Publ. RIMS, Kyoto Univ.
12 (1976), 55–122

Problèmes Mixtes pour l'Équation des Ondes

Par

Mitsuru IKAWA*

§ 1. Introduction.

Soit Γ une courbe simple, fermée et indéfiniment différentiable dans $\boldsymbol{R}^2=\{(x_1, x_2)\,;\, x_j\in\boldsymbol{R},\ j=1, 2\}$. Désignons par Ω le domaine intérieur ou extérieur de Γ.

Considérons un problème mixte

$$(1\cdot1)\qquad \begin{cases} \square u(x, t)=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}\right)u(x, t)=f(x, t) & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dans}\quad \Omega\times(0, T) & \\ Bu(x, t)=b_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+b_2(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=g(x, t) & \text{sur}\quad \Gamma\times(0, T) \\ u(x, 0)=u_0(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=u_1(x), & \end{cases}$$

où $b_j(x)$, $j=1, 2$, sont des fonctions à valeurs réelles appartenant à $C^\infty(\Gamma)$ telles que le vecteur $b(x)=(b_1(x), b_2(x))$ soit toujours transversal par rapport à Γ, c'est-à-dire,

$$(1\cdot2)\qquad b_1(x)n_1(x)+b_2(x)n_2(x)\neq0\qquad \text{sur}\quad \Gamma$$

où $n(x)=(n_1(x), n_2(x))$ est la normale extérieure unitaire de Γ en x.

Est-ce que le problème mixte $(1\cdot1)$ serait bien posé au sens de C^∞, pourvu que la condition $(1\cdot2)$ soit satisfaite?

La réponse est négative en général. Savoir, d'après les considérations dans les articles précédents ([4], [5]), on peut dire que, pour que la condition $(1\cdot2)$ assure que le problème $(1\cdot1)$ est bien posé au

---

Communicated by S. Matsuura, September 11, 1975.
* Department of Mathematics, Osaka University, Osaka.

sens de C^∞, il faut que Ω soit le domaine extérieur d'un contour convexe. Autrement dit, au cas où Γ n'est pas convexe ou Ω est le domaine intérieur on peut trouver $b_1(x)$, $b_2(x)$ des fonctions sur Γ à valeurs réelles indéfiniment différentiables et satisfaisant à $(1\cdot 2)$, pour lesquelles le problème $(1\cdot 1)$ n'est pas bien posé au sens de C^∞.

Pour plus de sûreté, nous donnons la définition des problèmes bien posés au sens de C^∞.

Définition. On dit que le problème mixte $(1\cdot 1)$ est bien posé au sens de C^∞ quand pour toutes les données $\{u_0, u_1, f, g\}$ satisfaisant à la condition de compatibilité d'ordre infini $(1\cdot 1)$ admet une solution unique u dans $C^\infty(\bar{\Omega}\times[0,T])$ et l'application $\{u_0, u_1, f, g\}\rightarrow u$ est continue de $C^\infty(\bar{\Omega})\times C^\infty(\bar{\Omega})\times C^\infty(\bar{\Omega}\times[0,T])\times C^\infty(\Gamma\times[0,T])\rightarrow C^\infty(\bar{\Omega}\times[0,T])$.

La condition de compatibilité d'ordre k pour les données $\{u_0, u_1, f, g\}$ signifie qu'il a lieu

$$Bu_p=\frac{\partial^p g}{\partial t^p}(x,0) \qquad \text{sur} \quad \Gamma$$

pour $p=0,1,2,\cdots,k$, où $u_p(x)$, $p=2,3,\cdots,k$, sont définies par récurrence par la formule

$$u_p(x)=\Delta u_{p-2}(x)+\frac{\partial^{p-2}f}{\partial t^{p-2}}(x,0).$$

A propos de $b(x)=(b_1(x), b_2(x))$ pour lequel le problème $(1\cdot 1)$ est bien posé au sens de C^∞, nous avons montré dans [3] que, si $b(x)$ vérifie la condition

$$(1\cdot 3) \qquad b_1(x)n_2(x)-b_2(x)n_1(x)\neq 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma$$

encore plus, le problème $(1\cdot 1)$ est nécessairement bien posé au sens de C^∞.

Dans cet article nous allons montrer le fait suivant:

Théorème. *Soient Γ une courbe simple fermée dont la courbure est strictement positive et Ω le domaine extérieur de Γ. Le problème mixte* $(1\cdot 1)$ *est bien posé au sens de C^∞ pourvu que le vecteur $b(x)$ satisfasse à la condition* $(1\cdot 2)$.

Le plan de démonstration du théorème est comme suit: D'abord nous construisons les solutions du problème de Dirichlet pour Δ avec un paramètre $p=ik+\mu$, $\mu>0$

$$(1\cdot 4)\qquad \begin{cases} (\Delta-p^2)w(x)=0 & \text{dans } \Omega \\ w(x)=g(x) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et puis déduisons quelques propriétés de l'application $\mathscr{B}: C^\infty(\Gamma)\to C^\infty(\Gamma)$ définie par

$$\mathscr{B}: g(x) \longrightarrow Bw(x)|_\Gamma.$$

En utilisant les propriétés de $\mathscr{B}$, on montre qu'il existe une solution unique dans $H^2(\Omega)$ du problème aux limites

$$(1\cdot 5)\qquad \begin{cases} (\Delta-p^2)w(x)=0 & \text{dans } \Omega \\ Bw(x)=h(x) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

pour toute $h(x)\in C^\infty(\Gamma)$ lorsque $\mathrm{Re}\, p>\mu_0$, où μ_0 est une constante positive.

Alors de l'existence des solutions du problème (1·5) on peut déduire immédiat le théorème.

La partie essentielle de notre article est la construction des solutions de (1·4) par la méthode directe. C'est-à-dire, nous les construisons par la méthode de la développement asymptotique des ondes diffractées par un object convexe, en faisant usage de l'idée de Ludwig [9], [10].

Concernant la vitesse propagatrice du phénomène gouverné par (1·1), nous notons que la vitesse est finie sous l'hypothèse que les points accumulatés de l'ensemble $\Gamma_n-\mathring{\Gamma}_n$ sont finis, où $\Gamma_n=\{x\in\Gamma, n_1b_2-n_2b_1=0\}$ et $\mathring{\Gamma}_n$ désigne l'ensemble des points intérieurs de Γ_n. Cela se déduit du résultat de [3] et du théorème.

§ 2. Notations

On désigne le produit scalaire de $H^m(\Omega)$ par $(\!(\cdot,\cdot)\!)_m$, c'est-à-dire, pour $u, v\in H^m(\Omega)$,

$$(\!(u,v)\!)_m=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega D_x{}^\alpha u\overline{D_x{}^\alpha v}dx$$

et la norme de $H^m(\Omega)$ par $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_m$, c'est-à-dire, pour $u\in H^m(\Omega)$

$$|||u|||_m = ((u, u))_m^{1/2}.$$

Et on désigne le produit scalaire et la norme de $H^l(\Gamma)$ par $(u, v)_l$ et $\|u\|_l$ respectivement.

Posons

$$H_\mu^m(\Omega \times R^1) = \{u(x, t)\,;\, e^{-\mu t}u(x, t) \in H^m(\Omega \times R^1)\}$$

$$H_\mu^l(\Gamma \times R^1) = \{u(s, t)\,;\, e^{-\mu t}u(s, t) \in H^l(\Gamma \times R^1)\}.$$

Soit K un domaine. Pour $u \in \mathscr{B}^m(K)$, on définit $|u|_{m,K}$ par

$$|u|_{m,K} = \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leqq m}} |D^\alpha u(x)|.$$

Soit ω un domaine. Pour $u(x, \alpha)$, $v(x, \alpha)$ des fonctions définies sur ω avec un paramètre $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, on désigne

$$u(x, \alpha) \equiv v(x, \alpha) \quad (\bmod\ \alpha^\infty) \qquad \text{dans} \quad \omega$$

lorsque pour tout sousensemble compact K de ω et tous entiers positifs m et N, il existe une constante $C_{m,N,K}$ telle que

$$|u(x, \alpha) - v(x, \alpha)|_{m,K} \leqq C_{m,N,K} |\alpha|^N \quad \forall \alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0].$$

De la même façon pour $u(x, \alpha, k)$, $v(x, \alpha, k)$ des fonctions indéfiniment différentiables définies sur ω avec deux paramètres $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, $k \in R_+$, on désigne

$$u(x, \alpha, k) \equiv v(x, \alpha, k) \quad (\bmod\ \alpha^\infty k^{-\infty}) \qquad \text{dans} \quad \omega$$

lorsque pour tous sousensemble compact K de ω et entiers positifs m, N il existe une constante positive $C_{m,N,K}$ telle que

$$|u(x, \alpha, k) - v(x, \alpha, k)|_{m,K} \leqq C_{m,N,K} |\alpha|^N k^{-N}$$

$$\forall \alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0], \quad \forall k \in R_+.$$

Pour une suite des fonctions de $C^\infty(\omega)$ $a_j(x), j = 0, 1, 2, \cdots$ on peut trouver une fonction $a(x, \alpha)$ telle qu'il ait lieu

$$(2\cdot 1) \qquad |a(x, \alpha) - \sum_{j=0}^{N-1} a_j(x) \alpha^j|_{m,K} \leqq C_{m,N,K} |\alpha|^N$$

pour tous m, N entiers et K sousensemble de ω.[1] On désigne une

1) Voir, par exemple, le théorème 2.7 de Hörmander; Pseudo-differential operators and hypoelliptic operators, Proc. symp. on singular integrals. Chicago, 1966.

fonction $a(x,\alpha)$ vérifiant $(2\cdot 1)$ comme

$$a(x,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x)\alpha^j.$$

Supposons

$$a(x,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x)\alpha^j$$

$$b(x,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x)\alpha^j.$$

Alors on a

$$a(x,\alpha)\sim b(x,\alpha)\quad(\bmod\ \alpha^{\infty})\qquad\text{dans}\quad\omega.$$

De la même manière pour $a_{jl}(x)\in C^{\infty}(\omega)$, $j,l=0,1,2,\cdots$ il existe une fonction $a(x,\alpha,k)$ telle que

$$|a(x,\alpha,k)-\sum_{j,l=0}^{N-1}a_{jl}(x)\alpha^jk^{-l}|_{m,K}\leqq C_{m,N,K}|\alpha|^Nk^{-N}$$

pour tous m, N entiers positifs et K sousensemble compact de ω. On désigne

$$a(x,\alpha,k)\sim\sum_{j,l=0}^{\infty}a_{jl}(x)\alpha^jk^{-l}.$$

Et plus les relations

$$a(x,\alpha,k)\sim\sum_{j,l=0}^{\infty}a_{jl}(x)\alpha^jk^{-l}$$

$$b(x,\alpha,k)\sim\sum_{j,l=0}^{\infty}a_{jl}(x)\alpha^jk^{-l}$$

entrainent

$$a(x,\alpha,k)\equiv b(x,\alpha,k)\quad(\bmod\ \alpha^{\infty}k^{-\infty})\qquad\text{dans}\quad\omega.$$

Nous allons faire usage des opérateurs pseudo-différentiels sur Γ avec un paramètre $p=ik+\mu\in\boldsymbol{C}_+=\{p;\,p\in\boldsymbol{C},\,\mathrm{Re}\,p>0\}$, mais nous ne rédigeons pas ici les théorèmes des opérateurs pseudo-différentiels que nous allons utiliser. On trouve tous les théorèmes utilisés dans cet article dans les chapitres 2 et 3 de Kumano-go [7]. Dans cet article $a(s,\xi,p)\in S^m_{\rho,\delta}(\Gamma)$ signifie que $a(s,\xi,p)$ est une fonction de $\Gamma\times\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{C}_+$, et elle satisfait à

$$|D_s{}^{\beta}\partial_{\xi}{}^{\gamma}\partial_k{}^{\nu}a(s,\xi,p)|\leqq C_{\beta,\gamma,\nu}(|\xi|+|p|)^{m+\delta\beta-\rho(\nu+\gamma)}$$

pour tous β, γ, ν entiers positifs.

Et $a(s, s', \xi, p) \in S^m_{\rho,\delta}(\Gamma)$ signifie que

$$|D_s^{\beta_1} D_{s'}^{\beta_2} \partial_\xi^\gamma \partial_k^\nu a(s, s', \xi, p)| \leqq C_{\beta,\gamma,\nu}(|\xi| + |p|)^{m+\delta|\beta|-\rho(\nu+\gamma)}.$$

§ 3. Réduction du problème.

Soient Γ une courbe simple, fermée et indéfiniment différentiable de $\boldsymbol{R}^2$ et Ω le domaine extérieur de Γ.

Comme on le sait très bien, le problème de Dirichlet (1·4) pour Δ avec le paramètre $p \in \boldsymbol{C}_+$ admet une et une seule solution $w(x) \in H^2(\Omega)$ pour toute $g(s) \in C^\infty(\Gamma)$ et plus il a lieu l'estimation

$$\sum_{l+l' \leqq m} |p|^l \|u\|_{l'} \leqq C_m \|g\|_{m+3/2}. \tag{3·1}$$

Désignons par $U(p, g: x)$ la solution $w(x)$ de (1·4) pour $g(s)$.

Admettons le théorème suivant:

Théorème 3.1. *Supposons que la courbure de Γ est strictement positive et que*

$$b_1(x) n_1(x) + b_2(x) n_2(x) = 1 \qquad sur \quad \Gamma. \tag{3·2}$$

Alors il existe

$$\mathscr{B}(s, \xi, p) \in S^1_{1/3,0}(\Gamma)$$

telle que

$$BU(p, g: x)|_\Gamma = \mathscr{B}(s, D_s, p) g(s), \quad \forall g(s), \in C^\infty(\Gamma). \tag{3·3}$$

Et l'opérateur pseudo-différentiel $\mathscr{B}(s, D_s, p)$ a la propriétés suivante: Pour tout m nombre réel on a

$$-\mathrm{Re}(\mathscr{B}(s, D_s, p) g, g)_m \geqq c_0 \mu \|g\|_m^2 - C_m \|g\|_m^2 \quad \forall g \in C^\infty(\Gamma) \tag{3·4}$$

où c_0 est une constante positive déterminée par Γ seul et C_m une constante dépendante de m mais pas de $p \in \boldsymbol{C}_+$, ni de $g \in C^\infty(\Gamma)$.

Nous allons considérer le problème aux limites (1·5). Notons que sous la condition (3·2) B s'écrit

$$B = \frac{\partial}{\partial n} + b(s) \frac{\partial}{\partial s}, \tag{3·5}$$

où $\partial/\partial s$ signifie la dérivée tangentielle sur Γ et $b(s)$ est une fonction à valeurs réelles $\in C^\infty(\Gamma)$.

Introduisons l'opérateur adjoint de B

$$B^* = \frac{\partial}{\partial n} - b(s)\frac{\partial}{\partial s} - b'(s),$$

et admettons encore plus que le théorème 3.1 reste valable pour B^*, c'est-à-dire, il existe

$$\mathscr{B}^\#(s, \xi, p) \in S^1_{1/3,0}(\Gamma)$$

telle que

$$B^*U(p, g : x)|_\Gamma = \mathscr{B}^\#(s, D_s, p)\, g(s), \quad \forall g \in C^\infty(\Gamma) \tag{3·6}$$

et que l'on a l'estimation (3·4) en remplaçant $\mathscr{B}$ par $\mathscr{B}^\#$.

Alors on a

$$(\mathscr{B}(s, D_s, p)\, g, h)_0 = (g, \mathscr{B}^\#(s, D_s, \bar{p})\, h)_0 \tag{3·7}$$

pour toutes $g, h \in C^\infty(\Gamma)$. En effet, en posant $U_1 = U(p, g : x)$, $U_2 = U(\bar{p}, h : x)$ il a lieu

$$0 = (\!((\Delta - p^2)\, U_1, U_2)\!)_0 - (\!(U_1, (\Delta - \bar{p}^2)\, U_2)\!)_0$$
$$= \left(\frac{\partial U_1}{\partial n}, U_2\right)_0 - \left(U_1, \frac{\partial U_2}{\partial n}\right)_0.$$

D'autre part, par l'intégration par partie

$$\left(b(s)\frac{\partial U_1}{\partial s}, U_2\right)_0 = \left(U_1, -\frac{\partial}{\partial s}(b(s)\, U_2)\right)_0.$$

Donc on a

$$(BU_1, U_2)_0 = (U_1, B^*U_2)_0,$$

cela est identique à (3·7).

Posons

$$\mu_0 = \frac{1}{c_0}(1 + C_0 + C_{-1}) \tag{3·8}$$

et on a

$$\begin{cases} \text{pour} \quad \operatorname{Re} p \geqq \mu_0, \ \{\mathscr{B}(s, D_s, p)\, g \,;\, g \in C^\infty(\Gamma)\} \quad \text{est dense} \\ \text{dans} \quad L^2(\Gamma). \end{cases} \tag{3·9}$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire, qu'il existe $v \in L^2(\Gamma)$ telle que

$$(\mathcal{B}(s, D_s, p)g, v)_0 = 0 \quad \forall g \in C^\infty(\Gamma).$$

Prenons une suite des fonctions de $C^\infty(\Gamma)$, $v_j(s)$, $j=1, 2, \cdots$ telle que $v_j(s) \to v(s)$ dans $L^2(\Gamma)$. Par $(3\cdot 7)$ on a

$$(\mathcal{B}(s, D_s, p)g, v_j)_0 = (g, \mathcal{B}^\#(s, D_s, \bar{p})v_j)_0.$$

Il est évident que le premier membre converge au zéro lorsque $j \to \infty$. D'autre part grâce à $(3\cdot 4)$ et à $(3\cdot 8)$

$$\|\mathcal{B}^\#(s, D_s, \bar{p})(v_j - v)\|_{-1} \leqq C\|v_j - v\|_0$$

cela montre que $\mathcal{B}^\#(s, D_s, \bar{p})v_j$ tend vers $\mathcal{B}^\#(s, D_s, \bar{p})v$ dans $H^{-1}(\Gamma)$. Donc on a

$$(g, \mathcal{B}^\#(s, D_s, \bar{p})v)_0 = 0 \quad \forall g \in C^\infty(\Gamma),$$

on en déduit $\mathcal{B}^\#(s, D_s, \bar{p})v = 0$, et en conséquence $v = 0$. Donc on a $(3\cdot 9)$.

Lemme 3.2. *Lorsque* $\mathrm{Re}\, p \geqq \mu_0$, *pour toute* $h \in L^2(\Gamma)$ *il existe une et une seule solution* g *de l'équation*

$$\mathcal{B}g = h \tag{3·10}$$

dans $L^2(\Gamma)$.

Démonstration. Grâce à $(3\cdot 9)$, pour $h \in L^2(\Gamma)$ on peut trouver une suite des fonctions $g_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j=1, 2, \cdots$ telle que

$$\mathcal{B}g_j \to h \qquad \text{dans} \quad L^2(\Gamma) \quad \text{lorsque} \quad j \to \infty.$$

Grâce à $(3\cdot 4)$ et à $(3\cdot 8)$ il a lieu

$$\|g_j - g_l\| \leqq \|\mathcal{B}g_j - \mathcal{B}g_l\| \to 0, \qquad \text{si} \quad j, l \to \infty.$$

Donc g_j converge à une fonction $g \in L^2(\Gamma)$. D'autre part,

$$\|\mathcal{B}g_j - \mathcal{B}g\|_{-1} \leqq C\|g_j - g\|_0 \to 0 \qquad \text{si} \quad j \to \infty.$$

Cela montre que $\mathcal{B}g_j$ converge à $\mathcal{B}g$ dans $H^{-1}(\Gamma)$. D'après l'hypothèse sur $\mathcal{B}g_j$, on a $\mathcal{B}g = h$ dans $H^{-1}(\Gamma)$, donc $\mathcal{B}g = h$ dans $L^2(\Gamma)$.

C.Q.F.D.

Lemme 3. 3. *Etant données h et g satisfaisant à* (3·10). *Supposons que $h\in H^m(\Gamma)$ pour m un nombre positif. Alors on a $g\in H^m(\Gamma)$ si* $\mathrm{Re}\,p\geqq\mu_1$, *où μ_1 est une constante indépendante de $m\geqq 0$.*

Démonstration. Pour $g\in L^2(\Gamma)$, on a

$$\begin{aligned}\langle D_s\rangle^l\mathscr{B}g&=\mathscr{B}(\langle D_s\rangle^l g)+[\mathscr{B},\langle D_s\rangle^l]g\\&=\{\mathscr{B}+[\mathscr{B},\langle D_s\rangle^l]\langle D_s\rangle^{-l}\}\langle D_s\rangle^l g.\end{aligned}$$

Notons que l'on obtient

$$|([\mathscr{B},\langle D_s\rangle^l]\langle D_s\rangle^{-l}u,u)_0|\leqq -C\,\mathrm{Re}(\mathscr{B}u,u)_0$$

en faisant usage de la forme de $\mathscr{B}(s,\xi,p)$[2]. Alors il a lieu

$$-\mathrm{Re}(\langle D_s\rangle^l\mathscr{B}g,\langle D_s\rangle^l g)_0\geqq c_0\mu\|\langle D_s\rangle^l g\|_0^2-C_l\|\langle D_s\rangle^l g\|_0^2.$$

Sous la condition

$$\mu\geqq\mu_1=\frac{1}{c_0}(C_1+1)$$

on a

$$\|\langle D_s\rangle^l g\|_0\leqq\|\langle D_s\rangle^l\mathscr{B}g\|_0.$$

Donc par le même raisonnement que le lemme 3. 2, l'équation

$$\{\mathscr{B}+[\mathscr{B},\langle D_s\rangle^l]\langle D_s\rangle^{-l}\}\tilde{g}=\tilde{h}$$

admet une et une seule solution dans $L^2(\Gamma)$ pour toute $\tilde{h}\in L^2(\Gamma)$, si $\mathrm{Re}\,p\geqq\mu_1$. Donc pour tout $l\in(0,1]$, $\langle D_s\rangle^l g\in L^2(\Gamma)$ se déduit de $\langle D_s\rangle^l\mathscr{B}g\in L^2(\Gamma)$.

Supposons $m\geqq 1$ et $h\in H^m(\Gamma)$. Puisque $g\in H^1(\Gamma)$ est déjà montré, si l'on appliquer le raisonnement au-dessus à l'équation

$$\mathscr{B}(\langle D\rangle g)=[\mathscr{B},\langle D\rangle]\langle D\rangle^{-1}g+\langle D\rangle h,$$

on a immédiat

$$\langle D\rangle g\in H^{\min(1,m-1)}(\Gamma).$$

Donc pour m positif arbitraire, on obtient $g\in H^m(\Gamma)$ si $h\in H^m(\Gamma)$ en répétant cette procédure. C.Q.F.D.

2) Voir le raisonnement du paragraphe 6.

Etant donnée $h \in H^{m+2}(\Gamma)$, $m \geqq 0$. Désignons par g la solution de l'équation

$$\mathscr{B}(s, D_s, p)\, g = h$$

pour $\operatorname{Re} p \geqq \mu_1$ et posons

$$F(p, h : x) = U(p, g : x).$$

Du lemme 3. 3 et de $(3 \cdot 1)$ on déduit l'estimation

$$(3 \cdot 11) \qquad \sum_{l+l' \leqq m} |p|^l |||F(p, h : x)|||_{l'} \leqq C_m \|h\|_{m+1}.$$

Donc on a

Proposition 3. 4. *Pour toute* $h \in H^{m+2}(\Gamma)$, $m \geqq 0$, *il existe une et une seule solution* $F(p, h : x)$ *dans* $H^m(\Omega)$ *du problēme aux limites* $(1 \cdot 5)$

$$\begin{cases} (\Delta - p^2)\, u = 0 & \textit{dans} \quad \Omega \\ Bu = h & \textit{sur} \quad \Gamma \end{cases}$$

si $\operatorname{Re} p \geqq \mu_1$. *Et plus* $F(p, h : x)$ *vérifie l'estimation* $(3 \cdot 11)$.

