Publ. RIMS, Kyoto Univ.
13 (1977), 61-106

Problèmes Mixtes pour l'Équation des Ondes II

Par

Mitsuru IKAWA

§ 1. Introduction

Soit $\mathcal{O}$ un objet borné dans $\boldsymbol{R}^3=\{x;\, x=(x_1, x_2, x_3),\, x_j\in \boldsymbol{R}\}$ dont la frontière Γ est une surface indéfiniment différentiable, fermée et simple. Posons $\Omega=\boldsymbol{R}^3-\mathcal{O}-\Gamma$.

Soit

$$B=\sum_{j=1}^{3} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+c(x)\frac{\partial}{\partial t}+d(x)$$

un opérateur différentiel du premier order à coefficients indéfiniment différentiables définis dans un voisinage de Γ. Supposons que

(1.1) $\qquad b_j(x),\ j=1, 2, 3$ et $c(x)$ sont à valeurs réelles

(1.2) $\qquad \sum_{j=1}^{3} b_j(x)n_j(x)=1 \qquad \text{sur} \quad \Gamma$

où $n(x)=(n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ désigne la normale unitaire extérieure par rapport à $\mathcal{O}$ de Γ en x.

Considérons le problème mixte

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{cases} \square u(x, t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j{}^2}=f(x, t) & \text{dans} \quad \Omega\times(0, \infty) \\ Bu(x, t)=g(x, t) & \text{sur} \quad \Gamma\times(0, \infty) \\ u(x, 0)=u_0(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=u_1(x). & \end{cases}$$

On dit que le problème mixte (P) représente un phénomène propagateur avec une vitesse finie lorsqu'il existe une constante $\gamma>0$ avec la propriété suivante:

Communiqué par S. Matsuura, le 4 mai, 1976.

* Département de Mathématiques, Université d'Osaka, Toyonaka 560, Japan.

pour $(x_0, t_0) \in \bar{\Omega} \times [0, \infty)$ et $u(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ quelconques les égalités

$$\begin{aligned} &\Box u = 0 && \text{dans} \quad \Omega \times [0, \infty) \cap \Lambda(x_0, t_0) \\ &Bu = 0 && \text{sur} \quad \Gamma \times [0, \infty) \cap \Lambda(x_0, t_0) \\ &u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 && \text{dans} \quad \bar{\Omega} \times \{t = 0\} \cap \Lambda(x_0, t_0) \end{aligned}$$

entraîne $u(x_0, t_0) = 0$, où

$$\Lambda(x_0, t_0) = \{(x, t)\,;\, |x - x_0| \leq \gamma(t_0 - t)\}.$$

Et puis dans cet article l'inférieur des γ avec la propriété au-dessus est dit la vitesse maximume du problème mixte (P).

Le fait que nous allons montrer dans cet article est le suivant:

Théorème. *Supposons que la courbure Gaussienne de Γ soit strictement positive. Pour que* (P) *soit bien posé au sens de C^∞ et ait une vitesse finie de propagation il faut et il suffit, sous les restrictions* (1. 1) *et* (1. 2), *qu'il ait lieu*

$$(1.3) \qquad c(x) < 1 \qquad \textit{pour tout} \quad x \in \Gamma.$$

Et lorsque (1. 3) *a lieu la vitesse maximume de propagation du problème mixte* (P) *est égale à*

$$(1.4) \qquad \max\left(1, \sup_{x \in \Gamma} \frac{1 + v(x)^2}{-c(x)\,v(x) + \sqrt{1 + |v(x)^2 - c(x)^2|}}\right)$$

où

$$v(x) = \Big(\sum_{j=1}^{3} (b_j(x) - n_j(x))^2\Big)^{1/2}.$$

Dans l'article précédent nous avons considéré les problèmes mixtes dans un domaine de $\boldsymbol{R}^2$ qui est l'extérieur d'un objet convexe. Comme nous l'avons remarqué la supposition sur le domaine joue un rôle très important. Nous voulons souligner encore que le problème (P) n'est plus bien posé au sens de C^∞ en général sous les condition (1. 1), (1. 2) et (1. 3) au cas où le domaine n'est pas l'extérieur d'un objet convexe. A propos de ce remarque, nous avons considéré dans [3] les propriétés fondamentales des problèmes mixtes pour l'équation des ondes dans un domaine de $\boldsymbol{R}^3$ qui est l'intérieur d'une surface fermée.

§ 2. Réduction du Problème

Soit $\varphi(x)$ une fonction à valeurs réelles vérifiant $\nabla\varphi\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^3)$ et $\sup_{x\in\boldsymbol{R}^3}|\nabla\varphi(x)|<1$.

Posons

$$A_\varphi(\partial/\partial t,\ \partial/\partial x)=(1-(\nabla\varphi)^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2\nabla\varphi\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial t}-\Delta-\Delta\varphi\frac{\partial}{\partial t}$$

$$B_\varphi(\partial/\partial t,\partial/\partial x)=\sum_{j=1}^{3}b_j(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t}\right)+c(x)\frac{\partial}{\partial t}+d(x)$$

et considérons le problème mixte

$$(\mathrm{P}_\varphi)\qquad\begin{cases}A_\varphi u=f(x,t) & \text{dans}\quad \Omega\times(0,\infty)\\ B_\varphi u=g(x,t) & \text{sur}\quad \Gamma\times(0,\infty)\\ u(x,0)=u_0(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x)\,. & \end{cases}$$

Afin de montrer la résolubilité du problème (P_φ) nous considérons le problème au bord avec un paramètre $p=ik+\mu$, $\mu>0$

$$(2.1)\qquad\begin{cases}A_\varphi(p,\partial/\partial x)w(x)=0 & \text{dans}\quad\Omega\\ B_\varphi(p,\partial/\partial x)w(x)=h(x) & \text{sur}\quad\Gamma.\end{cases}$$

L'important est d'obtenir les estimations à priori des solutions de (2. 1) pour tout p à partie imaginaire suffisamment grande.

Noter que le problème au bord

$$(2.2)\qquad\begin{cases}A_\varphi(p,\partial/\partial x)u(x)=0 & \text{dans}\quad\Omega\\ u(x)=g(x) & \text{sur}\quad\Gamma\end{cases}$$

admet une solution unique dans $\bigcap_{m\geq0}H^m(\Omega)$ pour toute $g(x)\in C^\infty(\Gamma)$ et qu'il a lieu l'estimation

$$\sum_{l+l'\leq m}|p|^l\|w(x)\|_{l'}\leq C_{m,\varphi}\|g\|_{m+1}$$

lorsque $\mathrm{Re}\, p=\mu\geqq\mu_\varphi$, μ_φ une certaine constante.[1)]

Désignons par $U_\varphi(p, g:x)$ la solution $u(x)$ de (2.2) pour la donnée $g(x)\in C^\infty(\Gamma)$ et définissons $\mathscr{B}_\varphi(p)$ par

$$\mathscr{B}_\varphi(p)g=B_\varphi(p, \partial/\partial x)U_\varphi(p, g:x)|_\Gamma.$$

Alors $\mathscr{B}_\varphi(p)$ est une application linéaire de $C^\infty(\Gamma)$ dans $C^\infty(\Gamma)$.

Concernant l'opérateur $\mathscr{B}_\varphi(p)$ admettons le

Théorème 2.1. *Nous nous plaçons dans l'hypothèse sur Ω faite dans le théorème de l'introduction. Alors pour* $\mathrm{Re}\, p\geqq\mu_\varphi$ *on a*

$$-\mathrm{Re}(\mathscr{B}_\varphi(p)g, g)_m\geqq(\mu c_0(\varphi)-C)\|g\|_m^2-C_{\varphi,m}\|g\|_0^2 \tag{2.3}$$

pour toute $g\in C^\infty(\Gamma)$, *où*

$$c_0(\varphi)=\inf_{x\in\Gamma}(\sqrt{1-|\varphi_s|^2}-v|\varphi_s|-c)$$

$$\varphi_s=\nabla\varphi-(\nabla\varphi\cdot n)n$$

et $C_{\varphi,m}$ est une constante indépendante de p et de g.

Posons $b_j'(x)=2n_j(x)-b_j(x)$, $d'(x)=\overline{d(x)}+\sum_{j=1}^3\frac{\partial}{\partial x_j}(n_j(x)-b_j(x))$ et puis

$$B'=\sum_{j=1}^3 b_j'(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+c(x)\frac{\partial}{\partial t}+d'(x).$$

Alors il a lieu

$$\begin{aligned}(\!(A_\varphi(p, \partial/\partial x)V, W)\!)_0-(\!(V, A_{-\varphi}(\bar{p}, \partial/\partial x)W)\!)_0&\\ =(B_\varphi(p, \partial/\partial x)V, W)_0-(V, B'_{-\varphi}(\bar{p}, \partial/\partial x)W)_0&\end{aligned} \tag{2.4}$$

pour toutes $V, W\in C^\infty(\bar{\Omega})\cap H^2(\Omega)$. Donc si l'on définit $\mathscr{B}'_\varphi(p)$ par

$$\mathscr{B}'_\varphi(p)g=\mathscr{B}'_\varphi(p, \partial/\partial x)U_\varphi(p, g:x)|_\Gamma,$$

on déduit de (2.4)

$$(\mathscr{B}_\varphi(p)g, h)_0=(g, \mathscr{B}'_{-\varphi}(\bar{p})h)_0, \quad \forall g, h\in C^\infty(\Gamma).$$

D'après le théorème 2.1 les relations

[1)] Voir, par exemple, Sakamoto [11]. $\|\cdot\|_m$ et $|\cdot|_m$ désignent les normes des espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $H^m(\Gamma)$ respectivement.

$$\sum_{j=1}^{3} b'_j(x) n_j(x) = 1$$

$$\sum_{j=1}^{3} (b'_j(x) - n_j(x))^2 = \sum_{j=1}^{3} (b_j(x) - n_j(x))^2$$

résultent qu'il a lieu l'estimation

$$-\mathrm{Re}(\mathscr{B}'_{-\varphi}(p)h, h)_m \geq (\mu c_0(\varphi) - C)\|h\|_m^2 - C'_{\varphi,m}\|h\|_0^2.$$

L'inégalité

$$\sup_{x\in\Gamma} |\varphi_s| < \inf_{x\in\Gamma} (-c(x)v(x) + \sqrt{1+|v(x)^2 - c(x)^2|})(1+v(x)^2)^{-1} \tag{2.5}$$

entraîne $c_0(\varphi) > 0$. Par conséquent, on peut démontrer selon le raisonnement analogue à celui fait dans §3 de [4] que, lorsque $\varphi(x)$ vérifie (2.5), le problème (2.1) admet une solution unique $w(x)$ dans $\bigcap_{m\geq 0} H^m(\Omega)$ pour $h(x) \in C^\infty(\Gamma)$ si $\mathrm{Re}\, p \geq \tilde{\mu}_\varphi$, où $\tilde{\mu}_\varphi$ est une certaine constante. Désignons par $F(p, h: x)$ la solution de (2.1) pour la donnée $h(x) \in C^\infty(\Gamma)$. Alors on a

$$\sum_{l+l'\leq m} |p|^l \|F(p, h: x)\|_{l'} \leq C_{m,\varphi}\|h\|_{m+1}. \tag{2.6}$$

Alors on déduit immédiat des faits au-dessus que le problème

$$\begin{cases} A_\varphi(\partial/\partial t, \partial/\partial x) w(x, t) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times (-\infty, \infty) \\ B_\varphi(\partial/\partial t, \partial/\partial x) w(x, t) = h(x, t) & \text{sur} \quad \Gamma \times (-\infty, \infty) \end{cases}$$

admet une solution unique $w(x, t)$ dans $H_\mu^m(\Omega) \times (-\infty, \infty))$ pour la donnée au bord $h(x, t) \in H_\mu^{m+1}(\Gamma \times (-\infty, \infty))$ si $\mu \geq \tilde{\mu}_\varphi$, $m \geq 2$. Et plus on peut montrer que

$$\mathrm{supp}\, h(x, t) \subset \Gamma \times [t_0, \infty)$$

entraîne

$$\mathrm{supp}\, w(x, t) \subset \Omega \times [t_0, \infty).$$

Donc on a le

Théorème 2.2. *Soit $\varphi(x)$ une fonction à valeurs réelles vérifiant $\nabla\varphi \in \mathscr{B}(\boldsymbol{R}^3)$, $\sup_{x\in\boldsymbol{R}^3} |\nabla\varphi(x)| < 1$ et (2.5). Pour $u_0, u_1 \in H^{m+2}(\Omega)$, $f \in H_\mu^{m+2}(\Omega \times (0, \infty))$, $g \in H_\mu^{m+2}(\Gamma \times (0, \infty))$ le problème mixte* (P_φ) *admet une solution unique $u(x, t)$ dans $H_\mu^m(\Omega \times (0, \infty))$ si u_0, u_1, f et g satisfont à* *la condition de compatibilité d'ordre* $m\geq 2$ *et si* $\mu\geq\tilde{\mu}_{\varphi}$. *Lorsque* $u_0=u_1=0$ *et* $f(x, t)=0, g(x, t)=0$ *pour* $0\leq t\leq t_0$ *on a* $u(x, t)=0$ *pour* $0\leq t\leq t_0$.

Supposons que (1.3) ait lieu. Le théorème 2.2 montre que le problème (P) est bien posé au sens de C^∞ puisque une fonction $\varphi(x)\equiv 0$ satisfait à (2.5). Démontrons que la vitesse propagatrice du problème (P) est au plus (1.4). D'abord considérons l'unicité locale des solutions de (P_φ) pour φ vérifiant (2.5).

Soit $x_0\in\Gamma$. Supposons que $u(x, t)\in C^\infty(\bar{\Omega}\times[0, \infty))$ est une solution de (P_φ) et que pour un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 dans $\boldsymbol{R}^3$ et $t_0>0$

$$\begin{aligned} u_0(x)=u_1(x)&=0 && \text{dans} \quad \bar{\Omega}\cap\mathcal{U} \\ f(x, t)&=0 && \text{dans} \quad (\bar{\Omega}\cap\mathcal{U})\times[0, t_0] \\ g(x, t)&=0 && \text{sur} \quad (\Gamma\cap\mathcal{U})\times[0, t_0]. \end{aligned}$$

Prenons une fonction $\psi(x)$ de telle façon que

$$\begin{aligned} \psi(x)&=|x-x_0|^2 && \text{dans} \quad \mathcal{U} \\ \psi(x)&\geq c>0 && \text{dans} \quad C\mathcal{U} \end{aligned}$$

et que $\varphi+\psi$ satisfasse à (2.5). C'est bien possible en prenant $\mathcal{U}$ suffisamment petit. Après le changement des variables

$$\begin{cases} t'=t+\psi(x) \\ x'=x \end{cases}$$

la fonction $u(x', t')$ définie par

$$\tilde{u}(x', t')=\tilde{u}(x, t+\psi(x))=u(x, t) \qquad \text{pour} \quad (x, t)\in(\bar{\Omega}\cap\mathcal{U})\times[0, t_0]$$

et $\tilde{u}(x', t')=0$ pour (x', t') tel que $t'\leq\psi(x')$. Alors on voit que $\tilde{u}(x', t')\in C^2(\bar{\Omega}\times[0, t_0])$ et qu'elle vérifie

$$\begin{aligned} A_{\varphi+\psi}(\partial/\partial t', \partial/\partial x')\tilde{u}&=0 && \text{pour} \quad t'\leq t_0 \\ B_{\varphi+\psi}(\partial/\partial t', \partial/\partial x')\tilde{u}&=0 && \text{pour} \quad t'\leq t_0 \\ \tilde{u}(x', 0)=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t'}(x', 0)&=0. \end{aligned}$$

Puisque $\varphi+\psi$ satisfait à la condition du théorème 2.2 il se résulte que $\tilde{u}(x', t')$ s'annule pour $t'\leq t_0$, d'où on déduit que $u(x, t)=0$ dans

$(\bar{\Omega}\cap\mathcal{U}')\times[0,t_0']$ pour un voisinage $\mathcal{U}'$ de l'origine et $t_0'>0$. Il est évident que l'on a l'unicité locale des solutions dans un voisinage de $x_0\notin\Gamma$. Donc on a la

Proposition 2.3. *A propos du problème mixte* (P_φ), *si* φ *satisfait à* (2.5) *il a lieu l'unicité locale des solutions.*

Nous allons considérer la vitesse propagatrice de (P). Posons

$$v_0=\max(1,\sup_{x\in\Gamma}(1+v^2)(-cv+\sqrt{1+|v^2-c^2|})^{-1})$$

et

$$\Lambda(x_0,t_0)=\{(x,t)\,;\,x\in\bar{\Omega},\,|x-x_0|\leq v_0(t_0-t)\}$$

pour $(x_0,t_0)\in\bar{\Omega}\times[0,\infty)$.

