_n\sqrt{1-r_n^2}\}.$$

Donc pour $0 \leqq t \leqq 1/2$,

$$\operatorname*{supp}_{(x,y,z)} u\ (x, y, z, t;\ k) \subset \left\{(x, y, z);\ x^2+y^2 \leqq 1,\ |z| < \frac{1}{2}\right\}.$$

Donc quand on considère $u(x, y, z, t; k)$ comme une fonction définie dans $\Omega \times [0, \infty)$ nous avons de (3.9) et de (3.10)

$$(3.12) \qquad \begin{cases} \Box u \in S^{-\infty}(\bar{\Omega} \times [0, 1/2]) \\ [Bu - m]_S \in S^{-\infty}\left(S \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \\ u(x, y, z, 0; k) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0; k) = 0. \end{cases}$$

Grâce à la forme de $m(\omega: z, t; k)$ on a $|m|_{N, S\times[0,1]} \leqq C_N k^N$, et en conséquence

$$(3.13) \qquad |Bu|_{N, S\times[0,1]} \leqq C_N k^N.$$

Et on déduit de (3.12)

$$(3.14) \qquad |\Box u|_{N, \bar{\Omega}\times[0,1]} \leqq C_N.$$

La substitution de (3.13) et de (3.14) à (3.6) nous donne

$$\sup_{\Omega\times[0,\frac{1}{2}]} |u(x, y, z, t; k)| \leqq C_N k^N.$$

D'autre part, d'après (3.11)

$$\sup_{\Omega\times[0,\frac{1}{2}]} |u(x, y, z, t; k)| \geqq (c_0 k^{\frac{1}{2}})^{\left(\frac{1/2}{2\sqrt{1-r_n^2}\sqrt{1+\zeta_n^2}}-1\right)}$$

par (3.7)

$$\geqq c'_0 k^{N+\frac{1}{2}} \qquad (c'_0>0)\,.$$

Donc on a

$$c'_0 k^{N+\frac{1}{2}} \leqq C_N k^N \qquad \text{pour tout } k\geqq 1\,.$$

C'est une contradiction. Donc on a démontré le théorème 1.

§4. Remarque

La considération que nous avons faite pour démontrer le théorème 1 est essentiellement pour le domaine $\Omega=\{(x, y, z);\ x^2+y^2<1\}$. Si nous nous bornons au cas de Ω au-dessus et de B de la forme

$$B=a\frac{\partial}{\partial r}+b\frac{\partial}{\partial \omega}+c\frac{\partial}{\partial z}+d\frac{\partial}{\partial t}$$

où a, b, c et d sont des constantes réelles et $a>0$, il est possible de déterminer quand (1.1) est bien posé au sens de C^∞. A savoir,

Théorème 2. (i) *Si* $\sqrt{b^2+c^2}\leqq d$ (1.1) *est bien posé au sens de* L^2.

(ii) *Si* $\sqrt{b^2+c^2}>d\geqq -\sqrt{b^2+c^2}$, $d^2+c^2\neq 0$, (1.1) *est mal posé au sens* C^∞.

(iii) *Si* $c=d=0$, *pour tout* b (1.1) *est bien posé au sens de* C^∞.

(iv) *Si* $d\neq -1$ *et* $-\sqrt{b^2+c^2}>d\geqq -\sqrt{b^2+c^2+1}$, (1.1) *est bien posé au sens de* C^∞.

(v) *Si* $d=-1$ *ou* $d<-\sqrt{b^2+c^2+1}$ (1.1) *est mal posé au sens de* C^∞.

En effet, (i) est un cas spécial des résultats de Miyatake [9].

(ii) est le théorème 1 lui-même.

(iii) peut être montré par le même raisonnement d'Ikawa [3], qui est pour $\Omega\subset\mathbf{R}^2$.

(iv) est l'un des exemples plus typiques appartenant à la classe introduite dans Ikawa [6].

Au cas de (v) on trouve r, ζ réels et $\operatorname{Im}\tau<0$ tels que

$$-a\sqrt{\tau^2-r^2-\zeta^2}+br+c\zeta-d\tau=0\,.$$

Alors la méthode de construction des solutions asymptotiques de Lax [7] est profitable et on peut démontrer sans aucune difficulté le fait que (1.1) est mal posé au sens de C^∞.

Références

[1] Erdélyi, A., *Asymptotic expansions,* Dover Publ., New York, 1965.

[2] Ikawa, M., On the mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition, *Proc. Japan Acad.,* **44** (1968), 1033–1037.

[3] Ikawa, M., Mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition, *Osaka J. Math.,* **7** (1970), 495–525.

[4] Ikawa, M., Remarques sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, *Colloque international C. N. R. S.,* (1972) astérisque 2 et 3, 217–221.

[5] Ikawa, M., Remarques sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, *à paraître.*

[6] Ikawa, M., Problèmes mixtes pas nécessairement L^2-bien posés pour les équations strictement hyperboliques, *à paraître.*

[7] Lax, P. D., Asymptotic solutions for oscillatory initial value problems, *Duke Math. J.,* **24** (1957), 627–646.

[8] Ludwig, D., Uniform asymptotic expansions at a caustic, *Comm. Pure Appl. Math.,* **19** (1966), 215–250.

[9] Miyatake, S., Mixed problem for hyperbolic equation of second order, *J. Math. Kyoto Univ.,* **13** (1973) 435–487.