*Publ. RIMS, Kyoto Univ.*
**16** (1980), 189–232

# Produit Croisé d'une Algèbre de von Neumann par Une Algèbre de Kac, II

par

Michel ENOCK* et Jean-Marie SCHWARTZ*

## Introduction

La construction du produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe continu d'automorphismes est à l'origine des résultats récents [2], [20]) dans l'étude de la structure des facteurs.

Soit $G$ un groupe localement compact. M. Landstad a remarqué dans [12] l'intérêt des propriétés d'algèbre de Hopf-von Neumann de $L^\infty(G)$ et $\mathcal{M}(G)$ (respectivement algèbre des fonctions mesurables essentiellement bornées sur $G$ et algèbre de la représentation régulière gauche de $G$) pour traiter la construction des produits croisés. La construction qu'il utilise s'interprète en fait comme une "action" de $\mathcal{M}(G)$ (considéré comme substitut - dans le cas non-abélien - du groupe dual de $G$) sur une algèbre de von Neumann.

Les algèbres de Kac ([5], [17]) dont $L^\infty(G)$ et $\mathcal{M}(G)$ sont des cas particuliers duaux l'un de l'autre, apparaissent alors comme devant fournir un cadre bien adapté à une généralisation de la notion de produit croisé. Celle-ci contenant à la fois la construction du produit croisé par un groupe [20], et par un "dual de groupe" [13], [14].

Une première partie de ce travail a déjà été faite [4], mais elle ne fournit pas tous les résultats dont on pouvait espérer la généralisation, notamment en ce qui concerne la dualité. Les obstacles techniques étant désormais levés, nous donnons ci-après une théorie plus complète, qui permet de généraliser au cas des algèbres de Kac le théorème de dualité de M. Takesaki [20], le thèoréme de commutation de T. Digernes [3] et la caractérisation des produits croisés, due à M. Landstad [12].

---

Communiqué par H. Araki, le 20, février 1978.
* Université Pierre et Marie Curie (U.E.R. 48), Laboratoire de Mathématiques Fondamentales, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France.

Dans le cas particulier des "duaux de groupe" (c'est-à-dire, dans notre terminologie, des algèbres de Kac symétriques) ces résultats ont été démontrés indépendamment dans [13], [14], [19].

Nous avons pu également amorcer une théorie du poids dual sur le produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac qui étend partiellement les résultats de [20], [3], [16] et [10], et fait apparaître en particulier l'intérêt de la notion "d'invariance relative" d'un poids par rapport à une action, qui caractérise les poids duaux.

Tous ces résultats ont été annoncés dans [7]. Ils ont été exposés par le premier co-auteur aux congrès internationaux de Marseille (Juin 1977) et Leipzig (Septembre 1977). La mise au point définitive de la rédaction a été volontairement retardée pour pouvoir se référer à la deuxième édition de [17].

## Prolègoménes

**(P1)** Soit $A$ une algèbre de von Neumann opérant sur un espace hilbertien $K$. On notera $P(A)$ l'ensemble des poids normaux, semi-finis, fidèles sur $A$. Certaines des constructions concernant ceux-ci se généralisent aux poids non fidèles; il suffit de remarquer que si $\Psi$ est un poids normal semi-fini sur $A$ et $P$ son support ([1], p. 95), la restriction de $\Psi$ à l'algèbre réduite $A_P$, que l'on notera $\Psi_P$, appartient à $P(A_P)$.

Réciproquement, soient $P$ un projecteur de $A$ et $\Psi$ un élément de $P(A_P)$, l'application définie pour tout $x$ de $A^+$ par

$$\Psi^P(x) = \Psi(x_P)$$

où $x_P$ désigne la restriction de $Px$ à $PK$, est un poids normal semi-fini sur $A$, de support $P$.

On a clairement $(\Psi_P)^P = \Psi$ pour tout poids normal semi-fini sur $A$, de support $P$, et $(\Psi^P)_P = \Psi$ pour tout $\Psi$ de $P(A_P)$.

