Publ. RIMS, Kyoto Univ.
14 (1978), 643-654

Immersion Analytique d'une Famille de Surfaces de Riemann Ouvertes

Par

Yasuichiro NISHIMURA*

§ 1. Introduction

Soit $B=\{|z|<\lambda\}$ un polycylindre dans C^m de m variables complexes $z_1, \ldots, z_m$ $(m\geqq 1)$, où $|z|=\mathrm{Max}\{|z_i|; 1\leqq i\leqq m\}$ et $\lambda>0$. Nous considérons une famille holomorphe de surfaces de Riemann ouvertes sur B. (Voir [7].) Elle est formée d'une variété analytique complexe D de dimension $m+1$, et d'une application holomorphe surjective $\pi: D\rightarrow B$, telles que, pour tout $z\in B$, $D_z=\pi^{-1}(z)$ soit de dimension pure 1 et non compact. On pose ici les hypothèses suivantes:

1° D est une variété de Stein connexe.

2° La matrice fonctionnelle de π est de rang m partout dans D. Pour tout $z\in B$, D_z est un ensemble analytique irréductible dans D.

3° Pour tout $z\in B$, D_z est une surface de Riemann ouverte de type fini (g, n), où g est le genre de D_z, et n est le nombre des composantes de frontière de D_z, et où g et n sont indépendants du choix de z.

Pour un nombre positif $r<\lambda$, on pose $B(r)=\{|z|<r\}$, $\overline{B(r)}=\{|z|\leqq r\}$, $D(r)=\pi^{-1}(B(r))$ et $\overline{D(r)}=\pi^{-1}(\overline{B(r)})$. Cela posé, on peut énoncer le

Théorème 1. *Supposons que la famille (D, π, B) satisfait aux conditions 1°~3°. Alors, il existe un nombre positif $r<\lambda$ et une fonction holomorphe h dans $D(r)$ tels que $\pi\times h: D(r)\rightarrow B(r)\times C^1$ soit une immersion analytique. (C'est-à-dire que sa matrice fonctionnelle*

---

* Communiqué par S. Nakano, juin le 16, 1977. Revu octobre le 24, 1977.
Section des Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Kyoto, Kyoto 606, Japon.

soit de rang $m+1$ *partout dans* $D(r)$.)

Ce théorème est une généralisation d'un résultat de Nishino [4] pp. 231-236, où il considérait le cas où $g=0$ et $n=1$.

Le but de cette note est de le démontrer selon la méthode de Gunning-Narasimhan [1]. Pour appliquer cette méthode à notre cas, nous préparons un théorème d'approximation ——— un théorème de type de Mergelyan-Bishop. (Voir § 3.)

§ 2. Construction des Domaines Qui Sont Equivalents aux Domaines Produits

Nous utilisons le mot X-convexe comme ci-dessous. Soit X une variété de Stein. Un domaine G dans X est dit X-convexe, si, pour tout compact K dans G, $\hat{K}\Subset G$ où $\hat{K}$ signifie l'envellope d'holomorphie de $\hat{K}$ par rapport à X. Un compact K dans X est dit X-convexe, si $\hat{K}=K$.

Nous allons construire deux domaines qui joueront un rôle essentiel dans nos études.

Lemme 1. *Soit donnée une famille* (D, π, B) *satisfaisant aux conditions* $1°\sim 3°$. *Alors, il existe un nombre positif* $\rho(<\lambda)$, *un domaine* D' *dans* $D(\rho)$ *et une application holomorphe* $v: D'\to D'_o$ (*ou* $D'_z=D'\cap D_z$ *et* $o=(0, \dots, 0)\in B$) *qui satisfont aux conditions suivantes*:

4° (i) $\pi\times v: D'\to B(\rho)\times D'_o$ *est biholomorphe*;

(ii) *Pour tout* $z\in B(\rho)$, D'_z *est connexe, de type* (g, n), *délimité par* n *courbes de Jordan simples fermées*;