En utilisant la proposition précédente, on peut construire une solution du problème mixte

$$(3 \cdot 12) \qquad \begin{cases} \square u = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \boldsymbol{R}^1 \\ Bu|_\Gamma = h(s, t) & \text{sur} \quad \Gamma \times \boldsymbol{R}^1. \end{cases}$$

Supposons que $h(s, t) \in H_\mu{}^{m+2}(\Gamma \times \boldsymbol{R}^1)$ si $\mu \geqq \mu'$, où μ' est une certaine constante. Posons

$$\hat{h}(s, p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} h(s, t)\, dt,$$

et on a

$$(3 \cdot 13) \qquad \sum_{l+l' \leqq m+2} |p|^l \|\hat{h}(s, p)\|_{l'} \leqq C \qquad \forall p, \operatorname{Re} p \geqq \mu'.$$

Si l'on définit $u(x, t)$ par

$$(3 \cdot 14) \qquad u(x, t) = \int_{\operatorname{Re} p = \mu} e^{pt} F(p, \hat{h}(s, p) : x)\, dp,$$

il est évident que

$$u(x,t) \in H_\mu^m(\Omega \times \boldsymbol{R}^1) \qquad \text{si} \quad \mu \geqq \mu' \tag{3·15}$$

d'après (3·13) et (3·11), et on vérifie immédiat que $u(x,t)$ satisfait à (3·12). Notons que pour $h(s,t) \in H_\mu^{m+2}(\Gamma \times \boldsymbol{R}^1)$ le problème (3·12) admet une seule seule solution dans $H_\mu^m(\Omega \times \boldsymbol{R}^1)$. On a en plus

Lemme 3. 5. *Lorsque* $h(s,t) \in H_\mu^{m+2}(\Gamma \times \boldsymbol{R}^1)$ *et*

$$\operatorname{supp} h(s,t) \subset \Gamma \times [t_0, \infty)$$

$u(x,t)$ *la solution de* (3·12) *définie par* (3·14) *vérifie*

$$\operatorname{supp} u(x,t) \subset \bar{\Omega} \times [t_0, \infty). \tag{3·16}$$

Démonstration. D'après l'hypothèse sur le support de $h(s,t)$ on a

$$\|\hat{h}(s,p)\|_{m+2} \leqq Ce^{-\mu t_0} \qquad \forall \mu \geqq \mu'.$$

Donc en utilisant (3·11) on a

$$|||e^{-\mu(t-t_0)} u(x,t)|||_m \leqq C, \qquad \forall \mu \geqq \mu'$$

d'où (3·16) se déduit. C.Q.F.D.

Supposons que les dennées $\{u_0, u_1, f, g\}$ du problème (1·1) satisfont à la condition de compatibilié d'ordre m et $f \in H_\mu^{m+2}(\Omega \times \boldsymbol{R}_+^1)$, $g \in H_\mu^{m+2}(\Gamma \times \boldsymbol{R}_+^1)$. Soit $w(x,t)$ une fonction vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lll} \square w = f & \text{dans} & \Omega \times \boldsymbol{R}_+^1 \\ w(x,0) = u_0(x) & \text{sur} & \bar{\Omega} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{sur} & \bar{\Omega}. \end{array}\right. \tag{3·17}$$

Alors il suffit de trouver une fonction $v(x,t)$ satisfaisant à

$$\left\{\begin{array}{lll} \square v = 0 & \text{dans} & \Omega \times \boldsymbol{R}^1 \\ Bv = h - Bw & \text{sur} & \Gamma \times \boldsymbol{R}^1 \\ \operatorname{supp} v \subset \bar{\Omega} \times \boldsymbol{R}_+^1. & & \end{array}\right. \tag{3·18}$$

Posons $\tilde{h}(s,t) = h(s,t) - Bw(s,t)$ pour $t \geqq 0$ et $\tilde{h}(s,t) = 0$ pour $t \leqq 0$. La condition de compatibilité d'ordre m assure $\tilde{h}(s,t) \in H_\mu^m(\Gamma \times \boldsymbol{R}^1)$. De l'application du lemme 3. 5 pour $\tilde{h}(s, t)$, on obtient une fonction $v(x, t)$ vérifiant (3·18).

Donc en tenant compte de l'unicité des solution de (3·12) dans $H_\mu^{m+2}(\Omega\times\boldsymbol{R}^1)$, on a

Théorème 3. 6. *Pour toutes les données* $\{u_0, u_1, f, g\}$ *vérifiant* $f\in H_\mu^{m+2}(\Omega\times\boldsymbol{R}_+^1)$, $g\in H_\mu^{m+2}(\Gamma\times\boldsymbol{R}_+^1)$ *pour* $\mu>\mu_0$ *et la condition de compatibilité d'ordre* m, *il existe une et une seule solution* $u(x, t)$ *de* (1·1) *dans* $H_\mu^m(\Omega\times\boldsymbol{R}_+^1)$, $\forall\mu>\mu_0$.

Le théorème annoncé dans l'introduction se déduit immédiat du théorème 3. 6. Donc il reste à démontrer le théorème 3. 1. Dans les paragraphes suivants nous allons le faire.

§ 4. Décomposition de $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{s})\in\boldsymbol{C}^\infty(\boldsymbol{\Gamma})$

Dès maintenant on suppose que Γ est une courbe simple fermée de $\boldsymbol{R}^2$, dont la courbure est strictement positive. Supposons que Γ est représentée par $\{s(\sigma)=(x_1(\sigma), x_2(\sigma))\,;\sigma\in[-\sigma_0, \sigma_0], s(0)=s_0\}$ dans un voisinage de $s_0\in\Gamma$, où σ est la longueur d'arc de s_0 à s. Posons $\Gamma_0=\{s(\sigma);\ \sigma\in]-\sigma_0, \sigma_0[\}$. Nous indentifions $\mathcal{D}(\Gamma_0)$ avec $\mathcal{D}(]-\sigma_0, \sigma_0[)$ par la correspondance pour $u\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$ $u(\sigma)=u(s(\sigma))\in\mathcal{D}(]-\sigma_0, \sigma_0[)$.

Pour toute $u(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$, on a

$$u(s(\sigma))=\int\int e^{i\xi(\sigma-\sigma')}u(s(\sigma'))d\sigma'd\xi. \tag{4·1}$$

Nous désignons

$$u(s)=\int\int e^{i\xi(s-s')}u(s')ds'd\xi.$$

à la place de (4·1).

Introduisons des fonctions à valeurs réelles $\chi_j(l)\in C^\infty(R)$, $j=1, 2, \cdots, 5$ telles que

$$\chi_1(l)=\begin{cases}1 & l<-1-2\alpha_0\\ 0 & l>-1-\alpha_0\end{cases}$$

$$\chi_2(l)=\begin{cases}1 & |l+1|\leqq\alpha_0\\ 0 & |l+1|\geqq 2\alpha_0\end{cases}$$

$$\chi_3(l)=\begin{cases}1 & |l|\leqq 1-2\alpha_0\\ 0 & |l|\geqq 1-\alpha_0\end{cases}$$

$$\chi_4(l)=\begin{cases}1 & |l-1|\leqq \alpha_0\\ 0 & |l-1|\geqq 2\alpha_0\end{cases}$$

$$\chi_5(l)=\begin{cases}1 & l\geqq 1+2\alpha_0\\ 0 & l\leqq 1+\alpha_0,\end{cases}$$

et que

$$\sum_{j=1}^{5}\chi_j(l)^2=1,$$

où α_0 est une constante positive, qui sera déterminée assez petite dans la suite.

Posons pour $u\in\mathscr{D}(\Gamma_0)$

$$V_ju(s)=\iint e^{i\xi(s-s')}\chi_j\left(\frac{\xi}{k}\right)^2u(s')\,ds'd\xi \tag{4·2}$$
$$=X_j(D_s/k)^2u(s),$$

alors V_j est un opérateur pseudo-différentiel sur Γ_0 avec un paramètre $k>0$.

Nous allons construire des opérateur $U_j(p,u:x)$ tels que

$$\begin{cases}(\Delta-p^2)\,U_j=0 & \text{dans } \Omega\\ U_j|_\Gamma=V_ju(s).\end{cases} \tag{4·3}$$

La construction des U_j, $j=2,4$ est plus difficile que celle pour les autres j. Nous l'abordons au cas où $j=2$ et $k>0$. Admettons l'existence des fonctions $\theta(x,\alpha)$, $\rho(x,\alpha)$ avec les propriétés suivantes:

$$\theta(x,\alpha),\,\rho(x,\alpha)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^2\times[-\alpha_0,\alpha_0])$$

et

$$\begin{cases}(\mathrm{i}) & (\nabla\theta)^2+\rho(\nabla\rho)^2\equiv1 \pmod{\alpha^\infty} & \text{dans } \bar\Omega\\ (\mathrm{ii}) & \nabla\theta\cdot\nabla\rho\equiv0 \pmod{\alpha^\infty} & \text{dans } \bar\Omega\\ (\mathrm{iii}) & \rho\equiv-\alpha \pmod{\alpha^\infty} & \text{sur } \Gamma.\end{cases} \tag{4·4}$$

La construction des fonctions a été faite dans Ludwig [9], [10], mais nous allons la faire encore dans § 5, afin de faire usage de leurs propriétés plus détaillées.

Selon la procédure de la construction de θ et de ρ, on a sur Γ_0

$$\frac{\partial\theta(s,\alpha)}{\partial s}=1+\frac{\alpha}{2}(\nabla\rho(s,0))^2+\alpha^2c_1(s,\alpha)\,, \tag{4.5}$$

où $c_1(s,\alpha)\in C^\infty(\Gamma_0\times[-\alpha_0,\alpha_0])$ et

$$(\nabla\rho(s,0))^2=\left(\frac{1}{2}a(s)\right)^{-2/3},$$

$a(s)$ est la courbure de Γ en s. Donc

$$\theta(s,\alpha)-\theta(s',\alpha)=(s-s')+\alpha\int_{s'}^{s}\frac{1}{2}(\nabla\rho_0)^2ds$$
$$+\alpha^2\int_{s'}^{s}c_1(s,\alpha)\,ds$$

où $\rho_0(s)=\rho(s,0)$. Si l'on pose

$$\begin{aligned}F(s,s',\alpha,\Phi)&=\frac{1}{s-s'}\{\theta(s,\Phi)-\theta(s',\Phi)-(s-s')(1+\alpha)\}\\&=\Phi\cdot\frac{1}{s-s'}\int_{s'}^{s}\frac{1}{2}(\nabla\rho_0)^2ds+\Phi^2\cdot\frac{1}{s-s'}\int_{s'}^{s}c_1(s,\alpha)\,ds-\alpha,\end{aligned}$$

il a lieu

$$\left.\frac{\partial F}{\partial\Phi}\right|_{\substack{\Phi=0\\ s=s'}}=\frac{1}{2}(\nabla\rho_0)^2>c_0>0.$$

Donc d'après $F(s,s',0,0)=0$, il existe une fonction $\Phi(s,s',\alpha)$ indéfiniment différentiable dans un voisinage de $(s_0,s_0,0)$ telle que

$$F(s,s',\alpha,\Phi(s,s',\alpha))=0.$$

C'est-à-dire, $\Phi(s,s',\alpha)$ satisfait à

$$\theta(s,\Phi(s,s',\alpha))-\theta(s',\Phi(s,s',\alpha))=(s-s')(1+\alpha) \tag{4.6}$$

dans un voisinage de $(s_0,s_0,0)$. Et plus on a

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right|_{\substack{\alpha=0\\ s=s'}}=-\frac{F_\Phi}{F_\alpha}=2(\nabla\rho_0)^{-2}.$$

Si l'on choisit Γ_0 et α_0 suffisamment petits, il existe $\alpha_1>0$ et $\tilde{\alpha}_1>0$ tels que

$$(4\cdot7)\qquad \{\Phi(s,s',\alpha)\,;\,\alpha\in[-\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_1]\}\supset[-\alpha_1,\alpha_1].$$

Désignons par $\alpha=\Psi(s,s',\tilde{\alpha})$ l'inverse de $\tilde{\alpha}=\Phi(s,s',\alpha)$. Alors grâce à (4·6) et à (4·7)

$$\begin{aligned}V_4u(s) &= \iint e^{ik(1+\alpha)(s-s')}\chi_4(1+\alpha)^2u(s')kds'd\alpha\\ &= \iint e^{ik(\theta(s,\Phi(s,s',\alpha))-\theta(s',\Phi(s,s',\alpha)))}\chi_4(1+\alpha)^2u(s')kds'd\alpha\\ &= \iint e^{ik(\theta(s,\tilde{\alpha})-\theta(s',\tilde{\alpha}))}\chi_4(1+\Psi(s,s',\tilde{\alpha}))^2\\ &\qquad\times\frac{\partial\Psi}{\partial\tilde{\alpha}}(s,s',\tilde{\alpha})u(s')kds'd\tilde{\alpha}\end{aligned}$$

Prenons $\upsilon_j(l)$, $j=1,2,3$ des fonctions à valeurs réelles $C^\infty(\boldsymbol{R})$ de façon à

$$\upsilon_1(l)=\begin{cases}1 & l<-2\\ 0 & l>-1\end{cases},\qquad \upsilon_2(l)=\begin{cases}1 & |l|\leqq1\\ 0 & |l|\geqq2\end{cases},$$

$$\upsilon_3(l)=\begin{cases}1 & l>2\\ 0 & l<1\end{cases}$$

et à $\sum_{j=1}^3\upsilon_j(l)^2=1$.

Posons

$$(4\cdot8)\qquad V_{4j}u(s)=\iint e^{ik(\theta(s,\alpha)-\theta(s',\alpha))}\upsilon_j(k^\varepsilon\alpha)^2$$
$$\times\chi_4(1+\Psi(s,s',\alpha))^2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}(s,s',\alpha)u(s')ds'kd\alpha$$

et on a

$$V_4u(s)=\sum_{j=1}^3V_{4j}u(s).$$

Le nombre $\varepsilon>0$ sera déterminé plus tard. D'après les définitions de χ_4 et de υ_2, en tenant compte de (4·7)

$$\upsilon_2(k^\varepsilon\alpha)^2\chi_4(1+\Psi(s,s',\alpha))^2=\upsilon_2(k^\varepsilon\alpha)^2,\quad\forall k\geqq k_0$$

§ 5. La Construction de U_{42}

Pour V_{42} on va construire un opérateur U_{42} satisfaisant à (4·3). Sous l'hypothèse

$$(5\cdot 1) \qquad |\alpha| \leqq k^{-\varepsilon},$$

on considère la construction d'une fonction $w(x)$ telle qu'elle satisfait à

$$(5\cdot 2) \qquad \begin{cases} (\Delta - p^2)\, w(x) = 0 & \text{dans } \Omega \\ w|_{\Gamma} = e^{ik\theta(s,\alpha)} v(s), \quad v(s) \in \mathcal{D}(\Gamma_0) \end{cases}$$

asymptotiquement par rapport à $|p|$. D'abord nous considérons le problème (5·2) sous la restriction

$$(5\cdot 3) \qquad \mu k^{-1/3} \leqq a_0,$$

où la constante $a_0 > 0$ sera choisie assez petite dans la suite.

Posons

$$H(z) = Ai(-z) + iBi(-z).^{3)}$$

Nous débutons dans la construction des fonctions $\eta(x, \alpha, p)$, $\zeta(x, \alpha, p) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^2 \times [-\alpha_1, \alpha_1] \times \boldsymbol{C}_+)$ vérifiant

$$(5\cdot 4) \qquad \begin{cases} \left(\nabla\eta - \dfrac{1}{ik^{1/3}} \dfrac{H'(k^{2/3}\hat{\zeta})}{H(k^{2/3}\hat{\zeta})} \nabla\hat{\zeta}\right)^2 + \zeta(\nabla\zeta)^2 \equiv \left(1 + \dfrac{\mu}{ik}\right)^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{mod } \alpha^\infty |p|^{-\infty}) \qquad \text{dans } \bar{\Omega} \\ \left(\nabla\eta - \dfrac{1}{ik^{1/3}} \dfrac{H'(k^{2/3}\hat{\zeta})}{H(k^{2/3}\hat{\zeta})} \nabla\hat{\zeta}\right) \cdot \nabla\zeta \equiv 0 \quad (\text{mod } \alpha^\infty |p|^{-\infty}) \qquad \text{dans } \bar{\Omega} \\ \eta(s, \alpha, p) = \theta(s, \alpha) \qquad \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $\hat{\zeta}(x, \alpha, p)$ est définie par $\zeta(s(\theta(x, 0)), \alpha, p)$, autrement dit, la valeur de $\hat{\zeta}(x, \alpha, p)$ est égale à celle de $\zeta(s, \alpha, p)$, $s \in \Gamma$ tel que $\theta(s, 0) = \theta(x, 0)$. Nous faissons la construction en divisant en trois étapes.

1ère étape. Construction de $\theta(x, \alpha)$ et de $\rho(x, \alpha)$.

Nous cherchons θ et ρ sous la forme

$$\theta(x, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(x) \alpha^j$$

3) Concernant les définitions de $Ai(z)$ et de $Bi(z)$, voir A. Erdélyi [1], § 2.6.

$$\rho(x,\alpha)=\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j(x)\alpha^j.$$

Pour que (iii) de (4·4) soit satisfait, il faut la relation

$$(5\cdot5)\qquad \begin{cases} \rho_0(x)=0 & \text{sur } \Gamma \\ \rho_1(x)=-1 & \text{sur } \Gamma \\ \rho_j(x)=0 & \text{sur } \Gamma \qquad j=2,3,\cdots. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(\nabla\theta)^2+\rho(\nabla\rho)^2 &\\ =(\nabla\theta_0)^2&+\rho_0(\nabla\rho_0)^2\\ &+\alpha\{\nabla\theta_0\cdot\nabla\theta_1+\nabla\theta_1\cdot\nabla\theta_0+\rho_0(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1+\nabla\rho_1\cdot\nabla\rho_0)+\rho_1(\nabla\rho_0)^2\}\\ &+\alpha^2\{\nabla\theta_0\cdot\nabla\theta_2+\nabla\theta_1\cdot\nabla\theta_1+\nabla\theta_2\cdot\nabla\theta_0\\ &\quad+\rho_0(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_2+\nabla\rho_1\cdot\nabla\rho_1+\nabla\rho_2\cdot\nabla\rho_2)\\ &\quad+\rho_1(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1+\nabla\rho_1\cdot\nabla\rho_0)+\rho_2(\nabla\rho_0)^2\}+\cdots\cdots\\ &+\alpha^j\{\nabla\theta_0\cdot\nabla\theta_j+\nabla\theta_1\cdot\nabla\theta_{j-1}+\nabla\theta_2\cdot\nabla\theta_{j-2}+\cdots\cdots+\nabla\theta_j\cdot\nabla\theta_0\\ &\quad+\rho_0(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_j+\nabla\rho_1\cdot\nabla\rho_{j-1}+\nabla\rho_2\cdot\nabla\rho_{j-2}+\cdots\cdots+\nabla\rho_j\cdot\nabla\rho_0)\\ &\quad+\rho_1(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_{j-1}+\nabla\rho_1\cdot\nabla\rho_{j-2}+\nabla\rho_2\cdot\nabla\rho_{j-3}+\cdots\cdots+\nabla\rho_{j-1}\cdot\nabla\rho_0)\\ &\quad+\cdots\cdots+\rho_j(\nabla\rho_0)^2\}+\cdots\cdots.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\theta\cdot\nabla\rho=\nabla\theta_0\cdot\nabla\rho_0&+\alpha(\nabla\theta_0\cdot\nabla\rho_1+\nabla\theta_1\cdot\nabla\rho_0)+\cdots\cdots\\ &+\alpha^j(\nabla\theta_0\cdot\nabla\rho_j+\nabla\theta_1\cdot\nabla\rho_{j-1}+\cdots\cdots+\nabla\theta_j\cdot\nabla\rho_0)+\cdots.\end{aligned}$$

En égalant les coefficients de α^j dans les deux membres et en tenant compte de (5·5), on obtien les relations

$$(5\cdot6)_0\qquad \begin{cases} (\nabla\theta_0)^2+\rho_0(\nabla\rho_0)^2=1 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ \nabla\theta_0\cdot\nabla\rho_0=0 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ \rho_0=0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$$(5\cdot6)_1\qquad \begin{cases} 2\nabla\theta_0\cdot\nabla\theta_1+2\rho_0\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1+\rho_1(\nabla\rho_0)^2=0 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ \nabla\theta_0\cdot\nabla\rho_1+\nabla\theta_1\cdot\nabla\rho_0=0 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ \rho_1=-1 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et pour $j\geqq2$,

$$(5\cdot 6)_j \begin{cases} 2\nabla\theta_0\cdot\nabla\theta_j+2\rho_0\cdot\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_j+\rho_j(\nabla\rho_0)^2 \\ \quad =-\{(\nabla\theta_1\cdot\nabla\theta_{j-1}+\nabla\theta_2\cdot\nabla\theta_{j-2}+\cdots\cdots+\nabla\theta_{j-1}\cdot\nabla\theta_1) \\ \qquad +\rho_0(\nabla\rho_1\cdot\nabla\rho_{j-1}+\nabla\rho_2\cdot\nabla\rho_{j-2}+\cdots\cdots+\nabla\rho_{j-1}\cdot\nabla\rho_1) \\ \qquad +\rho_1(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_{j-1}+\nabla\rho_1\cdot\nabla\rho_{j-2}+\cdots\cdots+\nabla\rho_{j-1}\cdot\nabla\rho_0) \\ \qquad +\cdots\cdots+\rho_{j-1}(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1+\nabla\rho_1\cdot\nabla\rho_0)\} \quad \text{dans } \bar{\Omega} \\ \nabla\theta_0\cdot\nabla\rho_j+\nabla\theta_j\cdot\nabla\rho_0=-(\nabla\theta_1\cdot\nabla\rho_{j-1}+\cdots\cdots-\nabla\theta_{j-1}\cdot\nabla\rho_1) \quad \text{dans } \bar{\Omega} \\ \rho_j=0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Les démonstrations de l'existence et des propriétés des fonctions θ_0, ρ_0 vérifiant $(5\cdot 6)_0$ se trouvent dans l'article de Ludwig [9], page 225 et l'appendice.

Montrons que l'on peut trouver θ_j et ρ_j successivement.

Lemme 5.1. *Soient* $a(y,\sigma)$, $b(y,\sigma)$, $c(y,\sigma)$, $d(y,\sigma)$ *des fonctions indéfiniment différentiables à valeurs réelles définies pour* $(y,\sigma)\in \boldsymbol{R}^1\times\overline{\boldsymbol{R}_+^1}$. *Supposons que* $b(y,\sigma)\geqq c_0>0$. *Posons*

$$L^{\pm}=a(y,z^2)\frac{\partial}{\partial y}\pm b(y,z^2)\frac{\partial}{\partial z}+c(y,z^2)\pm zd(y,z^2).$$

Pour $h_j(y,\sigma)\in\mathscr{B}^\infty(\boldsymbol{R}^1\times\overline{\boldsymbol{R}_+^1})$ *et* $m(y)\in\mathscr{B}^\infty(\boldsymbol{R}^1)$, *les solutions* $G^\pm(y,z)$ *des problèmes*

$$(5\cdot 7) \qquad \begin{cases} L^\pm G^\pm(y,z)=h_0(y,z^2)\pm zh_1(y,z^2) \\ G^\pm(y,0)=m(y) \end{cases}$$

satisfont à la relation

$$(5\cdot 8) \qquad G^+(y,z)=G^-(y,-z),$$

et vérifient l'estimation

$$(5\cdot 9) \quad |G^\pm(y,z)|_{m,K}\leqq C_{m,K}\{|h_0(y,\sigma)|_{m',\overline{\boldsymbol{R}_+^2}}+|h_1(y,\sigma)|_{m',\overline{\boldsymbol{R}_+^2}}+|m(y)|_{m',\boldsymbol{R}^1}\},$$

ou $K=\boldsymbol{R}^1\times\{z;\,|z|\leqq C\}$. *Et si l'on pose*

$$g_0(y,z^2)=G^+(y,z)+G^-(y,z)$$

$$g_1(y,z^2)=\frac{1}{z}\{G^+(y,z)-G^-(y,z)\},$$

d'après (5·8), $g_j(y,\sigma)\in C^\infty(\overline{\boldsymbol{R}_+^2})$ *et par l'estimation* (5·9) *on a*

$$(5\cdot 10)\qquad |g_0(y,\sigma)|_{m,K}+|g_1(y,\sigma)|_{m,K}\leqq C_{m,K}\{|h_0(y,\sigma)|_{m''}$$
$$+|h_1(y,\sigma)|_{m''}+|m(y)|_{m''}\}.$$

Parce que la démonstration est très facile nous l'omettons.