Supposons que $u(x,t)\in C^\infty(\bar{\Omega}\times(-\infty,\infty))$ vérifie

$$(2.7)\qquad\begin{cases}\square u=0 & \text{dans}\quad \bar{\Omega}\times(-\infty,\infty)\cap\Lambda(x_0,t_0)\\ Bu=0 & \text{sur}\quad \Gamma\times(-\infty,\infty)\cap\Lambda(x_0,t_0)\\ u(x,t)=0 & \text{dans}\quad \Lambda(x_0,t_0)\cap\{t\leq 0\}.\end{cases}$$

Posons

$$\varphi_\gamma(x)=\sqrt{\gamma+\frac{1}{v_0^2}|x-x_0|^2}-t_0$$

$$\Lambda_\gamma(x_0,t_0)=\{(x',t')\,;\,t'=t+\varphi_\gamma(x),\,x'=x,\,(x,t)\in\Lambda(x_0,t_0)\}$$

$$G_\gamma(x_0,t_0)=\Lambda_\gamma(x_0,t_0)\cap(\Gamma\times(-\infty,\infty))$$

et

$$\Omega_\gamma=\{x\in\Omega,\,\varphi_\gamma(x)\leq 0\}$$

pour $0\leq\gamma\leq t_0^2$.

Par le changement des variables

$$\begin{cases}x'=x\\ t'=t+\varphi_\gamma(x),\end{cases}$$

(2.7) se transforme à

$$\begin{cases}A_{\varphi_\gamma}u_\gamma(x',t')=0 & \text{dans}\quad \Lambda_\gamma(x_0,t_0)\\ B_{\varphi_\gamma}u_\gamma(x',t')=0 & \text{sur}\quad G_\gamma(x_0,t_0),\end{cases}$$

où $u_\gamma(x', t') = u_\gamma(x, t+\varphi_\gamma(x)) = u(x, t)$.

Supposons que $u_\gamma(x', 0) = 0$ dans $\bar{\Omega}_\gamma$ pour $0 < a \leq \gamma \leq t_0^2$. Alors nous avons

$$(2.8)\quad \begin{cases} A_{\varphi_a} u_a(x', t') = 0 & \text{dans} \quad \Lambda_a(x_0, t_0) \\ B_{\varphi_a} u_a(x', t') = 0 & \text{sur} \quad G_a(x_0, t_0) \\ u_a(x', 0) = \dfrac{\partial u_a}{\partial t'}(x', 0) = 0 & \text{dans} \quad \bar{\Omega}_a. \end{cases}$$

En tenant compte que $\varphi_\gamma(x)$ satisfait à (2.5) si $\gamma > 0$ l'application de la proposition 2.3 à (2.8) déduit que $\tilde{u}_a(x', t') = 0$ dans $\overline{\Omega_{a-\varepsilon}} \times [0, \varepsilon]$, où ε est une constante positive. Cela signifie que $u_\gamma(x', 0) = 0$ pour tout $a - \varepsilon \leq \gamma \leq t_0^2$. De cette façon on montre que $u_\gamma(x', 0) = 0$ pour tout $0 < \gamma \leq t_0^2$, à savoir, $u(x, t) = 0$ dans $\Lambda(x_0, t_0)$.

Donc nous avons démontré que la vitesse maximume du problème mixte (P) est majorée par (1.4).

D'autre part, on peut montrer que la vitesse maximume est au moins (1.4). Ça sera démontré dans § 9, où nous allons démontrer aussi qu'il faut la condition (1.3) pour que (P) soit bien posé au sens de C^∞ et que représente un phénomène avec une vitesse finie.

Dans les paragraphes 3–8 nous démontrons le théorème 2.1.

§ 3. Décomposition des Fonctions sur Γ

Nous allons construire une fonction $u(x)$ vérifiant (2.2) asymptotiquement par rapport à $|p|$.

s désigne un point sur Γ. Supposons que l'origine 0 appartient à Γ et que $n(0) = (0, 0, 1)$. Nous commençons la construction de $u(x)$ par une décomposition de $g(x) \in C^\infty(\Gamma)$ dont le support est contenu dans un voisinage suffisamment petit de l'origine.

Supposons que Γ est représentée dans un voisinage Γ_0 de l'origine comme

$$s(\sigma) = (s_1(\sigma_1, \sigma_2), s_2(\sigma_1, \sigma_2), s_3(\sigma_1, \sigma_2))$$

par les paramètres $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in I_\sigma = [-\sigma_{10}, \sigma_{10}] \times [-\sigma_{20}, \sigma_{20}]$ de telle façon que

$$\frac{\partial s}{\partial \sigma_1}\cdot\frac{\partial s}{\partial \sigma_2}=0 \qquad \forall \sigma\in I_\sigma$$

$$s(0)=0$$

$$\frac{\partial s}{\partial \sigma_1}(0)=(1,0,0), \quad \frac{\partial s}{\partial \sigma_2}(0)=(0,1,0).$$

Désignons $\left(\frac{\partial\varphi(s)}{\partial\sigma_1}, \frac{\partial\varphi(s)}{\partial\sigma_2}\right)_{\sigma=0}$ par φ^0. Prenons des fonctions à valeurs réelles $\chi_j(l)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^1)$, $j=1,2,3$ de façon que

$$\chi_1(l)=\begin{cases}1 & l<1-2\alpha_0\\ 0 & l>1-\alpha_0\end{cases}$$

$$\chi_2(l)=\begin{cases}1 & |l-1|\leq\alpha_0\\ 0 & |l-1|\geq 2\alpha_0\end{cases}$$

$$\chi_3(l)=\begin{cases}1 & l>1+2\alpha_0\\ 0 & l<1+\alpha_0\end{cases}$$

et que

$$\sum_{j=1}^{3}\chi_j(l)^2=1 \qquad \text{pour tout} \quad l\in\boldsymbol{R},$$

où α_0 est une constante positive qui sera déterminée suffisamment petite plus tard. Soit Γ_1 un voisinage de l'origine tel que $\overline{\Gamma}_1\subset\Gamma_0$. Alors pour toute $g(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_1)$ on a

$$g(s(\sigma))=\int_{\boldsymbol{R}^2}d\xi\int_{I_\sigma}d\sigma'\exp\{i\langle\sigma-\sigma',\xi\rangle\}\,g(s(\sigma')).$$

Définissons V_jg, $j=1,2,3$ par

$$V_jg(s(\sigma))=\lambda(s(\sigma))\int_{\boldsymbol{R}^2}d\xi\int_{I_\sigma}d\sigma'\exp\{i\langle\sigma-\sigma',\xi\rangle\}\,\chi_j(\xi/k+\varphi^0)^2 g(s(\sigma'))$$

où $\lambda(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$ vérifiant $\lambda(s)=1$ sur Γ_1. Alors il est évident que

$$\sum_{j=1}^{3}V_jg(s)=g(s) \qquad \text{pour toute} \quad g\in\mathcal{D}(\Gamma_1). \tag{3. 1}$$

En posant $\xi=k\{(1+\alpha)\xi'-\varphi^0\}$, $\alpha\geq-1$, $\xi'\in\Sigma=\{(\xi_1,\xi_2)\,;\,\xi_1^2+\xi_2^2=1\}$, on a

(3. 2) $\quad V_jg(s(\sigma))=\lambda(s(\sigma))\int_{\Sigma}d\xi'\int_{-1}^{\infty}d\alpha\int_{I_\sigma}d\sigma'\exp[ik\{(1+\alpha)\langle\sigma-\sigma',\xi'\rangle$

$$-\langle\sigma-\sigma',\varphi^0\rangle\}]\chi_j(1+\alpha)^2k^2(1+\alpha)g(s(\sigma')).$$

D'après la définition de $\chi_2(l)$

$$V_2g(s(\sigma))=\lambda(s(\sigma))\int_\Sigma d\xi'\int_{I_\alpha}d\alpha\int_{I_\sigma}d\sigma'\exp[ik\{(1+\alpha)\langle\sigma-\sigma',\xi'\rangle$$
$$-\langle\sigma-\sigma',\varphi^0\rangle\}]\chi_2(1+\alpha)^2k^2(1+\alpha)g(s(\sigma')),$$

où $I_\alpha=[-2\alpha_0,2\alpha_0]$.

Nous construisons $U_j(p,g:x)$, $j=1,2,3$, des fonctions satisfaisant asymptotiquement à

$$\begin{cases} A_\varphi U_j(p,g:x)=0 & \text{dans } \Omega \\ U_j(p,g:x)=V_jg & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

La construction de U_2 est plus difficile que les autres. Nous commençons à construire U_2 par l'introduction $\theta_0(x,\eta)$, $\rho_0(x,\eta)$ des fonctions définies dans $\bar{\Omega}$ avec un paramètre $\eta\in\Sigma$. Pour $\eta\in\Sigma$ posons

$$\mathscr{C}_\eta=\{\sigma;\ (\eta_1\sigma_1+\eta_2\sigma_2)=-(-\eta_2\sigma_1+\eta_1\sigma_2)^2\}$$

et prenons une fonction $\tilde{f}(\sigma,\eta)$ définie dans un voisinage de $\sigma=0$ de telle façon que

$$\tilde{f}(\sigma,\eta)=0 \qquad \text{sur} \quad \mathscr{C}_\eta$$
$$\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\sigma_1},\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\sigma_2}\right)\Big|_{\sigma=0}=\eta$$

et

$$\left(\frac{\partial s}{\partial\sigma_1}\right)^{-2}\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial\sigma_2}\right)^{-2}\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\sigma_2}\right)^2=1.$$

Le théorème de Hamilton-Jacobi assure l'existence unique de telle fonction $\tilde{f}$. En choisissant Γ_0 suffisamment petit, une fonction $f(s,\eta)$ définie par $f(s(\sigma),\eta)=\tilde{f}(\sigma,\eta)$ appartient à $C^\infty(\Gamma_0)$ pour tout $\eta\in\Sigma$ et satisfait à

$$(\nabla f(s,\eta))^2=1 \qquad \text{dans} \quad \Gamma_0$$

et à

$$(\nabla f)(0,\eta)=\eta_1\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\eta_2\frac{\partial}{\partial\sigma_2}.$$

Puisque la courbure Gaussienne de Γ est strictement positive, en suivant le raisonnement de Ludwig [7], on peut construire des fonctions $\theta_0(x,\eta)$, $\rho_0(x,\eta)\in C^\infty(\mathcal{U}\times\Sigma)$, où $\mathcal{U}$ est un voisinage de l'origine dans $\boldsymbol{R}^3$, avec les propriétés suivantes:

$$(3.3)\qquad \begin{cases} (\nabla\theta_0)^2+\rho_0(\nabla\rho_0)^2=1 & \text{dans}\quad \bar{\Omega}\cap\mathcal{U} \\ \nabla\theta_0\cdot\nabla\rho_0=0 & \text{dans}\quad \bar{\Omega}\cap\mathcal{U} \\ \theta_0(s,\eta)=f(s,\eta) & \text{sur}\quad \Gamma\cap\mathcal{U}. \end{cases}$$

Remarquons qu'on a

$$(3.4)\qquad \left.\frac{\partial\rho_0(x,\eta)}{\partial n}\right|_{x=0}=\left(2\sum_{j=1}^{2}\frac{\eta_j^2}{R_j}\right)^{1/3}$$

d'après la méthode de construction de θ_0 et de ρ_0, où R_1 et R_2 sont les courbures principales de Γ en $s=0$.

Désignons par $L^+(s,\eta)$ $(L^-(s,\eta))$ pour $s\in\Gamma_0$ et $\eta\in\Sigma$ une demi-droite s'etendant de s à la direction $\nabla\theta_0(s,\eta)$ $(-\nabla\theta_0(s,\eta))$ et par $L(s,\eta)$ une droite $L^+(s,\eta)\cup L^-(s,\eta)$. Si l'on corresponde pour $x\in\bar{\Omega}$ un pair $\{s,r\}\in\Gamma\times\overline{\boldsymbol{R}^1_+}$ de façon que x soit sur la normale de Γ passant s et que la distance entre x et s soit r, on a une application bijective de $\bar{\Omega}$ dans $\Gamma\times\overline{\boldsymbol{R}^1_+}$ d'après la convexité stricte de $\mathcal{O}$. Nous désignons par $\{s,r\}$ un point $x\in\bar{\Omega}$ selon la nécessité. Et nous posons

$$\Gamma_j\times[r_1,r_0]=\{x;\,x=\{s,r\},\ s\in\Gamma_j,\ r_1\leq r\leq r_0\},\ j=0,1.$$

En posant

$$\psi_0^\pm(x,\eta)=\theta_0(x,\eta)\pm\frac{2}{3}\rho_0(x,\eta)^{3/2}$$

on a $\psi_0^\pm(x,\eta)\in C^\infty(\Omega\cap\mathcal{U})$ et

$$(3\cdot5)\qquad |\nabla\psi_0^\pm|^2=1\qquad \text{dans}\quad \bar{\Omega}\cap\mathcal{U}.$$

Notons que $\psi_0^\pm(x,\eta)$ peut être prolongée à une fonction définie dans $\bigcup_{s\in\Gamma_0}L^+(s,\eta)$ et vérifiant (3.5). A propos de ces θ_0, ρ_0 on a le

Lemme 3.1. *Soient $\gamma(x)$, $\delta(x)\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^3)$. Le système des équations*

$$2\nabla\theta_0\cdot\nabla f_0+2\rho_0\nabla\rho_0\cdot\nabla f_1+(\nabla\rho_0)^2f_1+\rho_0\delta(x)f_1+\gamma(x)f_0=h_0$$

$$\textit{dans}\quad \bar{\Omega}\cap\mathcal{U}$$

$$2\nabla\rho_0\cdot\nabla f_0+2\nabla\theta_0\cdot\nabla f_1+\delta(x)f_0+\gamma(x)f_1=h_1 \qquad \textit{dans} \quad \bar{\Omega}\cap\mathcal{U}$$

$$f_0(s)=m(s) \qquad \textit{sur} \quad \Gamma_0$$

ademt une solution unique $\{f_0, f_1\}\in C^\infty(\bar{\Omega}\cap\mathcal{U})$ *pour les données* $h_0, h_1\in C^\infty(\bar{\Omega}\cap\mathcal{U})$, $m(s)\in C^\infty(\Gamma_0)$, *et l'application* $\{h_0, h_1, m\}\to\{f_0, f_1\}$ *est continue de* $C^\infty(\bar{\Omega}\cap\mathcal{U})\times C^\infty(\bar{\Omega}\cap\mathcal{U})\times C^\infty(\Gamma_0)$ *dans* $C^\infty(\bar{\Omega}\cap\mathcal{U})\times C^\infty(\bar{\Omega}\cap\mathcal{U})$. *Et plus*

$$\bigcup_{j=0}^{1}\operatorname{supp} h_j\subset\bigcup_{\substack{s\in\operatorname{supp} m\\ \eta\in\Sigma}}L(s,\eta)$$

entaîne

$$\bigcup_{j=0}^{1}\operatorname{supp} f_j\subset\bigcup_{\substack{s\in\operatorname{supp} m\\ \eta\in\Sigma}}L(s,\eta).$$

Donc selon le raisonnement de § 5 de [4] nous pouvons construire des fonctions $\theta(x,\eta,\beta)$, $\rho(x,\eta,\beta)$ définies pour $x\in\mathcal{U}$, $\eta\in\Sigma$, $\beta\in I_\beta=[-\beta_0,\beta_0]$ et vérifiant

$$(3.6)\quad \begin{cases}(\nabla\theta)^2+\rho(\nabla\rho)^2\equiv 1 \quad (\operatorname{mod}\beta^\infty) \quad \text{dans } \mathcal{U}\cap\bar{\Omega}\\ \nabla\theta\cdot\nabla\rho\equiv 0 \quad (\operatorname{mod}\beta^\infty) \quad \text{dans } \bar{\Omega}\cap\mathcal{U}\\ \rho=-\beta \quad \text{sur } \Gamma\cap\mathcal{U}\\ \theta(s,\eta,0)=\theta_0(s,\eta) \quad s\in\Gamma\cap\mathcal{U},\ \eta\in\Sigma.\end{cases}$$