**(P2)** Soient $h$ un opérateur autoadjoint positif, affilié au centre de $A$, $\Psi$ un poids normal semi-fini sur $A$ de support $P$. Notons $h_P$ la restriction de $Ph$ à$PK$. On pose:

$$\Psi(h.) = (\Psi_P(h_P.))^P$$

où $\Psi_P(h_P.)$ a été défini en [15], Section 4.Cette définition coïncide avec celle donnée en [15], Section 4, où, l'hypothèse de fidélité qui ne joue en fait aucun rôle peut être supprimée.

Remarquons que pour $\xi$ dans le domaine de $h^{1/2}$, on a

$$\omega_\xi(h.) = \omega_{h^{1/2}\xi}$$

où $\omega_\xi$ est la forme vectorielle associée à $\xi$.

On peut démontrer, comme en [15], Section 4.3 que si $h$ et $k$ sont deux opérateurs autoadjoints positifs affiliés au centre de $A$, si $\Psi'$ désigne le poids $\Psi(h.)$, on a $\psi'(k.)=\psi(\overline{hk}.)$, où $\overline{hk}$ désigne la fermeture de l'opérateur $hk$. En particulier, si $h$ est non singulier, on a $\psi=\psi'(h^{-1}.)$.

**(P3)** Soit $(h_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments positifs du centre de $A$, telle que $h_i \nearrow h$ au sens de [15], 4.1. Alors, en conservant les notations précédentes, si $x$ appartient à $\mathfrak{M}_\Psi$, $h_i x$ appartient à $\mathfrak{M}_\Psi$ pour tout $i$ de $I$, et $\lim_i \Psi(h_i x)=\Psi'(x)$. En particulier, pour tout $\varepsilon$, réel positif, on posera $h_\varepsilon=h(1+\varepsilon h)^{-1}$, $(h_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est alors une famille d'éléments positifs du centre de $A$ telle que $h_\varepsilon \nearrow h$ (voir [15], 4.1).

**(P4)** Soit $\Psi_i$ un poids normal semi-fini sur une algèbre de von Neumann $A_i$, de support $P_i$ $(i=1, 2)$. On pose:

$$\Psi_1 \otimes \Psi_2 = (\Psi_{1_{P_1}} \otimes \Psi_{2_{P_2}})^{p_1 \otimes p_2}$$

où le produit tensoriel $\Psi_{1_{P_1}} \otimes \Psi_{2_{P_2}}$ a été défini en [2], 1.1.2.

Soit alors $h_i$ un opérateur autoadjoint positif affilié au centre de $A_i$ $(i=1, 2)$. On a clairement:

$$\Psi_1(h_1.) \otimes \Psi_2(h_2.) = (\Psi_1 \otimes \Psi_2)((h_1 \otimes h_2).)$$

où $h_1 \otimes h_2$ désigne la fermeture du produit tensoriel algébrique des applications linéaires $h_1$ et $h_2$, (en particulier, pour tout $t$ de $R$ on a $(h_1 \otimes h_2)^{it}=h_1^{it} \otimes h_2^{it}$). En effet, si $\Psi_1$ et $\Psi_2$ sont fidèles, cela résulte de [2], 1.2.3. ($b$) et [11] 1.3.2., et la transcription au cas non fidèle se fait sans difficulté.

**(P5)** On notera $\mathrm{ext}^+ A$ l'extension positive de $A$, définie et notée $\hat{A}_+$ dans [9], dont on utilisera toutes les autres notations. En particulier, si $\Psi$ est un poids normal sur $A$, on notera encore $\Psi$ son extension canonique à $\mathrm{ext}^+ A$ ([9], Prop. 1.10).

## I. Préliminaires concernant les algebres de Kac

Dans tout ce chapitre, $\boldsymbol{K}=(M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ désigne une algèbre de Kac (voir

[5], Déf. 1.3.1 et [17], Th. III. 34.) On utilise les notations de [5] et [17]. En particulier $W$ désigne l'opérateur (unitaire) fondamental associé à $\boldsymbol{K}$ et $H$ l'espace hilbertien $H_\varphi$ (voir le formulaire de [5], 4.3.9.).