Lemme 5.2. *Soient* $c(x),\ d(x)\in\mathscr{B}^\infty(\boldsymbol{R}^2)$. *Le système des équations*

$$(5\cdot 11)\qquad 2\nabla\theta_0\cdot\nabla f_0+2\rho_0\nabla\rho_0\cdot\nabla f_1+(\nabla\rho_0)^2 f_1+\rho_0 d(x)f_1+c(x)f_0=h_0 \quad \text{dans } \bar\Omega$$

$$(5\cdot 12)\qquad 2\nabla\rho_0\cdot\nabla f_0+2\nabla\theta_0\cdot\nabla f_1+d(x)f_0+c(x)f_1=h_1 \qquad \text{dans } \bar\Omega$$

$$(5\cdot 13)\qquad f_0(s)=m(s) \qquad \text{sur } \Gamma$$

a une solution unique $\{f_0,f_1\}\in C^\infty(\bar\Omega)$ *pour les données* $h_0, h_1\in C^\infty(\bar\Omega)$, $m\in C^\infty(\Gamma)$, *et l'application* $\{h_0,h_1,m\}\to\{f_0,f_1\}$ *de* $C^\infty(\bar\Omega)\times C^\infty(\bar\Omega)\times C^\infty(\Gamma)$ *dans* $C^\infty(\bar\Omega)\times C^\infty(\bar\Omega)$ *est continue.*

Démonstration. Le changement des variables

$$\begin{cases}\theta_0(x)=y\\ \rho_0(x)=\sigma\end{cases}$$

donne une correspondance indéfiniment différentiable et surjective d'un voisinage de $\bar\Omega$ dans un ouvert de $\boldsymbol{R}^1\times\boldsymbol{R}^1$, dont l'inverse est aussi indéfiniment différentiable. Et $x\in\bar\Omega$ corresponde à $\sigma\geqq 0$. Donc pour $x\in\bar\Omega$, on a

$$(5\cdot 14)\qquad 2\nabla\theta_0\cdot\nabla f_0+2\rho_0\nabla\rho_0\cdot\nabla f_1+(\nabla\rho_0)^2 f_1+\rho_0 d(x)f_1+c(x)f_0$$
$$=2(\nabla\theta_0)^2\frac{\partial\tilde f_0}{\partial y}+2\sqrt{\sigma}(\nabla\rho_0)^2\frac{\partial\sqrt{\sigma}\tilde f_1}{\partial\sigma}+\sqrt{\sigma}\tilde d\cdot\sqrt{\sigma}\tilde f_1+\tilde c\tilde f_0$$

$$(5\cdot 15)\qquad 2\nabla\rho_0\cdot\nabla f_0+2\nabla\theta_0\cdot\nabla f_1+d(x)f_0+c(x)f_1$$
$$=2(\nabla\rho_0)^2\frac{\partial\tilde f_0}{\partial\sigma}+2(\nabla\theta_0)^2\frac{\partial\tilde f_1}{\partial y}+\tilde d\tilde f_0+\tilde c\tilde f_1,$$

où $\tilde f_j(y,\sigma)=\tilde f_j(\theta_0(x),\rho_0(x))=f_j(x)$.

Multiplions $(5\cdot15)$ par $\pm\sqrt{\sigma}$ et l'ajoutons à $(5\cdot14)$ nous avons

$$(5\cdot16)^{\pm}\qquad 2(\nabla\theta_0)^2\frac{\partial}{\partial y}(\tilde{f}_0\pm\sqrt{\sigma}\tilde{f}_1)\pm\sqrt{\sigma}(\nabla\rho_0)^2\frac{\partial}{\partial\sigma}(\tilde{f}_0\pm\sqrt{\sigma}\tilde{f}_1)$$
$$+(\tilde{c}\pm\sqrt{\sigma}\tilde{d})(\tilde{f}_0\pm\sqrt{\sigma}\tilde{f}_1)=\tilde{h}_0\pm\sqrt{\sigma}\tilde{h}_1.$$

En posant $z=\sqrt{\sigma}$, $F^{\pm}(y,z)=\tilde{f}_0\pm\sqrt{\sigma}\tilde{f}_1$ $(5\cdot16)^{\pm}$ se déduit à

$$(5\cdot16)^{\pm\prime}\quad\begin{cases}\Big\{2\widetilde{(\nabla\theta_0)^2}(y,z^2)\dfrac{\partial}{\partial y}\pm2\widetilde{(\nabla\rho_0)^2}(y,z^2)\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \qquad\qquad+(\tilde{c}\pm z\tilde{d})\Big\}F^{\pm}=H^{\pm}(y,z)\\ F^{\pm}(y,0)=m(y).\end{cases}$$

Alors le lemme précédent est applicable à $(5\cdot16)^{\pm\prime}$ et on peut trouver $F^{\pm}(y,z)$. Définissons $\tilde{f}_j(y,\sigma)$, $j=0,1$, par

$$\tilde{f}_0(y,z^2)=F^+(y,z)+F^-(y,z)$$
$$\tilde{f}_1(y,z^2)=\frac{1}{z}\{F^+(y,z)-F^-(y,z)\}$$

et on voit que $\tilde{f}_j(y,\sigma)\in C^\infty(\overline{\boldsymbol{R}_+^2})$ et satisfont à $(5\cdot16)^{\pm}$, en conséquence à $(5\cdot14)$ et à $(5\cdot15)$ dans $\{x;\sigma(x)\geqq0\}=\bar{\Omega}$. La continuité de l'application $\{h_0,h_1,m\}\to\{f_0,f_1\}$ se déduit immédiat de l'estimation $(5\cdot10)$.

C.Q.F.D.

En utilisant ce lemme construisons $\theta_1(x),\rho_1(x)$ vérifiant $(5\cdot6)_1$.

Puisque $\rho_0=0$ sur Γ et ρ_1 doit être égale à -1 sur Γ, $\theta_1(x)$ doit satisfaire à

$$(5\cdot17)_1\qquad 2\nabla\theta_0(x)\cdot\nabla\theta_1(x)=(\nabla\rho_0)^2\qquad\text{sur}\quad\Gamma.$$

Si l'on pose $\theta_1(s_0)=0$, les valeurs de $\theta_1(x)$ sur Γ sont déterminées par l'équation $(5\cdot17)_1$. Nous écrivons cette fonction déterminée comme $\theta_1(s)$. Alors l'application du lemme 5.2 en prenant $c(x)\equiv d(x)\equiv0$, $h_0\equiv h_1\equiv0$, $m(s)=\theta_1(s)$ donne l'existence des fonctions $\theta_1(x)$, $\rho_1(x)$ satisfaisant à $(5\cdot6)_1$ sauf la relation $\rho_1=-1$ sur Γ. D'autre part de la première équation on a

$$2\nabla\theta_0\cdot\nabla\theta_1+\rho_1(\nabla\rho_0)^2=0\qquad\text{sur}\quad\Gamma.$$

Et on a $(\rho_0+1)(\nabla\rho_0)^2=0$ sur Γ d'après $(5\cdot17)_1$. Donc en tenant compte de $(\nabla\rho_0)^2\neq0$, on a $\rho_1=-1$ sur Γ. De cette façon nous avons $\theta_1(x)$, $\rho_1(x)$ vérifiant $(5\cdot6)_1$.

Ensuite nous cherchons $\theta_j(x)$, $\rho_j(x)$ satisfaisant à $(5\cdot6)_j$, à supposer que $\theta_l(x)$, $\rho_l(x)$, $l=0,1,\cdots,j-1$ soient déterminées. Par la relation sur Γ

$$(5\cdot17)_j \qquad 2\nabla\theta_0\cdot\nabla\theta_j=-\sum_{l=1}^{i-1}\nabla\theta_l\cdot\nabla\theta_{j-l}-\rho_1\sum_{l=0}^{i-1}\nabla\rho_l\cdot\nabla\rho_{j-l-1},$$

si l'on pose $\theta_j(s_0)=0$, $\theta_j(x)$ sur Γ est déterminée. Désignons cette fonction par $\theta_j(s)$. Alors par l'application du lemme 5.2 on trouve des fonctions $\theta_j(x)$, $\rho_j(x)$ vérifiant $(5\cdot6)_j$ sauf la demande $\rho_j(x)=0$ sur Γ. Mais par $\theta_j(x)=\theta_j(s)$ sur Γ, $\theta_j(x)$ satisfait à $(5\cdot17)_j$. En tenant compte que $\rho_1=-1$, $\rho_j=0$ si $j\neq1$, de la première équation de $(5\cdot6)_j$ on obtient

$$\rho_j(\nabla\rho_0)^2=0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma,$$

donc on en déduit $\rho_j=0$ sur Γ.

On voit que les $\theta_j(x)$, $\rho_j(x)$ sont construites successivement de telle façon qu'elle satisfassent à $(5\cdot6)_j$. Donc si l'on prend $\theta(x,\alpha)$, $\rho(x,\alpha)$ comme

$$\theta(x,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j(x)\alpha^j$$

$$\rho(x,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j(x)\alpha^j$$

il est évident qu'elles satisfont à $(4\cdot4)$.

Lemme 5.3. *Soient $c(x,\alpha)$, $d(x,\alpha)\in\mathscr{B}^\infty(\boldsymbol{R}^2\times[-\alpha_0,\alpha_0])$. Pour $h_0(x,\alpha)$, $h_1(x,\alpha)$, $m(s,\alpha)$ il existe des fonctions $f_0(x,\alpha)$, $f_1(x,\alpha)$ vérifiant*

$$(5\cdot18) \qquad 2\nabla\theta\cdot\nabla f_0+2\rho\nabla\rho\cdot\nabla f_1+\rho df_1+(\nabla\rho)^2f_1+cf_0\equiv h_0 \quad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty) \quad \textit{dans} \quad \bar{\Omega}$$

$$(5\cdot19) \qquad 2\nabla\rho\cdot\nabla f_0+2\nabla\theta\cdot\nabla f_1+df_0+cf_1\equiv h_1 \quad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty) \quad \textit{dans} \quad \bar{\Omega}$$

$$f_0(x,\alpha)=m(s,\alpha) \qquad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty) \quad \textit{sur} \quad \Gamma.$$

Démonstration. Posons

$$\theta(x,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j(x)\alpha^j, \qquad \rho(x,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\rho_j(x)\alpha^j,$$

$$c(x,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}c_j(x)\alpha^j, \qquad d(x,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}d_j(x)\alpha^j,$$

$$h_l(x,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}h_{lj}(x)\alpha^j, \qquad m(s,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}m_j(s)\alpha^j,$$

et cherchons $f_l(x,\alpha)$ sous la forme

$$f_l(x,\alpha)\sim\sum_{j=0}^{\infty}f_{lj}(x)\alpha^j.$$

Donc il suffit de trouver $f_{lj}(x)$. Pour que $f_l(x,\alpha)$, $l=0,1$ satisfassent à (5·18) et à (5·19) il faut qu'on ait les relations

$$\begin{aligned}
&2\nabla\theta_0\cdot\nabla f_{0j}+2\rho_0\nabla\rho_0\cdot\nabla f_{1j}+\rho_0 d_0(x)f_{1j}+(\nabla\rho_0)^2 f_{1j}+c_0(x)f_{0j}\\
&\quad=h_{0j}-2\sum_{l=1}^{j}\nabla\theta_l\cdot\nabla f_{0j-l}-2\rho_0\sum_{l=1}^{j}\nabla\rho_{j-l}\cdot\nabla f_{1l}\\
&\qquad-2\sum_{l=1}^{j}\sum_{m=0}^{j-l}\rho_l\nabla\rho_{j-l-m}\cdot\nabla f_{1m}-\sum_{l=1}^{j}\sum_{m=0}^{l}\nabla\rho_m\cdot\nabla\rho_{l-m}f_{j-l}\\
&\qquad-\rho_0\sum_{l=0}^{j-1}d_{j-l}f_{1l}-\sum_{l=1}^{j}\sum_{m=0}^{j-l}\rho_l d_{j-m-l}f_{1m}-\sum_{l=1}^{j-1}c_j f_{0j-l} \qquad \text{dans} \quad \bar{\Omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\nabla\rho_0\cdot\nabla f_{0j}+2\nabla\theta_0\cdot\nabla f_{1j}+d_0 f_{0j}+c_0 f_{1j}\\
&\quad=h_{1j}-2\sum_{l=1}^{j}\nabla\rho_l\cdot\nabla f_{0j-l}-2\sum_{l=1}^{j}\nabla\theta_l\cdot\nabla f_{1j-l}-\sum_{l=1}^{j}d_l f_{0j-l}-\sum_{l=1}^{j}c_l f_{1j-l}\\
&\qquad\qquad \text{dans} \quad \bar{\Omega}
\end{aligned}$$

$$f_{0j}(s)=m_j(s) \qquad \text{sur} \quad \Gamma.$$

On peut obtenir $f_{0j}(x)$, $f_{1j}(x)$ vérifiant les relations au-dessus successivement en appliquant le lemme 5.2. C.Q.F.D.

Remarque. $f_0(x,0)$, $f_1(x,0)$ sont les solutions du système (5·11), (5·12) et (5·13), en prenant $c(x)=c(x,0)$, $d(x)=d(x,0)$, pour les données $h_0(x,0)$, $h_1(x,0)$, $m(s,0)$.

2ᵉ étape. Construction de σ et ν.

Ensuite nous allons contruisons des fonctions σ et ν satisfaisant à

$$(5\cdot 20)\qquad \begin{cases} (\nabla\sigma)^2+\nu(\nabla\nu)^2\equiv\left(1+\dfrac{\mu}{ik}\right)^2 & (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty|p|^{-\infty}) \quad \text{dans}\ \bar{\Omega} \\ \nabla\sigma\cdot\nabla\nu\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty|p|^{-\infty}) \quad \text{dans}\ \bar{\Omega} & \\ \sigma(x,\alpha,p)=\theta(x,\alpha) \quad \text{sur}\ \Gamma. & \end{cases}$$

En posant

$$\sigma(x,\alpha,p)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j(x,\alpha)\left(\frac{\mu}{ik}\right)^j$$

$$\nu(x,\alpha,p)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\nu_j(x,\alpha)\left(\frac{\mu}{ik}\right)^j,$$

nous cherchons les $\sigma_j(x,\alpha)$, $\nu_j(x,\alpha)$ pour que $(5\cdot 20)$ soit satisfait. Par la substitution de σ et de ν dans $(5\cdot 20)$, en comparant les coefficients de $(\mu/ik)^j$, on voit qu'il faut vérifier les relations

$$(5\cdot 21)_0\qquad \begin{cases} (\nabla\sigma_0)^2+\nu_0(\nabla\nu_0)^2\equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty) \quad \text{dans}\ \bar{\Omega} \\ \nabla\sigma_0\cdot\nabla\nu_0\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty) \quad \text{dans}\ \bar{\Omega} \\ \sigma_0=\theta(x,\alpha) \quad \text{sur}\ \Gamma \end{cases}$$

$$(5\cdot 21)_1\qquad \begin{cases} 2\nabla\sigma_0\cdot\nabla\sigma_1+2\nu_0\nabla\nu_0\cdot\nabla\nu_1+\nu_1(\nabla\nu_0)^2\equiv 2 \quad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty) \quad \text{dans}\ \bar{\Omega} \\ 2\nabla\sigma_0\cdot\nabla\nu_1+2\nabla\sigma_1\cdot\nabla\nu_0\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty) \quad \text{dans}\ \bar{\Omega} \\ \sigma_1(x,\alpha)=0 \quad \text{sur}\ \Gamma \end{cases}$$

et pour $j\geqq 2$

$$(5\cdot 21)_j\qquad \begin{cases} 2\nabla\sigma_0\cdot\nabla\sigma_j+2\nu_0\nabla\nu_0\cdot\nabla\nu_j+\nu_j(\nabla\nu_0)^2 \\ \qquad =N_j-\displaystyle\sum_{l=1}^{j-1}\nabla\sigma_l\cdot\nabla\sigma_{j-l}-\sum_{l=1}^{j-1}\{\sum_{m=0}^{j-l}\nu_l\nabla\nu_m\cdot\nabla\nu_{j-l-m} \\ \qquad\qquad +\nu_0\nabla\nu_l\cdot\nabla\nu_{j-l}\} \quad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty) \quad \text{dans}\ \bar{\Omega} \\ 2\nabla\sigma_0\cdot\nabla\nu_j+2\nabla\nu_0\cdot\nabla\sigma_j=-2\displaystyle\sum_{l=1}^{j-1}\nabla\sigma_l\cdot\nabla\nu_{j-l} \quad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty) \quad \text{dans}\ \bar{\Omega} \\ \sigma_j=0 \quad \text{sur}\ \Gamma, \end{cases}$$

où $N_j=1$ pour $j=2$ et $N_j=0$ pour $j\geqq 3$.

La relation $(5\cdot 21)_0$ est justement $(4\cdot 4)$. Donc nous prenons $\theta(x,\alpha)$, $\rho(x,\alpha)$ construites dans 1ère étape comme σ_0, ν_0. Pour $j\geqq 1$ on peut obtenir successivement σ_j, ν_j satisfaisant à $(5\cdot 21)$ en faisant usage le lemme 5.3. Donc si l'on prend des fonction σ et ν comme

$$\sigma(x,\alpha,p)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j(x,\alpha)\left(\frac{\mu}{ik}\right)^j$$

$$\nu(x,\alpha,p)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\nu_j(x,\alpha)\left(\frac{\mu}{ik}\right)^j,$$

on voit immédiat qu'elles sont des fonctions désirées.

Remarque. Notons que

$$\nu_1(x,\alpha)=\frac{2}{(\nabla\rho(s,\alpha))^2}+0(\alpha)\qquad \text{sur } \Gamma. \tag{5·22}$$

En effet, en tenant compte que $\sigma_1=0$ sur Γ, et que $\rho=-\alpha$ sur Γ, on a

$$2\nabla\sigma_0\cdot\nabla\sigma_1+2\nu_0\nabla\nu_0\cdot\nabla\nu_1=O(\alpha)\qquad \text{sur}\quad \Gamma.$$

Donc la première relation de $(5·21)_1$ nous donne (5·22).

Lemme 5.4. *Soient* $c(x,\alpha,\beta)$, $d(x,\alpha,\beta)\in\mathcal{B}^\infty(\boldsymbol{R}^2\times[-\alpha_0,\alpha_0]\times[0,\beta])$. *Pour* $h_j(x,\alpha,\mu/k)\in S^m_{\rho,0}(\bar{\Omega})$, $j=0,1$ *et* $m(s,\alpha,\mu/k)\in S^m_{\rho,0}(\Gamma)$, *il existe* $f_j(x,\alpha,\mu/k)\in S^m_{\rho,0}(\bar{\Omega})$, $j=0,1$ *satisfaisant à*

$$\begin{cases} 2\nabla\sigma\cdot\nabla f_0+2\nu\nabla\nu\cdot\nabla f_1+\nu d\left(x,\alpha,\dfrac{\mu}{k}\right)f_1 \\ \qquad +(\nabla\nu)^2 f_1+c\left(x,\alpha,\dfrac{\mu}{k}\right)f_0\equiv h_0\quad (\operatorname{mod}\alpha^\infty|p|^{-\infty})\quad \textit{dans }\bar{\Omega} \\ 2\nabla\nu\cdot\nabla f_0+2\nabla\sigma\cdot\nabla f_1+d\left(x,\alpha,\dfrac{\mu}{k}\right)f_0+c\left(x,\alpha,\dfrac{\mu}{k}\right)f_1 \\ \qquad \equiv h_1\qquad (\operatorname{mod}\alpha^\infty|p|^{-\infty})\qquad \textit{dans}\quad \bar{\Omega} \\ f_0\left(x,\alpha,\dfrac{\mu}{k}\right)\equiv m\left(s,\alpha,\dfrac{\mu}{k}\right)\qquad (\operatorname{mod}\alpha^\infty|p|^{-\infty})\qquad \textit{sur}\quad \Gamma. \end{cases} \tag{5·23}$$

Démonstration. Soit $(\gamma_1,\gamma_2)\in[-\alpha_0,\alpha_1]\times[0,\beta_0]$. Considérons des fonctions $h_j(x,\gamma_1,\gamma_2)$ dépendantes de deux paramètre γ_1, γ_2 mais indépendantes de α et de p. Lorsque les second membres des relations (5·23) sont indépendants de α et de p, on peut construire $f_j(x,\alpha,\mu/k)$ vérifiant (5·23) par la méthode utilisée pour la construction de σ et de

ν. Désignons des solutions de (5·23) pour les données $h_j(x, \gamma_1, \gamma_2)$, $m(s, \gamma_1, \gamma_2)$ par $\tilde{f}_j(x, \alpha, \mu/k, \gamma_1, \gamma_2)$. Définissons $f_j(x, \alpha, \mu/k)$ par

$$f_j\left(x, \alpha, \frac{\mu}{k}\right) = \tilde{f}_j\left(x, \alpha, \frac{\mu}{k}, \alpha, \frac{\mu}{k}\right)$$

et on voit facilement qu'elles satisfont à (5·23). Le fait que $f_j(x, \alpha, \mu/k) \in S^m_{\rho,0}(\bar{\Omega})$ se déduit de $h_j \in S^m_{\rho,0}(\bar{\Omega})$ et de $m \in S^m_{\rho,0}(\Gamma)$ peut être vérifié par l'estimation

$$\left|\left(\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{q_2}\tilde{f}_j\left(x, \alpha, \frac{\mu}{k}, \gamma_1, \gamma_2\right)\right| \leqq C_q\left(\frac{\mu}{k}\right)^{|q|}$$

et par la façon de dépendance de γ_1 et de γ_2. C.Q.F.D.

3^e étape. Nous allons construire η et ζ vérifiant (5·4). Pour cela, premièrement notons que une propriété de $H(z)$, qui est déduite immédiat des développements asymptotiques de $Ai(z)$ et de $Bi(z)$. Posons

$$R(z) = \frac{H'(z)}{H(z)},$$

alors $R(z)$ est indéfiniment différentiable dans un voisinage de l'axe réel, et il a lieu

$$\frac{d^n}{dz^n}R(z) \sim c_n^{\pm} z^{1/2-n} \qquad \text{lorsque} \quad z \to \pm\infty, \tag{5·24}$$

où $c_n^{\pm}$ sont des constantes.

