Publ. RIMS, Kyoto Univ.
13 (1977), 681-686

Modifications Continues des Variétés de Stein

Par

Tetsuo UEDA*

§ 1. Modifications Continues de Dimension 2

Une modification continue est définie par un quintuplet $T=(\widetilde{M}, S, \tau, N, M)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(1) $\widetilde{M}$ et M sont des variétés analytiques complexes.

(2) S est un ensemble analytique de codimension 1 dans $\widetilde{M}$.

(3) N est un ensemble mince dans M.

(4) τ est une application holomorphe de $\widetilde{M}$ dans M, telle que sa restriction à $\widetilde{M}\backslash S$ soit un homéomorphisme de $\widetilde{M}\backslash S$ sur $M\backslash N$. (Voir [1])

Le présent mémoire a pour but de chercher, dans le cas de dimension 2, des conditions pour que $\widetilde{M}$ soit une variété de Stein.

Si $\widetilde{M}$ est une variété de Stein, N est un ensemble analytique de codimension 1 dans M. En effet, comme $\widetilde{M}$ est une variété de Stein, $\widetilde{M}\backslash S\cong M\backslash N$ le sont aussi. $M\backslash N$ est alors pseudoconvexe dans M. Or N est mince par définition. D'après le théorème de continuité, N est un ensemble analytique de codimension 1.

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que $\widetilde{M}\backslash S$ soit le domaine maximum dans lequel τ est injective. Une telle modification est dite essentielle. Dans tout ce qui suit, nous supposerons que T est une modification continue essentielle de dimension 2: $\dim \widetilde{M}=\dim M=2$.

T est dite de type fini, si S consiste en un nombre fini de composantes irréductibles. T est appelée σ-modification, si $\widetilde{M}$ est obtenue à partir de M par une itération de σ-processus en nombre fini de fois. Une σ-modification est de type fini. Une modification de type fini est considérée comme une restriction d'une σ-modification d'après le théorème suivant:

Communiqué par S. Nakano, novembre le 9, 1976.
* Département de Mathématique, Université de Kyoto, Kyoto 606, Japon.

Théorème. (Stoll, [3] Satz 4.1). *Soit T une modification de type fini. Alors il existe une σ-modification $\Lambda=(M^*, S^*, \lambda, \tau(S), M)$ et une application holomorphe injective ι: $\widetilde{M}\to M^*$ telle que $\lambda\circ\iota=\tau$.*

En ce moment, si l'on suppose que $\widetilde{M}$ soit une variété de Stein, $N^*=M^*\backslash\iota(\widetilde{M})$ est un ensemble analytique de codimension 1 dans M^* d'après le théorème de continuité. Comme on a $S\cong\lambda^{-1}(N)\backslash N^*$, toute composante de S est analytiquement homéomorphe à la partie de la sphère de Riemann obtenue par enlèvement d'un nombre fini de points.

Étant donnée une modification, on peut former une modification de type fini, en détachant de $\widetilde{M}$ presque toutes les composantes irréductibles de S sauf un nombre fini d'elles. Ce détachement ne change pas la propriété de Stein. On en conclut l'enoncé suivant: *Si $\widetilde{M}$ est une variété de Stein, toute composante irréductible de S est analytiquement homéomorphe a une courbe rationnelle pointée en un nombre fini de points.*

§ 2. Modifications Continues de Dimension 2 d'Ordre 1

Nous envisageons, dans cette section, le cas où toute composante irréductible S_j de S est obtenue par un σ-processus au point $\tau(S_j)$ de M. Nous appelons une telle modification d'ordre 1.

Théorème 1. *Soit $T=(\widetilde{M}, S, \tau, N, M)$ une modification continue essentielle de dimension 2 d'ordre 1. Supposons que les conditions suivantes sont remplies:*

i) *M est une variété de Stein.*

ii) *N est un ensemble analytique de codimension 1 dans M.*

iii) *Toute S_j est analytiquement homéomorphe à $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^1\backslash\{\infty\}$.*

iv) *L'ensemble $\tau(S)$ est situé sur la portion régulière de N.*

v) *L'ensemble $\tau(S)$ est discret dans N.*

Alors $\widetilde{M}$ est une variété de Stein.