(iii) $D'_z\Subset D_z$ *et* D'_z *est* D_z*-convexe.*

En effet, il existe une immersion $f: D_o\to C^1$ d'après [1]. Comme D est une variété de Stein, il existe une fonction holomorphe $\hat{f}$ dans D telle que $\hat{f}|_{D_o}=f$. Comme $df\neq 0$ sur D_o, à chaque point $p\in D_o$, on peut associer un voisinage $V(p)$ de p tel que $\pi\times\hat{f}$: $V(p)\to B(\rho_p)\times C_p$ soit biholomorphe, où $\rho_p>0$ et C_p est un disque dans le plan. Alors, $f^{-1}\circ\hat{f}$ définit une rétraction analytique v_p de $V(p)$ dans D_o dont la restriction sur $V(p) \cap D_z$ est une application biholomorphe de $V(p) \cap D_z$ sur $V(p) \cap D_o$, quel que soit $z \in B(\rho_p)$. Soit U la réunion de tous ces voisinages $V(p)$ pour $p \in D_o$ et soit $v: U \to D_o$ l'application holomorphe définie par v_p dans $V(p)$. Nous allons montrer qu'elle est bien définie. Soit $q \in V(p)$, alors $F_p = V(p) \cap \hat{f}^{-1}(\hat{f}(q))$ se projette biunivoquement sur $B(\rho_p)$ par l'application $\pi|_{F_p}$. On considère l'application holomorphe $g = (\pi|_{F_p})^{-1}: B(\rho_p) \to D$. Si $q \in V(p) \cap V(p')$, on a comme ci-dessus $g' = (\pi|_{F_{p'}})^{-1}: B(\rho_{p'}) \to D$ pour $V(p')$. Puisque les applications holomorphes g et g' coincident dans un voisinage de $\pi(q)$, $g \equiv g'$ dans $B(\rho_p) \cap B(\rho_{p'})$. On a donc $g(o) = g'(o) \in D_o$ et ce point coincide avec $v(q)$. Ceci indique que v est bien définie. La restriction de v sur toute fibre $U \cap D_z$ non vide est injective. En effet, si ce n'est pas vrai, il y a deux points q, q' dans D_z, appartenant à $V(p)$, $V(p')$ respectivement, tels que $v(q) = v(q')$. On considère comme cidessus les applications holomorphes $g: B(\rho_p) \to D$ pour $V(p)$ et $g': B(\rho_{p'}) \to D$ pour $V(p')$ ($g' = (\pi|_{F_{p'}})^{-1}$ où $F_{p'} = V(p') \cap \hat{f}^{-1}(f(q'))$). Ces applications holomorphes g et g' conicident dans un voisinage de $o \in B \in C^m$ puisque $v(q) = v(q')$. Donc, $g \equiv g'$ dans $B(\rho_p) \cap B(\rho_{p'})$. On a $g(z) = g'(z)$. D'autre part $g(z) = q$ et $g'(z) = q'$, une contradiction. Maintenant, il existe un domaine $D'_o \Subset D_o$, de type (g, n), délimité par courbes de Jordan simples fermées, tel que D'_o soit D_o-convexe. En prenant un nombre positif ρ suffisamment petit on obtient le domaine D' qui satisfait aux conditions 4° avec l'application v restreinte à D'. C. Q. F. D.

Lemme 2. *Soit donnée une famille* (D, π, B) *satisfaisant aux conditions* 1°~3° *et soient donnés un nombre* $\rho > 0$, *un domaine* D' *et une application* v, *qui satisfont aux conditions* 4°. *Alors, il existe un domaine* D'' *dans* D' *et une fonction plurisousharmonique* Φ *dans* $D(\rho)$ *ayant les propriétés suivantes (On pose* $D^\alpha = \{p \in D(\rho) \mid \Phi(p) < \alpha\}$ *et* $D''_z = D'' \cap D_z$) :

5° (i) *Φ est strictement plurisousharmonique et complète dans* $D(\rho)$.[1]

(1) Soit $\Phi(p)$ une fonction strictment plurisousharmonique (de classe C^∞) dans une variété analytique complexe X. Si, pout tout nombre réel α, on $X^\alpha = \{p \in X \mid \Phi(p) < \alpha\} \Subset X$, on dit que Φ est complète.

(ii) *Pour tout* $z \in B(\rho)$, D''_z *est connexe, de type* (g, n), *delimité par courbes de Jordan simples fermées,* $D''_z \Subset D'_z$, et D''_z est D'_z-convexe. $\pi \times v: D'' \to B(\rho) \times D''_o$ *est biholomorphe.*

(iii) *Il existe un nombre positif* ρ_1 $(<\rho)$ *et un nombre réel* α *tels que, pour tout* $z \in \overline{B(\rho_1)}$, *on ait* $D''_z \Subset D_z \cap D^\alpha \Subset D'_z$.