Alors par le processus de la construction on voit que

$$(3.7)\qquad (\nabla\theta)(0,\eta,0)=\eta_1\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+\eta_2\frac{\partial}{\partial\sigma_2}$$

$$(3\cdot 8)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\beta\partial\sigma_j}(0,\eta,0)=\eta_j\Big(2\sum_{j=1}^{2}\frac{\eta_j^2}{R_j}\Big)^{1/3}.$$

Posons

$$F(\sigma,\sigma',\eta,\beta,\xi',\alpha)=\theta(s(\sigma),\eta,\beta)-\theta(s(\sigma'),\eta,\beta)$$
$$-\varphi(s(\sigma))+\varphi(s(\sigma'))+\langle\sigma-\sigma',\varphi^0\rangle-(1+\alpha)\langle\sigma-\sigma',\xi'\rangle$$

et

$$F(\sigma,\sigma',\eta,\beta,\xi',\alpha)=\sum_{j=1}^{2}(\sigma_j-\sigma_j')F_j(\sigma,\sigma',\eta,\beta,\xi',\alpha)$$

$$F_3(\sigma, \sigma', \eta, \beta, \xi', \alpha) = \eta_1^2 + \eta_2^2 - 1.$$

Alors on a d'après (3.8)

$$\left.\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(\eta_1, \eta_2, \beta)}\right|_{\substack{\beta=\alpha=0 \\ \sigma=\sigma'=0 \\ \eta=\xi'}} = \text{dét}\left[\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\eta_1\partial\sigma_1} & \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\eta_2\partial\sigma_1} & \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\beta\partial\sigma_1} \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\eta_1\partial\sigma_2} & \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\eta_2\partial\sigma_2} & \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\beta\partial\sigma_2} \\ \eta_1 & \eta_2 & 0 \end{array}\right]_{\substack{\sigma'=0 \\ \beta=0}}$$

$$= -(\nabla\rho_0(0, \eta, 0))^2 \neq 0.$$

Il est évident qu'il a lieu

$$F_j(0, 0, \eta, 0, \eta, 0) = 0, \quad \forall\eta \in \Sigma, \quad j = 1, 2, 3.$$

Donc on trouve des fonctions $\eta_j(\sigma, \sigma', \xi', \alpha)$, $j=1, 2$ et $\beta(\sigma, \sigma', \xi', \alpha)$ définies sur $I_\sigma \times I_\sigma \times \Sigma \times I_\alpha$ telles que

$$F_j(\sigma, \sigma', \eta, \beta, \xi', \alpha) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \forall(\sigma, \sigma', \xi', \alpha) \in I_\sigma \times I_\sigma \times \Sigma \times I_\alpha$$

en choisissant I_σ, I_α petits s'il est nécessaire. Cela signifie

$$\theta(s(\sigma), \eta, \beta) - \theta(s(\sigma'), \eta, \beta) - \varphi(s(\sigma)) + \varphi(s(\sigma'))$$

$$= -\langle\sigma - \sigma', \varphi^0\rangle + (1+\alpha)\langle\sigma - \sigma', \xi'\rangle,$$

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1.$$

Puisque $\eta(0, 0, \xi', 0) = \xi'$, $\beta(0, 0, \xi', 0) = 0$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial\alpha}(0, 0, \xi', 0)$ $= (\nabla\rho(0, \eta, 0))^{-2}$ il existe la fonction inverse de

$$\eta(\sigma, \sigma', \xi', \alpha) = \eta$$

$$\beta(\sigma, \sigma', \xi', \alpha) = \beta$$

pour $\eta \in \Sigma$, $\beta \in I_\beta$. Prenons $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$ de telle façon qu'il ait lieu

$$I_\beta \subset \{\beta(\sigma, \sigma', \xi', \alpha) ; \alpha \in I_\alpha\}$$

pour tout $(\sigma, \sigma', \xi) \in I_\sigma \times I_\sigma \times \Sigma$. Désignons cette fonction inverse par

$$\alpha = \alpha(\sigma, \sigma', \eta, \beta), \quad \xi' = \xi'(\sigma, \sigma', \eta, \beta).$$

Alors il a lieu

$$\left.\frac{D(\xi', \alpha)}{D(\eta, \beta)}\right|_{\substack{\sigma=\sigma'=0 \\ \eta=\xi' \\ \alpha=\beta=0}} = (\nabla\rho(0, \eta, 0))^2.$$

Donc on a

$$V_2 g(s(\sigma)) = \lambda(\sigma)\int_{I_\alpha} d\alpha \int_\Sigma d\xi' \int_{I_\sigma} d\sigma' \exp[ik\{-\langle\sigma-\sigma',\varphi^0\rangle + (1+\alpha)\langle\sigma-\sigma',\xi'\rangle\}]\chi_2(1+\alpha)^2 k^2(1+\alpha)g(s(\sigma'))$$

$$= \lambda(\sigma)\int_{I_\beta} d\beta \int_\Sigma d\eta \int_{I_\sigma} d\sigma' \exp[ik\{\theta(s(\sigma),\eta,\beta) - \theta(s(\sigma'),\eta,\beta) - \varphi(s(\sigma)) + \varphi(s(\sigma'))\}]\chi_2(1+\alpha(\sigma,\sigma',\eta,\beta))^2 \times k^2(1+\alpha(\sigma,\sigma',\eta,\beta))\frac{D(\xi',\alpha)}{D(\eta,\beta)}g(s(\sigma'))\,.$$

Prenons des fonctions à valeurs réelles $\upsilon_j(l)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^1)$, $j=1,2,3$ de telle façon que

$$\upsilon_1(l) = \begin{cases} 1 & l<-2 \\ 0 & l>-1 \end{cases},\quad \upsilon_2(l) = \begin{cases} 1 & |l|\leq 1 \\ 0 & |l|\geq 2 \end{cases},\quad \upsilon_3(l) = \begin{cases} 1 & l>2 \\ 0 & l<1 \end{cases}$$

et que $\sum_{j=1}^{3}\upsilon_j(l)^2=1$.

Définissons V_{2j}, $j=1,2,3$ par

$$V_{2j}g(s(\sigma)) = \lambda(\sigma)\int_{I_\beta} d\beta \int_\Sigma d\eta \int_{I_\sigma} d\sigma' \exp[ik\{\theta(s(\sigma),\eta,\beta) - \theta(s(\sigma'),\eta,\beta) - \varphi(s(\sigma)) + \varphi(s(\sigma'))\}]\chi_2(1+\alpha)^2(1+\alpha) \times k^2\upsilon_j(k^\varepsilon\beta)^2\frac{D(\xi',\alpha)}{D(\eta,\beta)}g(s(\sigma'))\,,$$

où ε est une constante positive, qui sera déterminée plus tard.

Il est évident que

$$V_2 g = \sum_{j=1}^{3} V_{2j} g\,.$$

D'après la définitions de χ_2 et de υ_2 il a lieu

$$\chi_2(1+\alpha(\sigma,\sigma',\eta,\beta))^2\upsilon_2(k^\varepsilon\beta)^2 = \upsilon_2(k^\varepsilon\beta)^2,\quad \forall\beta\in I_3$$

pour $\boldsymbol{k}$ suffisamment grand.

Nous allons construire $U_{2j}(p,g:x)$, $j=1,2,3$ vérifiant asymptotiquement par rapport à $|p|$

$$\begin{cases} A_\varphi(p,\partial/\partial x)U_{2j}(p,g;x)=0 & \text{dans } \Omega \\ U_{2j}(p,g:x)|_\Gamma = V_{2j}g(x) & \text{sur } \Gamma\,. \end{cases}$$

§ 4. Construction de U_{22}

D'abord considérons un problème aux limites avec une donnée au bord oscillatoire

$$(4.1)\qquad \begin{cases} A_\varphi(p, \partial/\partial x)u(x) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x) = \exp\{ik(\theta(s, \eta, \beta) - \varphi(s))\}v(s) & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où $v(s) \in \mathscr{D}(\Gamma_1)$. Nous cherchons une solution asymptotique de (4. 1) sous la forme

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} u(x: p, \eta, \beta) &= \exp\{ik(\nu(x, \eta, \beta, p) - \varphi(x))\} \\ &\times \frac{1}{H(k^{2/3}\hat{\zeta}(x, \eta, \beta, p))} \Big\{ H(k^{2/3}\zeta(x, \eta, \beta, p))g_0 \\ &+ \frac{1}{ik^{1/3}} H'(k^{2/3}\zeta(x, \eta, \beta, p))g_1 \Big\} \end{aligned}$$

où

$$H(z) = Ai(-z) + i\,Bi(-z)$$

et $\hat{\zeta}(x, \eta, \beta, p)$ est définie par $\zeta(s, \eta, \beta, p)$ en désignant $x = \{s, r\}$. Appliquer A_φ à u de (4. 2).

$$\begin{aligned} &\exp\{-ik(\nu-\varphi)\} \cdot H(k^{2/3}\hat{\zeta})^{-1} A_\varphi(p, \partial/\partial x)u \\ &= H(k^{2/3}\zeta)\Big[\Big\{p^2 - (ik)^2\Big\{\Big(\nabla\nu + \frac{\mu}{ik}\nabla\varphi - \frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)^2 + \zeta(\nabla\zeta)^2\Big\}\Big\}g_0 \\ &\quad - (ik)^2\Big(\nabla\nu + \frac{\mu}{ik}\nabla\varphi - \frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)\zeta\nabla\zeta\cdot g_1 \\ &\quad - ik\Big\{2\Big(\nabla\nu + \frac{\mu}{ik}\nabla\varphi - \frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)\nabla g_0 + \nabla\Big(\nabla\nu + \frac{\mu}{ik}\nabla\varphi \\ &\quad - \frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)g_0 + 2\zeta\nabla\zeta\cdot\nabla g_1 + \nabla(\zeta\nabla\zeta)g_1\Big\} - \Delta g_0\Big] \\ &\quad + \frac{1}{ik^{1/3}}H'(k^{2/3}\zeta)\Big[\Big\{p^2 - (ik)^2\Big\{\Big(\nabla\nu + \frac{\mu}{ik}\nabla\varphi - \frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)^2 \\ &\quad + \zeta(\nabla\zeta)^2\Big\}\Big\}g_1 - (ik)^2\Big(\nabla\nu + \frac{\mu}{ik}\nabla\varphi - \frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)\nabla\zeta\cdot g_0 \end{aligned}$$

$$-ik\Big\{2\Big(\nabla\nu+\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)\nabla g_1+\nabla\Big(\nabla\nu+\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi$$

$$-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)g_1+2\nabla\zeta\cdot\nabla g_0+\Delta\zeta\cdot g_0\Big\}-\Delta g_1\Big].$$

Donc nous cherchons ν et ζ de façon qu'il ait lieu

$$(4.3)\quad\begin{cases}\Big(\nabla\nu+\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)^2+\zeta(\nabla\zeta)^2\equiv\Big(1+\frac{\mu}{ik}\Big)^2 \\ \qquad\qquad (\mathrm{mod}\,|p|^{-\infty}\beta^{\infty})\quad \text{dans}\quad \bar{\Omega}\cap\mathcal{U} \\ \Big(\nabla\nu+\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)\cdot\nabla\zeta\equiv 0 \\ \qquad\qquad (\mathrm{mod}\,(|p|^{-1}+|\beta|)^{\infty})\quad \text{dans}\quad \bar{\Omega}\cap\mathcal{U} \\ \nu(s,\eta,\beta,p)=\theta(s,\eta,\beta)\qquad \text{sur}\quad \Gamma\cap\mathcal{U}\end{cases}$$

et puis g_0 et g_1 de façon que

$$(4.4)\quad\begin{cases}2\Big(\nabla\nu+\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)\nabla g_0+\nabla\Big(\nabla\nu+\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)g_0 \\ \qquad +2\zeta\cdot\nabla\zeta\cdot\nabla g_1+\zeta\Delta\zeta\cdot g_1+(\nabla\zeta)^2g_1+\frac{1}{ik}\Delta g_0\equiv 0 \\ \qquad\qquad (\mathrm{mod}\,(|p|^{-1}+|\beta|)^{\infty})\quad \text{dans}\quad \bar{\Omega}\cap\mathcal{U} \\ 2\Big(\nabla\nu+\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)\nabla g_1+\nabla\Big(\nabla\nu+\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi-\frac{1}{ik^{1/3}}R\nabla\hat{\zeta}\Big)g_1 \\ \qquad +2\nabla\zeta\cdot\nabla g_0+\Delta\zeta\cdot g_0+\frac{1}{ik}\Delta g_1\equiv 0 \\ \qquad\qquad (\mathrm{mod}\,(|p|^{-1}+|\beta|)^{\infty})\quad \text{dans}\quad \bar{\Omega}\cap\mathcal{U} \\ g_0+\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)g_1\equiv v(s)\quad (\mathrm{mod}\,(|p|^{-1}+|\beta|)^{\infty})\quad \text{sur}\quad \Gamma\cap\mathcal{U}\end{cases}$$

où $R(z)=\dfrac{H'(z)}{H(z)}$.

Les constructions de ν, de ζ, de g_0 et de g_1 peuvent être faites selon le raisonnement de § 5 de [4] sous la restriction

$$(4.5)\qquad 0<\mu\leq a_0k^{1/3}$$

où a_0 est une constante assez petite. Notons qu'il a lieu

$$g_j(x,\eta,\beta,p)\in S^0_{1/3,0}(\bar{\Omega}\cap\mathcal{U}),\quad j=0,1$$

et que ζ est développée sur Γ_0 comme suit:

$$(4.6)\qquad \zeta(s, \eta, \beta, p)$$
$$= -\beta + \frac{\mu}{ik}\left\{\frac{2(1-\nabla\varphi(s)\cdot\nabla\theta(s, \eta, 0))}{(\nabla\rho(s, \eta, 0))^2} + 0\left(|\beta| + \frac{\mu}{k}\right)\right\}.$$

Alors la fonction $u(x, \eta, \beta, p)$ définie par (4.2) avec ces fonctions satisfait à

$$(4.7)\qquad \begin{cases} A_\varphi(p, \partial/\partial x)u \equiv 0 \quad (\bmod (|p|^{-1} + |\beta|)^\infty) \quad \text{dans} \quad \bar{\Omega} \cap \mathcal{U} \\ u(s, \eta, \beta, p) \equiv \exp\{ik(\theta(s, \eta, \beta) - \varphi(s))\} \cdot v(s) \\ \qquad\qquad (\bmod (|p|^{-1} + |\beta|)^\infty) \quad \text{sur} \quad \Gamma \cap \mathcal{U}. \end{cases}$$

Supposons que pour $0 < r_0 < r_1$

$$\Gamma_0 \times [0, r_1] \subset \mathcal{U}$$

et que

$$\bigcup_{\substack{s \in \Gamma_1 \\ \eta \in \Sigma}} L(s, \eta) \cap \Gamma \times [0, r_1] \subset \Gamma_0 \times [0, r_1].$$

Alors puisqu'il a lieu pour $x \in \Gamma_0 \times [r_0, r_1]$

$$\operatorname{Re} k^{2/3}\zeta(x, \eta, \beta, p) \to \infty \qquad \text{lorsque} \quad k \to \infty$$
$$|\operatorname{Im} k^{2/3}\zeta(x, \eta, \beta, p)| \leq Ca_0 \qquad \forall k > 0,$$

$u(x, \eta, \beta, p)$ s'exprime, en utilisant le comportement asymptotique de $H(z)$ pour $\operatorname{Re} z \to \infty$, comme

$$u(x, \eta, \beta, p) = \exp\left\{ik\left(\nu - \varphi + \frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right)\right\} \cdot H(k^{2/3}\hat{\zeta})^{-1} \cdot G^+(x, \eta, \beta, p)$$

où on a $G^+ \in S^0_{1/3, 0}(\bar{\Omega} \cap \mathcal{U})$. Et en posant

$$\psi^+(x, \eta, \beta, p) = \nu + \frac{2}{3}\zeta^{3/2} - \frac{1}{k}\log H(k^{2/3}\hat{\zeta})$$

il a lieu

$$\psi^+ \in S^0_{1/3, 0}(\Gamma_0 \times [r_0, r_1]).$$

Grâce à la méthode de construction de g_0 et de g_1 pour tout $\tilde{\Gamma}_1$ voisinage du support de v il existe $r_0 > 0$ tel que g_0 et g_1 s'annulent dans $(\Gamma - \tilde{\Gamma}_1) \times [0, r_0]$. Donc

(4. 8) $$G^+=0 \quad \text{dans} \quad \Big(\bigcup_{\substack{s\in\Gamma-\tilde{\Gamma}_1\\ \eta\in\Sigma}} L(s,\eta)\Big)\cap\Gamma\times[0,r_0].$$

Notons que G^+ est indéfiniment différentiable par rapport à k^{-1}, à $\left(\frac{\mu}{ik}\right)$ et à β. Supposons que G^+ se développe dans $\Gamma_0\times[r_0,r_1]$ comme

(4. 9) $$G^+\sim\sum G^+_{jlm}(x,\eta)k^{-j}\left(\frac{\mu}{ik}\right)^l\beta^m,$$

et cherchons les relations que les $G^+_{jlm}(x,\eta)$ doivent satisfaire. D'après (4. 3) et la définition de ψ^+, nous avons

(4. 10) $$\left(\nabla\psi^++\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi\right)^2\equiv\left(1+\frac{\mu}{ik}\right)^2$$
$$(\operatorname{mod}(|p|^{-1}+|\beta|)^\infty) \quad \text{dans} \quad \Gamma_0\times[r_0,r_1].$$

Puisque ψ^+ est indéfiniment différentiable par rapport à $\left(\frac{\mu}{ik}\right)$ et à β, nous avons

$$\psi^+\sim\sum_{j,l}\psi^+_{jl}(x,\eta)\beta^j\left(\frac{\mu}{ik}\right)^l.$$

La substitution du développement à (4. 10) nous donne

(4. 11) $$\begin{cases} (\nabla\psi^+_{00})^2=1 \\ 2\nabla\psi^+_{00}\nabla\psi^+_{jl}+\sum\limits_{(\{p,q\},\{r,s\})\in\mathcal{H}_{j,l}}\nabla\psi^+_{pq}\cdot\nabla\psi^+_{rs}=N_l \qquad j+l\geq 1\end{cases}$$

où $N_1=2$, $N_2=1$ et $N_r=0$ pour $r\geq 3$, et $\mathcal{H}_{j,l}=\{(\{p,q\},\{r,s\});p+r=l,$ $q+s=j,\ \{p,q\},\{r,s\}\in\mathcal{G}_{j+l+1}\}$, $\mathcal{G}_k=\{\{p,q\};p+q\leq k\}$.