Pour montrer le théorème, commençons par construire une fonction méromorphe f dans M qui admet ses poles d'ordre 1 justement sur N, et s'exprime en tout point $\tau(S_j)$ sous la forme $f=\frac{y}{x}$ par rapport à un système de coordonnées locales (x, y) convenable tel que $N=\{x=0\}$ et $\tau(S_j)=(0,0)$.

Soit $\{(\phi_i, U_i)\}$ une donnée du deuxième problème de Cousin qui définit N: ϕ_i s'annulent avec l'ordre 1 sur $N\cap U_i$, $\{U_i\}$ étant un recouvrement ouvert de M. Posons $u_{ij}=\phi_i/\phi_j$ dans $U_i\cap U_j$. Pour le cocycle $\{(u_{ij}, U_i\cap U_j\cap N)\}\in Z^1(N, \mathcal{O}^*)$, on peut trouver $\{(a_i, U_i\cap N)\}\in C^0(N, \mathcal{O}^*)$ tel que $a_i/a_j=u_{ij}$ dans $U_i\cap U_j\cap N$, puisque $H^1(N, \mathcal{O}^*)=0$. En multipliant a_i par une fonction holomorphe sur N convenable, on peut former un système $\{(b_i, U_i\cap N)\}$ tel que chaque b_i admette comme zéros d'ordre 1 tous les points de $\tau(S)$ dans $U_i\cap N$. En prolongeant b_i en une fonction holomorphe $\tilde{b}_i$ dans U_i, on a un système $\{(\tilde{b}_i, U_i)\}$, tel qu'on ait $\tilde{b}_i|_{U_i\cap N}=b_i$ et $\tilde{b}_i/\tilde{b}_j=u_{ij}=\phi_i/\phi_j$ sur $U_i\cap U_j\cap N$. $\{(\tilde{b}_i/\phi_i, U_i)\}$ est une donnée du premier problème de Cousin, dont la résolution f est manifestement une fonction voulue.

Considérons l'adhérence G dans $M\times \boldsymbol{C}$ de l'ensemble

$$\{(p, f(p)); p\in M\backslash N\}$$

G est une sous-variété régulièrement plongée dans $M\times\boldsymbol{C}$, et par conséquent une variété de Stein. On a, d'une façon canonique, une application holomorphe injective $\tau_1: \widetilde{M}\to G$ où $G\backslash\tau_1(\widetilde{M})$ est vide ou un ensemble analytique de codimension 1 dans G. $\widetilde{M}$ est donc une variété de Stein.

c.q.f.d.

Theorémè 2. *Soit T une modification continue de dimension 2. S'il existe une suite de composantes irréductibles $\{S_\nu\}_\nu$ de S, telle que* i) *toute S_ν soit d'ordre* 1, ii) *les $\tau(S_\nu)$ tendent vers un point régulier p de N, alors $\widetilde{M}$ ne peut être une variété de Stein.*

Soit U un voisinage de p dans M avec un système de coordonnées locales $(x, y): U=\{|x|<1, |y|<1\}$, $N\cap U=\{x=0, |y|<1\}$. $(x(p), y(p))=(0,0)$, $(x(\tau(S_\nu)), y(\tau(S_\nu)))=(0, y_\nu)$.

Soit K un compact dans $\widetilde{M}$ de la forme: $K=\{q\in\tau^{-1}(U): r'\leqq|x(\tau(q))|\leqq r, |y(\tau(q))|\leqq r\}$, r et r' étant des nombres réels tels que $0<r'<r<1$. On va montrer que l'enveloppe $\hat{K}$ de K par rapport aux fonctions holomorphes dans $\widetilde{M}$: $\hat{K}=\{q\in M: |f(q)|\leqq \max_{q'\in K}|f(q')|$ pour toute f holomorphe dans $\widetilde{M}\}$, n'est pas compacte, ce qui prouvera que $\widetilde{M}$ n'est pas holomorphiquement convexe.