En effet, on peut prendre un domaine $D''_o \Subset D'_o$ qui est de type (g, n), delimité par courbes de Jordan simples fermées, et D'_o-convexe. Soit $D'' = (\pi \times v)^{-1}(B(\rho) \times D''_o)$. Alors, $\overline{D''_o}$ ($\overline{\quad}$ indique la fermeture dans $D(\rho)$) est $D(\rho)$-convexe. En effet, pour un point $p \in D_o$ tel que $p \notin \overline{D''_o}$, il existe une fonction holomorphe g sur D_o telle que $|g(p)| > \mathrm{Max}\{|g(q)| \mid q \in \overline{D''_o}\}$, puisque $\overline{D''_o}$ est D_o-convexe. Comme $D(\rho)$ est une variété de Stein, on peut trouver une fonction holomorphe $\hat{g}$ dans $D(\rho)$ telle que $\hat{g}|_{D_o} = g$. On a alors $|\hat{g}(p)| > \mathrm{Max}\{|\hat{g}(q)| \mid q \in \overline{D''_o}\}$. Pour un point $p \in D(\rho)$ tel que $\pi(p) \neq 0$, au moins une des coordonnées z_i satisfait à $|z_i(p)| > 0$, ce qui montre que $\overline{D''_o}$ est $D(\rho)$-convexe. Comme $D(\rho)$ est une variété de Stein, il existe une fonction plurisous-harmonique Φ ayant la propriété 5° (i) et admettant un nombre réel α tel que $D''_o \Subset D^\alpha \Subset D'$. (Voir [2] p. 106.) Si l'on prend un nombre $\rho_1 > 0$ assez petit, la condition 5° (iii) sera remplie.

C. Q. F. D.

Dans les sections suivantes, nous fixons les nombres positifs ρ et ρ_1, les domaines D' et D'', la fonction plurisousharmonique Φ, et le nombre réel α qui satisfont aux conditions 4° et 5°.

§ 3. Théorème d'Approximation

Pour nous appuyer sur la méthode de Gunning-Narasimhan [1], nous avons besoin de généraliser le théorème de Mergelyan-Bishop.

Lemme 3. *Soit* R *une surface de Riemann ouverte, et soit* K *un ensemble compact dans* R *tel que* K *soit* R*-convexe. Soit* $u(z, p)$ *une fonction continue dans* $B(\rho_2) \times K$ *ayant les propriétés suivantes:*

(i) *Si l'on fixe* z, *elle est holomorphe par rapport à* p *dans l'inté-*

rieur de K.

(ii) *Si l'on fixe* p, *elle est holomorphe par rapport à* z *dans* $B(\rho_2)$. *Alors, on peut faire approcher de* $u(z, p)$ *uniformément sur* $\overline{B(r)} \times K$ *par des fonctions holomorphes dans* $B(\rho_2) \times R$, *quel que soit le nombre positif* r *plus petit que* ρ_2.

En effet, la série de Taylor $u(z, p) = \sum_{n_1, \dots, n_m = 0}^{\infty} a_{n_1 \cdots n_m}(p) z_1^{n_1} \cdots z_m^{n_m}$ converge uniformément sur $\overline{B(r)} \times K$. $a_{n_1 \cdots n_m}(p)$ sont continues sur K et holomorphes dans l'intérieur de K. Alors, pour un nombre positif quelcoque ε, il existe un ensemble fini J d'indices $n = (n_1, \dots, n_m)$ tel que $|u_J - u| < \frac{\varepsilon}{2}$ sur $\overline{B(r)} \times K$, où $u_J(z, p) = \sum_{n \in J} a_n(p) z_1^{n_1} \cdots z_m^{n_m}$. A chaque $n \in J$, on fait correspondre $\varepsilon_n > 0$ de façon que $\sum_{n \in J} \varepsilon_n r^{n_1 + \cdots + n_m} < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après le théorème de Mergelyan-Bishop, on peut trouver une fonction $f_n(p)$ holomorphe dans R telle que $|f_n(p) - a_n(p)| < \varepsilon_n$ sur K $(n \in J)$. La fonction $f(p) = \sum_{n \in J} f_n(p) z_1^{n_1} \cdots z_m^{n_m}$ est holomorphe dans $B(\rho_2) \times R$ et satisfait à $|u_J - f| < \frac{\varepsilon}{2}$ sur $\overline{B(r)} \times K$, donc on a $|f - u| < \varepsilon$ sur $\overline{B(r)} \times K$.

C. Q. F. D.

Théorème 2. *Soit* K_o *un ensemble compact dans* D''_o *tel que* K_o *soit* D'_o*-convexe. Soit* $u(z, p)$ *une fonction continue dans* $B(\rho_2) \times K_o$ $(0 < \rho_2 < \rho)$ *ayant les propriétés suivantes* :

(i) *Si l'on fixe* p, *elle est holomorphe par rapport à* z *dans* $B(\rho_2)$.

(ii) *Si l'on fixe* z, *elle est holomorphe par rapport à* p *dans l'intérieur de* K_o.

Alors, on peut faire approcher de la fonction $u \circ (\pi \times v)$ *uniformément sur le compact* $K = \bigcup_{z \in \overline{B(r)}} v^{-1}(K_o) \cap D_z$ *par des fonctions holomorphes dans* $D(\rho)$, *quel que soit le nombre positif* $r < \mathrm{Min}(\rho_1, \rho_2)$.