Notons que $\psi^+_{00}(x,\eta)=\psi^+(x,\eta,0,\mu+i\infty)=\theta_0(x,\eta)+\frac{2}{3}\rho_0(x,\eta)^{3/2}$ est définie sur $\bigcup_{s\in\Gamma_0}L^+(s,\eta)$ et qu'une équation

$$\begin{cases}\nabla\psi^+_{00}\cdot\nabla f=h(x) \qquad \text{dans} \quad \bigcup\limits_{s\in\Gamma_0}L^+(s,\eta)\cap\Gamma\times[r_0,\infty) \\ f|_{\Gamma_0\times 0}=m(x)\end{cases}$$

admet une solution unique dans $C^\infty(\bigcup L^+(s,\eta)\cap\Gamma\times[r_0,\infty))$ pour les données $h,m\in C^\infty$. Donc les fonctions $\psi_{jl}(x,\eta)$, $j+l\geq 1$, qui sont définies sur $\Gamma_0\times[r_0,r_1]$, peuvent être prolongées en $\bigcup_{s\in\Gamma_0}L^+(s,\eta)\cap\Gamma\times[r_0,\infty)$ par les relation (4. 11). Ainsi nous pouvons supposer que la fonction ψ^+ est définie sur $\bigcup_{s\in\Gamma_0}L^+(s,\eta)\cap\Gamma\times[r_0,\infty)$ et vérifies

$$\left(\nabla\psi^++\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi\right)^2=\left(1+\frac{\mu}{ik}\right)^2 \quad (\operatorname{mod}(|p|^{-1}+|\beta|)^\infty)$$

$$\text{dans} \quad \bigcup_{s\in\Gamma_0} L^+(s,\eta)\cap\Gamma\times[r_0,\infty).$$

D'après $A_\varphi(\exp\{ik\psi^+\}\cdot G^+)\equiv 0$ dans $\Gamma\times[r_0,r_1]$ nous avons

$$2\nabla\psi^+\cdot\nabla G^+ + \Delta\psi^+\cdot G^+ + \frac{1}{ik}\Delta G^+\equiv 0.$$

Par la substitution de (4. 9) en relation au-dessus nous donne des équations que G^+_{jlm} doivent vérifier et G^+_{jlm} sont prolongées dans $\bigcup_{s\in\Gamma_0} L^+(s,\eta)\cap\Gamma\times[r_0,\infty)$ en satisfaisant aux équations. Donc G^+ peut être prolongée de façon que

$$A_\varphi(\exp\{ik\psi^+\}\cdot G^+)\equiv 0 \qquad \text{dans} \quad \Gamma\times[r_0,\infty).$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\exp\{ik(\nu-\varphi)\}\cdot H(k^{2/3}\zeta)\cdot H(k^{2/3}\hat{\zeta})^{-1})$$

$$=ik\left\{\frac{\partial\nu}{\partial r}-\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{ik^{1/3}}\left(R(k^{2/3}\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial r}-R(k^{2/3}\hat{\zeta})\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial r}\right)\right\}$$

$$\times\exp\{ik(\nu-\varphi)\}\cdot H(k^{2/3}\zeta)\cdot H(k^{2/3}\hat{\zeta})^{-1},$$

et

$$-\mathrm{Re}\, ik\left\{\frac{\partial\nu}{\partial r}-\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{ik^{1/3}}\left(R(k^{2/3}\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial r}-R(k^{2/3}\hat{\zeta})\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial r}\right)\right\}\geq c_0\mu,$$

donc nous avons

$$|\exp\{ik(\nu-\varphi)\}H(k^{2/3}\zeta)\cdot H(k^{2/3}\hat{\zeta})^{-1}|\leq\exp(-c_0\mu r)$$
$$\text{pour} \quad 0\leq r\leq r_0$$

et d'après (4. 11)

$$|\exp(ik\psi^+)|\leq\exp\{-c_0'\mu(r-r_0)\}\exp(-c_0\mu r_0).$$

D'autre part, les équations qui déterminent g_0, g_1 et G^+ montrent qu'il existe une constante $c'>0$ telle que

$$|g_j|\leq C\cdot\exp(c'r) \qquad \text{pour} \quad 0\leq r\leq r_0$$

$$|G^+|\leq C\exp\{c'(r-r_0)\} \qquad \text{pour} \quad r\geq r_0.$$

De cette façon nous avons

$$(4.\,12) \qquad |A_\varphi u|\leq C_N\exp(-c\mu r)\cdot\left(|\beta|+\left|\frac{\mu}{k}\right|\right)^N \qquad \forall x\in\bar{\Omega}.$$

Définissons $U_{22}(p, g: x)$. Pour une fonction

$$v(s)=\lambda(s)\,(1+\alpha(s, s', \eta, \beta))\frac{D(\xi', \alpha)}{D(\eta, \beta)}(s, s', \eta, \beta)$$

avec les paramètres s', η, β, construisons les fonctions $g_j(x, s', \eta, \beta, p)$, $j=0, 1$ et $G^+(x, s', \eta, \beta, p)$ selon la méthode jusqu'à maintenant. Remarquons que les supports de g_j et de G^+ sont contenus dans $\bigcup_{s\in\Gamma_0} L(s, \eta)$. En posant $g_j(x, s', \eta, \beta, p)=0$, $G^+=0$ dans $\bar{\Omega}-\bigcup_{s\in\Gamma_0} L^+(s, \eta)$, on a g_j et $G^+\in C^\infty(\bar{\Omega})$. Définissons

$$\begin{aligned}(4.13)\quad U_{22}(p, g: x) = &\int_{I_\beta} d\beta\int_{\Sigma} d\eta\int_{I_\sigma} d\sigma'\cdot\exp\{ik(\theta(s(\sigma'), \eta, \beta)-\varphi(s(\sigma')))\}\\ &\times\Big[\exp\{ik(\nu(x, \eta, \beta, p)-(\varphi x))\}\cdot H(k^{2/3}\hat{\zeta})^{-1}\Big\{H(k^{2/3}\zeta(x, \eta, \beta, p))\\ &\times g_0(x, s(\sigma'), \eta, \beta, p)+\frac{1}{ik^{1/3}}H'(k^{2/3}\zeta(x, \eta, \beta, p))\\ &\times g_1(x, s(\sigma'), \eta, \beta, p)\Big\}\,v_2\Big(\frac{r}{r_0}\Big)^2+\exp\{ik(\psi^+(x, \eta, \beta, p)-\varphi(x))\}\\ &\times G^+(x, s(\sigma'), \eta, \beta, p)\cdot v_3\Big(\frac{r}{r_0}\Big)^2\Big]\,v_2(k^\varepsilon\beta)^2k^2g(s(\sigma')).\end{aligned}$$

Alors $U_{22}(p, g: x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$ et $\operatorname{supp} U_{22}\subset \bigcup_{\substack{s\in\Gamma_0\\ \eta\in\Sigma}} L^+(s, \eta)$.

En tenant compte de $|\beta|\leq k^{-\varepsilon}$ on déduit de (4.12)

$$(4.14)\qquad |||A_\varphi U_{22}(p, g: x)|||_m\leq C_{m, m', N}|p|^{-N}\|g\|_{m'}$$

$$(4.15)\qquad \|U_{22}(p, g: x)|_\Gamma-V_{22}g\|_m\leq C_{m, m', N}|p|^{-N}\|g\|_{m'}$$

pour tous m, m', N les constantes non-négatives.

Donc nous avons la

Proposition 4.1. *Pour $p=ik+\mu$ tel que $\mu\geq\mu_\varphi$, $\mu\leq a_0k^{1/3}$ l'application U_{22} de $\mathcal{D}(\Gamma_1)$ dans $C^\infty(\bar{\Omega})$ est continue et satisfait à* (4.14) *et à* (4.15).

§ 5. Sur $\dfrac{\partial U_{22}}{\partial n}$

Par le définition de U_{22} nous avons

$$(5.1)\quad \frac{\partial U_{22}}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=\int_{I_\beta}d\beta\int_{\Sigma}d\eta\int_{I_\sigma}d\sigma'\ \exp[ik\{\theta(s(\sigma),\eta,\beta)-\theta(s(\sigma'),\eta,\beta)$$

$$-\varphi(s(\sigma))+\varphi(s(\sigma'))\}]\Big[ik\Big\{\frac{\partial\nu}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)$$

$$\times\Big(\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial n}-\frac{\partial\zeta}{\partial n}\Big)\Big\}\frac{1}{H(k^{2/3}\hat{\zeta})}\Big\{H(k^{2/3}\zeta)g_0+\frac{1}{ik^{1/3}}H'(k^{2/3}\zeta)g_1\Big\}$$

$$+ik\Big\{\zeta-\Big(\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\Big)^2\Big\}\frac{\partial\zeta}{\partial n}g_1+\frac{1}{H(k^{2/3}\hat{\zeta})}\Big\{H(k^{2/3}\zeta)\frac{\partial g_0}{\partial n}$$

$$+\frac{1}{ik^{1/3}}H'(k^{2/3}\zeta)\frac{\partial g_1}{\partial n}\Big\}\Big]\cdot v_2(k^{\varepsilon}\beta)^2k^2g(s(\sigma'))$$

$$=\int_{I_\beta}d\beta\int_{\Sigma}d\eta\int_{I_\sigma}d\sigma'\ \exp[ik\{\theta(s(\sigma),\eta,\beta)-\theta(s(\sigma'),\eta,\beta)-\varphi(s(\sigma))$$

$$+\varphi(s(\sigma'))\}]a_{22}(s(\sigma),s(\sigma'),\eta,\beta,p)\,(1+\alpha)\,k^2v_2(k^{\varepsilon}\beta)^2g(s(\sigma')).$$

Posons

$$a_{221}=ik\Big\{\frac{\partial\nu}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial n}-\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial n}\Big)\Big\}\lambda(\sigma)\frac{D(\xi',\alpha)}{D(\eta,\beta)}$$

$$a_{222}=ik\Big\{\zeta-\Big(\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\Big)^2\Big\}\frac{\partial\zeta}{\partial n}g_1$$

$$a_{223}=a_{22}-a_{221}-a_{222},$$

et

$$(5.2)\qquad b_{22}=\Big\{k^{2/3}R(-\beta k^{2/3})+\frac{1}{i}\,k^{1/3}\frac{2\mu(1-\nabla\varphi(s)\cdot\nabla\theta_0(s,\eta))}{(\nabla\rho_0(s,\eta))^2}$$

$$\times R'(-\beta k^{2/3})\Big\}\frac{\partial\rho_0}{\partial n}$$

$$=b_{221}+i\,b_{222}.$$

Alors on a

$$(5.3)\qquad b_{221}=\Big\{k^{2/3}\,\mathrm{Re}\,R(-\beta k^{2/3})+\mu\,\frac{2(1-\nabla\varphi(s)\cdot\nabla\theta_0(s,\eta))}{(\nabla\rho_0(s,\eta))^2}$$

$$\times\mathrm{Im}\,k^{1/3}R'(-\beta k^{2/3})\Big\}\frac{\partial\rho_0}{\partial n}.$$

Grâce au comportement asymptotique de $R(z)$ nous avons deux lemmes suivants:

Lemme 5. 1. *Pour une constante C assez grande, on a*

$$-b_{221}(s, \eta, \beta, p) \geq c_0\left(-\frac{1}{\beta}+\frac{\mu}{\sqrt{-\beta}}\right) \qquad si \quad -k^{2/3}\beta \geq C$$

$$-b_{221}(s, \eta, \beta, p) \geq c_0 k^{2/3} \qquad si \quad |\beta k^{2/3}| \leq C$$

$$-b_{221}(s, \eta, \beta, p) \geq c_0 k\sqrt{\beta} \qquad si \quad \beta k^{2/3} \geq C,$$

où c_0 *est une constante positive.*

Lemme 5. 2. *On a pour tout* $q=(q_1, q_2, q_3, q_4)$

$$\left|D_s^{q_1}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{q_2}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{q_3}\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{q_4} b_{221}(s, \eta, \beta, k)\right| \tag{5. 4}$$
$$\leq C_q k^{-(q_2+q_3+q_4)/3}(-b_{221}(s, \eta, \beta, k)).$$

Comme nous avons démontré dans § 6 de [4] il a lieu

$$\left|ik\left\{\zeta-\left(\frac{1}{ik^{1/3}}R(k^{2/3}\zeta)\right)^2\right\}g_1\right| \leq C\frac{1}{\mu}(-b_{221}).$$

Et il est évident que

$$a_{223} \in S^0_{1/3,0}(\Gamma_0).$$

D'autre part

$$k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial n}-b_{22}(s, \eta, \beta, p)-k^{2/3}R(-\beta k^{2/3})\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}-\frac{\partial\rho_0}{\partial n}\right)$$
$$=\left[k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)-\left\{k^{2/3}R(-\beta k^{2/3})+\frac{1}{i}k^{1/3}\mu\frac{2(1-\nabla\varphi\cdot\nabla\theta_0)}{(\nabla\rho_0)^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times R'(-\beta k^{2/3})\right\}\right]\frac{\partial\rho_0}{\partial n}+\{k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)-k^{2/3}R(-\beta k^{2/3})\}$$
$$\times\left(\frac{\partial\zeta}{\partial n}-\frac{\partial\rho_0}{\partial n}\right)+k^{2/3}R(-\beta k^{2/3})\left(\frac{\partial\zeta}{\partial n}-\frac{\partial\rho}{\partial n}\right).$$

Selon les considération du § 6 de [4] nous avons pour $|\beta| \leq k^{-\varepsilon}$

$$\left|k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)-k^{2/3}R(-\beta k^{2/3})-\frac{1}{i}k^{1/3}\cdot\mu\frac{2(1-\nabla\varphi\cdot\nabla\theta_0)}{(\nabla\rho_0)^2}R'(-\beta k^{2/3})\right|$$
$$\leq C\max\left(\frac{\mu}{k^{1/3}}\right)^2(-b_{221}(s, \eta, \beta, p))$$

$$\leq C\, a_0^2(-b_{221}(s, \eta, \beta, p)),$$

$$\left|(k^{2/3}R(k^{2/3}\zeta)-k^{2/3}R(-\beta k^{2/3}))\left(\frac{\partial\zeta}{\partial n}-\frac{\partial\rho_0}{\partial n}\right)\right|$$

$$\leq Ck^{-\varepsilon}(-b_{221}(s, \eta, \beta, p)),$$

$$\left|k^{2/3}R(-\beta k^{2/3})\left(\frac{\partial\zeta}{\partial n}-\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)\right|\leq Ck^{-\varepsilon}(-b_{221}(s, \eta, \beta, p))$$

et

$$\left|k^{2/3}R(-\beta k^{2/3})\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial n}\right|\leq C k^{-\varepsilon}(-b_{221}(s, \eta, \beta, p)).$$