D'autre part, $A$ désignera une algèbre de von Neumann, $\Psi$ un élément de $P(A)$ (voir (P1)). On notera indifféremment $i$ l'identité de $A$ et de $M$.

**Lemma I.1.** $$W(1\otimes\hat{\Delta})W^* = \hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta}\,.$$

**Démonstration:** Cela résulte de [17], III. 38 (ii) appliqué à $\boldsymbol{K}^\wedge$, car on a $\hat{W}=\sigma W^*\sigma$, d'après [5], 4.1.4. (a).

**Corollaire I.2:** *Soit $\varepsilon$ un réel positif. On a:*

(i) $\Gamma(\hat{\Delta}_\varepsilon)=(\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta})_\varepsilon$

(ii) $\Gamma((\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon)=(\hat{\Delta}^{1/2}\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon$

(iii) $\Gamma((\hat{\Delta}^{-1/2})_\varepsilon)=(\hat{\Delta}^{-1/2}\otimes\hat{\Delta}^{-1/2})_\varepsilon$

*avec les notations introduites en* (P3).

**Démonstration:** On a:

$$\begin{aligned} W(1\otimes(1+\varepsilon\hat{\Delta}))W^* &= 1\otimes 1+\varepsilon W(1\otimes\hat{\Delta})W^* \\ &= 1\otimes 1+\varepsilon(\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta}) \text{ d'après I.1.} \end{aligned}$$

d'où:

$$W(1\otimes(1+\varepsilon\hat{\Delta})^{-1})W^* = (1\otimes 1+\varepsilon(\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta}^{-1}))$$

puis, comme d'après [5], 2.2.5.($b$), on a

$$\Gamma(\hat{\Delta}_\varepsilon) = W(1\otimes\hat{\Delta}(1+\varepsilon\hat{\Delta})^{-1})W^*$$

on trouve:

$$\begin{aligned} \Gamma(\hat{\Delta}_\varepsilon) &\supset W(1\otimes\hat{\Delta})W^*W(1\otimes(1+\varepsilon\hat{\Delta})^{-1})W^* \\ &= (\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta})(1\otimes 1+\varepsilon(\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta}))^{-1} \text{ d'apès I.1. et ce qui précède} \\ &= (\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta})_\varepsilon \end{aligned}$$

d'où (i), les deux membres étant bornés. Les démonstrations de (ii) et (iii) sont identiques.

**Proposition I.3:** *Pour tout $x$ de $M^+$, on a:*

$$(\varphi\otimes i)(\Gamma(x)) = \varphi(x)\,.\,\hat{\Delta}^{-1}$$

**Démonstration:** Soit $\omega$ dans $M_*^+$. On pose $\omega' = \omega(\hat{\Delta}^{-1}.)$ (voir (P2)). Grâce à (P2), (P4) et [5], 4.2.1. on a alors:

$$\varphi\otimes\omega = (\varphi\circ\kappa\otimes\omega')((\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta}).)\,.$$

Donc, pour tout $x$ de $M^+$, on a, d'après (P3):

$$\begin{aligned}(\varphi\otimes\omega)(\Gamma(x)) &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi\circ\kappa\otimes\omega')((\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta})_\varepsilon\Gamma(x))\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi\circ\kappa\otimes\omega')(\Gamma(\hat{\Delta}_\varepsilon x)) \text{ d'après I.2.(i).}\end{aligned}$$

Or, l'axiome (NKiii) de [17], th.III.34, appliqué à l'algèbre de Kac réfléchie $\boldsymbol{K}^s$ (cf [17], Prop VII.6.), donne, pour tout $y$ de $M^+$:

$$(i\otimes\varphi\circ\kappa)(\varsigma\Gamma(y)) = (\varphi\circ\kappa\otimes i)(\Gamma(y)) = \varphi\circ\kappa(y)\,.$$

Ainsi, on obtient:

$$\begin{aligned}(\varphi\otimes\omega)(\Gamma(x)) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi\circ\kappa(\hat{\Delta}_\varepsilon x)\omega'(1)\\ &= \varphi(x)\omega(\hat{\Delta}^{-1}) \text{ d'après [5], 4.2.1.}\end{aligned}$$

d'où le résultat, par définition de ext $^+M$.