En effet, pour un nombre positif quelconque ε, il existe, d'après le lemme 3, une fonction holomorphe f dans $B(\rho_2) \times D'_o$ telle que $|f - u| < \frac{\varepsilon}{2}$ sur $\overline{B(r)} \times K_o$, quel que soit le nombre positif $r < \rho_2$. D'autre part, pour tout nombre positif $\rho' \leq \rho$, $D(\rho') \cap D^\alpha$ est $D(\rho)$-

convexe. (Voir les conditions 5°.) D'après le théorème de Weil-Oka, pour toute fonction holomorphe h sur $D(\rho')\cap D^{\alpha}$, on peut faire approcher de h uniformément sur tout compact dans $D(\rho')\cap D^{\alpha}$ par des fonctions holomorphes dans $D(\rho)$. Si, pour tout nombre r tel que $0<r<\mathrm{Min}(\rho_1, \rho_2)$, on prend le nombre ρ' de manière que $r<\rho'<\mathrm{Min}(\rho_1, \rho_2)$, on obtient $K\Subset D(\rho')\cap D^{\alpha}\Subset D'(\rho_2)$. (Voir les conditions 5°.) Alors, pour la fonction holomorphe $f\circ(\pi\times v)\,|D(\rho')\cap D^{\alpha}$, on peut trouver une fonction holomorphe g dans $D(\rho)$ telle que $|f\circ(\pi\times v)-g|<\frac{\varepsilon}{2}$ sur K. Alors $|g-u\circ(\pi\times v)|<\varepsilon$ sur K.

C. Q. F. D.

§ 4. Démonstration du Théorème 1

D'abord, montrons le

Lemme 4. $\mathrm{H}^2(D(\rho), \boldsymbol{Z})=0$.

Il suffit de montrer $\mathrm{H}_2(D(\rho), \boldsymbol{Z})=0$ et $\mathrm{H}_1(D(\rho), \boldsymbol{Z})=\boldsymbol{Z}^{2g+n-1}$, d'après le théorème des coefficients universels. Pour cela, on va montrer que, pour tout ensemble compact K dans $D(\rho)$, il existe un ensemble compact E et une retraction continue $\tilde{v}: E\to E_o$ (ou $E_o=E\cap D_o$) tels que: (i) $K\subset E\subset D(\rho)$; (ii) $\pi(E)=\overline{B(\rho')}$ (ou $0<\rho'<\rho$); (iii) $\pi\times\tilde{v}$: $E\to\overline{B(\rho')}\times E_o$ soit un homéomorphisme. En effet, on prend ρ' de façon que $\pi(K)\subset B(\rho')$ et $0<\rho'<\rho$. Soit β un nombre réel suffisamment grand pour que $D''_z\Subset D^{\beta}_z$ pour tout $z\in\overline{B(\rho')}$ et que $K\subset\bigcup_{z\in B(\rho')}D^{\beta}_z$, où D^{β}_z est la composante connexe de $D^{\beta}\cap D_z$, qui contient D''_z. (D^{β} est défini par $\Phi<\beta$ pour la fonction plurisousharmonique Φ dans $D(\rho)$ donnée dans la condition 5°.) Comme D''_z est D_z-convexe, que D''_z et D_z sont de type (g, n), et que D^{β}_z est D_z-convexe (Voir Nishino [6] p. 245), D^{β}_z est de type (g, n). $D^{\beta}_z\backslash D''_z$ se décompose en n composantes connexes $R^1_z,\dots, R^n_z$, chacune desquelles est analytiquement équivalente à un domaine annulaire. Soit γ^j_z la composante connexe du bord de R^j_z, qui fait partie du bord D''_z, et soit δ^j_z l'autre composante connexe du bord de R^j_z, qui fait alors partie du bord de D^{β}_z $(j=1,\dots, n)$. On construit une fonction h^j_z, qui est continue sur $\overline{R^j_z}$, harmonique dans R_z^j, et qui prend la valeur 0 sur γ_z^j et la valeur 1 sur δ_z^j. Si on définit une fonction h^j dans $\bigcup_{z\in\overline{B(\rho')}} \overline{R_z^j}$ par $h^j|_{\overline{R_z^j}}=h_z^j$, h^j est continue par rapport à plusieurs variables. (Voir [6] p. 265.) On prend un nombre a $(0<a<1)$ de façon que $K\Subset \bigcup_{z\in B(\rho')} (\overline{D_z''}\cup T_z^1\cup\ldots\cup T_z^n)$, où $T_z^j=\{p\in R_z^j \mid h_z^j(p)<a\}$. Posons $E=\bigcup_{z\in\overline{B(\rho')}} (\overline{D_z''}\cup\overline{T_z^1}\cup\ldots\cup\overline{T_z^n})$. Nous nous proposons de montrer que E satisfait à la condition (iii) ci-dessus. On prend pour chaque $j=1,\ldots,n$ un point $Q_o^j\in D_o'\backslash D_o''$ tel que $Q_z^j=v^{-1}(Q_o)\cap D_z\in T_z^j$. Notons $*h_z^j$ la fonction harmonique conjuguée de h_z^j dans R_z^j, dont l'une des branches prend la valeur 0 au point Q_z^j. $C^j(z)$ étant la variation de $*h_z^j$ le long du cycle δ_z^j orienté de la façon habituelle, la fonction $g_z^j=\exp(2\pi(h_z^j+\sqrt{-1}\,*h_z^j)/C^j(z))$ est uniforme et holomorphe dans R_z^j, où l'on remarque que $C^j(z)$ est positive et continue par rapport à z. Alors g_z^j transforme homéomorphiquement $\overline{T_z^j}$ sur le domaine annulaire dans le plan, de centre 0 et de rayons 1 et $r^j(z)=\exp(2\pi a/C^j(z))$. A l'aide de ces fonctions g_z^j, on peut facilement prolonger la retraction v restrainte à $\overline{D''(\rho')}$ en une retraction continue $\tilde{v}: E\to E_o$ telle que $\pi\times\tilde{v}: E\to\overline{B(\rho')}\times E_o$ soit un homéomorphisme. L'existence d'une telle retraction montre bien qu'on a l'isomorphisme $\mathrm{H}_i(D(\rho), \boldsymbol{Z})\approx\mathrm{H}_i(D_o, \boldsymbol{Z})$ pour tout i. D'où, $\mathrm{H}_2(D(\rho), \boldsymbol{Z})=0$ et $\mathrm{H}_1(D(\rho), \boldsymbol{Z})=\boldsymbol{Z}^{2g+n-1}$. C. Q. F. D.