C'est ainsi que l'on a le

Lemme 5.3. *Pour* $p=ik+\mu$ *et* β *tels que* $0<\mu\leq a_0k^{1/3}$, $|\beta|\leq k^{-\varepsilon}$ *il a lieu*

$$\left|a_{22}(s, s', \eta, \beta, p)-\left\{b_{22}(s, \eta, \beta, p)+k^{2/3}R(-\beta k^{2/3})\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}-\frac{\partial\rho_0}{\partial n}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+ik\left(\frac{\partial\nu}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\right\}\frac{D(\xi', \alpha)}{D(\eta, \beta)}\right|\leq Ca_0^2(-b_{221}).$$

En posant $\xi=k\{(1+\alpha)\xi'-\varphi^0\}$ nous définissons A_{22}, B_{22j} etc. par

$$A_{22}(s, \xi, s', p)=a_{22}(s, s', \eta(s, s', \xi', \alpha), \beta(s, s', \xi', \alpha), p)$$

$$\times\ \frac{D(\xi', \alpha)}{D(\eta, \beta)}(s, s', \xi', \alpha)$$

$$B_{22j}(s, \xi, s', p)=b_{22j}(s, s', \eta(s, s, \xi', \alpha), \beta(s, s', \xi', \alpha), p)$$

$$B_{22}=B_{221}+iB_{222}$$

$$\check{B}_{22j}(s, \xi, p)=B_{22j}(s, \xi, s, p),$$

$$\check{B}_{22}=\acute{B}_{221}+i\check{B}_{222},$$

$$\upsilon_2(s, \xi, s', p)=\upsilon_2(k^{\varepsilon}\beta(s, s', \xi', \alpha)),$$

$$\mathcal{A}_{22}=A_{22}(s, D_s, s', p)$$

$$\mathcal{B}_{22j}=B_{22j}(s, D_s, s', p),\qquad \mathcal{B}_{22}=\mathcal{B}_{221}+i\mathcal{B}_{222}$$

$$\check{\mathcal{B}}_{22j}=\check{B}_{22j}(s, D_s, p),\qquad \check{\mathcal{B}}_{22}=\check{\mathcal{B}}_{221}+i\check{\mathcal{B}}_{222}$$

$$\Upsilon_2 = \upsilon_2(s, D_s, s', p).$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial U_{22}}{\partial n}\right|_\Gamma &= \int_{I_\beta} d\beta \int_\Sigma d\eta \int_{I_\sigma} d\sigma' \cdot \exp[ik\{\theta(s(\sigma), \eta, \beta) - \theta(s(\sigma'), \eta, \beta) \\ &\quad - \varphi(s(\sigma)) + \varphi(s(\sigma'))\}] \cdot a_{22}(s(\sigma), s(\sigma'), \eta, \beta, p) \\ &\quad \times (1+\alpha) k^2 \upsilon_2 (k^\varepsilon \beta)^2 g(s(\sigma')) \\ &= \int_{I_\alpha} d\alpha \int_\Sigma d\xi' \int_{I_\sigma} d\sigma' \exp[ik\{\langle\sigma-\sigma', \xi'\rangle(1+\alpha) \\ &\quad - \langle\sigma-\sigma', \varphi^0\rangle\}] A_{22}(s(\sigma), \xi, s(\sigma'), p) \upsilon_2(s(\sigma), \xi, s(\sigma'), p)^2 \\ &\quad \times (1+\alpha) k^2 g(s(\sigma')) \\ &= \int_{R^2} d\xi \int_{I_\sigma} d\sigma' \exp\{i\langle\sigma-\sigma', \xi\rangle\} \\ &\quad \times A_{22}(s(\sigma), \xi, s(\sigma'), p) \upsilon_2(s(\sigma), \xi, s(\sigma') p)^2 g(s(\sigma')) \\ &= (A_{22} \circ \upsilon_2^2)(s(\sigma), D_s, s', p) g(s).\end{aligned}$$

Posons

$$\mathscr{P}_{22} = (A_{22} \circ \upsilon_2^2)(s, D_s, s', p) - \Upsilon_2^* \mathscr{A}_{22} \Upsilon_2$$

et nous avons

$$\left.\frac{\partial U_{22}}{\partial n}\right|_\Gamma = \Upsilon_2^* \mathscr{A}_{22} \Upsilon_2 g + \mathscr{P}_{22} g. \tag{5.5}$$

Grâce à la définition des B_{22j} et au comportement asymptotique de $R(z)$ nous avons le

Lemme 5.4. *Pour $q=(q_1, q_2)$ tel que $|q_2| \geq 1$ il a lieu*

$$|D_\sigma^{q_1} \partial_\xi^{q_2} \check{B}_{222}(s(\sigma), \xi, p)| \leq C_q k^{-(|q_2|-1)/3} \frac{1}{\mu}\Big(-\check{B}_{221}(s(\sigma), \xi, p)\Big).$$

Désignons par $[\check{B}_{22j}]_F$ la partie de Friedrichs pour le symbole $\check{B}_{22j}$ et nous considérons le symbole de $\check{\mathscr{B}}_{222} - [\check{B}_{222}]_F$ selon Kumano-go [6], le chapitre 3.

Symbole de $(\check{\mathscr{B}}_{222} - [\check{B}_{222}]_F)$

$$\sim \sum_{|\gamma|=1} \psi_\gamma(\xi) \check{B}_{222(\gamma)}(s, \xi, p) + \sum_{|\gamma|+|\delta|\geq 2} \psi_{\gamma,\delta}(\xi) \check{B}_{222}{}^{(\gamma)}_{(\delta)}(s, \xi, p).$$

Puisque $\psi_\gamma(\xi)\in S^{-1}$ nous avons

$$\sum_{|\gamma|=1}\psi_\gamma(\xi)\check{B}_{2222(\gamma)}(s,\xi,p)\in S^0_{1/3,0}(\Gamma).$$

Notons que pour $|\gamma|+|\delta|\geq 2$

$$\psi_{\gamma,\delta}(\xi)\check{B}_{222\binom{(\gamma)}{(\delta)}}\in S^{1-1/3(|\gamma|+|\delta|)/2}_{1/3,0}(\Gamma).$$

Donc pour γ, δ tels que $|\gamma|+|\delta|\geq 6$ il a lieu

$$\psi_{\gamma,\delta}(\xi)\check{B}_{222\binom{(\gamma)}{(\delta)}}\in S^0_{1/3,0}(\Gamma).$$

Soit $|\gamma|\geq 1$. D'après $\psi_{\gamma,\delta}(\xi)\in S^{-(|\gamma|-|\delta|)/6}(\Gamma)$ et le lemme 5. 4

$$|\psi_{\gamma,\delta}(\xi)\dot{B}_{222\binom{(\gamma)}{(\delta)}}(s,\xi,p)|\leq Ck^{(-1/3)(|\gamma|-1)}k^{(|\gamma|-|\delta|)/6}\frac{1}{\mu}(-B_{221})$$

$$\leq Ck^{(2-|\gamma|-|\delta|)/6}\frac{1}{\mu}(-B_{221}).$$

Donc lorsque $|\gamma|\geq 1$, $|\gamma|+|\delta|\geq 2$ on a

$$|\psi_{\gamma,\delta}(\xi)\check{B}_{222\binom{(\gamma)}{(\delta)}}(s,\xi,p)|\leq\frac{C}{\mu}(-\check{B}_{221}).$$

Pour $|\delta|$ impaire ≥ 3 d'après la définition de $\psi_{0,\delta}(\xi)$

$$\psi_{0,\delta}(\xi)\in S^{-1-(|\delta|-1)/6}_{1/3,0}.$$

Donc pour $|\delta|$ impaire

$$\psi_{0,\delta}(\xi)\check{B}_{222(\delta)}\in S^{-(|\delta|-1)/6}_{1/3,0}(\Gamma).$$

Pour $|\delta|$ paire

$$\psi_{0,\delta}(\xi)\check{B}_{222(\delta)}\quad\text{est à valeurs réelles}$$

et appartient à $S^{1-|\delta|/6}_{1/3,0}(\Gamma)$. En appliquant le raisonnement jusqu'à maintenant nous avons

$$|\psi_{0,\delta}(\xi)\check{B}_{222(\delta)}(s,\xi,p)-[\psi_{0,\delta}\check{B}_{222(\delta)}]_F-\sum_{\substack{\delta':\text{ paire}\\|\delta'|\geq 2}}\psi_{0,\delta'}(\xi)\psi_{0,\delta}(\xi)\check{B}_{222(\delta+\delta')}|$$

$$\leq C\frac{1}{\mu}(-\check{B}_{221}).$$

D'autre part, $\psi_{0,\delta}(\xi)\psi_{0,\delta'}(\xi)\check{B}_{222(\delta+\delta')}(s,\xi,p)\in S^{1-|\delta+\delta'|/6}_{1/3,0}(\Gamma)$. En répétant ce processus nous avons un symbole $\widetilde{B}(s,\xi,p)$ à valeurs réelles appartenant à $S^1_{1/3,0}(\Gamma)$ et $\widetilde{\widetilde{\mathscr{B}}}\in S^1_{1/3,0}(\Gamma)$ tels que

$$\check{\mathscr{B}}_{222}=[\check{B}_{222}]_F+[\tilde{B}]_F+\tilde{\tilde{\mathscr{B}}}(s, D_s, p)$$

et que

$$|\tilde{\tilde{\mathscr{B}}}(s, \xi, p)|\leq\frac{C}{\mu}(-\check{B}_{221}).$$

En posant $w_2=\Upsilon_2 g$ nous avons

$$\begin{aligned}|\mathrm{Im}(\check{\mathscr{B}}_{222}w_2, w_2)_m|&\leq|(\tilde{\tilde{\mathscr{B}}}w_2, w_2)_m|\\&\leq\frac{C}{\mu}([-\check{B}_{221}]_F w_2, w_2)_m.\end{aligned}$$

De cette façon on a la

Proposition 5. 5.

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Re}(\mathscr{B}_{22}\Upsilon_2 g, \Upsilon_2 g)_m\\&\qquad\geq\left(1-\frac{C}{\mu}-Ck^{-\varepsilon/2}\right)([-B_{221}]_F\Upsilon_2 g, \Upsilon_2 g)_m.\end{aligned}$$

Et puis si l'on pose

$$\mathscr{C}(s, \xi, s', p)=k^{2/3}R(\beta(s, s', \xi', \alpha)k^{2/3})\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}-\frac{\partial\rho_0}{\partial n}\right)$$

$$\mathcal{E}(s, \xi, s', p)=ik\left(\frac{\partial\nu}{\partial n}(s, s', \eta, \beta, p)-\frac{\partial\varphi}{\partial n}(s)\right)$$

on peut vérifier facilement qu'il a lieu des estimations

$$|\mathrm{Re}(\mathscr{C}(s, D_s, s', p)w_2, w_2)_m|\leq C_m k^{-\varepsilon}([-\check{B}_{221}]_F w_2, w_2)_m \tag{5. 6}$$

$$|\mathrm{Re}(\mathcal{E}(s, D_s, s', p)w_2, w_2)_m|\leq C\|w_2\|_m^2. \tag{5·7}$$

Du lemme 5. 3, de la proposition 5. 5, de (5. 6) et de (5. 7) on déduit la

Proposition 5. 6. *Il a lieu l'estimation*

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{22}(p, g:x)}{\partial n}\bigg|_\Gamma, g\right)_m\\&\qquad\geq(1-C(\mu^{-1}+k^{-\varepsilon}+a_0^2))([-\check{B}_{221}]_F\Upsilon_2 g, \Upsilon_2 g)_m\\&\qquad\quad-\mathrm{Re}(\mathscr{P}_{22}g, g)_m-C_m\|g\|_m^2,\end{aligned}$$

pour toute $g(s) \in \mathscr{D}(\Gamma_1)$.

Corollaire. *Soit* $\gamma(s) \in \mathscr{D}(\Gamma_1)$. *Pour toute* $g(s) \in \mathscr{D}(\Gamma_0)$ *il a lieu*

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{22}(p, \gamma(s)^2 g(s) : x)}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}, g(s)\right)_m$$

$$\geq (1-C(\mu^{-1}+k^{-\varepsilon}+a_0^2))\,([-B_{221}]_F \Upsilon_2 \gamma g, \Upsilon_2 \gamma g)_m$$

$$-\mathrm{Re}(\mathscr{P}_{22}\gamma g, \gamma g)_m - Ck^{-\varepsilon/2}([-B_{221}]_F \tilde{\Upsilon}_2 \tilde{\gamma} g, \tilde{\Upsilon}_2 \tilde{\gamma} g)_m - C_m \|\gamma g\|_m^2,$$

où $\tilde{\upsilon}_2(l)=1$ *pour* $|l| \leq 3$ *et* $\tilde{\upsilon}_2(l)=0$ *pour* $|l| \geq 4$, $\tilde{\Upsilon}_2$ *est l'opérateur pseudo différential défini par le symbole* $\tilde{\upsilon}_2(k^{\varepsilon}\beta(s, s', \xi', \alpha))$ *et* $\tilde{\gamma}$ *une fonction telle qu'elle est égale à* 1 *sur un voisinage du support de* $\gamma(s)$.

Remarque. Nous avons fait une considération pour p tel que $0<\mu \leq a_0 k^{1/3}$, mais pour $k^{1/2} \geq \mu \geq a_0 k^{1/3}$ nous pouvons achever le raisonnement en employant $\exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right)$ à la place de $H(z)$ et obtenir les estimations de la proposition 5. 6 et de sa corollaire.

§ 6. Construction de U_{21} et Ses Propriétés

Afin de construire U_{21} nous considérons un problème au bord (4. 1) pour $\beta_0 \geq -\beta \geq k^{-\varepsilon}$, $0<\mu<k^{1/2}$. Cherchons u sous la forme

$$u(x, \eta, \beta, p) = \exp\{ik(\psi-\varphi)\} \cdot G. \tag{6. 1}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
&\exp\{-ik(\psi-\varphi)\} \cdot A_{\varphi} u \\
&\quad = (1-(\nabla\varphi)^2) p^2 G - 2p\nabla\varphi \cdot ik(\nabla\psi - \nabla\varphi) G - 2p\nabla\varphi \cdot \nabla G \\
&\qquad - (ik(\nabla\psi-\nabla\varphi))^2 G - 2ik(\nabla\psi - \nabla\varphi)\cdot\nabla G - ik(\Delta\psi - \Delta\varphi) G \\
&\qquad - \Delta G - p\Delta\varphi \cdot G \\
&\quad = \left\{p^2 - (ik)^2\left(\nabla\psi + \frac{\mu}{ik}\nabla\varphi\right)^2\right\} \cdot G - 2ik\left(\nabla\psi + \frac{\mu}{ik}\nabla\varphi\right)\cdot\nabla G \\
&\qquad - ik\left(\Delta\psi + \frac{\mu}{ik}\Delta\varphi\right) G - \Delta G,
\end{aligned}$$

nous choisissons ψ de telle façon que

$$(6.2)\quad \begin{cases} \left(\nabla\psi+\dfrac{\mu}{ik}\nabla\varphi\right)^2=\left(1+\dfrac{\mu}{ik}\right)^2 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ \psi=\theta(s,\eta,\beta) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et G de telle façon que

$$(6.3)\quad \begin{cases} 2\left(\nabla\psi+\dfrac{\mu}{ik}\nabla\varphi\right)\cdot\nabla G+\left(\Delta\psi+\dfrac{\mu}{ik}\Delta\varphi\right)G+\dfrac{1}{ik}\Delta G=0 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ G=v(s) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

D'abord considérons la construction de ψ vérifiant (6.2).