Considérons, pour chaque ν, l'ensemble analytique dans $\tau^{-1}(U)$ donné par $\{q\in\tau^{-1}(U): y(\tau(q))=y_\nu\}$, qui se compose de deux composantes irréductibles, dont l'une est S_ν. Nous notons l'autre L_ν. L_ν est homéomorphe par la fonction $x\circ\tau$ à un disque $\{|x|<1\}$ dans le plan complexe. L_ν et S_ν se recontrent en un point q_ν. Or, pour tout ν tel que $|y(\tau(q_\nu))|\leqq r$, q_ν est entouré dans L_ν par l'ensemble $K\cap L_\nu$. Par le principe du maximum, q_ν est compris dans $\hat{K}$. $\hat{K}$ n'est pas alors compacte, puisqu'elle comprend les points q_ν qui forment un ensemble discret dans $\widetilde{M}$. c.q.f.d.

Soit T une modification continue essentielle de dimension 2 d'ordre 1 qui remplit les conditions i)$\sim$iv) du théorème 1. Pour que $\widetilde{M}$ soit une variété de Stein, il faut que $\tau(S)$ ne s'accumule à aucun point régulier de N, d'après le théorème 2. Qu'arrivera-t-il dans le cas où $\tau(S)$ s'accumule seulement à des points singuliers de N? L'auteur n'arrive pas encore à une solution générale. Nous indiquons que la condition est assez délicate, en en donnant deux exemples: pour l'un $\widetilde{M}$ est une variété de Stein et pour l'autre elle ne l'est pas.

Exemples. Soient Δ un dicylindre $\{|x|<1, |y|<1\}$ dans l'espace $\boldsymbol{C}^2(x, y)$ et $N=\{xy=0\}\cap\Delta$. Soit $T=(\tilde{\Delta}, S, \tau, N, \Delta)$ une modification continue essentielle d'ordre 1 qui remplit les conditions i)$\sim$iv) du théorème 1 et en outre la condition suivante:

v') *$\tau(S)$ est discret dans la portion régulière de N.*

Soient S_j' [resp. S_j''] les composantes irréductibles de S telles que $\tau(S_j')=(x_j, 0)$ [resp. $(S_j'')=(0, y_j)$], $(j=1, 2, \cdots)$.

Si un au moins des ensembles $\{\tau(S_j')\}$ et $\{\tau(S_j'')\}$ ne s'accumule pas à $(0,0)$, $\tilde{\Delta}$ est une variété de Stein.

En effet, supposons que $\{\tau(S_j')\}$ ne s'accumule pas à $(0,0)$. Soit Δ^* une variété complexe obtenue à partir de Δ par un σ-processus à chaque point de $\{\tau(S_j')\}$. Soient λ: $\Delta^*\to\Delta$ et μ: $\tilde{\Delta}\to\Delta^*$ les applications définies d'une façon naturelle. Posons $\Delta'=\Delta^*\backslash\overline{\lambda^{-1}(\{y=0\}\backslash\{\tau(S_j')\})}$. $\lambda|_{\Delta'}:\Delta'\to\Delta$ engendre une modification qui satisfait aux conditions du théorème 1. Δ'

est donc une variété de Stein. μ: $\tilde{\Delta}\to\Delta'$ $(\mu(\tilde{\Delta})\subseteq\Delta')$ engendre aussi une modification à laquelle s'applique le théorème 1. D'où vient l'énoncé.

Le cas qui nous intéresse est celui où $\{\tau(S_j')\}$ et $\{\tau(S_j'')\}$ s'accumulent tous deux vers $(0,0)$.

a) *S'il existe des suites partielles* $\{x_{j(\nu)}\}_\nu$ et $\{y_{k(\nu)}\}_\nu$ *telles que* $x_{j(\nu)}\to 0$, $y_{k(\nu)}\to 0$ *et* $\dfrac{y_{k(\nu)}}{x_{j(\nu)}}\to c$, *avec* $\nu\to\infty$, *c étant un nombre complexe différent de zéro, alors* $\tilde{\Delta}$ *n'est pas une variété de Stein.*

La démonstration est pareille à celle du théorème 2.