Maintenant, prenons un point $O_o\in D_o''$ et une coordonnée locale w_o en O_o, définie dans un voisinage U_o de O_o dans D_o''. Posons $U=v^{-1}(U_o)\subset D(\rho)$, $w=w_o\circ(v|_U)$, $U_z=U\cap D_z$ et $O_z=v^{-1}(O_o)\cap D_z$ pour $z\in B(\rho)$ et fixons-les une fois pour toutes. Alors, $z_1,\ldots,z_m$, w forment un système de coordennées dans U. Soit donnée pour chaque $z\in B(\rho)$ une différentielle holomorphe ω_z sur D_z tout entier, qui ne s'annule nulle part. On peut écrire $\omega_z=a(z, w)dw$ dans U_z. Lorsque $a(z, w)$ est holomorphe dans U par rapport aux $z_1,\ldots,z_m$ et w, on appelle $\omega=(\omega_z)_{z\in B(\rho)}$ famille holomorphe de différentielles non nulles dans $D(\rho)$.

Nous nous proposons de montrer le

Lemme 5. *Il existe une famille holomorphe de différentielles non* *nulles dans* $D(\rho)$.

En effet, pour tout point p de $D(\rho)$, il existe un voisinage V de p et une fonction holomorphe u dans V telles que $z_1, \dots, z_m$, u forment un système de coordonnées locales dans V et qu'elles transforment V en un polycylindre $\{z\in \boldsymbol{C}^m \mid |z-\pi(p)|<\varepsilon\} \times \{w\in \boldsymbol{C} \mid |w|<\varepsilon'\}$ de la façon biholomorphe. $du|_{D_z}$ est alors une différentielle holomorphe sur $D_z\cap V$, qui ne prend pas de zéro. Recouvrons $D(\rho)$ d'un nombre dénomblable de tels voisinages V_j avec u_j. On suppose en particulier $(V_1, u_1)=(U, w)$ pris au début. Si $V_i\cap V_j\neq\phi$, on a $z_1=z_1, \dots, z_m=z_m$, $u_i=\phi_{ij}(z, u_j)$ dans $V_i\cap V_j$. Le déterminant fonctionnel de cette transformation est

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \dfrac{\partial\phi_{ij}}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\phi_{ij}}{\partial z_m} & \dfrac{\partial\phi_{ij}}{\partial u_j} \end{vmatrix} = \frac{\partial\phi_{ij}}{\partial u_j}\neq 0 \qquad \text{dans } V_i\cap V_j.$$