1ère étape. Sur la solution $\psi_0(x,\eta,\beta)$ des équation

$$(6.4)\quad \begin{cases} (\nabla\psi_0)^2=1 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ \psi_0(x,\eta,\beta)=\theta(x,\eta,\beta) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

nous avons les

Lemme 6.1. *Une fonction $\psi(x,\eta,\beta)$ satisfaisant à* (6.4) *vérifie l'estimation*

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{q_2}\left(\frac{\partial}{\partial\sqrt{-\beta}}\right)^{q_3}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{q_4}\psi_0(x,\eta,\beta)\right|$$
$$\leq C_q(\sqrt{-\beta}+\sqrt{r})^{-(2q_1+|q_2|+q_3+q_4)}$$

Et plus pour ψ_0 telle que $\partial\psi_0/\partial r<0$ il a lieu

$$-\left.\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right|_{\Gamma}=\sqrt{-\beta}\;|\nabla\rho_0(s,\eta)|\cdot(1+\beta c_1(s,\eta,\beta))$$

$$-\Delta\psi_0\Big|_{\Gamma}=\frac{1}{\sqrt{-\beta}}c_2(s,\eta,\beta)$$

où $c_j(s,\eta,\beta)\in C^\infty(\Gamma\times\Sigma\times[-\beta_0,0))$ et $c_2(s,\eta,\beta)\geq c>0$.

Lemme 6.2. *La solution de l'équation*

$$\begin{cases} \nabla\psi_0\cdot\nabla f=h & \textit{dans } \bar{\Omega} \\ f|_{\Gamma}=v & \textit{sur } \Gamma \end{cases}$$

pour les données $v(s)\in C(\Gamma_0)$, $h(x)\in C^\infty(\bigcup_{\substack{s\in\Gamma_0\\ \eta\in\Sigma}} L^+(s,\eta))$ admet l'estimation

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{q_2}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^{q_3}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^{q_4} f\right| \leq C_q\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{-\beta}+\sqrt{r}}\right)^{5|q|}|v|_q\right.$$

$$\left.+\sum_{j+l=|q|}\left(\frac{1}{\sqrt{-\beta}+\sqrt{r}}\right)^{5j}\int_s^x |h|_l dr\right\}.$$

Supposons que $\psi(x, \eta, \beta, p)$ vérifiant (6. 2) se développe comme

$$\psi(x, \eta, \beta, p)=\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x, \eta, \beta)\left(\frac{\mu}{ik}\right)^j.$$

En substituant ψ à (6. 2) et en égalant les coefficients de $\left(\frac{\mu}{ik}\right)^j$ nous avons

$$(\nabla\psi_0)^2=1 \qquad \text{dans } \bar{\Omega}$$

et pour $j\geq 1$

$$\sum_{l=0}^{j} \nabla\psi_{j-l}\cdot\nabla\psi_l+2\nabla\varphi\cdot\nabla\psi_{j-1}=N_j \tag{6. 5}$$

où $N_1=2$, $N_2=1$ et $N_j=0$ pour $j\geq 3$. Choissons ψ_0 de façon que $\psi_0|_\Gamma =\theta(s, \eta, \beta)$ et que $\partial\psi_0/\partial r<0$. Et puis nous déterminons les ψ_j, $j\geq 1$ de façon que $\psi_j=0$ sur Γ et que (6. 5) ait lieu. Sur ψ_1, par exemple, nous avons en utilisant le lemma 6. 2

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{q_2}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^{q_3}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^{q_4}\psi_1\right|$$

$$\leq C_q\cdot\sum_{l+l'=|q|}(\sqrt{-\beta}+\sqrt{r})^{-5l}\int_{s_0}^x |\psi_0|_{l'} dr$$

d'après le lemme 6. 1

$$\leq C_q\cdot\sum_{l+l'=|q|}(\sqrt{-\beta}+\sqrt{r})^{-5l}(\sqrt{-\beta}+\sqrt{r})^{-5l'}$$

$$\leq C_q\,(\sqrt{-\beta}+\sqrt{r})^{-5|q|}.$$

De la même façon, à propos de ψ_2 nous avons

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{q_2}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^{q_3}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^{q_4}\psi_2\right| \leq C_{q2}(\sqrt{-\beta}+\sqrt{r})^{-5|q|-5}$$

et ainsi de suite en employant le lemme 6. 2 pour $j\geq 2$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{q_2}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\right)^{q_3}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^{q_4}\psi_j\right| \leq C_{qj}(\sqrt{-\beta}+\sqrt{r})^{-5(|q|+j-1)} \tag{6. 6}$$

$$\leq C_{qj}(\sqrt{-\beta})^{-5(|q|+j-1)}.$$

Donc pour $-\beta \geq k^{-\varepsilon}$, $0<\varepsilon<\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$, l'estimation (6. 6) nous permit de trouver une fonction $\psi(x, \eta, \beta, p)$ telle que

$$\psi \sim \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x, \eta, \beta)\left(\frac{\mu}{ik}\right)^j.$$

Alors ψ satisfait à

$$\left(\nabla\psi+\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi\right)^2 \equiv \left(1+\frac{\mu}{ik}\right)^2 \quad (\mathrm{mod}\ k^{-\infty}) \qquad \text{dans} \quad \bar{\Omega}$$

et à

$$\psi|_\Gamma = \theta(s, \eta, \beta) \qquad \text{sur} \quad \Gamma.$$

Rappelons que ψ_1 vérifie l'équation

$$\nabla\psi_0\cdot\nabla\psi_1 = 1-\nabla\psi_0\cdot\nabla\varphi \geq 1-|\nabla\varphi| > c_0 > 0.$$

D'autre part nous avons choisi ψ_0 de façon que $\partial\psi_0/\partial r<0$. Donc il a lieu

$$-\psi_1(x, \eta, \beta) \geq c(1-|\nabla\varphi|)r,$$

d'où on déduit

$$(6.7) \qquad |\exp\{ik(\psi(x, \eta, \beta, p)-\varphi(x))\}| \leq \exp\{-c(1-|\nabla\varphi|)\mu r\}.$$

Passons à la construction de G vérifiant (6. 3). Supposons que G se développe comme

$$G = \sum_{j,l=0}^{\infty} G_{jl}(x, \eta, \beta) k^{-j}\left(\frac{\mu}{ik}\right)^l.$$

En substituant G en (6. 3) et égalant les coefficients nous avons les relations auxquelles les G_{jl} doivent satisfaire et nous pouvons déterminer les $G_{jl}(x, \eta, \beta)$ par récurrence. Et il a lieu l'estimation

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{q_1}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{q_2}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{q_3}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{q_4} G_{jl}(x, \eta, \beta)\right|$$

$$\leq C_{qjl}(\sqrt{-\beta})^{-10(|q|+j+l)}\cdot\exp(cr).$$

L'estimation au-dessus permit de définir $G(x, \eta, \beta, p)$ par, si $0<\varepsilon<\frac{1}{10}$

$$G \sim \sum_{j,l=0}^{\infty} G_{jl}(x, \eta, \beta) k^{-j}\left(\frac{\mu}{ik}\right)^l.$$

Alors une fonction définie avec ces ψ et G par

$$u=\exp\{ik(\psi-\varphi)\}G$$

vérifie

$$|\partial_x^\gamma A_\varphi u| \leq C_{N,\gamma} k^{-N}\cdot \exp[-\{c(1-|\nabla\varphi|)\mu - C\}r], \quad \forall x \in \bar{\Omega} \tag{6.8}$$

d'après (6.7) pour tous γ et $N>0$, et évidement aussi

$$u|_\Gamma = \exp\{ik(\theta(s,\eta,\beta)-\varphi(s))\}\cdot v(s). \tag{6.9}$$

En utilisant la construction de solution asymptotique de (4.1) nous définissons U_{21}. Pour

$$v(s)=\lambda(s)\chi_2(1+\alpha(s,s',\eta,\beta))^2(1+\alpha)\frac{D(\xi',\alpha)}{D(\eta,\beta)}$$

construisons $G(x,s',\eta,\beta,p)$ par la processus au-dessus. Posons

$$U_{21}(p,g:x)=\int_{I_\beta}d\beta\int_\Sigma d\eta\int_{I_\sigma}d\sigma' \exp[ik\{\psi(x,\eta,\beta,p)-\theta(s(\sigma'),\eta,\beta)$$
$$-\varphi(x)+\varphi(s(\sigma'))\}]G(x,s(\sigma'),\eta,\beta,p)\upsilon_1(k^\varepsilon\beta)^2 g(s(\sigma'))k^2.$$

Grâce à (6.8) et à (6.9) nous avons

$$|||A_\varphi U_{21}(p,g:x)|||_m \leq C_{N,m}k^{-N}\|g\|_0 \tag{6.10}$$

$$U_{21}(p,g:x)|_\Gamma = V_{21}g. \tag{6.11}$$

Ensuite considérons $\left.\dfrac{\partial U_{21}}{\partial n}\right|_\Gamma$.

$$\left.\frac{\partial U_{21}}{\partial n}\right|_\Gamma=\int_{I_\beta}d\beta\int_\Sigma d\eta\int_{I_\sigma}d\sigma' \exp[ik\{\theta(s(\sigma),\eta,\beta)-\theta(s(\sigma'),\eta,\beta)$$
$$-\varphi(s(\sigma))+\varphi(s(\sigma'))\}]\left\{ik\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)G+\frac{\partial G}{\partial n}\right\}\upsilon_1(k^\varepsilon\beta)^2 g(s(\sigma'))k^2$$
$$=\int_{I_\beta}d\beta\int_\Sigma d\eta\int_{I_\sigma}d\sigma' \exp[ik\{\theta(s(\sigma),\eta,\beta)-\theta(s(\sigma'),\eta,\beta)$$
$$-\varphi(s(\sigma))+\varphi(s(\sigma'))\}]\cdot a_{21}(s(\sigma),s(\sigma'),\eta,\beta,p)$$
$$\times(1+\alpha)k^2\upsilon_1(k^\varepsilon\beta)^2 g(s(\sigma')).$$

D'après le lemme 6.1

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_\Gamma=-\sqrt{-\beta}\frac{1}{|\nabla\rho_0(s,\eta)|}(1+O(\beta))$$

$$-\frac{\mu}{ik}\frac{1-\nabla\psi_0\cdot\nabla\varphi}{\sqrt{-\beta}}|\nabla\rho_0(s,\eta)|\left(1+O\left(\frac{\mu}{k}+|\beta|\right)\right)$$

et

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma}=(-\Delta\psi+O(1))\frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial n}}G+O\left(\frac{\mu}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{-\beta}c_2(s,\eta,\beta)\left(1+O\left(\sqrt{-\beta}+\frac{\mu}{k}\right)\right)\cdot G.$$

Posons

$$b_{21}(s,s',\eta,\beta,p)=-ik\sqrt{-\beta}\frac{1}{|\nabla\rho_0(s,\eta)|}$$

$$-\frac{\mu}{\sqrt{-\beta}}(1-\nabla\psi_0\cdot\nabla\varphi)|\nabla\rho_0(s,\eta)|-\frac{1}{-\beta}c_2(s,s',\eta,\beta)$$

$$=b_{211}+ib_{212}.$$

Selon le paragraphe 5 définissons

$$A_{21},\ B_{21},\ B_{21j},\ \check{B}_{21},\ \check{B}_{21j},$$

$$\mathcal{A}_{21},\ \mathcal{B}_{21},\ \mathcal{B}_{21j},\ \check{\mathcal{B}}_{21},\ \check{\mathcal{B}}_{12j},\ \mathcal{P}_{21}.$$

Alors par la même considération que § 5 nous avons la

Proposition 6.3. *Pour toute* $g(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_1)$ *il a lieu l'estimation*

$$-\mathrm{Re}\left(\left.\frac{\partial U_{21}(p,g:x)}{\partial n}\right|_{\Gamma},g\right)_m$$

$$\geq\left(1-C\left(k^{-\varepsilon}+\frac{1}{\mu}\right)\right)([-\check{B}_{211}]_F\Upsilon_1X_2g,\Upsilon_1X_2g)_m$$

$$-\mathrm{Re}(\mathcal{P}_{21}g,g)_m-C_m\|g\|_m^2,$$

où $X_2=\chi_2(|D_s|/k)$.

Corollaire. *Soit* $\gamma(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_1)$. *Alors pour toute* $g(s)\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$ *nous avons*

$$-\mathrm{Re}\left(\left.\frac{\partial U_{21}(p,\gamma(s)^2g:x)}{\partial n}\right|_{\Gamma},g\right)_m$$

$$\geq\left(1-C\left(k^{-\varepsilon}+\frac{1}{\mu}\right)\right)([-\check{B}_{211}]_F \Upsilon_1 X_2 \gamma g, \Upsilon_1 X_2 \gamma g)_m$$
$$-\mathrm{Re}(\mathscr{P}_{21}\gamma g, \gamma g)_m - C_m \|\gamma g\|_m^2$$
$$-C\cdot k^{-\varepsilon/2}([-\check{B}_{211}]_F \tilde{\Upsilon}_1 \tilde{X}_2 \tilde{\gamma} g, \Upsilon_1 \tilde{X}_2 \tilde{\gamma} g)_m,$$

où $\tilde{\gamma}\in\mathscr{D}(\Gamma_1)$ *telle que* $\gamma=1$ *sur le support de* γ, *et*

$$\tilde{\chi}_2(l)=\begin{cases}1 & l<1-\alpha_0\\ 0 & l>1-\alpha_0/2\end{cases},\quad \tilde{v}_1(l)=\begin{cases}1 & l<-1\\ 0 & l>-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

§ 7. Construction de U_{23} et Ses Propriétés

Considérons le problème (4.1) pour p et β tels que $0<\mu<k^{1/2}$, $\beta_0\geq\beta>k^{-\varepsilon}$. Nous construisons une solution asymptotique de (4.1) sous la forme

$$u=\exp\{ik(\psi(x,\eta,\beta,p)-\varphi(x))\}\cdot G(x,\eta,\beta,p).$$

Premièrement cherchons une fonction vérifiant

$$\text{(7.1)}\qquad \begin{cases}\left(\nabla\psi+\dfrac{\mu}{ik}\nabla\varphi\right)^2\equiv\left(1+\dfrac{\mu}{ik}\right)^2 & (\mathrm{mod}\,(r+|\beta|+|p|^{-1})^\infty)\\ \psi|_\Gamma=\theta(s,\eta,\beta).\end{cases}$$

La construction de telle fonction seras faite selon le processus dans § 8 de [4], et on peut supposer que ψ satisfasse à

$$\text{(7.2)}\qquad \mathrm{Im}\,\psi(x,\eta,\beta,p)\geq c\sqrt{\beta}\,r.$$

Ensuite, la même considération permit de trouver une fonction G telle que

$$\text{(7.3)}\qquad \begin{cases}2\left(\nabla\psi+\dfrac{\mu}{ik}\nabla\varphi\right)\cdot\nabla G+\left(\Delta\psi+\dfrac{\mu}{ik}\Delta\varphi\right)G+\dfrac{1}{ik}\cdot\Delta G\equiv 0\\ \qquad\qquad (\mathrm{mod}\,(r+|\beta|+|p|^{-1})^\infty)\\ G|_\Gamma=v(s).\end{cases}$$

Alors

$$A_\varphi u=\exp\{ik(\psi-\varphi)\}\cdot\Big[\{(ik+\mu)^2-(ik\nabla\psi+\mu\nabla\varphi)^2\}\cdot G$$

$$+ik\left\{2\left(\nabla\psi+\frac{\mu}{ik}\nabla\varphi\right)\cdot\nabla G+\left(\Delta\psi+\frac{\mu}{ik}\Delta\varphi\right)G\right\}+\Delta G\Big].$$

D'après (7. 1) et (7. 3)

$$\begin{aligned}|A_\varphi u| &\leq |\exp\{ik(\psi-\varphi)\}|\cdot C_N(r+|\beta|+|p|^{-1})^N \\ &\leq C_N\cdot\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}(\beta+|p|^{-1})^{N-j}\cdot\exp(-k\sqrt{\beta}r)\cdot r^j \\ &\leq C_N\cdot\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}(\beta+|p|^{-1})^{N-j}\left(\frac{k\sqrt{\beta}}{2}\right)^{-j} \\ &\qquad\times\exp\left(-\frac{1}{2}k\sqrt{\beta}r\right)\sup_{r\geq 0}(\exp(-r)\cdot r^j).\end{aligned}$$

Puisqu'il a lieu par la supposition sur β

$$k\sqrt{\beta}\geq k^{1/2},$$

nous avons

$$|A_\varphi u|\leq C_N\cdot|p|^{-N}\exp\left(-\frac{1}{2}k^{1/2}\cdot r\right). \tag{7. 4}$$