Alors on obtient

$$\frac{1}{ik^{1/3}}R\left(k^{2/3}\hat{\nu}\left(x, \alpha, \frac{\mu}{k}\right)\right) \in S^0_{1/3,0}(\bar{\Omega}). \tag{5·25}$$

En effet, parce que $\hat{\nu}(x, \alpha, \mu/k) = -\alpha + (\mu/ik)\,(2/(\nabla\rho(s, \alpha))^2) + \cdots$, on a

$$\nabla\hat{\nu} = \frac{\mu}{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2}{(\nabla\rho)^2}\right)\cdot\nabla\hat{\theta}_0(x). \tag{5·26}$$

Donc on a

$$\nabla\left(\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\right) = \frac{1}{ik^{1/3}}R'(k^{2/3}\hat{\nu})\,k^{2/3}\cdot\frac{\mu}{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2}{(\nabla\rho)^2}\right)\nabla\hat{\theta}_0(x). \tag{5·27}$$

Par (5·24) et par $|\hat{\nu}|\leqq C|\alpha|$

$$\left|\frac{1}{ik^{1/3}}R'(k^{2/3}\hat{\nu})\frac{\mu}{ik^{1/3}}\right|\leqq C\sqrt{|\alpha|}\,,$$

cela nous donne

$$\left|\nabla\Big(\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\Big)\right|\leqq C\sqrt{|\alpha|}\,,\qquad \forall\alpha\in[-\alpha_0,\alpha_0],\quad k>0. \tag{5·28}$$

De la même manière on obtient $\forall q$

$$\left|D_x{}^q\Big(\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\Big)\right|\leqq C_q\sqrt{|\alpha|}\,.$$

Egalement

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{k}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\Big)\right| &= \left|\frac{1}{ik^{1/3}}R'(k^{2/3}\hat{\nu})\cdot k^{-1/3}\Big(\frac{\partial}{\partial\alpha}\hat{\nu}\Big)\right| \\ &\leqq C\cdot k^{-1/3}\left|\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\right|.\end{aligned}$$

En employant ce raisonnement on obtient (5·25).

Nous cherchons des fonctions $\tilde{\eta}_1, \tilde{\zeta}_1$ telles que

$$\left\{\begin{aligned} &\Big(\nabla(\sigma+\tilde{\eta}_1)-\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\nabla\hat{\nu}\Big)^2+(\nu+\tilde{\zeta}_1)\,(\nabla(\nu+\tilde{\zeta}_1))^2 \\ &\qquad\qquad \equiv\Big(1+\frac{\mu}{ik}\Big)^2 \qquad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty|p|^{-\infty}) \quad \text{dans}\ \bar{\Omega} \\ &\Big(\nabla(\sigma+\tilde{\eta}_1)-\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\nabla\hat{\nu}\Big)\cdot\nabla(\nu+\tilde{\zeta}_1) \\ &\qquad\qquad \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty|p|^{-\infty}) \quad \text{dans}\ \bar{\Omega} \\ &\tilde{\eta}_1=0 \qquad \text{sur}\ \Gamma. \end{aligned}\right. \tag{5·29}$$

D'abord trouver des fonctions η_1, ζ_1 vérifiant

$$\left\{\begin{aligned} &2\nabla\sigma\cdot\nabla\eta_1+\zeta_1(\nabla\nu)^2+2\nu\nabla\nu\cdot\nabla\zeta_1 \\ &\qquad \equiv -2\nabla\sigma\cdot\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\cdot\nabla\hat{\nu}-\Big(\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\cdot\nabla\hat{\nu}\Big)^2 \\ &\qquad\qquad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty|p|^{-\infty}) \qquad \text{dans}\ \bar{\Omega} \end{aligned}\right. \tag{5·30}$$

$$\begin{cases} \nabla\sigma\cdot\nabla\zeta_1+\nabla\nu\cdot\nabla\eta_1 \equiv \dfrac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\nabla\hat{\nu}\cdot\nabla\sigma \quad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty|p|^{-\infty}) \text{ dans } \bar{\Omega} \\ \eta_1=0 \qquad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Cela est possible en utilisant le lemme 5.4. Et plus d'après (5·26) et (5·28) les seconds membres de (5·30) sont majorés par $C\cdot k^{-\varepsilon/2}(\mu/k)$, donc on a

$$(5\cdot 31) \qquad |D_x{}^q\eta_1| \leqq C_q k^{-\varepsilon/2}\cdot\frac{\mu}{k}\,.$$

Pour ζ_1 on obtient la même estimation.

Prenons η_2, ζ_2 des fonctions vérifiant

$$\begin{cases} 2\nabla\sigma\cdot\nabla\eta_2+\zeta_2(\nabla\nu)^2+2\nu\cdot\nabla\nu\cdot\nabla\zeta_2 \\ \qquad \equiv 2\nabla\eta_1\cdot\dfrac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\nabla\hat{\nu}-2\zeta_1\nabla\nu\cdot\nabla\zeta_1-\zeta_1(\nabla\zeta_1)^2 \quad \text{dans } \bar{\Omega} \\ \nabla\sigma\cdot\nabla\zeta_2+\nabla\nu\cdot\nabla\eta_2 \equiv \dfrac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\nu})\nabla\hat{\nu}\cdot\nabla\zeta_1-\nabla\eta_1\cdot\nabla\zeta_1 \quad \text{dans } \bar{\Omega} \\ \eta_2=0 \qquad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

D'après (5·31) les seconds membres sont majorés par $((\mu/k)k^{-\varepsilon/2})^2$. Donc η_2, ζ_2 ont la même estimation. En répétant ce procédure, on obtient η_j, ζ_j, $j=1, 2, \cdots$. Et si l'on définit $\tilde{\eta}_1, \tilde{\zeta}_1$ par

$$\tilde{\eta}_1 \sim \sum_{j=1}^{\infty}\eta_j\,, \qquad \tilde{\zeta}_1 \sim \sum_{j=1}^{\infty}\zeta_j\,,$$

$\tilde{\eta}_1$ et $\tilde{\zeta}_1$ satisfont à (5·29).

Ensuite, nous cherchons $\tilde{\eta}_2, \tilde{\zeta}_2$ vérifiant

$$\begin{cases} \left(\nabla(\sigma+\tilde{\eta}_1+\tilde{\eta}_2)-\dfrac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}(\widehat{\nu+\tilde{\zeta}_1}))\nabla(\widehat{\nu+\tilde{\zeta}_1})\right)^2 \\ \qquad +(\nu+\tilde{\zeta}_1+\tilde{\zeta}_2)(\nabla(\nu+\tilde{\zeta}_1+\tilde{\zeta}_2))^2 \equiv \left(1+\dfrac{\mu}{ik}\right)^2 \quad \text{dans } \bar{\Omega} \\ \left(\nabla(\sigma+\tilde{\eta}_1+\tilde{\eta}_2)-\dfrac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}(\widehat{\nu+\tilde{\zeta}_1}))\cdot\nabla(\widehat{\nu+\tilde{\zeta}_1})\right) \\ \qquad \times\nabla(\nu+\tilde{\zeta}_1+\tilde{\zeta}_2) \equiv 0 \quad \text{dans } \bar{\Omega} \\ \tilde{\eta}_2=0 \qquad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Puisque

$$\left|\frac{1}{ik^{1/3}}\{R(k^{2/3}(\nu+\widehat{\tilde{\zeta}_1}))\cdot\nabla(\nu+\widehat{\tilde{\zeta}_1})-R(k^{2/3}\hat{\nu})\,\nabla\hat{\nu}\}\right|$$

$$\leqq\frac{1}{k^{1/3}}|R(k^{2/3}(\nu+\widehat{\tilde{\zeta}_1}))-R(k^{2/3}\hat{\nu})|\cdot|\nabla(\nu+\widehat{\tilde{\zeta}_1})|$$

$$+\frac{1}{k^{1/3}}\cdot|R(k^{2/3}\hat{\nu})|\cdot|\nabla\widehat{\tilde{\zeta}}_1|$$

$$\leqq C\cdot k^{-\varepsilon/2}\cdot\frac{\mu}{k}\cdot|\tilde{\zeta}_1|,$$

en tenant compte que $\tilde{\eta}_1$ et $\tilde{\zeta}_1$ satisfont à $(5\cdot29)$, on obtient

$$|\tilde{\eta}_2|\leqq C\cdot\left(k^{-\varepsilon/2}\cdot\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)^2.$$

Pour $\tilde{\zeta}_2$, on a la même estimation.

Nous obtenons successivement $\tilde{\eta}_j$, $\tilde{\zeta}_j$ et voyons qu'elles ont l'estimation

$$|\tilde{\eta}_j|+|\tilde{\zeta}_j|\leqq C_j\cdot\left(k^{-\varepsilon/2}\cdot\frac{\mu}{k}\right)^j.$$

Donc si l'on prend η,ζ comme

$$\eta\sim\sigma+\tilde{\eta}_1+\tilde{\eta}_2+\cdots$$

$$\zeta\sim\nu+\tilde{\zeta}_1+\tilde{\zeta}_2+\cdots,$$

et on voit qu'elles satisfont à $(5\cdot4)$.

Par les considérations jusqu'à maintenant nous avons

Lemme 5.5. *Etant données* $h_j(x,\alpha,\mu/k)\in S^m_{1/3,0}(\bar{\Omega})$, $m(s,\alpha,\mu/k)\in S^m_{1/3,0}(\Gamma)$. *Il existe des fonctions* $f_j(x,\alpha,\mu/k)\in S^m_{1/3,0}(\bar{\Omega})$ *satisfaisant à*

$$\begin{cases} 2\left(\nabla\eta-\dfrac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\zeta})\nabla\hat{\zeta}\right)\cdot\nabla f_0+2\zeta\nabla\zeta\cdot\nabla f_1+\zeta d\left(x,\alpha,\dfrac{\mu}{k}\right)f_1 \\ \quad+(\nabla\zeta)^2f_1+c\left(x,\alpha,\dfrac{\mu}{k}\right)f_0\equiv h_0 \qquad (\operatorname{mod}\alpha^\infty|p|^{-\infty})\quad \text{dans}\quad \bar{\Omega} \\ 2\nabla\zeta\cdot\nabla f_0+2\left(\nabla\eta-\dfrac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\zeta})\nabla\hat{\zeta}\right)\cdot\nabla f_1+d\left(x,\alpha,\dfrac{\mu}{k}\right)f_0 \end{cases}$$

$$\left|\begin{aligned} &+c\left(x,\alpha,\frac{\mu}{k}\right)f_1\equiv h_1 \qquad (\mathrm{mod}\ \alpha^\infty|p|^{-\infty}) \quad \text{dans} \quad \bar{\Omega} \\ &f_0\left(x,\alpha,\frac{\mu}{k}\right)\equiv m\left(s,\alpha,\frac{\mu}{k}\right) \qquad \text{sur} \quad \Gamma. \end{aligned}\right.$$

Sous les hypothèses (5·1), (5·3), cherchons $w(x)$ vérifiant (5·2) asymptotiquement sous la forme

$$(5\cdot 32)\qquad w(x)=e^{ik\eta(x,\alpha,p)}\frac{1}{H(k^{2/3}\hat{\zeta}(x,\alpha,p))}\Big\{H(k^{2/3}\zeta(x,\alpha,p))\,g_0(x,\alpha,p)$$
$$+\frac{1}{ik^{1/3}}H'(k^{2/3}\zeta(x,\alpha,p))\,g_1(x,\alpha,p)\Big\}.$$

Appliquons $(\Delta-p^2)$ à $w(x)$ en forme de (5·32) et nous avons

$$e^{-ik\eta}(\Delta-p^2)w$$
$$=\frac{H(k^{2/3}\zeta)}{H(k^{2/3}\hat{\zeta})}\Big[\Big\{(ik)^2\Big(\Big(\nabla\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\cdot\nabla\hat{\zeta}\Big)^2+\zeta(\nabla\zeta)^2\Big)-p^2\Big\}g_0$$
$$+2(ik)^2\zeta\cdot\nabla\zeta\cdot\Big(\nabla\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\cdot\nabla\hat{\zeta}\Big)g_1$$
$$+ik\Big\{2\Big(\nabla\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\cdot\nabla\hat{\zeta}\Big)\cdot\nabla g_0+2\zeta\nabla\zeta\cdot\nabla g_1$$
$$+\Big(\Delta\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\Delta\hat{\zeta}-\frac{1}{i}R'k^{1/3}(\nabla\hat{\zeta})^2\Big)g_0+\nabla(\zeta\cdot\nabla\zeta)\,g_1\Big\}+\Delta g_0\Big]$$
$$+\frac{H(k^{2/3}\zeta)}{ik^{1/3}H(k^{2/3}\hat{\zeta})}\Big[\Big\{(ik)^2\Big(\Big(\nabla\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)^2+\zeta(\nabla\zeta)^2\Big)-p^2\Big\}g_1$$
$$+2(ik)^2\Big(\nabla\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)\cdot\nabla\zeta\cdot g_0$$
$$+ik\Big\{2\Big(\nabla\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)\cdot\nabla g_1+2\nabla\zeta\cdot\nabla g_0+\Delta\zeta\cdot g_0$$
$$+\Big(\Delta\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\Delta\hat{\zeta}-\frac{1}{i}R'k^{1/3}(\nabla\hat{\zeta})^2\Big)g_1\Big\}+\Delta g_1\Big].$$

Puisque η et ζ satisfont à (5·4) il nous reste de chercher g_0 et g_1 vérifiant

$$(5\cdot 33)\quad 2\Big(\nabla\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)\cdot\nabla g_0+2\zeta\cdot\nabla\zeta\cdot\nabla g_1+\nabla(\zeta\nabla\zeta)\,g_1$$

$$+\nabla\left(\nabla\zeta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\right)g_0+\frac{1}{ik}\Delta g_0\equiv 0 \qquad (\bmod |p|^{-\infty}) \quad \text{dans} \quad \bar{\Omega}$$

$$(5\cdot 34) \quad 2\left(\nabla\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\right)\cdot\nabla g_1+2\nabla\zeta\cdot\nabla g_0+\nabla\left(\nabla\zeta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\right)g_1$$

$$+\Delta\zeta\cdot g_0+\frac{1}{ik}\Delta g_1\equiv 0 \qquad (\bmod |p|^{-\infty}) \quad \text{dans} \quad \bar{\Omega},$$

et

$$(5\cdot 35) \qquad g_0+\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta(s,\alpha,p))g_1\equiv v(s) \qquad (\bmod |p|^{-\infty}) \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

Notons que, d'après

$$\operatorname{Im} k^{2/3}\zeta(s,\alpha,p)=\operatorname{Im}(k^{2/3}\rho(s,\alpha)+\frac{\mu}{ik^{1/3}}\nu_1(s,\alpha)+\cdots),$$

on a

$$|\operatorname{Im} k^{2/3}\zeta(s,\alpha,p)|\leqq c_0$$

sous l'hypothèse (5·3).

L'application du lemme 5.5, en prenant $c(x,\alpha,p)=\nabla(\nabla\eta-(1/ik^{1/3})R \times\nabla\hat{\zeta})$, $d(x,\alpha,p)=\Delta\zeta$, nous donne des fonctions $\{g_{01},g_{11}\}\in S^0_{1/3,0}(\bar{\Omega})$ vérifiant (5·33) et (5·34) et

$$(5\cdot 36) \qquad g_{01}(x,\alpha,p)\equiv v(s) \qquad (\bmod \alpha^\infty|p|^{-\infty}) \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

En effet, en posant

$$g_{01}\sim\sum_{j=0}^{\infty}g_{01j}(x,\alpha,p)(ik)^{-j}$$

$$g_{11}\sim\sum_{j=0}^{\infty}g_{11j}(x,\alpha,p)(ik)^{-j},$$

nous déterminons g_{l1j} successivement de telle façon que g_{01} et g_{11} vérifiennent (5·33) et (5·34) et

$$g_{010}=v(s) \qquad \text{sur} \quad \Gamma$$

$$g_{01j}=0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{pour} \quad j\geqq 1.$$

C'est bien possible par l'usage du lemme 5.5. Alors nous avons

$$(5\cdot 37) \qquad \frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta(s,\alpha,p))g_{11}(s,\alpha,p)\in S^{-\varepsilon/2}_{1/3,0}(\Gamma).$$

En effet, d'après (5·24) il a lieu

$$\left|\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\right| \leqq C\max(|\zeta(s,\alpha,p)|^{1/2}, k^{-1/3}), \tag{5·38}$$

d'où on déduit (5·37) en tenant compte de (5·1).

Ensuite, prenons $\{g_{02}, g_{12}\}$ de telle façon qu'elles satisfaissent à (5·33), à (5·34) et à

$$g_{02}(x,\alpha,p) = -\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\,g_{11}(x,\alpha,p) \qquad \text{sur} \quad \Gamma.$$

D'après (5·37) on a $\{g_{02}, g_{12}\} \in S_{1/3,0}^{-\varepsilon/2}(\bar{\Omega})$, donc grâce à (5·38)

$$-\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\,g_{12} \in S_{1/3,0}^{-\varepsilon/2\times 2}(\Gamma).$$

En répétant ce procédure, nous obtenons $\{g_{0j}, g_{1j}\}$, $j=1,2,\cdots$ satisfaisant à (5·34), à (5·35) et à

$$g_{0j}(x,\alpha,p) = -\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\,g_{1j-1}(x,\alpha,p) \quad \text{sur } \Gamma \quad j \geqq 2.$$

Alors on a

$$\{g_{0j}, g_{1j}\} \in S_{1/3,0}^{-\varepsilon/2\cdot j}(\bar{\Omega}),$$

donc si l'on définit g_0, g_1 par la formule

$$g_0 \sim \sum_{j=1}^{\infty} g_{0j}, \qquad g_1 \sim \sum_{j=1}^{\infty} g_{1j},$$

$\{g_0, g_1\}$ vérifie (5·33) et (5·34), et plus (5·35).

$$\frac{\partial}{\partial\rho_0}\left(e^{ik\eta}\frac{H(k^{2/3}\zeta)}{H(k^{2/3}\hat{\zeta})}\right) = ik\left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho_0} + \frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\zeta})\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_0}\right)e^{ik\eta}\frac{H(k^{2/3}\zeta)}{H(k^{2/3}\hat{\zeta})}$$

et notons le fait qu'il a lieu

$$-\operatorname{Re} ik\left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho_0} + \frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\hat{\zeta})\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_0}\right) \geqq c_0\mu$$

dans un voisinage de Γ, dont la démonstration sera donnée dans le paragraphe suivant. D'autre part pour x tel que $\rho_0(x) > 0$

$$e^{ik\eta}H(k^{2/3}\zeta(x,\alpha,p)) \sim e^{ik(\eta+(2/3)\zeta^{(3/2)})}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{k^{1/6}|\zeta|^{1/4}}$$

et

$$-\mathrm{Re}\ ik\left(\eta+\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right)\geqq\mu\rho_0.$$

Donc on obtient, en tenant compte que $|e^{ik\eta}(H(k^{2/3}\zeta)/H(k^{2/3}\hat{\zeta}))|=1$ sur Γ,

$$\left|e^{ik\eta}\frac{H(k^{2/3}\zeta)}{H(k^{2/3}\hat{\zeta})}\right|\leqq C\cdot e^{-c_0\mu\rho_0}. \tag{5·39}$$

Quand à $\{g_0, g_1\}$, on a d'après la méthode de leur construction

$$|D_x{}^q g_j(x,\alpha,p)|\leqq C_q\cdot e^{c'\rho_0}.$$

Donc à propos de (5·33), on voit qu'il a lieu

$$\left|D_x{}^q\left(2\left(\nabla\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\right)\nabla g_0+2\zeta\nabla\zeta\cdot\nabla g_1+\nabla(\zeta\nabla\zeta)g_1\right.\right.$$
$$\left.\left.+\nabla\left(\nabla\eta-\frac{1}{ik^{1/3}}R\cdot\nabla\hat{\zeta}\right)g_0+\frac{1}{ik}\Delta g_0\right)\right|\leqq C_{N,q}|p|^{-N}e^{c\rho_0(x)},\quad \forall x\in\bar{\Omega}. \tag{5·40}$$

De (5·39) et de (5·40) nous avons

Proposition 5.6. *Nous nous plaçons sous les hypothèses* (5·1) *et* (5·3). *Il exists* $\mu_0\geqq 0$ *tel que pour tout* $\mathrm{Re}\,p\geqq\mu_0$ *et* $v(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$ *on peut construire* $w(x)$ *en forme de* (5·32) *satisfaisant à* (5·2) *asymptotiquement, c'est-à-dire, pour tous entiers* m *et* N, $w(x)$ *satisfait à l'estimation*

$$|||(\Delta-p^2)w(x)|||_m\leqq C_{m,N}|p|^{-N}|v|_0$$
$$\|w(s,\alpha,p)-v(s)\|_m\leqq C_{m,N}|p|^{-N}|v|_0.$$

Définissons U_{42} par

$$U_{42}(p,u:x)=\iint e^{ik(\eta(x,\alpha,p)-\theta(s',\alpha))}\cdot\frac{1}{H(k^{2/3}\hat{\zeta}(x,\alpha,p))} \tag{5·41}$$
$$\times\Big\{H(k^{2/3}\zeta(x,\alpha,p))g_0(x,s',\alpha,p)$$
$$+\frac{1}{ik^{2/3}}H'(k^{2/3}\zeta(x,\alpha,p))g_1(x,s',\alpha,p)\Big\}$$
$$\times v_2(k^{\varepsilon}\alpha)^2u(s')\,kds'd\alpha,$$

où $g_j(x, s', \alpha, p)$, $j=0, 1$, sont construites de telle façon qu'elles satisfaissent à (5·33) et à (5·34), et à

$$(5\cdot 42) \qquad g_0(x, s', \alpha, p) + \frac{1}{ik^{1/3}} R(k^{2/3}\zeta(x, \alpha, p))\, g_1(x, s', \alpha, p)$$

$$\equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(s, s', \alpha) \qquad (\mathrm{mod}\ |p|^{-\infty}) \qquad \text{sur} \quad \Gamma.$$

Alors on a immédiat de la proposition 5.6 et de la définition de V_{42}

Proposition 5.7. *Nous nous plaçons sous les hypothèses* (5·1) *et* (5·3). *Pour* μ_0 *de la proposition précédente, si* $\mathrm{Re}\, p \geqq \mu_0$, *il a lieu les estimations pour toute* $u \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$

$$|||(\Delta - p^2)\, U_{42}(p, u: x)|||_m \leqq C_{m,m',N} |p|^{-N} \|u\|_{m'}$$

$$\|U_{42}(p, u: x) - V_{42}u\|_m \leqq C_{m,m',N} |p|^{-N} \|u\|_{m'},$$

où N *est un entier arbitraire, et* m, m' *des nombres réels arbitraires, et* $C_{m,m',N}$ *une constante positive indépendante de* p *et de* $u \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$.