Les $\left(V_i\cap V_j, \dfrac{\partial\phi_{ij}}{\partial u_j}\right)$ définissent un élément de $\mathrm{H}^1(D(\rho), O^*)$. Comme $D(\rho)$ est une variété de Stein et que $\mathrm{H}^2(D(\rho), \boldsymbol{Z})=0$ d'après le lemme 4, on a $\mathrm{H}^1(D(\rho), O^*)=0$. ([2] p. 181.) Alors il existe un système de $a_j\in\mathrm{H}^0(V_j, O^*)$ tel que $a_j/a_i=\dfrac{\partial\phi_{ij}}{\partial u_j}$ dans $V_i\cap V_j$. Si l'on pose $\omega_z=a_j du_j|_{D_z}$ sur $V_j\cap D_z$, ω_z est une différentielle holomorphe sur D_z, qui ne s'annulle nulle part. Dans U, on a $\omega_z=a_1(z, w)dw$ où $a_1(z, w)$ est holomorphe par rapport à z et w. C. Q. F. D.

Lemme 6. *Soit* $f(z, t)$ *une fonction continue dans* $B(\rho)\times[a, b]$ *à valeurs complexes, et, si l'on fixe* t, *holomorphe par rapport à* z. *Soit* c *un nombre complexe quelconque. Alors, il existe un nombre réel positif* $\rho_2<\rho$ *et une fonction* $g(z, t)$ *ayant les propriétés suivantes*:

(i) $g(z, t)$ *est continue dans* $\overline{B(\rho_2)}\times(a, b)$. *Si l'on fixe* t, *elle est holomorphe sur* $\overline{B(\rho_2)}$.

(ii) *Son support est compact dans* $\overline{B(\rho_2)}\times(a, b)$.

(iii) *Pour tout* $z\in\overline{B(\rho_2)}$, *on a* $\int_a^b e^{f(z,t)+g(z,t)}dt=c$ *et* $\int_a^b g(z, t)\ e^{f(z,t)+g(z,t)}dt \neq 0$.

Le démonstration sera partagée en trois parties.

1. Soient a_0 et b_0 deux nombres réels tels que $a<a_0<b_0<b$. Nous allons construire pour un certain nombre réel positif $\rho'<\rho$ une fonction $u(z, t)$ ayant les propriétés suivantes : (i) $u(z, t)$ est une fonction en escalier par rapport à t, si l'on fixe z. Elle est holomorphe sur $\overline{B(\rho')}$, si l'on fixe t. (ii) Son support est contenu dans $\overline{B(\rho')}\times[a_0, b_0]$. (iii) Pour tout $z\in\overline{B(\rho')}$, on a $\int_a^b e^{f(z,t)+u(z,t)}\,dt=c$ et $\int_a^b u(z, t)\ e^{f(z,t)+u(z,t)}\,dt \neq 0$. En effet, on prend des nombres c_0, d_0 tel que $a_0<c_0<d_0<b_0$. On pose, pour une variable complexe d et pour deux variables réeles σ et τ,

$X(z, e^d, \sigma, \tau)=c-\mu(z\,;a, a_0)-\mu(z\,;\sigma, \tau)-\mu(z\,;b_0, b)-e^d\mu(z\,;a_0, \sigma)$, où $\mu(z\,;\alpha, \beta)=\int_\alpha^\beta e^{f(z,t)}dt$. On peut prendre, pour $z=o=(0,\dots, 0)$, deux nombres réels $a_1\in(a_0, c_0)$ et $b_1\in(d_0, b_0)$ tels qu'on ait $\mu(o\,;a_0, a_1)\neq 0$, $\mu(o\,;b_1, b_0)\neq 0$ et que $de^d\mu(o\,;a_0, a_1)+X(o, e^d, a_1, b_1)\log\{X(o, e^d, a_1, b_1)/\mu(o\,;b_1, b_0)\}$ ne soit pas constante par rapport à la variable d. On peut prendre aussi un nombre complexe k tel que $X(o, e^k, a_1, b_1)\neq 0$ et $ke^k\mu(o\,;a_0, a_1)+X(o, e^k, a_1, b_1)\ \log\{X(o, e^k, a_1, b_1)/\mu(o\,;b_1, b_0)\}\neq 0$, en prenant une certaine branche du logarithme en $d=k$. On fixe les nombres a_1, b_1, et k, et cette branche du logarithme. Alors, il existe un nombre positi $\rho'<\rho$ tel que, pour tout $z\in\overline{B(\rho')}$, on ait $\mu(z\,;a_0, a_1)\neq 0$, $\mu(z\,;b_1, b_0)\neq 0$, $X(z, e^k, a_1, b_1)\neq 0$ et $ke^k\mu(z\,;a_0, a_1)+X(z, e^k, a_1, b_1)\ \log\{X(z, e^k, a_1, b_1)/\mu(z\,;b_1, b_0)\}\neq 0$. Maintenant, on pose

$$u(z\,;t)=\begin{cases} k & \text{dans } \overline{B(\rho')}\times[a_0, a_1] \\ \log\{X(z, e^k, a_1, b_1)/\mu(z\,;b_1, b_0)\} & \text{dans } \overline{B(\rho')}\times[b_1, b_0] \\ 0 & \text{dans } \overline{B(\rho')}\times\{(a, a_0)\cup(a_1, b_1)\cup(b_0, b)\} \end{cases}$$