Prenons $G(x, s', \eta, \beta, p)$ comme une fonction vérifiant (7. 3) en posant

$$v(s)=\chi_2(1+\alpha(s, s', \eta, \beta))^2\frac{D(\xi', \alpha)}{D(\eta, \beta)}\lambda(s)$$

et définissons $U_{23}(p, g: x)$ par

$$\begin{aligned}U_{23}(p, g: x) = \int_{I_\beta}d\beta\int_{\Sigma}d\eta\int_{I_\sigma}d\sigma'\cdot\exp[ik\{\psi(x, \eta, \beta, p) \\ -\theta(s(\sigma'), \eta, \beta)-\varphi(x)+\varphi(s(\sigma'))\}] \\ \times G(x, s(\sigma'), \eta, \beta, p)\cdot v_3(k^\varepsilon\beta)^2 g(s(\sigma'))k^2.\end{aligned}$$

Grâce à (7. 1) et à (7. 4) nous avons

$$\begin{cases}|||A_\varphi U_{23}|||_m\leq C_{N,m}|p|^{-N}\|g\|_0 \\ U_{23}|_\Gamma = V_{23}g.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_{23}}{\partial n}\Big|_\Gamma = \int_{I_\beta}d\beta\int_{\Sigma}d\eta\int_{I_\sigma}d\sigma'\cdot\exp[ik\{\theta(s(\sigma), \eta, \beta) \\ -\theta(s(\sigma'), \eta, \beta)-\varphi(s(\sigma))+\varphi(s(\sigma'))\}] \\ \times\left\{ik\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)G+\frac{\partial G}{\partial n}\right\}v_3(k^\varepsilon\beta)^2k^2g(s(\sigma'))\end{aligned}$$

$$= \int_{I_\beta} d\beta \int_{\Sigma} d\eta \int_{I_\sigma} d\sigma' \cdot \exp\{ik\langle\sigma-\sigma', \xi'\rangle(1+\alpha) - \langle\sigma-\sigma', \varphi^0\rangle\}$$

$$\times a_{23}(s(\sigma), s(\sigma'), \eta, \beta, p) k^2 g(s(\sigma'))$$

Posons

$$b_{23}(s, s', \xi, p) = -k\sqrt{\beta(s, s', \xi', \alpha)} .$$

Alors nous avons la

Proposition 7.1. *Pour toute* $g(s) \in \mathscr{D}(\Gamma_1)$ *il a lieu l'estimation*

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{23}}{\partial n}\Big|_{\Gamma}, g\right)_m \geq ([-\check{B}_{23}]_F \Upsilon_3 X_2 g, \Upsilon_3 X_2 g)_m$$

$$-\mathrm{Re}(\mathscr{P}_{23} g, g)_m - C_m \|g\|_m^2 .$$

Corollaire. *Soit* $\gamma(s) \in \mathscr{D}(\Gamma_1)$. *Alors pour toute* $g \in \mathscr{D}(\Gamma_0)$ *nous avons*

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_{23}(p, \gamma^2 g : x)}{\partial n}\Big|_{\Gamma}, g\right)_m \geq ([-\check{B}_{23}]_F \Upsilon_3 X_2 \gamma g, \Upsilon_3 X_2 \gamma g)_m$$

$$-\mathrm{Re}(\mathscr{P}_{23} \gamma g, \gamma g)_m - C\|\gamma g\|_m^2$$

$$-C \cdot k^{-\varepsilon/2}([-\check{B}_{23}]_F \tilde{\Upsilon}_3 \tilde{X}_2 \tilde{\gamma} g, \tilde{\Upsilon}_3 \tilde{X}_2 \tilde{\gamma} g)_m .$$

§ 8. Démonstration du Théorème 2.1

Posons

$$U_2(p, g : x) = \sum_{j=1}^{3} U_{2j}(p, g : x)$$

pour $g \in \mathscr{D}(\Gamma_1)$. D'après les résultats des paragraphes 4～7 il a lieu

$$\text{(8.1)} \qquad \begin{cases} |||A_\varphi U_2|||_m \leq C_{N,m} |p|^{-N} \|g\|_0 \\ \|U_2|_\Gamma - V_2 g\|_m \leq C_{N,m} |p|^{-N} \|g\|_0 . \end{cases}$$

Et puis nous avons

$$\text{(8.2)} \qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_2(p, g : x)}{\partial n}\Big|_{\Gamma}, g\right)_m \geq \frac{1}{2}(B_{2F} X_2 g, X_2 g)_m - C_m \|g\|_m^2$$

où

$$B_{2F}=\sum_{j=1}^{3}\Upsilon_j^*[-\check{B}_{2j}]_F\Upsilon_j,$$

puisqu'il a lieu

$$|\sum_{j=1}^{3}(\mathscr{P}_{2j}g,g)_m|\leq C\cdot k^{-\varepsilon/2}(B_{2F}X_2g,X_2g)_m+C\|g\|_m^2.$$

Et aussi nous avons

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_2(p,\gamma^2g:x)}{\partial n}\Big|_\Gamma,g\right)_m\geq(B_{2F}X_2\gamma g,X_2\gamma g)_m \tag{8.3}$$

$$-C\|\gamma g\|_m^2-k^{-\varepsilon/2}(B_{2F}\tilde{X}_2\tilde{\gamma}g,\tilde{X}_2\tilde{\gamma}g)_m$$

pour $\gamma\in\mathscr{D}(\Gamma_1)$ et $g\in\mathscr{D}(\Gamma_0)$.

Puis construisons U_1 et U_3.

Pour $\eta\in\{\eta\in\boldsymbol{R}^2;\ |\eta|\leq1-\alpha_0/2\}$ nous construisons une fonction $\theta_0(s,\eta)\in C^\infty(\Gamma_0)$ en suivant la considération dans § 3 telle que

$$\begin{cases}|\nabla\theta_0(s,\eta)|^2=|\eta|^2\\ \dfrac{\partial\theta_0}{\partial\sigma_j}(0,\eta)=\eta_j,\quad j=1,2.\end{cases}$$

Alors on peut trouver une fonction $\psi_0^+(x,\eta)\in C^\infty(\Gamma\times[0,\infty))$ telle que

$$|\nabla\psi_0^+(x,\eta)|^2=1 \qquad \text{dans}\quad \bar{\Omega}$$

$$\psi_0^+(x,\eta)=\theta_0(s,\eta) \qquad \text{sur}\quad \Gamma_0$$

$$\frac{\partial\psi_0^+}{\partial n}<0.$$

D'autre part la méthode de construction de $\theta_0(s,\eta)$ assure l'existence d'une fonction indéfiniment différentiable $\eta(s,s',\xi)$ pour $|\xi|\leq1-\alpha_0$ vérifiant

$$\theta_0(s(\sigma),\eta)-\theta_0(s(\sigma'),\eta)-\varphi(s(\sigma))+\varphi(s(\sigma'))$$

$$=\langle\sigma-\sigma',\xi\rangle-\langle\sigma-\sigma',\varphi^0\rangle$$

$$\eta(0,0,\xi)=\xi.$$

Alors V_1g s'exprime

$$V_1g(s(\sigma))=\lambda(s(\sigma))\int_{\boldsymbol{R}^2}d\eta\int_{I_\sigma}d\sigma'\exp\{ik(\theta_0(s(\sigma),\eta)-\theta_0(s(\sigma'),\eta)$$

$$-\varphi(s(\sigma))+\varphi(s(\sigma')))\}\cdot\chi_1(|\xi(s(\sigma),s(\sigma'),\eta)|)^2$$

$$\times\frac{\partial\xi}{\partial\eta}k^2g(s(\sigma')).$$

En utilisant le raisonnement de § 4 nous pouvons définir U_1 vérifiant

$$(8.4)\qquad \begin{cases} |||A_\varphi U_1|||_m \leq C_{N,m}|p|^{-N}\|g\|_0 \\ U_1|_\Gamma = V_1 g \end{cases}$$

par

$$U_1(p,g:x)=\int_{R^2}d\eta\int_{I_\sigma}d\sigma'\exp[ik\{\psi(x,\eta,p)-\varphi(x)-\theta_0(s(\sigma'),\eta)$$

$$+\varphi(s(\sigma'))\}]G(x,s(\sigma'),\eta,p)k^2g(s(\sigma')),$$

où $\psi(x,\eta,p)$ est une fonction vérifiant

$$\begin{cases} \left(\nabla\psi(x,\eta,p)+\dfrac{\mu}{ik}\nabla\varphi(x)\right)^2\equiv\left(1+\dfrac{\mu}{ik}\right)^2 \quad (\text{mod } |p|^{-\infty}) \quad \text{dans } \bar{\Omega} \\ \psi(x,\eta,p)=\theta_0(s,\eta) \qquad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et $G(x,s',\eta,p)$ vérifie

$$\begin{cases} 2\left(\nabla\psi+\dfrac{\mu}{ik}\nabla\varphi\right)\nabla G+\left(\Delta\psi+\dfrac{\mu}{ik}\Delta\varphi\right)G+\dfrac{1}{ik}\Delta G\equiv 0 \\ \qquad\qquad\qquad (\text{mod } |p|^{-\infty}) \qquad \text{dans } \bar{\Omega} \\ G=\lambda(s(\sigma))\chi_1(|\xi(s,s',\eta)|)^2\dfrac{\partial\xi}{\partial\eta} \qquad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Alors

$$\left.\frac{\partial U_1(p,g:x)}{\partial n}\right|_\Gamma=\int_{R^2}d\eta\int_{I_\sigma}d\sigma'\cdot\exp\{ik(\theta_0(s(\sigma),\eta)-\theta_0(s(\sigma'),\eta)$$

$$-\varphi(s(\sigma))+\varphi(s(\sigma')))\}\cdot\left\{ik\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)G+\frac{\partial G}{\partial n}\right\}k^2g(s(\sigma')),$$

et on a

$$ik\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)=ik\left\{-\sqrt{1-\eta^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}+\mu\frac{1-\nabla\psi_0\cdot\nabla\varphi}{\sqrt{1-\eta^2}}+O(1).$$

En posant

$$b_1=ik\left\{-\sqrt{1-\eta^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\}+\mu\frac{1-\nabla\psi_0\cdot\nabla\varphi}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

$$=b_{11}+ib_{12}$$

nous avons pour $g\in\mathcal{D}(\Gamma_1)$

$$(8.5)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_1(p,g:x)}{\partial n}\Big|_{\Gamma},g\right)_m\geq([-\check{B}_{11}]_F X_1 g, X_1 g)_m-C\|g\|_m^2.$$

Et aussi pour $\gamma\in\mathcal{D}(\Gamma_1)$, $g\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$

$$(8\cdot 6)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_1(p,\gamma^2 g:x)}{\partial n}\Big|_{\Gamma},g\right)_m\geq([-\check{B}_{11}]_F X_1\gamma g, X_1\gamma g)_m-C\|\tilde{\gamma} g\|_m^2.$$

Concernant U_3, on peut construire $U_3(p,g:x)$ vérifiant

$$(8\cdot 7)\qquad \begin{cases} |||A_\varphi U_3|||_m\leq C_{N,m}|p|^{-N}\|g\|_0 \\ U_3|_\Gamma=V_3 g\end{cases}$$

en utilisant le raisonnement de § 7. Alors nous avons pour $g\in\mathcal{D}(\Gamma_1)$

$$(8.8)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_3(p,g:x)}{\partial n}\Big|_{\Gamma},g\right)_m\geq ck\|X_3 g\|_m^2-C\cdot\|g\|_m^2$$

et aussi pour $\gamma\in\mathcal{D}(\Gamma_1)$, $g\in\mathcal{D}(\Gamma_0)$

$$(8.9)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U_3(p,\gamma^2 g:x)}{\partial n}\Big|_{\Gamma},g\right)_m\geq ck\|X_3\gamma g\|_m^2-C\|\tilde{\gamma} g\|_m^2.$$

Alors pour $g\in\mathcal{D}(\Gamma_1)$ définissons $U(p,g:x)$ par

$$U(p,g:x)=\sum_{j=1}^{3}U_j(p,g:x).$$

Il est évident qu'il a lieu d'après (8.1), (8.4), (8.7)

$$|||A_\varphi U(p,g:x)|||_m\leq C_{N,m}|p|^{-N}\|g\|_0$$

$$\|U(p,g:x)|_\Gamma-g\|_m\leq C_{N,m}|p|^{-N}\|g\|_0.$$

Posons

$$(8.10)\qquad B_F=X_1^*B_{2F}X_2+X_2^*[-\check{B}_{11}]_F X_1+ckX_3^*X_3$$

et nous avons pour $g\in\mathcal{D}(\Gamma_1)$

$$(8.11)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U(p,g:x)}{\partial n}\Big|_{\Gamma},g\right)_m\geq(B_F g,g)_m-C_m\|g\|_m^2.$$

Et aussi nous avons

$$(8.12)\qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U(p,\gamma^2 g:x)}{\partial n}\Big|_{\Gamma},g\right)_m\geq(B_F\gamma g,\gamma g)_m-C_m\|g\|_m^2.$$

La définition de $U(p, g: x)$ pour $g \in C^\infty(\Gamma)$ sera faite comme suit: Prenons $\gamma_j(s) \in C^\infty(\Gamma)$, $j=1, 2, \cdots, J$, de telle façon que

$$\sum_{j=1}^{J} \gamma_j(s)^2 = 1 \qquad \text{sur} \quad \Gamma,$$

et que le support de chaque γ_j soit si petit qu'on puisse faire la construction de U dans un voisinage du support. Et pour $g \in C^\infty(\Gamma)$ posons

$$U(p, g: x) = \sum_{j=1}^{J} U(p, \gamma_j^2 g: x).$$

Alors par les considérations jusqu'à maintenant on a

$$|||A_\varphi U(p, g: x)|||_m \leq C_{N,m} |p|^{-N} \|g\|_0$$

$$\|U(p, g: x)|_\Gamma - g\|_m \leq C_{N,m} |p|^{-N} \|g\|_0.$$

Et

$$(8.13) \qquad -\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U(p, g: x)}{\partial n}\Big|_\Gamma, g\right)_m$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \left\{-\mathrm{Re}\left(\frac{\partial U(p, \gamma_j^2 g: x)}{\partial n}\Big|_\Gamma, g\right)_m\right\}$$

$$\geq \sum_{j=1}^{J} \mu \cdot \inf \frac{(1 - \nabla\psi_0^+ \cdot \nabla\varphi)}{\sqrt{1-\eta^2}} \|\gamma_j g\|_m^2 - C_m \|g\|_m^2$$

$$\geq \mu \cdot \inf \frac{(1 - \nabla\psi_0^+ \cdot \nabla\varphi)}{\sqrt{1-\eta^2}} \|g\|_m^2 - C_m \|g\|_m^2,$$

puisqu'il a lieu

$$X_1^* [\check{B}_{11}]_F X_1 \geq \mu \cdot X_1^* \left(\inf_{|\eta| \leq \alpha_0} \frac{(1 - \nabla\psi_0^+ \cdot \nabla\varphi)}{\sqrt{1-\eta^2}}\right) X_1$$

$$X_2^* B_{2F} X_2 \geq \frac{\mu}{2\sqrt{\alpha_0}} X_2^* X_2.$$

En tenant compte que B_φ s'exprime comme

$$B_\varphi(p, \partial/\partial x) = \frac{\partial}{\partial n} + v\frac{\partial}{\partial s} + p(v \cdot \nabla\varphi + c) + d$$

où $v\dfrac{\partial}{\partial s}$ est un champ de vecteur réel sur Γ,

$$-\mathrm{Re}(B_\varphi U(p, g: x), g)_m \geq (B_F g, g)_m - \mu((b \cdot \nabla\varphi + c) g, g)_m - C_m \|g\|_m^2$$

$$=((B_F-\mu(b\cdot\nabla\varphi+c))g,g)_m-C_m\|g\|_m^2.$$

Notons qu'il a lieu l'estimation

$$\begin{aligned}&B_F-\mu\cdot(b\cdot\nabla\varphi+c)\\ &\geq\mu\cdot\inf_{\substack{|\eta|<1\\x\in\Gamma}}\left\{\left(\frac{1-\nabla\psi_0^+(x,\eta)\cdot\nabla\varphi(x)}{\sqrt{1-\eta^2}}\right)-b\cdot\nabla\varphi-c\right\}\\ &\geq\mu\cdot\inf_{\substack{|\eta|<1\\x\in\Gamma}}\left\{\frac{1-\eta\cdot\varphi_s}{\sqrt{1-\eta^2}}-v\cdot|\varphi_s|-c\right\}\\ &\geq\mu\cdot\inf_{x\in\Gamma}\{\sqrt{1-|\varphi_s|^2}-v\cdot|\varphi_s|-c\}.\end{aligned}$$

Admettons le

Lemme 8.1.

$$c(\varphi)=\inf_{x\in\Gamma}(\sqrt{1-|\varphi_s|^2}-v\cdot|\varphi_s|-c)$$

est positif lorsque

$$\sup|\varphi_s|<\inf_{s\in\Gamma}\frac{-c(s)v(s)+\sqrt{1+|v(s)^2-c(s)^2|}}{1+v(s)^2}.$$

Donc il a lieu pour toute $g\in C^\infty(\Gamma)$

$$-\mathrm{Re}(B_\varphi(p,\partial/\partial x)U(p,g:x),g)_m\geq(c_0(\varphi)\mu-C_m)\|g\|_m^2.$$

C'est ainsi que nous avons démontré le théorème 2.1 au cas où $0<\mu<k^{1/2}$. Nous omettons la démonstration du théorème 2.1 pour p tel que $|k|^{1/2}\leq\mu$.