§ 6. Sur $\partial U_{42}/\partial \rho_0|_\Gamma$

De la définition de U_{42} par (5·41) et (5·42) on a

$$\left.\frac{\partial U_{42}}{\partial \rho_0}\right|_\Gamma = \Bigg[\iint e^{ik(\eta(x,\alpha,p)-\theta(s',\alpha))} \cdot \frac{1}{H(k^{2/3}\hat{\zeta})}$$

$$\times \Bigg\{ ik \frac{\partial \eta}{\partial \rho_0} \Big(H(k^{2/3}\zeta)\, g_0 + \frac{1}{ik^{1/3}} H'(k^{2/3}\zeta)\, g_1 \Big)$$

$$+ k^{2/3} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho_0} (H'(k^{2/3}\zeta)\, g_0 + ik\zeta H(k^{2/3}\zeta)\, g_1)$$

$$- \frac{H'(k^{2/3}\hat{\zeta})}{H(k^{2/3}\hat{\zeta})} k^{2/3} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial \rho_0} \Big(H(k^{2/3}\zeta)\, g_0 + \frac{1}{ik^{1/3}} H'(k^{2/3}\zeta)\, g_1 \Big)$$

$$+ H(k^{2/3}\zeta) \frac{\partial g_0}{\partial \rho_0} + \frac{H'(k^{2/3}\zeta)}{ik^{1/3}} \frac{\partial g_1}{\partial \rho_0} \Bigg\} v_2(k^\varepsilon \alpha)^2 u(s')\, k ds' d\alpha \Bigg]_\Gamma$$

en appliquant (5·4)

$$= \iint e^{ik(\theta(s,\alpha)-\theta(s',\alpha))} \Bigg[\Bigg\{ ik \frac{\partial \eta}{\partial \rho_0} + k^{2/3} R(k^{2/3}\zeta) \Big(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho_0} - \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial \rho_0} \Big) \Bigg\}$$

$$\times\frac{1}{H(k^{2/3}\zeta)}\Big((H(k^{2/3}\zeta)g_0+\frac{1}{ik^{1/3}}H'(k^{2/3}\zeta)g_1\Big)$$

$$+ik\left(\zeta-\left(\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\right)^2\right)\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_0}g_1+\frac{\partial g_0}{\partial\rho_0}$$

$$+\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\frac{\partial g_1}{\partial\rho_0}\Big]v_2(k^{\varepsilon}\alpha)^2u(s')kds'd\alpha$$

$$=\iint e^{ik(\theta(s,\alpha)-\theta(s',\alpha))}a_{42}(s,s',\alpha,p)v_2(k^{\varepsilon}\alpha)^2u(s')kds'd\alpha.$$

Posons

$$a_{421}=\left(ik\frac{\partial\eta}{\partial\rho_0}+k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_0}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}$$

$$a_{422}=ik\left\{\zeta-\left(\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\right)^2\right\}g_1$$

$$a_{423}=a_{42}-a_{421}-a_{422}$$

$$(6\cdot1)\qquad b_{42}(s,\alpha,p)=k^{2/3}R(-\alpha k^{2/3})+\frac{k^{1/3}}{i}\frac{2\mu}{(\nabla\rho(s,\alpha))^2}R'(-\alpha k^{2/3})$$

$$=b_{421}(s,\alpha,p)+ib_{422}(s,\alpha,p).$$

Evidement on a

$$b_{421}(s,\alpha,p)=k^{2/3}\,\mathrm{Re}\,R(-\alpha k^{2/3})+\mu\frac{2}{(\nabla\rho)^2}k^{1/3}\,\mathrm{Im}\,R'(-\alpha k^{2/3}).$$

Notons ici quelques propriétés de la fonction $R(z)$. On a

$$R(z)=-\frac{F'(-z)}{F(-z)}-\frac{\pi i}{F(-z)^2}=R_1(z)+iR_2(z)$$

où $F(z)=(Ai(z)^2+Bi(z)^2)^{1/2}$ et $F(z)$ a les propriétés suivantes:

(i) pour $z\in\boldsymbol{R}, F(z)$ est à valeurs réelles.

(ii) $F(-z)^2\sim\frac{1}{\pi\sqrt{z}}\left(1-\frac{1\cdot3\cdot5}{96}\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$ lorsque $z\to+\infty$

(iii) $F(z)^2\sim\frac{1}{\pi\sqrt{z}}e^{(4/3)z^{3/2}}\left(1+\frac{3\cdot5}{216}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-1}+\cdots\right)^2$ lorsque $z\to+\infty$

(iv) $\forall z\in\boldsymbol{R},\quad \frac{dF}{dz}(z)>0$.[4)]

4) Voir Miller [11].

Donc on obtient

$$R_1(z) \sim -\frac{1}{z}(1+O(z^{-3})) \qquad \text{lorsque } z \to +\infty$$

$$R_1(z) \sim -\sqrt{-z}\,(1+O(z^{-3/2})) \qquad \text{lorsque } z \to -\infty$$

$$R_1(z) < 0 \qquad \text{pour tout } z \in \boldsymbol{R},$$

et

$$R_2(z) \sim -\sqrt{z}\,(1+O(z^{-3/2})) \qquad \text{lorsque } z \to +\infty$$

$$R_2(z) \sim O(|z|^{-N}) \qquad \forall N>0, \quad \text{lorsque } z \to -\infty.$$

Donc nous avons deux lemmes.

Lemme 6.1. *Pour C une constante positive assez grande, on a*

$$-b_{421}(s, \alpha, p) \geqq c_0\left(-\frac{1}{\alpha}+\frac{\mu}{\sqrt{-\alpha}}\right) \qquad si \quad -k^{2/3}\alpha > C$$

$$-b_{421}(s, \alpha, p) \geqq c_0 k^{2/3} \qquad si \quad |\alpha k^{2/3}| \leqq C$$

$$-b_{421}(s, \alpha, p) \geqq c_0 k\sqrt{\alpha} \qquad si \quad \alpha k^{2/3} > C,$$

où c_0 est une constante positive.

Lemma 6.2. *Pour tous $q=(q_1, q_2, q_3)$ on a*

$$\left|D_s^{q_1}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^{q_2}\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{q_3} b_{421}(s, \alpha, p)\right| \leqq C_q k^{-(q_2+q_3)/3} |b_{421}(s, \alpha, p)|.$$

D'après la définition on a

$$a_{423} = \frac{\partial g_0}{\partial\rho_0} + \frac{1}{ik^{1/3}} R(k^{2/3}\zeta)\frac{\partial g_1}{\partial\rho_0} + \left(ik\frac{\partial\eta}{\partial\rho_0} + k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_0}\right)$$
$$\times\left\{\left(g_0+\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\,g_1\right)-\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right\}$$
$$-k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)\,\nabla\hat{\zeta}\left(g_0+\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\,g_1\right).$$

En utilisant (5·42) et $|k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)\,\nabla\hat{\zeta}| \leqq C$, nous avons

$$a_{423} \in S^0_{1/3,0}(\Gamma).$$

Quand à a_{422}, lorsque $|\alpha| \leqq C \cdot k^{-2/3}$ il a lieu

$$\left| ik\left(\zeta - \left(\frac{1}{ik^{1/3}} R(k^{2/3}\zeta)\right)^2\right) g_1 \right| \leqq Ck^{1/3},$$

et lorsque $|\alpha| \geqq C \cdot k^{-2/3}$, depuis on a

$$\frac{1}{ik^{1/3}} R(k^{2/3}\zeta) \sim \sqrt{\zeta} + \frac{c_1}{k\zeta} + \cdots,$$

il a lieu

$$\left| ik\left(\zeta - \left(\frac{1}{ik^{1/3}} R(k^{2/3}\zeta)\right)^2\right) g_1 \right| \leqq C \frac{1}{\sqrt{|\zeta|}} \leqq C \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}.$$

D'où on déduit, en tenant compte du lemme 6.1

$$|a_{422}(s, s', \alpha, p)| \leqq C \cdot \frac{1}{\mu} (-b_{421}(s, \alpha, p)). \tag{6·2}$$

Ensuite considérons $a_{421} - b_{42}(\partial\Psi/\partial\alpha)$.

$$\begin{aligned}
a_{421} - b_{42}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} &= ik\frac{\partial\eta}{\partial\rho_0}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} + k^{2/3}\left\{R(k^{2/3}\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_0} - R(-\alpha k^{2/3}) - \frac{\mu}{ik^{1/3}}\frac{2}{(\nabla\rho)^2}R'(-\alpha k^{2/3})\right\}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} \\
&= ik\frac{\partial\eta}{\partial\rho_0}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} + k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_0} - 1\right) \\
&\qquad + k^{2/3}\left(R(k^{2/3}\zeta) - R(-\alpha k^{2/3}) - \frac{\mu}{ik^{1/3}}\frac{2}{(\nabla\rho)^2}R'(-\alpha k^{2/3})\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} \\
&= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.
\end{aligned}$$

Par la définition de ζ on a

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\rho_0} - \frac{\partial\rho}{\partial\rho_0}\right| \leqq C\frac{\mu}{k}.$$

Et on a aussi

$$|k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)| \leqq Ck\sqrt{|\alpha|}.$$

$$\left|\mathrm{II} - k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)\left(\frac{\partial\rho}{\partial\rho_0} - 1\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right| \leqq C \cdot \sqrt{|\alpha|}\,\mu \tag{6·3}$$

$$\leqq C\cdot k^{-\varepsilon}(-b_{421}(s,\alpha,p)).$$

$$\mathrm{III}=k^{2/3}\left\{(\zeta-(-\alpha))k^{2/3}\cdot\int_0^1 R'(k^{2/3}(-\alpha+\lambda(\zeta-(-\alpha))))d\lambda\right.$$

$$\left.-\frac{\mu}{ik^{1/3}}\frac{2}{(\nabla\rho)^2}R'(-\alpha k^{2/3})\right\}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}$$

$$=k^{4/3}\left\{\zeta-\left(-\alpha+\frac{\mu}{ik}\frac{2}{(\nabla\rho)^2}\right)\right\}R'(-\alpha k^{2/3})\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}$$

$$+k^{4/3}(\zeta+\alpha)\left\{\int_0^1 R'(k^{2/3}(-\alpha+\lambda(\zeta+\alpha)))d\lambda-R'(-\alpha k^{2/3})\right\}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}$$

$$=\mathrm{III}_1+\mathrm{III}_2.$$

Par le procédure de construction de ζ et $(5\cdot 22)$ on a

$$\left|\zeta-\left(-\alpha+\frac{\mu}{ik}\frac{2}{(\nabla\rho)^2}\right)\right|\leqq Ck^{-\varepsilon/2}\cdot\frac{\mu}{k}.$$

Et d'après $(5\cdot 24)$

$$|R'(-k^{2/3}\alpha)|\leqq\begin{cases} C & \text{pour } |\alpha|\leqq Ck^{-2/3} \\ \dfrac{C}{\sqrt{|\alpha|}\,k^{1/3}} & \text{pour } |\alpha|\geqq C\cdot k^{-2/3}.\end{cases}$$

Donc pour $|\alpha|\leqq C\cdot k^{-2/3}$,

$$|\mathrm{III}_1|\leqq C\cdot k^{-\varepsilon/2}\cdot\frac{\mu}{k}\cdot k^{4/3}\leqq C\cdot k^{-\varepsilon/2}k^{2/3}\cdot\frac{\mu}{k^{1/3}}$$

$$\leqq C\cdot k^{-\varepsilon/2}(-b_{421}(s,\alpha,p)),$$

et pour $|\alpha|\geqq C\cdot k^{-2/3}$

$$|\mathrm{III}_1|\leqq C\cdot k^{-\varepsilon/2}\cdot\frac{\mu}{k}\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}\,k^{1/3}}k^{4/3}$$

$$\leqq C\cdot\frac{\mu}{\sqrt{|\alpha|}}\cdot k^{-\varepsilon/2}\leqq C\cdot k^{-\varepsilon/2}(-b_{421}(s,\alpha,p)).$$

Savoir, on a obtenu

$$(6\cdot 4)\qquad |\mathrm{III}_1|\leqq C\cdot k^{-\varepsilon/2}(-b_{421}(s,\alpha,p)).$$

$$\left|\int_0^1 R'(k^{2/3}(-\alpha+\lambda(\zeta+\alpha)))d\lambda-R'(-\alpha k^{2/3})\right|$$

$$\leqq\sup|R''|\cdot k^{2/3}\cdot|\zeta+\alpha|\leqq\begin{cases} C\cdot k^{2/3}\cdot\dfrac{\mu}{k} & si\ |\alpha|\leqq C\cdot k^{-2/3} \\ \dfrac{1}{k^{2/3}}\cdot\dfrac{1}{|\alpha|}\cdot k^{2/3}\cdot\dfrac{\mu}{k} & si\ |\alpha|\geqq C\cdot k^{-2/3}.\end{cases}$$

Donc on a

$$|\mathrm{III}_2| \leqq C\cdot k^{4/3}\cdot \frac{\mu}{k}|R''|\cdot k^{2/3}\cdot|\zeta+\alpha| \leqq C(\sup \mu\cdot k^{-1/3})^2(-b_{421}).$$

Par la même manière on a

$$\left|(k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)-k^{2/3}R(-\alpha k^{2/3}))\left(\frac{\partial\rho}{\partial\rho_0}-1\right)\right| \leqq C\cdot k^{-\varepsilon/3}(-b_{421}).$$

Reunir les estimations et on a

Lemme 6.2. *Lorsque* $|\alpha|\leqq k^{-\varepsilon}$, *on a*

$$\left|a_{42}(s,s',\alpha,p)-b_{42}(s,\alpha,p)\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}(s,s',\alpha)\right.$$
$$\left.-ik\frac{\partial\eta}{\partial\rho_0}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}-k^{2/3}R(-\alpha k^{2/3})\left(\frac{\partial\rho}{\partial\rho_0}-1\right)\right| \leqq C\cdot a_0^2(-b_{421}).$$

$$\iint e^{ik(\theta(s,\alpha)-\theta(s',\alpha))}a_{42}(s,s',\alpha,p)\,v_2(k^\varepsilon\alpha)^2u(s')\,kds'd\alpha$$
$$=\iint e^{ik(\theta(s,\Phi(s,s',\tilde\alpha))-\theta(s',\Phi(s,s',\tilde\alpha)))}a_{42}(s,s',\Phi(s,s',\tilde\alpha),p)$$
$$\times v_2(k^\varepsilon\Phi(s,s',\tilde\alpha))^2u(s')\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde\alpha}(s,s',\tilde\alpha)\,kds'd\tilde\alpha$$
$$=\iint e^{ik(1+\tilde\alpha)(s-s')}\tilde a_{42}(s,s',\tilde\alpha,p)\,v_2(k^\varepsilon\Phi(s,s',\tilde\alpha))^2$$
$$\times\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde\alpha}(s,s',\tilde\alpha)\,u(s')\,kds'd\tilde\alpha\,.$$

Posons

$$A_{42}(s,\xi,s',p)=\tilde a_{42}\left(s,s',\frac{\xi}{k}-1,p\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\left(s,s',\frac{\xi}{k}-1\right)$$

$$B_{42j}(s,\xi,s',p)=b_{42j}\left(s,s',\Phi\left(s,s',\frac{\xi}{k}-1\right),p\right),\qquad j=1,2$$

$$B_{42}=B_{421}+iB_{422}$$

$$\check B_{42j}(s,\xi,p)=B_{42j}(s,\xi,s,p),\qquad \check B_{42}=\check B_{421}+i\check B_{422}\,,$$

et

$$\mathcal{A}_{42} = A_{42}(s, D_s, s', p),$$

$$\mathcal{B}_{42j} = B_{42j}(s, D_s, s', p), \qquad \mathcal{B}_{42} = \mathcal{B}_{421} + i\mathcal{B}_{422}$$

$$\check{\mathcal{B}}_{42j} = \check{B}_{42j}(s, D_s, p), \qquad \check{\mathcal{B}}_{42} = \check{\mathcal{B}}_{421} + i\check{\mathcal{B}}_{422}$$

$$\Upsilon_2 = \upsilon_2\left(k^{\varepsilon}\Phi\left(s, s', \frac{D_s}{k} - 1\right)\right).$$

Alors

$$\left.\frac{\partial U_{42}(p, u : x)}{\partial \rho_0}\right|_{\Gamma} = (A_{42} \circ \upsilon_2^2)(s, D_s, s', p) u .^{5)}$$

Posons

$$\mathcal{P}_{42} = (A_{42} \circ \upsilon_2^2)(s, D_s, s', p) - \Upsilon_2^* \mathcal{A}_{42} \Upsilon_2$$

et nous avons

$$\left.\frac{\partial U_{42}(p, u : x)}{\partial \rho_0}\right|_{\Gamma} = \Upsilon_2^* \mathcal{A}_{42} \Upsilon_2 u + \mathcal{P}_{42} u .$$

Lemme 6.3. *Il a lieu*

$$|D_s^{q_1} \partial_\xi^{q_2} \check{B}_{422}(s, \xi, p)| \leqq C_q k^{-1/3(q_2-1)} \cdot \frac{1}{\mu} (-\check{B}_{421}(s, \xi, p)) \tag{6·5}$$

pour $q = (q_1, q_2), q_2 \geqq 1$.

Démonstration. Depuis

$$\left.\frac{\partial \Phi(s, s', \alpha)}{\partial s}\right|_{s'=s} = \frac{1}{2} (\nabla \rho(s, \alpha))^2 \alpha + O(\alpha^2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(s, s, \alpha) = \frac{1}{2} (\nabla \rho(s, \alpha))^2 + O(\alpha^2),$$

et

$$\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial \alpha} B_{42}(s, s, \alpha, p) \sim \frac{c}{\sqrt{-\alpha}} \qquad \text{lorsque} \quad |\alpha k^{2/3}| \to \infty$$

d'où on obtient (6·5) pour $q = (0, 1)$, en tenant compte du lemme 6.1. Pour

5) Soient $\mathcal{P}(s, \xi, s', p) \in S^m_{\rho,\delta}(\Gamma)$ et $Q(s, \xi, s', p) \in S^{m'}_{\rho,\delta}(\Gamma)$. $(\mathcal{P} \cdot Q)(s, D_s, s', p)$ signifie l'opérateur pseudo-différentiel défini par le symbole $\mathcal{W}(s, \xi, s', p) = \mathcal{P}(s, \xi, s', p) \cdot Q(s, \xi, s', p) \in S^{m+m'}_{\rho,\delta}(\Gamma)$.

q arbitraire il suffit de répéter ce raisonnement en utilisant le developpement asymptotique de $F(z)$.

Proposition 6.4. *Soit m un nombre réel. On a*

$$-\mathrm{Re}\,(\Upsilon_2{}^*\mathcal{A}_{42}\Upsilon_2 w, w)_m \geqq \left(1-C\left(a_0{}^2+\frac{c}{\mu}+k^{-\varepsilon/2}\right)\right)$$

$$\times([-\check{B}_{421}]_F\Upsilon_2 w, \Upsilon_2 w)_m - C_m\|w\|_m^2$$

pour toute $w\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$, où $[-\check{B}_{421}]_F$ désigne la partie de Friedriches pour le spmbole $-\check{B}_{421}$.

Démonstration. Posons $w_2=\Upsilon_2 w$. D'abord démontrons

$$|\mathrm{Re}\,(i\mathcal{B}_{422}w_2, w_2)_m| \leqq C_m\frac{1}{\mu}([-\check{B}_{421}]_F w_2, w_2)_m\,. \tag{6·6}$$

$$\mathrm{Re}\,(i\mathcal{B}_{422}w_2, w_2)_m$$

$$=\mathrm{Re}\,(i\mathcal{B}_{422}w_2, w_2)_m - \mathrm{Re}\, i([\check{B}_{422}]_F w_2, w_2)_m.$$

Par le théorème 4.2 du chapitre 3 de Kumano-go [7], page 125, on a

$$\text{symbole}\,(\mathcal{B}_{422}-[\check{B}_{422}]_F)$$

$$\sim\psi_{(1)}(\xi)\check{B}_{422(1)}(s,\xi,p)+\sum_{\alpha+\beta\geqq 2}\psi_{\alpha,\beta}(\xi)\check{B}_{422}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}(s,\xi,p)\,.$$

Depuis $\psi_1(\xi)\in S^{-1}_{1/3,0}$, $\check{B}_{422(1)}(s,\xi,p)\in S^1_{1/3,0}$, on obtient

$$\psi_1(\xi)\check{B}_{422(1)}(s,\xi,p)\in S^0_{1/3,0}\,.$$

Pour $\beta=3$, $\alpha=0$ d'après la définition de $\psi_{\alpha,\beta}(\xi)$,

$$\psi_{0,3}(\xi)\in S^{-1-1/3}_{1/3,0}\,,$$

et $\check{B}_{422(3)}\in S^1_{1/3,0}$, nous avons $\psi_{0,3}(\xi)\check{B}_{422(3)}\in S^{-1/3}_{1/3,0}$.

De la même manière, nous avons aussi

$$\psi_{0,5}(\xi)\check{B}_{422(5)}\in S^{-1/3}_{1/3,0}\,.$$

Et l'annoncé du théorème 4.2 montre

$$\sum_{|\alpha+\beta|\geqq 6}\psi_{\alpha,\beta}(\xi)\check{B}_{422}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}(s,\xi,p)\in S^{1-(1/6)\times 6}_{1/3,0}=S^0_{1/3,0}\,.$$

D'autre part, en utilisant le lemme 6.3 et la propritété de $\psi_{\alpha,\beta}(\xi)$, pour $\alpha\geqq 1$ on a

$$|\psi_{\alpha,\beta}(\xi)\check{B}_{422(\beta)}^{(\alpha)}(s,\xi,p)|\leqq C\cdot\frac{1}{\mu}(-\check{B}_{421}(s,\xi,p)).$$

Les termes que nous n'avons pas encore considérés sont

$$\psi_{0,2}\check{B}_{422(2)} \qquad \text{et} \qquad \psi_{0,4}\check{B}_{422(4)}\,.$$

Notons qu'ils sont à valeurs réelles et que

$$[\psi_{0,2}\check{B}_{422(2)}]_F-\psi_{0,2}\circ\check{B}_{422(2)}\in S^{1/3}_{1/3,0}$$

$$[\psi_{0,4}\check{B}_{422(4)}]_F-\psi_{0,4}\circ\check{B}_{422(4)}\in S^{0}_{1/3,0}\,.$$

Répéter le raisonnement au-dessus on obtient

$$\mathscr{B}_{422}=[\check{B}_{422}]_F+[\tilde{B}]_F+\tilde{\tilde{\mathscr{B}}}\,,$$

$\tilde{B}$ est un symbole à valeurs réelles, le symbole de $\tilde{\tilde{\mathscr{B}}}$ est majoré par $c/\mu\cdot(-\check{B}_{421})$. Il est clair qu'il a lieu symbole de $([\check{B}_{421}]_F-\mathscr{B}_{421})$ est majoré par $C\cdot k^{-1/3}(-\check{B}_{421})$.

Réunir les estimations jusqu' à maintenant et nous avons (6·6).

D'après le lemme 6.2 et les estimations

$$-\mathrm{Re}\, i\left(k\frac{\partial\eta}{\partial\rho_0}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}w_2,\, w_2\right)_m\leqq C\mu\|w_2\|_m^2\leqq C\cdot k^{-\varepsilon/2}([-B_{421}]_F w_2,\, w_2)_m$$

$$\left|\mathrm{Re}\left(ik\frac{1}{ik^{1/3}}R(-\alpha k^{2/3})\left(\frac{\partial\rho}{\partial\rho_0}-1\right)w_2,\, w_2\right)_m\right|$$
$$\leqq C_m k^{-\varepsilon}([-\check{B}_{421}]_F w_2,\, w_2)_m$$

on a la proposition 6.4. C.Q.F.D.

De la proposition 6.4 et de la définition de $\mathscr{P}_{42}$ on a

Proposition 6.5. *Soit m un nombre réel. On a*

$$(6\cdot7)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{42}(p,u:x)}{\partial\rho_0},\, u\right)_m$$
$$\geqq\left(1-C\left(a_0^2+\frac{1}{\mu}+k^{-\varepsilon/2}\right)\right)([-\check{B}_{421}]_F\Upsilon_2 u,\,\Upsilon_2 u)_m$$
$$-\mathrm{Re}(\mathscr{P}_{42}u,\, u)_m-C_m\|u\|_m^2$$

pour toute $u\in\mathscr{D}(\Gamma_0)$.

Corollaire. *Soit* $\mathcal{B}(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$. *Pour toute* $u(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$ *on a*

$$(6\cdot 8)\quad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{42}(p,\beta(s)^2u:x)}{\partial\rho_0},\ u\right)_m$$

$$\geqq\left(1-C\left(a_0^2+\frac{1}{\mu}+k^{-\varepsilon/2}\right)\right)([-\check{B}_{421}]_F\Upsilon_2\beta u,\ \Upsilon_2\beta u)_m-\mathrm{Re}(\mathcal{P}_{42}\beta u,\beta u)_m$$

$$-C\cdot k^{-\varepsilon/2}([\check{B}_{421}]_F\tilde{\Upsilon}_2\tilde{\beta}(s)u,\ \tilde{\Upsilon}_2\tilde{\beta}(s)u)_m-C_m\|\tilde{\beta}u\|_m^2,$$

où $\tilde{\beta}$ *est une fonction appartenant à* $\mathcal{D}(\Gamma_0)$ *telle que* $\tilde{\beta}=1$ *sur le support de* $\beta(s)$ *et* $\tilde{\Upsilon}_2$ *est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est égale 1 sur le support de* $v_2(k^\varepsilon\Phi(s,s',\alpha))$.