Nous voyons aussitôt qu'elle a les propriétés (i), (ii) et nous pouvons vérifier (iii) par un calcul direct.

2. Pour chaque point de discontinuité $t=a_0, a_1, b_1, b_0$ en modifiant la fonction $u(z, t)$ d'une façon linéaire par rapport à t dans

un intervalle ouvert contenant le point de discontinuité et devenant infiniment petit pour $\nu \to \infty$, on obtient aussitôt une suite de fonctions $\{g_\nu(z, t)\}_{\nu=1}^{\infty}$ ayant les propriétés suivantes: (i) Elles sont continues dans $\overline{B(\rho')} \times (a, b)$; Elles sont holomorphes dans $\overline{B(\rho')}$, si l'on fixe t ; (ii) Leurs supports sont contenus dans un compact dans $\overline{B(\rho')} \times (a, b)$, indépendant de ν; (iii) Elles sont bornées uniformément; (iv) $g_\nu(z, t)$ convergent vers $u(z, t)$ uniformément sur tout compact dans $\overline{B(\rho')} \times T$, où $T = (a, b) \setminus \{a_0, a_1, b_1, b_0\}$.

3. En prenant une variable complexe s, on pose $\phi(s, z) = \int_a^b e^{f(z,t)+su(z,t)}\,dt$ et $\phi_\nu(s, z) = \int_a^b e^{f(z,t)+sg_\nu(z,t)}\,dt$. Ces fonctions sont holomorphes dans $C^1 \times B(\rho')$. $\phi_\nu(s, z)$ convergent vers $\phi(s, z)$ uniformément sur tout compact dans $C^1 \times B(\rho')$. En vertu de la propriété (iii) de $u(z, t)$, $\phi(1, z) = c$ et $\dfrac{\partial\phi}{\partial s}(1, z) \neq 0$ dans $B(\rho')$. On prend un nombre positif $\rho_2 < \rho'$. D'après le théorème de Rouché, on peut trouver un nombre entier ν suffisamment grand et une fonction holomorphe $s(z)$ sur $\overline{B(\rho_2)}$ ayant des valeurs assez voisines de 1, de manière que $\phi_\nu(s(z), z) = c$ et $\dfrac{\partial\phi_\nu}{\partial s}(s(z), z) \neq 0$ dans $\overline{B(\rho_2)}$. Alors, la fonction $g(z, t) = s(z)\ g_\nu(z, t)$ possède manifestement toutes les propriétés demandées dans le lemme. C. Q. F. D.

Maintenant nous nous proposons de montrer le théorème 1.

D'après le lemme 5, il existe une famille holomorphe $\omega = (\omega_z)$ de différentielles non nulles dans $D(\rho)$. On peut choisir $d\,(d = 2g+n-1)$ courbes simples fermées régulières $\gamma_o^1, \dots, \gamma_o^d$ dans D_o'', de manière que leurs classes d'homologie forment une base de $\mathrm{H}_1(D_o'', \boldsymbol{Z})$, que chacune d'elles coupe une au plus des autres en un seul point et que $K_o = \gamma_o^1 \cup \dots \cup \gamma_o^d$ ne limite aucun domaine relativement compact dans D_o''. Alors, K_o est un ensemble compact tel que D_o-convexe. D'après le lemme 6, la variable réelle t étant maintenant un paramètre convenable de l'une de ces courbes, il existe un nombre positif $\rho_2 < \rho$ et, pour chaque $j = 1, \dots, d$, une fonction $g^j(z, p)$ dans $\overline{B(\rho_2)} \times K_o$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) $g^j(z, p)$ est continue dans $\overline{B(\rho_2)} \times K_o$ et, si l'on fixe p, holomorphe par rapport à z sur $\overline{B(\rho_2)}$;

(ii) $g^j(z, p)=0$ quand $p\in\gamma_o^i$ $(i\neq j)$;

(iii) Pour tout $z\in\overline{B(\rho_2)}$, on a $\int_{\gamma_z^j}\omega_z e^{g_z^j}=0$ et $\int_{\gamma_z^j} g_z^j\omega_z e^{g_z^j}\neq 0$, où $\gamma_z^j=(v^{-1}(\gamma_o^j))\cap D_z$ et $g_z^j=g^j\circ(\pi\times v)\,|_{\gamma_z^j}$.