§ 9. La Nécessité de la Condition (1.3) et sur la Vitesse Propagatrice

Pour démontrer la nécessité de la condition (1.3), nous n'avons qu'à vérifier que le théorème de Kajitani [5] est applicable. Mais afin d'appliquer sa méthode pour la considération de la vitesse propagatrice nous donnons d'abord une démonstration de la nécessité de (1.3) selon la méthode de Kajitani.

Supposons que $c(s_0)\geq 1$ pour $s_0\in\Gamma$ et que le problème mixte (P) soit bien posé au sense de C^∞ et ait la vitesse finie de propagation. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage dans $\boldsymbol{R}^3$ de s_0. Ψ est une transformation définie dans $\mathcal{U}$ telle que

$$\Psi(s_0)=0$$

$$\Omega\cap\mathcal{U}\to\boldsymbol{R}^3_+=\{(x_1,x_2,x_3)\,;\,x_3>0\}$$

$$\Gamma\cap\mathcal{U}\to\{x;\,x_3=0\}.$$

Désignons par $A(x,\partial/\partial x,\partial/\partial t)$ et $\widetilde{B}(x,\partial/\partial x,\partial/\partial t)$ les opérateurs transformés par Ψ de $\Box$ et de B. On déduit de la supposition sur (P) que le problème mixte pour $(A,\widetilde{B})$ dans $\boldsymbol{R}^3_+$ est locallement solvable dans un voisinage de l'origine et qu'il a une vitesse propagatrice v_0. Posons

$$\Lambda(x_0,t_0)=\{(x,t)\,;\,|x-x_0|\leq v_0(t_0-t),\,0\leq t\leq t_0,\,x_3\geq 0\}$$

$$D(x_0,t_0)=\{(x,0)\,;\,|x-x_0|\leq v_0t_0,\,x_3\geq 0\}$$

$$G(x_0,t_0)=\{(x,t)\,;\,(x,t)\in\Lambda(x_0,t_0),\,x_3=0\}.$$

D'après la supposition et l'appendice de Mizohata [10], il a lieu que pour tout $m\geq 0$ et pour tout $(x,t)\in\Psi(\bar{\Omega}\cap\mathcal{U})\times\{t>0\}$

$$|u|_{m,\Lambda(x,t)}\leq C_m\{|Au|_{m',\Lambda(x,t)}+|\widetilde{B}u|_{m',G(x,t)}+|u|_{m',D(x,t)}\} \tag{9.1}$$

où $|u|_{m,\omega}=\sup\limits_{\substack{x\in\omega\\|\alpha|\leq m}}|D^\alpha u|$ et m' est une constante dépende de m et indépendente de (x,t).

Posons

$$A(n)=A\Big(\frac{x}{n},n\frac{\partial}{\partial x},n\frac{\partial}{\partial t}\Big)$$

$$B(n)=\widetilde{B}\Big(\frac{x}{n},n\frac{\partial}{\partial x},n\frac{\partial}{\partial t}\Big),\quad n=1,2,\cdots.$$

Alors pour (x_0,t_0) fixé, on a

$$|u|_{m,\Lambda(x_0,t_0)}\leq C_m n^{m'}\{|A(n)u|_{m',\Lambda(x_0,t_0)}+|B(n)u|_{m',G(x_0,t_0)} \tag{9.2}$$
$$+|u|_{m',D(x_0,t_0)}\},\ \forall u\in C^\infty(\overline{\boldsymbol{R}^3_+}\times[0,\infty)).$$

En effet, l'estimation (9.1) en prenant $(x,t)=\Big(\dfrac{x_0}{n},\dfrac{t_0}{n}\Big)$ résulte (9.2) d'après le changement des variables $x'=nx$, $t'=nt$.

Soit $c(s_0)=c\geq 1$. Prenons

$$\eta_1=0,\ \eta_2=\sqrt{c^2-1},\ p=1,\ \xi=-c$$

$$\psi(x,t)=(\xi x_3+i\eta_2 x_2+t)$$

et

$$u_n^N(x,t)=\sum_{j=1}^{N}\exp(n\psi(x,t))\cdot n^{-j}w_j(x,t).$$

Par les développement de Taylor des coefficients de $A(n)$ et de $B(n)$ nous avons

$$A(n)=n^2\cdot\sum_{j=0}^{N}A_j\left(x,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)n^{-j}+\tilde{L}_N\left(\frac{x}{n},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)n^{-N+2}$$

$$B(n)=n\cdot\sum_{j=0}^{N}B_j\left(x,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)n^{-j}+\tilde{B}_N\left(\frac{x}{n},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)n^{-N+1}.$$

Notons que $A_0=\Box$.

Et sans géner la généralité on peut supposer que B s'exprime sous la forme

$$B_0=\frac{\partial}{\partial x_3}+b\frac{\partial}{\partial x_1}+c\frac{\partial}{\partial t}.$$

A_j sont des opérateurs différentiels d'ordre 2 à coefficients polynome et B_j d'ordre 1 à coefficients polynome.

$$A_0(\exp(n\psi)w_j)=\exp(n\psi)\left\{2n\left(\xi\frac{\partial w_j}{\partial x_3}+i\eta_2\frac{\partial w_j}{\partial x_2}+p\frac{\partial w_j}{\partial t}\right)+\Box w_j\right\}$$

et pour $l\geq 1$

$$A_l(\exp(n\psi)w_j)=\exp(n\psi)\{n^2A_{l0}(w_j)+nA_{l1}(w_j)+A_{l2}(w_j)\}$$

où A_{lm}, $m=0,1,2$ sont des opérateurs différentiels à coefficients polynome d'ordre m. Posons

$$K=2\left(\xi\frac{\partial}{\partial x_3}+i\eta_2\frac{\partial}{\partial x_2}+p\frac{\partial}{\partial t}\right)+A_{10}.$$

Alors

$$\begin{aligned}A(n)(u_n^N)&=\exp(n\psi)\cdot n^2[nKw_0+(Kw_1+A_{20}w_0+A_{11}w_0)\\&+n^{-1}\{Kw_2+A_{20}w_1+A_{11}w_1+A_{30}w_0+A_{21}w_0+A_{12}w_0\}\\&+\cdots+n^{-j}\{Kw_{j+1}+(A_{20}+A_{11})w_j+\cdots\end{aligned}$$

$$+ (A_{j+20}+A_{j+11}+A_{j2})\, w_0\} + \cdots] + n^{-N}\tilde{A}_N(u_n^N).$$

Par la même considération on a

$$B(n)\, u_n^N = \exp(n\psi)\, [(B_0 w_0 + B_{10} w_0) + n^{-1}\{(B_0 w_1 + B_{10} w_1) + (B_{20} w_0 + B_{11} w_0)\} + \cdots] + \tilde{B}_N u_n^N.$$

Donc nous cherchons v_j de telle façon que

$$(9.3)\qquad \begin{cases} [B_0 w_0 + B_{10} w_0]_{x_3=0} = 0, \\ K w_0 = 0 \end{cases}$$

et que pour $j \geq 0$

$$(9.4)\qquad K w_{j+1} = -\{A_{20} w_j + A_{11} w_j + \cdots + (A_{j+20} + A_{j+11} + A_{j2})\, w_0\}$$

$$B_0 w_{j+1} + B_{10} w_{j+1} = -\{(B_{20} + B_{11})\, w_j + \cdots + (B_{j+20} + B_{j+11})\, w_0\}.$$

La substitution de la relation

$$\left[\frac{\partial w_0}{\partial x_3}\right]_{x_3=0} = \left[-b\frac{\partial w_0}{\partial x} - c\frac{\partial w_0}{\partial t} - b_{10}(x,t)\, w_0\right]_{x_3=0},$$

qui se déduit de $(B_0+B_{10})\, w_0|_{x_3=0}=0$, à $Kw_0=0$ nous donne

$$(9.5)\qquad 2(-\xi c+p)\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} - 2\xi b\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_1} + 2i\eta_2\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_2} - \xi b_{10}\tilde{w} + A_{10}\tilde{w} = 0$$

où $\tilde{w} = w_0(x,t)|_{x_3=0}$. Le théorème de Cauchy-Kowalevski permit de l'existence de $\tilde{w}(x_1, x_2, t)$ vérifiant (9. 5) dans un voisinage de l'origine et $\tilde{w}(x_1, x_2, 0) = 1$, puisque $-\xi c + p \neq 0$. En utilisant encore le théorème de Cauchy-Kowalevski nous avons $v_0(x,t)$ satisfaisant à

$$\begin{cases} K w_0 = 0 \\ w_0|_{x_3=0} = \tilde{w}(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

dans un voisinage de l'origine. D'après la relation (9. 5) que $\tilde{w}$ vérifie on voit que la fonction w_0 vérifie (9. 3).

Par la même processus on peut trouver $w_j(x,t)$, $j=1,2,\cdots,N$ vérifiant (9. 4). Puisque $w_0(0,0)=1$ on trouve $t_N>0$, $x_{1N}, x_{2N}, c_N>0$ tels que

$$|u_n^N(x_N, t_N)| \geq c_N\cdot \exp(nt_N)$$

$$|A(n)\, u_n^N|_{m', A(x_N, t_N)} \leq C_{N,m}\cdot n^{-N+m'}\cdot \exp(nt_N)$$

$$|B(n)\,u_n^N|_{m',G(x_N,t_N)} \leq C_{N,m} n^{-N+m'} \cdot \exp(nt_N)$$

$$|u_n^N|_{m',D(x_N,t_N)} \leq C_{N,m} n^{m'},$$

pour tout $n \geq 0$, où $x_N = (x_{1N}, x_{2N}, 0)$.

En choisissant N suffisamment grand par rapport à m', qui est déterminé par $m=0$, la substitution des estimations au-dessus résulte

$$c_N \cdot \exp(nt_N) \leq C_{N,m} \cdot n^{-N+m'} \exp(nt_N) + Cn^{m'}, \quad \forall n \geq 1.$$

C'est une contradiction.

C'est ainsi que nous avons montré la nécessite de la condition (1. 3).

Et puis nous allons démontrer que, lorsque la condition (1. 3) a lieu, la vitesse maximume est au moins (1. 4). Il suffit de considérer le cas où

$$\sup_{s\in\Gamma} \frac{1+v^2}{-cv+\sqrt{1+|v^2-c^2|}} = \frac{1+v(s_0)^2}{-c(s_0)v(s_0)+\sqrt{1+v(s_0)^2-c(s_0)^2}} > 1$$

puisque le résultat de Miyatake [9] montre que la vitesse est égale à 1 si $v(s) \leq -c(s)$ sur Γ. Supposns que

$$\tilde{v}_0 < \frac{1+v(s_0)^2}{-c(s_0)v(s_0)+\sqrt{1+v(s_0)^2-c(s_0)^2}} \tag{9. 6}$$

où $\tilde{v}_0$ désigne la vitesse maximume du problème (P).

Après la transformation Ψ nous pouvons trouver une constante φ vérifiant

$$v_0^{-1} > \varphi > \frac{-c(s_0)v(s_0)+\sqrt{1+v(s_0)^2-c(s_0)^2}}{1+v(s_0)^2} \tag{9·7}$$

où v_0 désigne la vitesse maximume du problème pour $A, \tilde{B}$ dans un voisinage de l'origine. Alors l'inégarité droite de (9. 7) permit de trouver des constante réelles $\eta_2 > 0$, $\xi < 0$ telles que

$$(1-\varphi^2) - (\xi^2 + (i\eta_2)^2) = 0$$

$$\xi + (c - b\varphi) = 0, \text{ où } b = v(s_0) \text{ et } c = c(s_0).$$

Posons

$$\psi(x, t) = \xi x_3 + i\eta_2 x_2 + (t - \varphi x_1).$$

Grâce à

$$(\nabla_x\psi)^2=\psi_t^2$$

et à

$$B_0\psi=0,$$

nous pouvons construire une fonction u_n^N sous la forme

$$u_n^N=\exp(n\psi)\sum_{j=0}^{N} w_j(x,t)\,n^{-j}$$

qui est définie dans $\mathcal{U}_N\times[-t_N,t_N]$ où $\mathcal{U}_N$ est un voisinage de l'origine et $t_N>0$ et satisfait à

$$|u_n^N|\geq c_N\cdot\exp(n(t-\varphi x_1+\xi x_3)).\quad \forall(x,t)\in\mathcal{U}_N\times[-t_N,t_N]$$

$$|D^\alpha A(n)u_n^N|\leq\exp(n(t-\varphi x_1+\xi x_3))\cdot C_{N,\alpha}n^{-N+|\alpha|+2},$$

$$\forall(x,t)\in\mathcal{U}_N\times[-t_N,t_N]$$

$$|D^\alpha B(n)u_n^N|\leq\exp(n(t-\varphi x_1))\cdot C_{N,\alpha}n^{-N+|\alpha|+1},$$

$$\forall(x,t)\in\mathcal{U}_N\cap\{x_3=0\}\times[-t_N,t_N].$$

Prenons $x_{10}, t_0>0$ de façon que

$$(x_0,t_0)=(x_{10},0,0,t_0)\in\mathcal{U}_N\times[0,t_N]$$

$$v_0t_0<x_{10}<\frac{1}{\varphi}t_0.$$

Pour tout $(x_1,x_2,x_3,t)\in\Lambda(x_0,t_0)$ il a lieu d'après (9.7)

$$t-\varphi x_1+\xi x_3\leq t_0-\varphi x_{10}.$$

Donc nous avons

$$|A(n)u_n^N|_{m',\Lambda(x_0,t_0)}\leq\exp(n(t_0-\varphi x_{10}))\cdot C_{N,m'}n^{-N+m'+2}$$

$$|B(n)u_n^N|_{m',G(x_0,t_0)}\leq\exp(n(t_0-\varphi x_{10}))\cdot C_{N,m'}n^{-N+m'+1}$$

$$|u_n^N|_{m',D(x_0,t_0)}\leq C_N\cdot n^{m'+N}.$$

D'autre part

$$|u_n^N(x_0,t_0)|\geq c_N\cdot\exp(n(t_0-\varphi x_{10})).$$

La substitution des estimations au-dessus à (9.2) donne une contradiction si l'on prend N assez grand. Ainsi nous avons démontré que la vitesse maximume de (P) est au moins (1.4). Mais nous avons déjà montré dans § 2 que la vitesse maximume est majorée par (1. 4). Donc la vitesse maximume est égale à (1. 4).

Références

[1] Erdélyi, A., *Asymptotic expansions,* Dover Publ., New York, 1965.

[2] Ikawa, M., Mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition, *Osaka J. Math.*, **7** (1970), 495-525.

[3] Ikawa, M., Sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **10** (1975), 669-690.

[4] Ikawa, M., Problèmes mixtes pour l'équation des ondes, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **12** (1975), 55-122.

[5] Kajitani, K., A necessary condition for the well posed hyperbolic mixed problem with variable coefficients, *J. Math. Kyoto Univ.*, **14** (1974), 231-242.

[6] Kumano-go, H., *Opérateurs Pseudo-différentiels* (en japonais), Iwanami Shoten, Tokyo, 1975.

[7] Ludwig, D., Uniform asymptotic expansion of the field scattered by a convex object at high frequencies, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 103-138.

[8] Miller, J. C. P., *Airy integral,* Cambridge, 1946.

[9] Miyatake, S., Mixed problem for hyperbolic equation of second order, *J. Math. Kyoto Univ.*, **13** (1973), 435-487.

[10] Mizohata, S., On evolution equations with finite propagation speed, *Israel J. Math.*, **13** (1972), 173-187.

[11] Sakamoto, R., Mixed problems for hyperbolic equations I, *J. Math. Kyoto Univ.*, **10** (1970), 349-373.