**Corollaire I.4:** *Soient $x$ dans $(A\otimes M)^+$ et $\xi$ dans $\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{-1/2})$. On a:*

$$(\psi\otimes\varphi\otimes\omega_\xi)((i\otimes\Gamma)(x)) = (\psi\otimes\varphi)(x)\|\hat{\Delta}^{-1/2}\xi\|^2\,.$$

**Démonstration:** Soient $x_1$ dans $A^+$, $x_2$ dans $M^+$. On a

$$\begin{aligned}(\psi\otimes\varphi\otimes\omega_\xi)((i\otimes\Gamma)(x_1\otimes x_2)) &= \psi(x_1)(\varphi\otimes\omega_\xi)(\Gamma(x_2))\\ &= \psi(x_1)\varphi(x_2)\|\hat{\Delta}^{-1/2}\xi\|^2 \text{ d'après}\end{aligned}$$

I.4 et [17], 0.4. $\qquad = (\psi\otimes\varphi)(x_1\otimes x_2)\|\hat{\Delta}^{-1/2}\xi\|^2\,.$

Considérons sur $A\otimes M$ les deux poids $\Phi$ et $\Psi$ définis par

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= (\psi\otimes\varphi)(x)\|\hat{\Delta}^{-1/2}\xi\|^2\\ \Psi(x) &= (\psi\otimes\varphi\otimes\omega_\xi)((i\otimes\Gamma)(x))\,.\end{aligned}$$

Le poids $\Phi$ est normal, semi-fini et fidèle et $\sigma_t^\Phi=\sigma_t^\psi\otimes\sigma_t^\varphi$ pour tout $t$ de $\boldsymbol{R}$. Le poids $\Psi$ est normal et semi-fini (d'après le calcul précédent). De plus:

$$\begin{aligned}\Psi(\sigma_t^\Phi(x)) &= (\psi\otimes\varphi\otimes\omega_\xi)((i\otimes\Gamma)(\sigma_t^\psi\otimes\sigma_t^\varphi)(x))\\ &= (\psi\otimes\varphi\otimes\omega_\xi)((\sigma_t^\psi\otimes\sigma_t^\varphi\otimes i)(i\otimes\Gamma)(x)) \text{ d'après [5], 4.2.5 (a)}\\ &=\psi(x).\end{aligned}$$

En appliquant par exemple [5], lemme 4.1.1., on en déduit $\Phi=\Psi$.

**Lemme I.5:** *En notant indifféremment $\varsigma$ l'isomorphisme de $M\otimes A$ sur*

*$A\otimes M$ défini par $\varsigma$ $(x\otimes y)=y\otimes x$, ou son inverse, les morphismes suivants, définis sur $M\otimes A$: $(\varsigma\otimes i)$ $(i\otimes\varsigma)$ $(\Gamma\otimes i)$ et $(i\otimes\Gamma)\varsigma$ sont égaux.*

**Démonstration:** Soient $a$ et $b$ dans $M$ et $c$ dans $A$. On $a$:

$$(\varsigma\otimes i)(i\otimes\varsigma)(a\otimes b\otimes c) = c\otimes a\otimes b$$

par linéarité et continuité, on en déduit

$$(\varsigma\otimes i)(i\otimes\varsigma)(\Gamma(a)\otimes c) = c\otimes\Gamma(a)$$

ou encore $(\varsigma\otimes i)\,(i\otimes\varsigma)\,(\Gamma\otimes i)\,(a\otimes c)=(i\otimes\Gamma)\varsigma(a\otimes c)$ d'où le résultat par linéarité et continuité.

**Lemme I.6:** *Soit $x$ dans $(M\otimes A)^+$. On $a$:*

$$(i\otimes\varphi\otimes i)((\Gamma\otimes i)(x)) = 1\otimes(\varphi\otimes i)(x).$$

**Démonstration:** Cela résulte de l'axiome (NKiii) de [17], th.III.34. et de la définition des produits tensoriels de poids opératoriels, normaux, semi-finis, fidèles ([9], 5.6).