Prenons un ensemble dans $\tilde{\Delta}$ de la forme

$$\{y(\tau(p))+cx(\tau(p))=0\,,\ |x(\tau(p))|=r\},\ 0<r<\min\left\{1,\frac{1}{|c|}\right\},$$

et soit K son voisinage compact. On va montrer que l'enveloppe $\hat{K}$ de K par rapport aux fonctions holomorphes dans $\tilde{\Delta}$ n'est pas compacte. Soit, pour chaque ν, L_ν l'ensemble analytique qui correspond par τ à la droite complexe passant par $(x_{j(\nu)},0)$ et $(0,y_{k(\nu)})$. L_ν rencontre $S'_{j(\nu)}$ en un point p_ν' et $S''_{k(\nu)}$ en un point p_ν''. Pour ν suffisamment grand, p_ν' et p_ν'' sont entourés dans L_ν par l'ensemble $K\cap L_\nu$. p_ν' et p_ν'' sont donc compris dans $\hat{K}$, ce qui montre que $\hat{K}$ n'est pas compacte. c.q.f.d.

b) *Si, pour* $\{x_j\}$ *et* $\{y_j\}$, *les suites* $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{y_1\cdots y_n}\right\}$ *et* $\left\{\dfrac{y_n}{x_1\cdots x_n}\right\}$ *tendent à la fois vers zéro,* $\tilde{\Delta}$ *est une variété de Stein.*

Pour le voir, prenons d'abord une suite de nombres positifs $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, décroissant et tendant vers zéro, telle que $\left|\dfrac{y_n}{x_1\cdots x_n}\right|<r_{2n-1}$ et $\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_1\cdots y_n}\right|<r_{2n}$ pour tout n. Formons une suite de domaines $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans $\tilde{\Delta}$:

$$D_{2n-1}=\left\{|f_n|<\frac{1}{r_{2n-1}},\ |g_n|<\frac{1}{r_{2n-1}}\right\}$$

$$D_{2n}=\left\{|f_{n+1}|<\frac{1}{r_{2n}},\ |g_n|<\frac{1}{r_{2n}}\right\}$$

où
$$f_n(p)=\frac{1}{y\circ\tau(p)}\prod_{j=1}^{n}\frac{x\circ\tau(p)-x_j}{1-\bar{x}_jx\circ\tau(p)}\,,$$

et
$$g_n(p)=\frac{1}{x\circ\tau(p)}\prod_{j=1}^{n}\frac{y\circ\tau(p)-y_j}{1-\bar{y}_jy\circ\tau(p)}\,.$$

On remarque que ces fonctions f_n et g_n sont méromorphes et n'admettent aucun point d'indétermination dans $\tilde{\Delta}$. On voit aisément que $D_n \subset D_{n+1}$ et que $\bigcup_n D_n = \tilde{\Delta}$.

De plus, les fonctions qui definissent D_n sont holomorphes dans D_{n+1}. En effet, envisageons une paire D_{2n-1} et D_{2n}, par exemple. f_n admet les pôles sur S_j' $(j \geqq n+1)$ et g_n sur S_j'' $(j \geqq n+1)$. S_j' $(j \geqq n+2)$ et S_j'' $(j \geqq n+1)$, étant les pôles de f_{n+1} et g_n respectivement, sont à l'extérieur de D_{2n}. Or g_n prend la valeur $\frac{1}{x_{n+1}} \prod_{j=1}^{n} (-y_j)$ sur S'_{n+1}, dont le module est $\left| \frac{y_1 \cdots y_n}{x_{n+1}} \right| > \frac{1}{r_{2n}}$ par hypothèse, ce qui montre que S'_{n+1} est à l'extérieur de D_{2n}. Il en est de même pour toute paire D_{2n} et D_{2n+1}.

$\hat{\Delta}$ est ainsi limite d'une suite croissante de variétés de Stein $\{D_n\}$, tout D_n étant convexe par rapport aux fonctions holomorphes dans D_{n+1}. $\hat{\Delta}$ est donc une variété de Stein. c.q.f.d.

Références

[1] Grauert, H. und Remmert, R., Zur Theorie der Modifikationen. 1. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume, *Math. Ann.*, **129** (1955), 274-296.

[2] Stoll, W., Über meromorphe Modifikationen. IV. Die Erzeugung analytischer und meromorpher Modifikationen zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten durch σ-Prozesse, *Math. Ann.*, **130** (1955), 147-182.

[3] ———, Über meromorphe Modifikationen. V. Die Erzeugung analytischer und meromorpher Modifikationen durch σ-Prozesse, *Math. Ann.*, **130** (1955), 272-316.