Démonstration. On a

$$\left.\frac{\partial U_{42}(p,\beta(s)^2u:x)}{\partial\rho_0}\right|_\Gamma$$

$$=(A_{42}\circ v_2^2)\beta^2u$$

$$=\beta(A_{42}\circ v_2^2)\beta u+[\beta,\ (A_{42}\circ v_2^2)]\beta u\,.$$

D'après le lemme 6. 3 on obtient

$$|([\beta,\ (A_{42}\circ v_2^2)]\beta u,u)_m|\leqq C\cdot k^{-\varepsilon}([-\check{B}_{421}]_F\tilde{\Upsilon}_2\tilde{\beta}u,\ \tilde{\Upsilon}_2\tilde{\beta}u)_m,$$

d'où on déduit

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{42}(p,\beta(s)^2u:x)}{\partial\rho_0},\ u\right)_m$$

$$\geqq-\mathrm{Re}((A_{42}\circ v_2^2)\beta u,\beta u)_m-C\cdot k^{-\varepsilon}([-\check{B}_{421}]_F\tilde{\Upsilon}_2\tilde{\beta}u,\ \tilde{\Upsilon}_2\tilde{\beta}u)_m\,.$$

L'application de la proposition 6. 5 au premier terme du second membre nous donne (6·7).

Remarque. Jusqu'à maintenant nous avons fait la considération sous la restriction (5·3). Au cas où

$$(6\cdot 9)\qquad \mu^{3/2}\leqq k\leqq c\mu^3,$$

si l'on prend

$$\tilde{H}(z)=\exp(i\,2/3\cdot z^{3/2})$$

on peut achever le même raisonnement et obtenir la proposition 6. 5

pour p vérifiant (6·9).

§ 7. Construction de U_{41} et Ses Propriétés

Construisons $U_{41}(p, u: x)$ tel que

$$(7\cdot 1) \qquad |||(\Delta - p^2)U_{41}(p, u: x)|||_m \leqq C_{m,N}|p|^{-N}\|u\|_0$$

$$(7\cdot 2) \qquad \|U_{41} - V_{41}u\|_m \leqq C_{m,N}|p|^{-N}\|u\|_0 .$$

D'abord nous construisons $\psi(x, \alpha)$ pour $\alpha<0$ telle que

$$(7\cdot 3) \qquad (\nabla\psi(x, \alpha))^2 = 1 \qquad \text{dans } \bar{\Omega}$$

$$(7\cdot 4) \qquad \psi(x, \alpha) = \theta(x, \alpha) \qquad \text{sur } \Gamma .$$

Soit $\delta(s, \alpha)$ une fonction de $\mathscr{B}^\infty(\Gamma \times [0, \alpha_0])$ satisfaisant à

$$\delta(s, \alpha) \geqq c_0 > 0 .$$

Désignons par $\{s, r\}$ le point $P = (x_1, x_2)$ sur la normale extérieure de Γ en s dont la distance de s est égale à r. Alors il est claire que la correspondance de $P \in \bar{\Omega}$ à $\{s, r\} \in \Gamma \times \overline{\boldsymbol{R}^1_+}$ est bijective et que son inverse est aussi différentiable.

Désignons par $L(s, \alpha)$ la droite passant $s \in \Gamma$ et coupant Γ en angle α. Quand on pose

$$\varphi(s, \alpha) = \sqrt{-\alpha}\,\delta(s, \alpha),$$

lorsque $|\alpha|$ est assez petit, pour $-\alpha>0$, pour $P \in \bar{\Omega}$ il existe un point unique $s_0 \in \Gamma$ tel que

$$(7\cdot 5) \qquad P \in L(s_0, \varphi(s_0, \alpha)) .$$

Lemme 7.1. *Quand on considère que s_0 est une fonction de $P \in \bar{\Omega}$ et de $\alpha<0$ définie par* (7·5), *en conséquence une fonction de $\{s, r\} \in \Gamma \times R$ et de α on a*

$$(7\cdot 6) \qquad \left|\frac{\partial s_0}{\partial s}\right| \leqq C$$

$$(7\cdot 7) \qquad \left|\frac{\partial s_0}{\partial r}\right| \leqq \frac{C}{\sqrt{-\alpha} + \sqrt{r}}$$

$$(7\cdot 8) \qquad \left|\frac{\partial s_0}{\partial \sqrt{-\alpha}}\right| \leqq C .$$

Et plus $\partial s_0/\partial r$ s'écrit comme

$$\frac{\partial s_0}{\partial r}=\frac{1}{F(s,\, s_0,\, \sqrt{-\alpha})} \tag{7·9}$$

par une fonction $F(s, s', \beta)$ indéfiniment différentiable de s, de s' et de β, et

$$F(s,\, s',\, \sqrt{-\alpha})\geqq c_0(|s-s'|+\sqrt{-\alpha}).$$

On en déduit l'estimation

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{q_2}\left(\frac{\partial}{\partial\sqrt{-\alpha}}\right)^{q_3} s_0(s, r, \alpha)\right| \tag{7·10}$$

$$\leqq C\left(\frac{1}{\sqrt{-\alpha}+|s-s_0|}\right)^{2q_1+q_2+q_3}.$$

Démonstration. A la place de (x_1, x_2), désignons $x=(y, z)$ dans cette démonstration. Supposons que Γ est donnée par $y=f(z)$ et $f(0)=f'(0)=0$, $-f''(y)>c>0$.

La droite $L(s_0, \varphi)$ est représentée par l'équation

$$z-f(y_0)=\frac{\varphi+f'(y_0)}{1-\varphi f'(y_0)}(y-y_0).$$

Supposons $y_0<0$ et prenons $P=\{s, r\}$ sur $L(s_0, \varphi)$ tel que $s=(0, 0)$. Alors nous avons immédiat

$$r=f(y_0)+\frac{\varphi+f'(y_0)}{1-\varphi f'(y_0)}(-y_0)$$

$$=f(y)-y_0 f'(y_0)+\frac{\varphi(1+f'(y_0))^2}{1-\varphi f'(y_0)}(-y_0).$$

Depuis

$$f(y_0)-y_0 f'(y_0)=-y_0^2\int_0^1 tf''(ty_0)\,dt$$

$$=y_0^2\gamma(s, s_0)\geqq c_0 y_0^2,$$

$$r=y_0^2\gamma(y_0)+\varphi\cdot\iota(y_0, \varphi)(-y_0).$$

Posons $\varphi=\sqrt{-\alpha}\,\delta(s, \alpha)$, $d(s, s_0)=\int_{y_0}^0\sqrt{1+f'(t)^2}dt$ et nous avons que

$$\frac{\partial y_0}{\partial s_0} \text{ et } \frac{\partial y_0}{\partial s} \text{ sont indéfiniment différentiables.}$$

Donc nous pouvons écrire

$$(7\cdot 11)\qquad r=d(s,s_0)^2\gamma(s,s_0)+d(s,s_0)\sqrt{-\alpha}\delta(s_0,\alpha)\iota(s_0,\sqrt{-\alpha}\delta(s_0,\alpha)),$$

où $\gamma(s,s_0)$ est une fonction indéfiniment différentiable de s_0 et de s, $\iota(s_0,\beta)$ indéfiniment différentiable de s_0 et de β, et elles satisfont à $\gamma(s,s_0)>c>0$, $\iota(s,\beta)>c>0$.

Différentier (7·11) par r en considérant s_0 comme une fonction de s, de r et de α, nous avons

$$\begin{aligned}1=&-2d(s,s_0)\frac{\partial d}{\partial s_0}\frac{\partial s_0}{\partial r}\gamma(s,s_0)-d(s,s_0)^2\frac{\partial\gamma}{\partial s_0}\frac{\partial s_0}{\partial r}\\ &+\frac{\partial d}{\partial s_0}\frac{\partial s_0}{\partial r}\sqrt{-\alpha}\delta(s_0,\alpha)\iota(s,\sqrt{-\alpha}\delta(s_0,\alpha))\\ &+\sqrt{-\alpha}d\frac{\partial\delta}{\partial s_0}\frac{\partial s_0}{\partial r}\iota+\sqrt{\alpha}\partial d\frac{\partial\iota}{\partial\varphi}\frac{\partial\delta}{\partial s_0}\frac{\partial s_0}{\partial r}.\end{aligned}$$

En tenant compte de $\partial d(s,s_0)/\partial s_0=-1$, on obtient

$$(7\cdot 12)\qquad \frac{\partial s_0}{\partial r}=-1/\{2d\gamma+\sqrt{-\alpha}\delta\iota(s_0,\sqrt{-\alpha}\delta)+O(d^2+\sqrt{-\alpha}d)\}.$$

De (7·11) on déduit

$$d(s,s_0)\leqq C(\sqrt{r}+\sqrt{-\alpha}).$$

Donc nous avons (7·7) et (7·9) pour α assez petit.

De la même manière, (7·6) et (7·8) se déduisent des différentiations de (7·11) par s et par $\sqrt{-\alpha}$ respectivement.

On peut montrer (7·10) inductivement en utilisant (7·9) et les propriété (7·6), (7·7) et (7·8). C.Q.F.D.

Etudier des propriétés de la fonction $\psi(x,\alpha)$ satisfaisant à (7·3) et à (7·4). Posons

$$(7\cdot 13)\qquad \eta(s,\alpha)=\sqrt{1-\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2}$$

d'après (4·5)

$$\begin{aligned}&=\sqrt{1-(1+\alpha\tfrac{1}{2}(\nabla\rho_0)^2+O(\alpha^2))^2}\\ &=\sqrt{-\alpha}\,|\nabla\rho_0|(1+O(\alpha)).\end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(s,\alpha)=\eta(s,\alpha)\Big/\frac{\partial\theta}{\partial s}(s,\alpha)=\sqrt{-\alpha}\,b(s,\alpha),$$

et nous avons $b(s,\alpha)\in\mathscr{B}^\infty(\Gamma\times[-\alpha_0,0])$ et $b(s,\alpha)>c>0$.

Parce que $(\nabla\psi)^2-1=0$, $\nabla\psi$ est constant sur $L(s,\varphi(s,\alpha))$. D'autre part depuis

$$\nabla\psi\cdot\nabla\psi=1\,,$$

si l'on désigne la distance de $s_0\in\Gamma$ à $P\in L(s_0,\varphi(s_0,\alpha))$ par $d(s_0,P)$ ou par $d(s_0,s,r)$, il a lieu

$$\psi(P)=\theta(s_0,\alpha)+d(s_0,P)\,.$$

Donc on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\partial\theta}{\partial s_0}\frac{\partial s_0}{\partial r}+\frac{\partial d}{\partial s_0}\frac{\partial s_0}{\partial r}+\frac{\partial d}{\partial r}\,.$$

D'après (7·7) on obtient

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|\leqq C\Big(\frac{1}{\sqrt{-\alpha}+\sqrt{r}}\Big).$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{\partial\theta}{\partial s_0}\frac{\partial s_0}{\partial s}+\frac{\partial d}{\partial s_0}\frac{\partial s_0}{\partial s}+\frac{\partial d}{\partial s}$$

et par (7·6) on a

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial s}\right|\leqq C\,,$$

de la même façon

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial\sqrt{-\alpha}}\right|\leqq C\,.$$

En répétant ce raisonnement et appliquant (7·10) on a

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big)^{q_1}\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)^{q_2}\Big(\frac{\partial}{\partial\sqrt{-\alpha}}\Big)^{q_3}\psi(x,\alpha)\right|\leqq C_q(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{r})^{-(2q_1+q_2+q_3)}\,.$$

Donc nous avons

Proposition 7.2. *Pour $\alpha<0$ les fonctions $\psi(x,\alpha)$ satisfaisant à*

$$\begin{cases} (\nabla\psi(x,\alpha))^2 = 1 & \textit{dans} \quad \bar{\Omega} \\ \psi(x,\alpha) = \theta(x,\alpha) & \textit{sur} \quad \Gamma \end{cases}$$

vérifient l'estimation

$$(7\cdot 14) \qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{q_2}\left(\frac{\partial}{\partial\sqrt{-\alpha}}\right)^{q_3}\psi(x,\alpha)\right| \leqq C_q(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{r})^{-(2q_1+q_2+q_3)}.$$

Et plus pour ψ *telle que* $\partial\psi/\partial r < 0$ *nous avons*

$$(7\cdot 15) \qquad -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \sqrt{-\alpha}\,|\nabla\rho_0|\,(1+\alpha c_1(s,\alpha))$$

$$(7\cdot 16) \qquad -\Delta\psi|_\Gamma = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}C(s,\alpha),$$

où $C(s,\alpha) > 0 \ \forall s \in \Gamma$.

Démonstration. (7·14) est déjà démontré et (7·15) est identique à (7·13). Donc il suffit de montrer (7·16).

Notons que

$$(7\cdot 17) \qquad \left.\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}\right|_\Gamma = \frac{\partial^2\theta(s,\alpha)}{\partial s^2} = O(\alpha).$$

Puisque $\nabla\psi$ est constante sur $L(s_0, \varphi(s_0,\alpha))$ et $|\nabla\psi| = 1$ on a

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}(\cos\lambda),$$

où λ est l'angle formé par la droite $L(s_0, \varphi(s_0,\alpha))$ et la normale de Γ en $s \in \Gamma$. Et

$$\lambda - \frac{\pi}{2} = \varphi(s,\alpha) + C(s,s_0)\,d(s,s_0), \qquad C(s,s_0) > c > 0.$$

Donc d'après

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r} \sim C(s,s_0)\frac{\partial s_0}{\partial r}$$

et $\lambda|_{r=0} = \pi/2 + \varphi(s,\alpha)$, nous avons

$$(7\cdot 18) \qquad \left.\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right|_{r=0} \sim \frac{-1}{\sqrt{-\alpha}}\tilde{c}(s,\alpha),$$

donc de (7·17) et de (7·18) se déduit (7·16). C.Q.F.D.

Ensuite pour $v(s) \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$ cherchons $w(x)$ satisfaisant à

$$(7\cdot 19)\qquad \begin{cases} (\Delta - p^2)\, w(x) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ |p|^{-\infty}) \qquad \text{dans } \bar{\Omega} \\ w(x)\,|_{\Gamma} \equiv e^{ik\theta(s,\alpha)} v(s) \qquad (\mathrm{mod}\ k^{-\infty}) \end{cases}$$

sous la forme

$$(7\cdot 20)\qquad w(x) = e^{ik\psi(x,\alpha)} g(x, \alpha, p)\,.$$

Nous avons

$$e^{ik\psi}(\Delta - p^2)\, w(x) = \{(ik\nabla\psi)^2 g + 2ik\nabla\psi\cdot\nabla g + ik\Delta\psi\cdot g + \Delta g - (ik+\mu)^2 g\}$$

d'après $(7\cdot 3)$

$$= ik(2\nabla\psi\cdot\nabla g + \Delta\psi\cdot g - 2\mu g) - (\mu^2 - \Delta)\, g\,.$$

Donc nous cherchons $g(x, \alpha, p)$ de façon qu'elle satisfasse à

$$(7\cdot 21)\qquad \begin{cases} 2\nabla\psi\cdot\nabla g + \Delta\psi\cdot g - 2\mu g - \dfrac{1}{ik}(\mu^2 - \Delta)\, g \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ |p|^{-\infty}) \ \text{dans } \bar{\Omega} \\ g|_{\Gamma} = v(s)\,. \end{cases}$$

Posons

$$\mathcal{L}_\mu = \nabla\psi\cdot\nabla + \frac{1}{2}\Delta\psi - \mu$$

$$g = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x, \alpha, p)\, k^{-j}\,.$$

Pour que $(7\cdot 21)$ soit vérifié il faut et il suffit qu'il ait lieu

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\mu g_0 = 0 \qquad \text{dans } \bar{\Omega} \\ g_0 = v(s) \qquad \text{sur } \Gamma\,, \end{cases}$$

et pour $j \geqq 1$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\mu g_j = \dfrac{1}{2i}(\mu^2 - \Delta)\, g_{j-1} \qquad \text{dans } \bar{\Omega} \\ g_j = 0 \qquad \text{sur } \Gamma\,. \end{cases}$$

En tenant compte que $\nabla\psi$ est constante sur $L(s_0, \varphi(s_0, \alpha))$ on peut obtenir $g_j(x, \alpha, p)$ successivement. Etudions les estimations de $g_j(x, \alpha, p)$ pour $\alpha < 0$.

Notons que, si l'on met la condition $\partial\psi/\partial r < 0$ sur Γ, il a lieu $(7\cdot 16)$. Posons

$$R(P, \mu) = -\frac{1}{2}\Delta\psi + \mu$$

et nous avons pour μ assez grand

(7·22) $$R > \mu/2\,.$$

D'après $\partial\psi/\partial r < 0$ on a

$$g_0(P) = v(s_0)\exp\left(-\int_0^d R dl\right)$$

où $d = d(s_0, P)$ et $\int_0^d R dl$ signifie l'intégrale de $R(P, \mu)$ sur la droite $L(s_0, \varphi(s_0, \alpha))$ de $s_0 \in \Gamma$ au point P. Alors on a

$$\frac{\partial g_0}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial s_0}\frac{\partial s_0}{\partial r}\exp\left(-\int_0^d R dl\right) + v(s_0)\exp\left(-\int_0^d R dl\right)\frac{\partial d}{\partial s_0}\frac{\partial s_0}{\partial r}(-R)\,.$$

D'après le lemme 7.1 et la proposition 7.2 nous avons

$$\left|\frac{\partial g_0}{\partial r}\right| \leqq C\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{-\alpha} + \sqrt{r}}\right)^5 + \frac{\mu}{\sqrt{-\alpha}}\right\}\exp\left(-\int_0^d R dl\right).$$

De la même façon pour tout $q = (q_1, q_2, q_3)$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{q_2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^{q_3} g_0\right|$$
$$\leqq C|v|_{|q|}\cdot\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{-\alpha} + \sqrt{r}}\right)^5 + \frac{\mu}{\sqrt{-\alpha}}\right\}^{|q|}\exp\left(-\int_0^d R dl\right).$$

Et ainsi de suite

Lemme 7.3. *Pour $j \geqq 0$ on obtient*

(7·23) $$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{q_2}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^{q_3} g_j\right|$$
$$\leqq C_{j,q}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{-\alpha} + \sqrt{r}}\right)^{10} + \frac{\mu}{\sqrt{-\alpha}}\right\}^{|q|+j}\exp\left(-\int_0^d R dl\right).$$

Si l'on choit $\varepsilon > 0$ de façon que $\varepsilon/2 \cdot 10 < 1$, c'est-à-dire,

(7·24) $$0 < \varepsilon < \frac{1}{5}\,,$$

pour α, p tels que

(7·25) $$-\alpha > k^{-\varepsilon}, \qquad \mu^{3/2} < k$$

on a

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{-\alpha}+\sqrt{r}}\right)^{10}+\frac{\mu}{\sqrt{-\alpha}}\right\}^{j}k^{-j}\leqq k^{-j(1-10\cdot(\varepsilon/2))}.$$

Donc il est possible de prendre $g(x,\alpha,p)$ telle que

$$g(x,\alpha,p)\sim\sum_{j=0}^{\infty}g_j(x,\alpha,p)k^{-j}$$

et il est claire que cette fonction $g(x,\alpha,p)$ satisfait à $(7\cdot 21)$. Plus par $(7\cdot 22)$ on a

$$|ik(2\nabla\psi\cdot\nabla g+\Delta\psi\cdot g+2\mu g)+(-\mu^2 g+\Delta g)|\leqq C_N k^{-N}e^{-(\mu/2)r}. \tag{7·26}$$

Donc sous les hypothèses $(7\cdot 24)$ et $(7\cdot 25)$ nous avons construit $w(x)$ de la forme $(7\cdot 20)$ satisfait à

$$\begin{cases} |||(\Delta-p^2)w|||_m\leqq C_{N,m}k^{-N} \\ w|_{\Gamma}=e^{ik\theta(s,\alpha)}v(s). \end{cases} \tag{7·27}$$

Définissons U_{41} en profitant le résultat au-dessus. Dans $(7\cdot 19)$ nous prenons comme $v(s)$ la fonction

$$\chi_4(1+\Psi(s,s',\alpha))^2\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}(s,s',\alpha)$$

avec deux paramètres s' et α, et construisons $g(x,s',\alpha,p)$ de façon que $(7\cdot 26)$ soit satisfait. Posons

$$U_{41}(p,u:x)=\iint e^{ik(\psi(x,\alpha)-\theta(s',\alpha))}g(x,s',\alpha,p)\cdot v_1(k^{\varepsilon}\alpha)^2 u(s')\,k\,ds'd\alpha. \tag{7·28}$$

Grâce à $(7\cdot 27)$ nous avons

Proposition 7.4. *Nous nous plaçons sous l'hypothèse* $(7\cdot 24)$. *Pour toute* $u(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$ *on a*

$$|||(\Delta-p^2)U_{41}(p,u:x)|||_m\leqq C_{m,m',N}|k|^{-N}\|u\|_{m'}$$

$$\|U_{41}(p,u:x)|_{\Gamma}-V_{41}u(s)\|_m\leqq C_{m,m',N}|k|^{-N}\|u\|_{m'}$$

pour tous N *entier*, m, m' *nombres réels.*

Et puis considérons $\partial U_{41}/\partial\rho_0|_{\Gamma}$.

$$\left.\frac{\partial U_{41}}{\partial \rho_0}\right|_\Gamma = \iint e^{ik(\theta(s,\alpha)-\theta(s',\alpha))}\left\{ik\frac{\partial \psi}{\partial \rho_0}\cdot g+\frac{\partial g}{\partial \rho_0}\right\}\upsilon_1(k^\varepsilon\alpha)^2\cdot u(s')\,kds'd\alpha\,.$$

Notons que

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \rho_0}=\sqrt{-\alpha}\,(1+\alpha c_1(s,\alpha))\,.$$

En effet, d'après (7·13)

$$-\left.\frac{\partial \psi}{\partial \rho_0}\right|_\Gamma=\left.\frac{\partial \psi}{\partial r}\right|_\Gamma\cdot\left.\frac{\partial r}{\partial \rho_0}\right|_\Gamma=\eta(\alpha,s)\cdot\frac{1}{|\nabla \rho_0|}=\sqrt{-\alpha}\,(1+O(\alpha))\,.$$

D'autre part

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \rho_0}\right|_\Gamma=\left[\frac{\partial g_0}{\partial \rho_0}+\sum_{j\geqq 1}\frac{\partial g_j}{\partial \rho_0}k^{-j}\right]_\Gamma$$

$$=\left[-\frac{1}{\partial\psi/\partial\rho_0}\left\{(\nabla s)^2\frac{\partial g_0}{\partial s}+\frac{1}{2}(\Delta\psi-\mu)\,g_0\right\}\right]_\Gamma+\sum_{j\geqq 1}\left[\frac{\partial g_j}{\partial \rho_0}k^{-j}\right]_\Gamma\,.$$

Posons

$$a_{41}(s,s',\alpha,p)=ik\frac{\partial\psi}{\partial\rho_0}g+\frac{\partial g}{\partial\rho_0} \tag{7·29}$$

$$\begin{aligned} b_{41}(s,s',\alpha,p)&=\left\{-ik\sqrt{-\alpha}+\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\left(\frac{1}{2}\Delta\psi-\mu\right)\right\}g_0 \\ &=b_{411}+ib_{412}\,. \end{aligned} \tag{7·30}$$