**Lemme I.7:** *Soient $x$ dans $\mathfrak{N}_\varphi$, $a$ dans $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes i}$. Alors, $(\Gamma\otimes i)\,(a)\,(x\otimes 1\otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi\otimes i}$, et pour tout $\Omega$ de $A_*^+$, on $a$:*

$$\Lambda_{\varphi\otimes\varphi\otimes\Omega}((\Gamma\otimes i)(a)(x\otimes 1\otimes 1)) = (W\otimes 1)\Lambda_{\varphi\otimes\varphi\otimes\Omega}(x\otimes a)\,.$$

**Démonstration:** Soient $a_1$ dans $\mathfrak{N}_\varphi$, $a_2$ dans $A$. On a:

$$\begin{aligned}(\Gamma\otimes i)(a_1\otimes a_2)(x\otimes 1\otimes 1) &= (\Gamma(a_1)\otimes a_2)(x\otimes 1\otimes 1)\\ &= (\Gamma(a_1))(x\otimes 1))\otimes a_2\,.\end{aligned}$$

Grâce à l'axiome (Kiii) de [5], 1.3.1., on en déduit que

$$(\Gamma\otimes i)(a_1\otimes a_2)(x\otimes 1\otimes 1)\in\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi\otimes i}\,.$$

De plus, d'après [5]. Proposition 2.1.1., on a:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\varphi\otimes\varphi\otimes\Omega}((\Gamma\otimes i)(a_1\otimes a_2)(x\otimes 1\otimes 1)) &= \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(a_1)(x\otimes 1))\otimes\Lambda_\Omega(a_2)\\ &= W(\Lambda_\varphi(x)\otimes\Lambda_\varphi(a_1))\otimes\Lambda_\Omega(a_2)\,. \qquad (*)\end{aligned}$$

Si $a_2$ appartient à $\mathfrak{N}_\psi$, on montre de même que $(\Gamma\otimes i)(a_1\otimes a_2)(x\otimes 1\otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi\otimes\psi}$ et que

$$\Lambda_{\varphi\otimes\varphi\otimes\psi}((\Gamma\otimes i)(a_1\otimes a_2)(x\otimes 1\otimes 1)) = W(\Lambda_\varphi(x)\otimes\Lambda_\varphi(a_1))\otimes\Lambda_\psi(a_2)\,.$$

Considérons alors sur $M\otimes A$ les deux poids $\Phi$ et $\Psi$ définis par:

$$\Phi(b) = \varphi(x^*x)(\varphi\otimes\psi)(b)$$
$$\Psi(b) = (\varphi\otimes\varphi\otimes\psi)((x^*\otimes 1\otimes 1)(\Gamma\otimes i)(b)(x\otimes 1\otimes 1))$$

pour $b$ dans $(M\otimes A)^+$.

Le poids $\Phi$ est normal, semi-fini, fidèle; le poids $\Psi$ est normal et semi-fini d'après ce qui précède. Comme en I.4 on montre que $\Psi$ est invariant par $\sigma_t^\Phi$, puis, en utilisant ce qui précède que $\Phi=\Psi$.

On en déduit alors que le poids opératoriel normal de $M\otimes A$ sur $A$ défini par $b\mapsto(\varphi\otimes\varphi\otimes i)\,((x^*\otimes 1\otimes 1)\,(\Gamma\otimes i)\,(b)\,(x\otimes 1\otimes 1))$ est semi-fini et fidèle ([9], lemme 2.6.) et qu'il est égal au poids opératoriel semi-fini et fidèle défini par $b\mapsto\varphi(x\varphi^*x)(\varphi\otimes i)(b)$ ([9], lemme 4.8.).

Il en résulte que:

$$(\varphi\otimes\varphi\otimes\Omega)((x^*\otimes 1\otimes 1)(\Gamma\otimes i)(a^*a)(x\otimes 1\otimes 1)) = \varphi(x^*x)(\varphi\otimes\Omega)(a^*a)\,.$$

Après polarisation, on en déduit l'existence d'une isométrie de $H_{\varphi\otimes\varphi\otimes\Omega}$ qui envoie $\Lambda_{\varphi\otimes\varphi\otimes\Omega}(x\otimes a)$ sur $\Lambda_{\varphi\otimes\varphi\otimes\Omega}((\Gamma\otimes i)(a)(x\otimes 1\otimes 1))$.