Nous rappelons le nombre ρ_1 donné dans la condition 5°. D'après le théorème 2, il existe, pour un nombre positif $r<\mathrm{Min}(\rho_1, \rho_2)$ et pour chaque $j=1,\dots, d$, une suite de fonctions holomorphes $\{h_n^j\}_{n=1}^{\infty}$ dans $D(\rho)$, qui converge vers $g^j\circ(\pi\times v)$ uniformément sur le compact $(\pi\times v)^{-1}\overline{(B(r)}\times K_o)$. Posons

$$\phi^j(s, z)=\int_{\gamma_z^j}\omega_z\ \exp(s_1 g_z^1+\dots+s_j g_d^z),$$

où $s=(s_1,\dots, s_d)$ est système de d variables complexes. $\phi^j(s, z)$ est alors une fonction holomorphe dans $C^d\times B(\rho_2)$. Au point $a=(1,\dots, 1)\in \boldsymbol{C}^d$, on a $\phi^j(a, z)=0$, $\dfrac{\partial\phi^j}{\partial s_i}(a, z)=0$ pour $(i\neq j)$ et

$$\frac{\partial\phi^j}{\partial s_j}(a, z)\neq 0$$

quel que soit $z\in B(\rho_2)$. Pour tout z fixé dans $B(\rho_2)$, $\Phi_z=\phi^1\times\dots\times\phi^d$ est alors une application holomorphe Φ_z: $\boldsymbol{C}^d\to\boldsymbol{C}^d$ telle qu'on ait $\Phi_z(a)=(0,\dots, 0)$ et que le determinant fonctionnel de Φ_z ne soit pas nul en a. D'autre part, $\Phi_n^j(s, z)=\int_{\gamma_z^j}\omega_z\exp(s_1h_n^1+\dots+s_dh_n^d)$ est une fonction holomorphe dans $\boldsymbol{C}^d\times B(\rho_2)$. Pour tout compact L dans $\boldsymbol{C}^d$, la suite $\{\Phi_n^j\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers $\phi_j(s, z)$ uniformément dans $L\times\overline{B(r)}$. D'où, il existe un entier n suffisamment grand et d fonctions $s(z)=(s_1(z),\dots, s_d(z))$ holomorphes dans $B(r)$, ayant des valeurs suffisamment voisines de 1, telles que l'on ait $\phi_n^j(s(z), z)=0$ dans $B(r)$ pour $j=1,\dots, d$. Posons, pour n ainsi pris, $f=(s_1\circ\pi)h_n^1+\dots+(s_d\circ\pi)h_n^d$. En vertu de la dernière propriété, pour tout $p\in D_z$, l'intégrale $\int_{O_z}^{p}\omega_z e^f$ le long d'un chemin dans D_z de O_z à p ne dépend pas du choix du chemin et par suite elle représente une fonction uniforme et holomorphe h_z dans D_z. En faisant varier z dans $B(r)$, on obtient une fonction uniforme h dans $D(r)$: $h\,|_{D_z}=h_z$. Manifestement, h est holomorphe dans $U(r)=v^{-1}(U_o)\cap D(r)$. D'après le théorème de Hartogs, h est holomorphe dans $D(r)$. Pour toute coordonnée locale

u_z sur D_z, on a $\frac{\partial h_z}{\partial u_z} \neq 0$, ce qui montre que l'application $\pi \times h : D(r) \to B(r) \times C^1$ est une immersion voulue. C. Q. F. D.

Références

[1] Gunning, R., and Narasimhan, R., Immersion of open Riemann surfaces, *Math. Ann.*, **174** (1967), 103-108.

[2] Hörmander, L., *An Introduction to Complexe Analysis in Several Variables*, D. van Nostrand Co. Inc., Princeton, N. J., 1966.

[3] Nishino, T., Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (I), *J. Math. Kyoto Univ.*, 8 (1968), 49-100.

[4] ———; (II) Fonctions entières qui se réduisent à celle d'une variable, *J. Math. Kyoto Univ.*, **9** (1969), 221-274.

[5] ———; (III) Sur quelques propriétés topologiques des surfaces premières, *J. Math. Kyoto Univ.*, **10** (1970), 245-271.

[6] ———; (IV) Type de surfaces premières, *J. Math. Kyoto Univ.*, **13** (1973), 217-272.

[7] Yamaguchi, H., Famille holomorphe de surfaces de Riemann ouvertes, qui est une variété de Stein. à paraître.