Par le changement des variables

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{41}}{\partial\rho_0}&=\iint e^{ik(1+\alpha)(s-s')}a_{41}(s,s',\Phi(s,s',\alpha),p) \\ &\quad\times\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}(s,s',\alpha)\,\upsilon_1(k^\varepsilon\Phi(s,s',\alpha))^2u(s')\,kds'd\alpha\,. \end{aligned} \tag{7·31}$$

Posons encore

$$\tilde a_{41}(s,s',\alpha,p)=a_{41}(s,s',\Phi(s,s',\alpha),p)$$

$$A_{41}(s,\xi,s',p)=\tilde a_{41}\left(s,s',\frac{\xi}{k}-1,p\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\left(s,s',\frac{\xi}{k}-1\right)$$

$$B_{41j}(s,\xi,s',p)=b_{41j}\left(s,s',\Phi\left(s,s',\frac{\xi}{k}-1\right),p\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\left(s,s',\frac{\xi}{k}-1\right)$$

$$B_{41}=B_{411}+iB_{412}$$

$$\check{B}_{41j}(s, \xi, p) = B_{41j}(s, \xi, s, p), \qquad \check{B}_{41}(s, \xi, p) = \check{B}_{411} + i\check{B}_{412}\,.$$

Alors de la proposition 7. 2 et du lemme 7. 3 on déduit

$$A_{41},\, B_{41j} \in S^{1}_{1-5\varepsilon,0}(\Gamma)\,.$$

Remarquons que

$$g_0(s, s', \alpha, p)\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(s, s', \alpha) = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\chi_4(1+\Psi(s, s', \Phi(s, s', \alpha)))^2$$

$$= \chi_4(1+\alpha)^2.$$

Donc par la définition

$$-B_{411} = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\left(-\frac{1}{2}\Delta\psi + \mu\right)\chi_4(1+\alpha)^2 \tag{7·32}$$

$$\geqq C\left(\frac{1}{-\alpha} + \frac{\mu}{\sqrt{-\alpha}}\right)\chi_4(1+\alpha)^2.$$

On en déduit immédiat si $q_2 \neq 0$

$$\chi_4(1+\alpha)^2|\partial_s^{q_1}\partial_\xi^{q_2}\partial_{s'}^{q_3}B_{412}(s, \xi, s', p)| \leqq C_q\cdot\frac{1}{\mu}(-B_{411}(s, \xi, s', p))\,. \tag{7·33}$$

Posons

$$X_4 = \chi_4\left(\frac{D_s}{k}\right), \qquad \Upsilon_1 = v_1\left(k^{\varepsilon}\Phi\left(s, s', \frac{D_s}{k} - 1\right)\right)$$

$$\mathcal{A}_{41} = A_{41}(s, D_s, s', p),$$

$$\mathcal{B}_{41j} = B_{41j}(s, D_s, s', p), \qquad \mathcal{B}_{41} = \mathcal{B}_{411} + i\mathcal{B}_{412}$$

$$\check{\mathcal{B}}_{41j} = \check{B}_{41j}(s, D_s, p), \qquad \check{\mathcal{B}}_{41} = \check{\mathcal{B}}_{411} + i\check{\mathcal{B}}_{412}$$

et

$$\mathcal{P}_{41} = (A_{41}\circ v_1^2\circ\chi_4^2) - (\Upsilon_1 X_4)^*\mathcal{A}_{41}\Upsilon_1 X_4\,.$$

Nous avons

Proposition 7. 5. *Soit $m>0$. Pour toute $u \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$, il a lieu*

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{41}(p, u\colon x)}{\partial \rho_0}, u\right)_m$$

$$\geqq \left(1 - \frac{C}{\mu}\right)([-\check{B}_{411}]_F\Upsilon_1 X_4 u, \Upsilon_1 X_4 u)_m - \mathrm{Re}(\mathcal{P}_{41}u, u)_m - C_m\|u\|_m^2.$$

Corollaire. *Soit* $\beta(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$. *Pour toute* $u\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{41}(p,\beta(s)^2u:x)}{\partial\rho_0}\bigg|_\Gamma, u\right)_m$$

$$\geqq\left(1-\frac{C}{\mu}\right)([-\check{B}_{411}]_F\Upsilon_1X_4\beta u, \Upsilon_1X_4\beta u)-\mathrm{Re}(\mathcal{P}_{41}\beta u,\beta u)_m$$

$$-C\|\tilde{\beta}u\|_m{}^2-C\cdot k^{-\varepsilon/2}([-\check{B}_{411}]_F\tilde{\Upsilon}_1\tilde{X}_4\tilde{\beta}u, \tilde{\Upsilon}_1\tilde{X}_4\tilde{\beta}u)_m,$$

où $\tilde{\beta}\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$ *telle que* $\tilde{\beta}=1$ *sur le support de* β, $\tilde{X}_4=\tilde{X}_4(1+D_s)$ *dont le symbole est égal à* 1 *sur le support de celui de* X_4, *et* $\tilde{\Upsilon}_1=\tilde{v}_1(k^\varepsilon((D_s/k)-1))$ *et* $\tilde{v}_1(l)=1$ *sur le support de* v_1.

La proposition 7. 5 et sa corollaire sont démontrées par la même procédure que celles de la proposition 6. 4, mais celles-là sont beaucoup plus simple que celles-ci. Nous les omettons.

§ 8. La Construction de U_{43} et Ses Propriétés

Pour

$$\alpha>k^{-\varepsilon}, \tag{8·1}$$

construisons $w(x)$ satisfaisant à

$$\begin{cases}(\Delta-p^2)w(x)\equiv 0 & (\mathrm{mod}\ |p|^{-\infty}) \quad \text{dans } \bar{\Omega}\\ w|_\Gamma=e^{ik\theta(s,\alpha)}v(s).\end{cases} \tag{8·2}$$

D'abord, construisons $\psi(x,\alpha)$ vérifiant

$$\begin{cases}(\nabla\psi)^2=1 & \text{dans } \bar{\Omega}\\ \psi(x,\alpha)=\theta(s,\alpha) & \text{sur } \Gamma\end{cases} \tag{8·3}$$

à un certain sens.

En employant les coordonnées $\{s,r\}$, on a

$$(\nabla\psi)^2=\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+(\nabla s)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2. \tag{8·4}$$

Supposons que le développement de $(\nabla s)^2$ en $r=0$ est donnée sous la forme

$$(\nabla s)^2=1+ra_1(s)+r^2a_2(s)+\cdots. \tag{8·5}$$

Posons

$$\psi(s, r, \alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(s, \alpha) r^j$$

et nous allons déterminer $\varphi_j(s, \alpha)$ de façon que (8·3) soit vérifié.

$$\begin{aligned}
(\nabla\psi)^2 &= (\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\varphi_{j+1}r^j)^2 + (1+ra_1+\cdots+r^n a_n+\cdots)\cdot(\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j'(s, \alpha)r^j)^2 \\
&= \varphi_1^2+\varphi_0'^2+\{(2\varphi_2\cdot\varphi_1+\varphi_1\cdot 2\varphi_2)+(\varphi_1'\cdot\varphi_0'+\varphi_0'\cdot\varphi_1')+a_1\varphi_0'^2\}r \\
&\quad +\{(3\varphi_3\cdot\varphi_1+2\varphi_2\cdot 2\varphi_2+\varphi_1\cdot 3\varphi_3)+(\varphi_2'\cdot\varphi_0'+\varphi_1'\cdot\varphi_1'+\varphi_0'\cdot\varphi_2') \\
&\qquad +a_1(\varphi_1'\cdot\varphi_0'+\varphi_0'\cdot\varphi_1')+a_2\varphi_0'^2\}r^2+\cdots \\
&\quad +\{((j+1)\varphi_{j+1}\cdot\varphi_1+j\varphi_j\cdot 2\varphi_2+\cdots\cdots+\varphi_1\cdot(j+1)\varphi_{j+1}) \\
&\quad +(\varphi_j'\cdot\varphi_0'+\varphi_{j-1}'\cdot\varphi_1'+\cdots\cdots+\varphi_0'\cdot\varphi_j')+a_1(\varphi_{j-1}'\cdot\varphi_0' \\
&\quad +\cdots\cdots+\varphi_0'\cdot\varphi_{j-1}')+\cdots\cdots+a_j\varphi_0'^2\}r^j+\cdots\cdots
\end{aligned}$$

où on désigne $\partial\varphi_j/\partial s$ par φ_j'.

En égalant les coefficients de r^j de (8·3), on déduit

$$(8\cdot 6)_0 \qquad \varphi_1^2+\varphi_0'^2=1$$

$$(8\cdot 6)_1 \qquad 2\varphi_2\cdot\varphi_1+\varphi_1\cdot 2\varphi_2+(\varphi_1'\cdot\varphi_0'+\varphi_0'\cdot\varphi_1')+a_1\varphi_0'^2=0$$

....

$$\begin{aligned}
(8\cdot 6)_j \qquad & (j+1)\varphi_{j+1}\cdot\varphi_1+(j\varphi_j)(2\varphi_2)+\cdots\cdots+\varphi_1\cdot(j+1)\varphi_{j+1} \\
& +(\varphi_j'\cdot\varphi_0'+\varphi_{j-1}'\cdot\varphi_1'+\cdots\cdots+\varphi_1'\cdot\varphi_{j-1}'+\varphi_0'\cdot\varphi_j') \\
& +a_1(\varphi_{j-1}'\cdot\varphi_0'+\cdots\cdots+\varphi_0'\cdot\varphi_{j-1}')+\cdots\cdots+a_j\varphi_0'^2=0\,.
\end{aligned}$$

Donc en mettant $\varphi_0(s, \alpha)=\theta(s, \alpha)$, nous cherchons $\varphi_j(s, \alpha)$ de la manière que $(8\cdot 6)_j$ soient vérifiés. De $(8\cdot 6)_0$, on obtient en tenant compte de (4·5)

$$\begin{aligned}
\varphi_1(s, \alpha) &= \sqrt{1-\varphi_0'^2} \\
&= \sqrt{1-(1+\tfrac{1}{2}(\nabla\rho_0)^2\alpha+O(\alpha^2))} \\
&= i\sqrt{\alpha}\,|\nabla\rho_0(s)|\cdot(1+O(\alpha)) = i\sqrt{\alpha}\cdot\eta_1(s, \alpha),
\end{aligned}$$

alors $\eta_1(s, \alpha)\in\mathscr{B}^\infty(\Gamma\times[0, \alpha_0])$ et

$$(8\cdot 7) \qquad \eta_1>c>0\,.$$

De $(8\cdot 6)_1$ on a

$$\varphi_2(s,\alpha)=-\frac{1}{2\varphi_1}\{(\varphi_0'\cdot\varphi_1'+\varphi_1'\cdot\varphi_0')+a_1\varphi_0'^2\}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\eta_2(s,\alpha)$$

où $\eta_2(s,\alpha)\in\mathcal{B}^\infty(\Gamma\times[0,\alpha_0])$. Supposons maintenant que pour tout $j\leqq k$, $\varphi_j(s,\alpha)$ s'écrivent sous la forme

$$\varphi_j(s,\alpha)=\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2j-3}\eta_j(s,\sqrt{\alpha}),$$

où $\eta_j(s,\beta)\in\mathcal{B}^\infty(\Gamma\times[0,\sqrt{\alpha_0}])$. Alors quand on définit $\varphi_{k+1}(s,\alpha)$ par la formule

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1}(s,\alpha)=-\frac{1}{2(k+1)\varphi_1}\{&k\varphi_k\cdot 2\varphi_2+(k-1)\varphi_{k-1}\cdot 3\varphi_3+\cdots\cdots\\&+2\varphi_2\cdot(k\varphi_k)+(\varphi_k'\cdot\varphi_0'+\varphi_{k-1}'\cdot\varphi_1'+\cdots\cdots+\varphi_0'\cdot\varphi_k')\\&+a_1(\varphi_{k-1}'\cdot\varphi_0'+\varphi_{k-2}'\cdot\varphi_1'+\cdots\cdots+\varphi_0'\cdot\varphi_{k-1}')+\cdots\cdots+a_{k+1}\varphi_0'^2\},\end{aligned}$$

on voit immédiat que $\varphi_{k+1}(s,\alpha)$ s'écrit sous la forme

$$\varphi_{k+1}(s,\alpha)=\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2(k+1)-3}\eta_{k+1}(s,\sqrt{\alpha})$$

où $\eta_{k+1}(s,\beta)\in\mathcal{B}^\infty(\Gamma\times[0,\sqrt{\alpha_0}])$.

Définissons $\tilde{\psi}(s,z,\sqrt{\alpha})\in\mathcal{B}^\infty(\Gamma\times\boldsymbol{C}\times[0,\sqrt{\alpha_0}])$

$$\tilde{\psi}(s,z,\sqrt{\alpha})\sim\theta(s,\alpha)+i\alpha^{3/2}\eta_1(s,\alpha)z+\chi(z)\sum_{j=2}^{\infty}\alpha^{3/2}\eta_j(s,\sqrt{\alpha})z^j$$

où

$$\chi(z)=\begin{cases}1 & z\leqq C\\ 0 & z\geqq 2C\,.\end{cases}$$

Posons

$$\psi(s,r,\alpha)=\tilde{\psi}\left(s,\frac{r}{\alpha},\sqrt{\alpha}\right),$$

et on a pour tout N entier

$$(8\cdot 8)\qquad |(\nabla\psi)^2-1|\leqq C_N\cdot\left(\frac{r}{\alpha}\right)^N.$$

D'autre part grâce à $(8\cdot 7)$ on obtient

$$(8\cdot 9)\qquad \operatorname{Im}\psi \geqq c_0\sqrt{\alpha}\, r = c_0\alpha^{3/2}z\,, \qquad \forall r\geqq 0\,,$$

si l'on choisit $C>0$ assez petit.

Il est évident qu'il a lieu

$$(8\cdot 10)\qquad \psi(x,\alpha)=\theta(s,\alpha) \qquad \text{sur}\quad \Gamma\,.$$

Nous chershons $w(x)$ vérifiant $(8\cdot 2)$ sous la forme

$$(8\cdot 11)\qquad w(x)=e^{ik\psi(x,\alpha)}g(x,\alpha,p)\,.$$

Appliquons $e^{-ik\psi(x,\alpha)}(\Delta-p^2)$ à $w(x)$ de $(8\cdot 11)$.

$$\begin{aligned} &e^{-ik\psi(x,\alpha)}(\Delta-p^2)\,w(x)\\ &\quad=\{(ik\nabla\psi)^2-(ik+\mu)^2\}\,g(x,\alpha,p)+2ik\nabla\psi\nabla g+ik\Delta\psi\cdot g+\Delta g\\ &\quad=(ik)^2((\nabla\psi)^2-1)\,g+ik\{2\nabla\psi\cdot\nabla g+(\Delta\psi-2\mu)\,g\}+(\Delta-\mu^2)\,g\,. \end{aligned}$$

Posons

$$(8\cdot 12)\qquad g=\sum_{j=0}^{\infty} g_j(s,r,\alpha,p)\,k^{-j}$$

$$(8\cdot 13)\qquad g_j(s,r,\alpha,p)=\sum_{l=0}^{\infty} g_{jl}(s,\alpha,p)\,r^l\,.$$

$$\begin{aligned} \nabla\psi\cdot\nabla g_0 &= \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial g_0}{\partial r}+(\nabla s)^2\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial g_0}{\partial s}\\ &=(\varphi_1\cdot g_{01}+\varphi_0'\cdot g_{00}')+\{(2\varphi_2\cdot g_{01}+\varphi_1\cdot(2g_{02}))\\ &\quad+(\varphi_1'\cdot g_{00}'+\varphi_0'\cdot g_{01}')+a_1(\varphi_0'\cdot g_{00}')\}\,r+\cdots\cdots\\ &\quad+\{(j+1)\,\varphi_{j+1}\cdot g_{01}+j\varphi_j\cdot 2g_{02}+\cdots\cdots+\varphi_0\cdot(j+1)\,g_{0j+1}\\ &\quad+(\varphi_j'\cdot g_{00}'+\cdots\cdots+\varphi_0'\cdot g_{0j}')+a_1(\varphi_{j-1}'\cdot g_{00}'+\cdots+\varphi_0'\cdot g_{0j-1}')\\ &\quad+\cdots+a_j\varphi_0'\cdot g_{00}'\}\,r^j+\cdots\,. \end{aligned}$$

Supposons

$$\Delta\psi=\sum_{j=0}^{\infty} b_j(s,\alpha)\,r^j\,.$$

En posant tous les coefficients de $2\nabla\psi\cdot\nabla g_0+(\Delta\psi-\mu)\,g_0$ zéros, nous avons successivement

$$g_{00}(s,\alpha)=v(s)$$

$$g_{01}(s, \alpha) = -\frac{1}{\varphi_1}\{\varphi_0' \cdot g_{00}' + (b_0 - \mu) g_{00}\}$$

....

$$g_{0j+1}(s, \alpha) = -\frac{1}{(j+1)\varphi_1}\{j\varphi_j \cdot g_{01} + (j-1)\varphi_{j-1} \cdot 2g_{02} + \cdots$$
$$+ 2\varphi_2 j g_{0j} + (\varphi_j' \cdot g_{00}' + \cdots + \varphi_0' \cdot g_{0j}') + \cdots$$
$$+ a_1(\varphi_{j-1}' \cdot g_{00}' + \cdots + \varphi_0' \cdot g_{0j-1}') + \cdots$$
$$+ a_j \varphi_0' \cdot g_{00}' + b_0 g_{0j} + b_1 g_{0j-1} + \cdots + b_j g_{00} - \mu g_{0j}\}.$$

De la même manière que φ_j on voit que g_{0j} s'écrit comme

$$g_{0j} = \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^j \tilde{g}_{0j}(s, \sqrt{\alpha}, \mu)$$

et $\tilde{g}_{0j} \in C^\infty(\Gamma \times (0, \sqrt{\alpha_0}) \times [0, \infty))$. Donc quand on définit g_0 par

$$g_0(s, r, \alpha, p) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^j \tilde{g}_{0j}(s, \sqrt{\alpha}, \mu) r^j,$$

g_0 vérifie pour tout entier $N > 0$

$$(8\cdot14) \qquad |2\nabla\psi \cdot \nabla g_0 + (\Delta\psi - 2\mu) g_0| \leqq C_N \cdot \mu^N \cdot \left(\frac{r}{\alpha}\right)^N.$$

De la même façon on peut trouver une fonction $g_j(s, r, \alpha, p)$ sous la forme (8·13) vérifiant

$$(8\cdot15) \qquad \left|2\nabla\psi \cdot \nabla g_j + (\Delta\psi - 2\mu) g_j + \frac{1}{i}(\Delta - \mu^2) g_{j-1}\right| \leqq C_{j,N} \mu^{j+N} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{N+j},$$

$$g_j(s, 0, \alpha, p) = 0.$$

Définissons $g(s, r, \alpha, p)$ par

$$g(s, r, \alpha, p) \sim \sum_{j=0}^{\infty} g_j(s, r, \alpha, p) k^{-j}.$$

On déduit immédiat de (8·14) et de (8·15)

$$(8\cdot16) \qquad |ik(2\nabla\psi \cdot \nabla g + (\Delta\psi - 2\mu) g) + (\Delta - \mu^2) g|$$
$$\leqq C_N \cdot \mu^N \cdot k^{-N} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^N.$$

Avec cette g, définir $w(x)$ par (8·11). Par (8·8) et (8·9) on a

$$|e^{ik\psi}(ik)^2((\nabla\psi)^2-1)g|$$
$$\leqq C_N\cdot e^{-k\mathrm{Im}\psi}\cdot k^2\left(\frac{r}{\alpha}\right)^N$$
$$\leqq C_N\cdot e^{-k\cdot\alpha^{3/2}\cdot r/\alpha}\cdot k^2\left(\frac{r}{\alpha}\right)^N\leqq C_N'k^2(k\alpha^{3/2})^{-N}$$

Quand il a lieu

$$(8\cdot 17)\qquad \alpha>k^{-2/3+\varepsilon_0}$$

on a

$$|e^{ik\psi}\cdot(ik)^2((\nabla\psi)^2-1)g|\leqq C_N'\cdot k^{-N\varepsilon_0+2}.$$

De la même manière on a

$$|e^{ik\psi}\{ik(2\nabla\psi\cdot\nabla g+(\Delta\psi-2\mu)g)+(\Delta-\mu^2)g\}|$$
$$\leqq C_N k^{-N\varepsilon_0+2}\cdot\mu^N.$$

En tenant compte de $(8\cdot 9)$ nous avons sous la condition $(8\cdot 17)$

$$|||(\Delta-p^2)w(x)|||_m\leqq C_{N,m}k^{-N\varepsilon_0}\cdot\mu^N.$$

Si l'on choit $\varepsilon>0$ de $(8\cdot 1)$ assez petit on a $(8\cdot 17)$ pour $\varepsilon_0>1/2$ et

$$(8\cdot 18)\qquad k^{-\varepsilon_0}\mu<k^{-\varepsilon_1}\qquad \text{pour}\quad \varepsilon_1>0$$

si $k>\mu^{2-\varepsilon_2}$, $\varepsilon_2>0$.

Alors on a

$$(8\cdot 19)\qquad |||(\Delta-p^2)w|||_m\leqq C_{N,m}k^{-N}.$$

Soit $g(x,s',\alpha,p)$ une fonction constuite par la méthode au-dessus pour la donnée

$$v(s)=\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}(s,s',\alpha)\chi_4(1+\Psi(s,s',\alpha))^2.$$

Définissons U_{43} par

$$(8\cdot 20)\qquad U_{43}(p,u:x)=\iint e^{ik(\psi(x,\alpha)-\theta(s',\alpha))}g(x,s',\alpha,p)$$
$$\cdot v_3(k^\varepsilon\alpha)^2u(s')kds'd\alpha.$$

Grâce à $(8\cdot 19)$ nous avons sous la condition $(8\cdot 18)$

$$(8\cdot 21)\qquad |||(\Delta-p^2)U_{43}|||_m\leqq C_{m,m',N}|p|^{-N}\|u\|_{m'}$$

et par la définition

$$U_{43}(p, u: x)|_{\Gamma} = V_{43}u \qquad u \in \mathcal{D}(\Gamma_0). \tag{8·22}$$

Ensuite étudions $\partial U_{43}/\partial \rho_0$.

$$\frac{\partial U_{43}}{\partial \rho_0}\Big|_{\Gamma} = \iint e^{ik(\theta(s,\alpha)-\theta(s',\alpha))}\Big\{ik\frac{\partial \psi}{\partial \rho_0} g(s, s', \alpha, p) + \frac{\partial g}{\partial \rho_0}(s, s', \alpha, p)\Big\} \upsilon_3(k^{\varepsilon}\alpha)^2 u(s') k ds' d\alpha.$$

D'après la procédure de la construction de ψ on a

$$ik\frac{\partial \psi}{\partial \rho_0} = ik\varphi_1(s, \alpha)\frac{\partial r}{\partial \rho_0} = -k\sqrt{\alpha}\,\eta_1(s, \alpha)\frac{\partial r}{\partial \rho_0}.$$

Notons que

$$\eta_1(s, \alpha)\frac{\partial r}{\partial \rho_0} = |\nabla \rho_0|(1 + O(\alpha))\frac{1}{|\nabla \rho_0|} = (1 + O(\alpha)) > c > 0. \tag{8·23}$$

Posons

$$a_{43}(s, s', \alpha, p) = ik\frac{\partial \psi}{\partial \rho_0}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\chi_4(1+\Psi)^2 + \frac{\partial g}{\partial \rho_0}$$

et

$$\frac{\partial U_{43}}{\partial \rho_0}\Big|_{\Gamma} = \iint e^{ik(1+\alpha)(s-s')} a_{43}(s, s', \Phi(s, s', \alpha), p) \cdot \upsilon_3(k^{\varepsilon}\Phi(s, s', \alpha))^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(s, s', \alpha) u(s') k ds' d\alpha. \tag{8·24}$$

Posons encore

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{43}(s, s', \alpha, p) &= a_{43}(s, s', \Phi(s, s', \alpha), p)\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(s, s', \alpha)\\ &= -k\sqrt{\alpha}\,\eta_1(s, \Phi(s, s', \alpha))\frac{1}{|\nabla \rho_0|} + \frac{\partial g}{\partial \rho_0}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\end{aligned}$$

$$A_{43}(s, \xi, s', p) = \tilde{a}_{43}\Big(s, s', \frac{\xi}{k} - 1, p\Big),$$

$$\check{A}_{43}(s, \xi, p) = A_{43}(s, \xi, s', p)$$

$$\check{B}_{431}(s, \xi, p) = -k\sqrt{\frac{\xi}{k} - 1}$$

$$\mathcal{A}_{43}=A_{43}(s, D_s, s', p), \quad \check{\mathcal{A}}_{43}=\check{A}_{43}(s, D_s, p)$$

$$\mathcal{P}_{43}=(A_{43}\circ v_3^2\circ\chi_4^2)-(\Upsilon_3 X_4)^*\mathcal{A}_{43}\cdot\Upsilon_3\cdot X_4$$

Depuis A_{43}, $\check{B}_{431}\in S^1_{1-\varepsilon,0}(\Gamma)$, $(\partial g/\partial\rho_0)\cdot(\partial\Phi/\partial\alpha)\in S^0_{1-\varepsilon,0}(\Gamma)$ on a immédiat

Proposition 8.1. *L'opérateur* U_{43} *défini par* (8·20) *satisfait à* (8·21) *et à* (8·22) *et nous avons pour toute* $u\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$

(8·25)
$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{43}(p, u: x)}{\partial\rho_0}\Big|_\Gamma, u\right)_m$$
$$\geqq([-\check{B}_{431}]_F\Upsilon_3X_4u, \Upsilon_3X_4u)_m-\mathrm{Re}(\mathcal{P}_{43}u, u)_m-C_m\|u\|_m^2.$$

Corollaire. *Soit* $\beta(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$. *Pour toute* $u\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$ *nous avons*

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{43}(p, \beta(s)^2u: x)}{\partial\rho_0}\Big|_\Gamma, u\right)_m$$
$$\geqq([-\check{B}_{431}]_F\Upsilon_3X_4\beta u, \Upsilon_3X_4\beta u)_m-\mathrm{Re}\ (\mathcal{P}_{43}\beta u, \beta u)_m$$
$$-C\|\tilde{\beta}u\|_m^2-C\cdot k^{-\varepsilon/2}([-\check{B}_{431}]_F\tilde{\Upsilon}_3\tilde{X}_4\tilde{\beta}u, \tilde{\Upsilon}_3\tilde{X}_4\tilde{\beta}u)_m.$$

§ 9. La Démonstration du Théorème 3.1

Définissons $U_4(p, u: x)$ pour $u\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$ par

$$U_4(p, u: x)=\sum_{j=1}^3 U_{4j}(p, u: x).$$

Il est claire, d'après les constructions faites dans § 5~§ 8, que

(9·1)
$$|||(\Delta-p^2)U_4(p, u: x)|||_m\leqq C_{m,N}|p|^{-N}\|u\|_0$$

(9·2)
$$\|U_4(p, u: x)|_\Gamma-V_4u\|_m\leqq C_{m,m',N}|p|^{-N}\|u\|_{m'}$$

(9·3)
$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_4(p, u: x)}{\partial\rho_0}, u\right)_m=-\sum_{j=1}^3\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{4j}}{\partial\rho_0}, u\right)_m$$
$$\geqq\left(1-\frac{C}{\mu}\right)\sum_{j=1}^3\{([-\check{B}_{4j1}]_F\Upsilon_jX_4u, \Upsilon_jX_4u)_m-(\mathcal{P}_{4j}u, u)_m\}$$
$$-C\|u\|_m^2.$$

Montrons que

$$(9\cdot 4) \qquad \sum_{j=1}^{3} \mathcal{P}_{4j} \in S^0_{1/3,0}(\Gamma).$$

En tenant compte de la définition de υ_j il suffit de considérer le $\mathcal{P}_{4j}$ pour k, α tels que

$$(9\cdot 5) \qquad C_2\cdot k^{-\varepsilon} \leqq -\alpha \leqq C_1\cdot k^{-\varepsilon}$$

$$(9\cdot 6) \qquad C_2\cdot k^{-\varepsilon} \leqq \alpha \leqq C_1\cdot k^{-\varepsilon}.$$

Sous la restriction de $(9\cdot 5)$ par $(7\cdot 29)$

$$a_{41} - (-ik\sqrt{-\alpha}) \in S^0_{1-\varepsilon,0}(\Gamma).$$

D'autre part on a

$$a_{42} - (-ik\sqrt{-\alpha}) \in S^{\varepsilon}_{1-\varepsilon,0}(\Gamma)$$

d'après la forme de a_{42} et le développement asymptotique de $R(z)$. Notons qu'il a lieu

$$\Upsilon_1(ik\sqrt{-\alpha})_{\text{op}}\Upsilon_1 + \Upsilon_2(ik\sqrt{-\alpha})_{\text{op}}\Upsilon_2 - (ik\sqrt{-\alpha})_{\text{op}} \in S^{1-2(1-\varepsilon)}_{1-\varepsilon,0}(\Gamma)$$

d'après $\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = 1$ sur $(9\cdot 5)$, où $(ik\sqrt{-\alpha})_{\text{op}}$ désigne l'oprérateur pseudo-différentiel $ik\sqrt{1-(D_s/k)}$. Donc on a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{41} + \mathcal{P}_{42} &= \Upsilon_1\mathcal{A}_{41}\Upsilon_1 + \Upsilon_2\mathcal{A}_{42}\Upsilon_2 - (A_{41}\circ\upsilon_1^2)_{\text{op}} - (A_{42}\circ\upsilon_2^2)_{\text{op}} \\ &= \Upsilon_1(\mathcal{A}_{41} + (ik\sqrt{-\alpha})_{\text{op}})\Upsilon_1 - ((A_{41} + (ik\sqrt{-\alpha})\circ\upsilon_1^2)_{\text{op}} \\ &\quad + \Upsilon_2(\mathcal{A}_{42} + (ik\sqrt{-\alpha})_{\text{op}})\Upsilon_2 - ((A_{42} + ik\sqrt{-\alpha})\circ\upsilon_2^2)_{\text{op}} \\ &\quad - \{\Upsilon_1(ik\sqrt{-\alpha})_{\text{op}}\Upsilon_1 + \Upsilon_2(ik\sqrt{-\alpha})_{\text{op}}\Upsilon_2 \\ &\quad - ((ik\sqrt{-\alpha})(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2))_{\text{op}}\} \in S^{\varepsilon-(1-\varepsilon)}_{1-\varepsilon,0}(\Gamma) \subset S^0_{1-\varepsilon,0}(\Gamma).\end{aligned}$$

De la même manière sous la restriction $(9\cdot 6)$ on a

$$\mathcal{P}_{42} + \mathcal{P}_{43} \in S^0_{1-\varepsilon,0}(\Gamma).$$

Donc on obtient $(9\cdot 4)$.

Posons

$$B_{4F} = \sum_{j=1}^{3} (\Upsilon_j X_4)^* [-\check{B}_{4j1}]_F \Upsilon_j X_4$$

$$\tilde{B}_{4F} = \sum_{j=1}^{3} (\tilde{\Upsilon}_j \tilde{X}_4)^* [-\check{B}_{4j1}]_F \tilde{\Upsilon}_j \tilde{X}_4$$

et on a pour toute $u \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$

$$(9\cdot 7)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_4(p, u: x)}{\partial \rho_0}, u\right)_m \geqq \left(1-\frac{C}{\mu}\right)(B_{4F}u, u)_m - C_m\|u\|_m^2 .$$

Soit $\beta(s) \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$. On a

$$(9\cdot 8)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_4(p, \beta(s)^2 u: x)}{\partial \rho_0}, u\right)_m \geqq \left(1-\frac{C}{\mu}\right)(B_{4F}\beta u, \beta u)_m - C_m\|u\|_m^2 - C\cdot k^{-\varepsilon/2}(\tilde{B}_{4F}\tilde{\beta}u, \tilde{\beta}u)_m .$$

Sous la restriction de

$$(9\cdot 9)\qquad k > \mu^{3/2}$$

pour V_1, V_5, par la méthode de § 8 on peut construire U_1 et U_5 tels que

$$(9\cdot 10)\qquad \begin{cases} |||(\Delta - p^2)U_j(p, u: x)|||_m \leqq C_{m,m',N}|p|^{-N}\|u\|_{m'} \\ \|U_j(p, u: x)|_\Gamma - V_j u\|_m \leqq C_{m,m',N}|p|^{-N}\|u\|_{m'} , \end{cases}$$

et plus ils satisfont à

$$(9\cdot 11)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_j(p, u: x)}{\partial \rho_0}, u\right)_m \geqq c_0 k\|X_j u\|_m^2 - C_m\|u\|_m^2 .$$

Encore plus pour $\beta(s) \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$

$$(9\cdot 12)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_j(p, \beta(s)^2 u: x)}{\partial \rho_0}, u\right)_m \geqq c_0 k\|X_j\beta u\|_m^2 - C_m\|u\|_m^2 .$$

D'autre part pour V_3, par la méthode du § 7 on peut construire U_3 tel qu'il satisfait à (9·10) et à

$$(9\cdot 13)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_3(p, u: x)}{\partial \rho_0}, u\right)_m \geqq c_0\mu\|X_3 u\|_m^2 - C_m\|u\|_m^2.$$

Et pour $\beta(s) \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$ on a

$$(9\cdot 14)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_3(p, \beta(s)^2 u: x)}{\partial \rho_0}, u\right)_m \geqq c_0\mu\|X_3\beta u\|_m^2 - C_m\|u\|_m^2 .$$

On peut construire U_2 par la même procédure que U_4. Définissons $U(p, u: x)$ par

$$U(p, u: x) = \sum_{j=1}^{5} U_j(p, u: x) .$$

Alors on a immédiat

$$|||(\Delta-p^2)U(p, u: x)|||_m \leqq C_{m,m',N}|p|^{-N}\|u\|_{m'}$$

$$\|U(p, u: x)|_\Gamma - u\|_m \leqq C_{m,m',N}|p|^{-N}\|u\|_{m'} .$$

De (9·7), de (9·11) et de (9·13) on a

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U(p, u: x)}{\partial \rho_0}, u\right)_m$$

$$\geqq \left(1-\frac{C}{\mu}\right)((B_{4F}+B_{2F}+c_0\mu X_3{}^*X_3+\sum_{j=1,5} c_0 k X_j{}^*X_j)u, u)_m$$

$$-C_m\|u\|_m^2 .$$

On voit aisement, d'après la définition de B_{jF}, $j=2, 4$, et les propriétés fondamentaux de $\check{B}_{jl1}, j=2, 4,\ l=1, 2, 3$, que

(9·15) $$B_{4F}+B_{2F} \geqq c_0\mu(X_2{}^*X_2+X_4{}^*X_4) .$$

Donc nous avons pour toute $u \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$

(9·16) $$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U(p, u: x)}{\partial \rho_0}, u\right)_m \geqq c_0\mu\|u\|_m^2 - C_m\|u\|_m^2 .$$

De la même façon on a

(9·17) $$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U(p, \beta(s)^2 u: x)}{\partial \rho_0}, u\right)_m$$

$$\geqq \left(1-\frac{C}{\mu}\right)((B_{4F}+B_{2F}+c_0\mu X_3{}^*X_3+c_0 k\sum_{j=1,5} X_j{}^*X_j)\beta u, \beta u)_m$$

$$-C_m\|u\|_m^2 - C\cdot k^{-\varepsilon/2}((\tilde{B}_{4F}+\tilde{B}_{2F})\tilde{\beta}u, \tilde{\beta}u)_m .$$

Supposons que $u \in C^\infty(\Gamma)$. Prenons $\beta_j(s)$, $\tilde{\beta}_j(s) \in C^\infty(\Gamma)$ de telle façon que

$$\sum_{j=1}^n \beta_j(s)^2 = 1 \qquad \text{sur} \quad \Gamma ,$$

$\tilde{\beta}_j(s)=1$ sur $\mathrm{supp}\,\beta_j(s)$, $\mathrm{supp}\,\tilde{\beta}_j(s) \subset \Gamma_j$, où Γ_j est une partie de Γ telle qu'on peut appliquer le raisonnement jusqu'à ici à toute Γ_j.

Pour $u \in C^\infty(\Gamma)$, définissons U par

$$U(p, u: x) = \sum_{j=1}^n U(p, \beta_j(s)^2 u: x) .$$

Il est claire qu'il a lieu

$$(9\cdot 18)\qquad |||(\Delta-p^2)U(p, u: x)|||_m \leqq C_{m,m'N}|p|^{-N}\|u\|_{m'}$$

$$(9\cdot 19)\qquad \|U|_\Gamma - u\|_m \leqq C_{m,m',N}|p|^{-N}\|u\|_{m'}\,.$$

Et on a

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U(p, u: x)}{\partial\rho_0}, u\right)_m = -\sum_{j=1}^n \mathrm{Re}\left(\frac{\partial U(p, \beta_j(s)^2u: x)}{\partial\rho_0}, u\right)_m$$

$$\geqq \sum_{j=1}^n \left\{\left(1-\frac{C}{\mu}\right)((B_{2F}+B_{4F}+c_0\mu X_3{}^*X_3+c_0k\sum_{l=1,5}X_l{}^*X_l)\beta_j u, \beta_j u)_m\right.$$

$$\left. -C\|\tilde\beta_j u\|_m^2 - C\cdot k^{-\varepsilon/2}((\tilde B_{2F}+\tilde B_{4F})\tilde\beta_j u, \tilde\beta_j u)_m\right\}.$$

On voit facilement

$$|\sum_{j=1}^n((\tilde B_{2F}+\tilde B_{4F})\tilde\beta_j u, \tilde\beta_j u)_m|$$

$$\leqq C\sum_{j=1}^n((B_{2F}+B_{4F}+c_0\mu X_3{}^*X_3+ck\sum_{l=1,5}X_l{}^*X_l)\beta_j u, \beta_j u)_m\,.$$

Donc il a lieu

$$(9\cdot 20)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U(p, u: x)}{\partial\rho_0}, u\right)_m$$

$$\geqq \sum_{j=1}^n\left(1-\frac{C}{\mu}\right)((B_{2F}+B_{4F}+c_0\mu X_3{}^*X_3+c_0k\sum_{l=1,5}X_l{}^*X_l)\beta_j u, \beta_j u)$$

$$-C_m\|u\|_m^2 \geqq c_0\mu\|u\|_m^2 - C_m\|u\|_m^2\,.$$

Désignons par $U'(p, u: x)$ la solution de

$$\begin{cases}(\Delta-p^2)U'(p, u: x) = -(\Delta-p^2)U(p, u: x) & \text{dans } \Omega\\ U'(p, u: x) = u - U(p, u: x)|_\Gamma & \text{sur } \Gamma\end{cases}$$

alors grâce à (9·18) et à (9·19), en utilisant (3·1), on a

$$(9\cdot 21)\qquad \sum_{l+l'\leqq m}|p|^l|||U'(p, u: x)|||_{l'} \leqq C_{m,N}\|u\|_0\cdot|p|^{-N}\,.$$

Posons $\tilde U = U + U'$. Alors on a pour toute $u\in C^\infty(\Gamma)$

$$\begin{cases}(\Delta-p^2)\tilde U(p, u: x) = 0 & \text{dans } \Omega\\ \tilde U(p, u: x)|_\Gamma = u\,.\end{cases}$$

Etudions $B\tilde{U}$. D'après (1·2) on peut supposer que B s'écrit $B=(\partial/\partial\rho_0)+b(s)(\partial/\partial s)$, où $b(s)$ est une fonction à valeurs réelles.

$$-\operatorname{Re}(B\tilde{U}(p, u: x)|_\Gamma, u)_m$$
$$=-\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\rho_0}, u\right)_m-\operatorname{Re}\left(b(s)\frac{\partial\tilde{U}}{\partial s}, u\right)_m.$$

Et on a

$$\left|\operatorname{Re}\left(b(s)\frac{\partial\tilde{U}}{\partial s}, u\right)_m\right|=\left|\operatorname{Re}\left(b(s)\frac{\partial u}{\partial s}, u\right)_m\right|\leqq C\cdot\|u\|_m^2.$$

D'autre part grâce à (9·20) et à (9·21) il a lieu

$$-\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\rho_0}, u\right)_m\geqq c_0\mu\|u\|_m^2-C_m\|u\|_m^2.$$

Finalement on obtient pour toute $u\in C^\infty(\Gamma)$

$$-\operatorname{Re}(B\tilde{U}(p, u: x), u)_m\geqq c_0\mu\|u\|_m^2-C_m\|u\|_m^2.$$

De cette façon, on a démontré le théorème 3. 1.

§ 10. La Construction de U Lorsque $|k|\leqq\mu^{3/2}$

Il nous reste à construire $U(p, u: x)$ pour $p=ik+\mu$ tel que

$$(10\cdot1)\qquad |k|\leqq\mu^{3/2}.$$

Premièrement supposons que

$$(10\cdot2)\qquad |\xi|\leqq2\cdot|k|.$$

Considérons $\psi(x, \xi, p)$ telle que

$$\begin{cases}(i\nabla\psi)^2=(ik+\mu)^2 & \text{dans } \bar{\Omega}\\ \psi|_\Gamma=\xi s.\end{cases}$$

Posons

$$\psi=\sum_{j=0}^\infty\psi_j(s, \xi, p)r^j.$$

Comme dans le paragraphe 8, cherchons $\psi_j(s, \xi, p)$ en égalant les coefficients de r^j de la relation $(i\nabla\psi)^2=(ik+\mu)^2$. Or on a

$$\psi_0'=\xi,$$

$$-(\psi_1^2+\psi_0'^2)=(ik+\mu)^2,$$

et pour $j\geqq 1$,

$$\{(j+1)\psi_{j+1}\cdot\psi_1+j\psi_j\cdot 2\psi_2+\cdots\cdots+\psi_1\cdot(j+1)\psi_{j+1}\}$$
$$+(\psi_j'\cdot\psi_0'+\psi_{j-1}'\cdot\psi_1'+\cdots\cdots+\psi_0'\cdot\psi_j')$$
$$+a_1(\psi_{j-1}'\cdot\psi_0'+\cdots\cdots+\psi_0'\cdot\psi_{j-1}')+\cdots\cdots+a_j\psi_0'^2=0\,.$$

Donc on obtient

$$\psi_1(s,\xi,p)=i\sqrt{\xi^2+(ik+\mu)^2},\ \operatorname{Im}\sqrt{\xi^2+(ik+\mu)^2}>0\,.$$

Sous les hypothèse (10·1) et (10·2) on a

$$\frac{\xi^2}{|\psi_1(s,\xi,p)|^2}\leqq\frac{\xi^2}{|k\mu|+|\xi^2-k^2|}\leqq c\cdot\mu^{1/2}$$

Et plus, si l'on définit $\psi_{j+1}(s,\xi,p)$ par

$$\psi_{j+1}(s,\xi,p)=-\frac{1}{2(j+1)\psi_{j+1}}\{(j\psi_j\cdot 2\psi_2+\cdots\cdots+2\psi_2\cdot j\psi_j)$$
$$+(\psi_j'\cdot\psi_0'+\cdots\cdots+\psi_0'\cdot\psi_j')+a_1(s)\,(\psi_{j-1}'\cdot\psi_0'$$
$$+\cdots\cdots+\psi_0'\cdot\psi_{j-1}')+\cdots\cdots+a_j(s)\psi_0'^2\},$$

on a immédiat

Lemme 10.1. *Pour tous $j\geqq 1$ il a lieu*

$$\left|D_s^q\frac{\psi_{j+1}(s,\xi,p)}{\psi_1(\xi,p)}\right|\leqq C_{j,q}\mu^{j/2}\,.$$

Définissons $\psi(x,\xi,p)$ par

$$\psi(x,\xi,p)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j(s,\xi,p)r^j\,,$$

et nous avons pour tous $N>0$

$$|(i\nabla\psi)^2-(ik+\mu)^2|\leqq C_N(\mu^{1/2}r)^N\,.$$

Posons

$$w(x)=e^{i\psi(x,\xi,p)}g(x)\,,$$

et on a

$$(10\cdot3)\qquad (\Delta-p^2)\,w(x) = e^{i\psi(x,\xi,p)}\{((i\nabla\psi)^2-p^2)\,g+2i\nabla\psi\cdot\nabla g+i\Delta\psi\cdot g+\Delta g\}.$$

En utilisant le lemme 10. 1 on peut trouver, comme au cas de § 8, une fonction $g(x, \xi, p)$ satisfaisant à

$$\begin{cases} |2i\nabla\psi\cdot\nabla g+i\Delta\psi\cdot g+\Delta g|\leqq C_N(\mu^{1/2}r)^N \\ g(x, \xi, p)|_r=1\,. \end{cases}$$

Notons que

$$(10\cdot4)\qquad \operatorname{Im}\psi(x, \xi, p)\geqq c \qquad \operatorname{Im}\psi_1\cdot r\geqq\mu\cdot r\,.$$

Donc en appliquant (10·3) au premier membre de (10·3) on a

$$|(\Delta-p^2)\,w(x)|\leqq C_N e^{-\mu r}(\mu^{1/2}r)^N\leqq C_N'\mu^{-N/2}\cdot e^{-\mu r/2}\,,$$

ainsi

$$|||(\Delta-p^2)\,w(x)|||_m\leqq C_{m,N}\mu^{-N}\leqq C_{m,N}|p|^{-N}\,.$$

Définissons $U(p, u: x)$ par

$$U(p, u: x)=\iint e^{i(\psi(x,\xi,p)-s'\cdot\xi)}g(x, s', \xi, p)\,u(s')\,ds'd\xi$$

et nous avons

$$(10\cdot5)\qquad \begin{cases} |||(\Delta-p^2)\,U(p, u: x)|||_m\leqq C_{m,m',N}\|u\|\cdot|p|^{-N} \\ U(p, u: x)|_r=u(s)\,. \end{cases}$$

Au cas où $|\xi|\geqq2\cdot|k|$, le raisonnement du § 6 est applicable sans modifier. Puisque démonstration du fait

$$-\operatorname{Re}(BU(p, u: x), u)_m\geqq c\cdot\mu\|u\|_m^2-C_m\cdot\|u\|_m^2$$

est très facile, nous l'omettons.

Références

[1] Erdélyi, A., *Asymptotic Expansions*, Dover Publ., New York, 1965.
[2] Ikawa, M., On the mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition, *Proc. Japan Acad.*, **44** (1968), 1033-1037.
[3] ———, Mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition, *Osaka J. Math.*, **7** (1970), 495-525.
[4] ———, Remarques sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, *Colloque international du C.N.R.S.*, (1972), astérisque 2 et 3, 217-221.

[5] ———, Sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, **10** (1975), 669–690.

[6] ———, Sur les problèmes mixtes pour l'éxuation des ondes (en japonais), *Sûgaku*, **27** (1975), 302–315.

[7] Kumano-go, H., *Opérateurs Pseudo-différentiels* (en japonais), Iwanami Shoten, Tokyo, 1975.

[8] Lax, P. D., Asymptotic solutions for oscillatory initial value problems, *Duke Math. J.*, **24** (1957), 627–646.

[9] Ludwig, D., Uniform asymptotic expansions at a caustic, *Comm. Pure Appl. Math.*, **19** (1966), 215–250.

[10] ———, Uniform asymptotic expansion of the field scattered by a convex object at high frequencies, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 103–138.

[11] Miller, J.C.P., *Airy integral*, Cambridge, 1946.