Il résulte de $(*)$ que cette isométrie coïncide avec $W\otimes 1$ sur les éléments de la forme $\Lambda_{\varphi\otimes\varphi\otimes\Omega}(x\otimes a_1\otimes a_2)$; donc, par linéarité et continuité, elle est égale à $W\otimes 1$, et le lemme en résulte.

**Lemme I.8:** *Soient $x, y$ dans $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes i}$, $\omega$ dans $M_*^+$ et $\theta$ dans $A_*^+$. On a:*

(i) $(\omega\otimes\varphi\otimes\theta)((\Gamma\otimes i)(y^*)(1\otimes x))=\langle W^*\otimes 1,\ \omega\otimes\Omega_{\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(x),\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(y)}\rangle$

(ii) $(\omega\otimes\varphi\otimes\theta)((1\otimes y^*)(\Gamma\otimes i)(x))=\langle W\otimes 1,\ \omega\otimes\Omega_{\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(x),\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(y)}\rangle$

(*il rséulte du lemme* I.6. *que les premiersme mbres de ces égalités ont un sens*).

**Démonstration:** Soit $\xi$ dans $\mathfrak{A}$. On a:

$$\begin{aligned}(\omega_\xi\otimes\varphi\otimes\theta)((\Gamma\otimes i)(y^*)(1\otimes x)) &= (\varphi\otimes\varphi\otimes\theta)((\pi(\xi)^*\otimes 1\otimes 1)(\Gamma\otimes i)(y^*)\\ &\qquad(\pi(\xi)\otimes x)) \qquad \text{d'après [17], II.11.}\\ &= (\Lambda_{\varphi\otimes\varphi\otimes\theta}(\pi(\xi)\otimes x)\,|\,\Lambda_{\varphi\otimes\varphi\otimes\theta}((\Gamma\otimes i)(y)(\pi(\xi)\otimes 1\otimes 1)) \qquad \text{d'après I.7.}\\ &= (\xi\otimes\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(x)\,|\,(W\otimes 1)(\xi\otimes\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(y))) \qquad \text{d'après I.7.}\\ &= \langle W^*\otimes 1,\ \omega_\xi\otimes\Omega_{\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(x),\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(y)}\rangle\,.\end{aligned}$$

Il résulte du lemme I.6. que $(\Gamma\otimes i)(y^*)(1\otimes x)$ appartient à $\mathfrak{M}_{i\otimes\varphi\otimes\theta}$, cette égalité peut donc s'écrire:

$$\langle(i\otimes\varphi\otimes\theta)((\Gamma\otimes i)(y^*)(1\otimes x)),\ \omega_\xi\rangle = \langle W^*\otimes 1,\ \omega_\xi\otimes\Omega_{\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(x),\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(y)}\rangle$$

d'où (i), par continuité et densité des $\omega_\xi$ dans $M_*^+$. De plus on a:

$$\langle W\otimes 1,\ \omega\otimes\Omega_{\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(x),\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(y)}\rangle = \langle W^*\otimes 1,\ \omega\otimes\Omega_{\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(y),\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(x)}\rangle^-$$
$$= (\omega\otimes\varphi\otimes\theta)((\Gamma\otimes i)(x^*)(1\otimes y))^- \qquad \text{d'après (i)}$$
$$= (\omega\otimes\varphi\otimes\theta)((1\otimes y^*)(\Gamma\otimes i)(x)), \qquad \text{d'où (ii).}$$

**Proposition I.9:** *Soient $x, y$ dans $\mathfrak{N}_{\varphi\otimes i}$. On a*

$$(i\otimes\varphi\otimes i)[(\Gamma\otimes i)(y^*)(1\otimes x)] = (\kappa\otimes i)[(i\otimes\varphi\otimes i)((1\otimes y^*)(\Gamma\otimes i)(x))]$$

(*Il résulte de* I.6. *que les deux termes ont un sens*).

**Démonstration:** Soient $\omega$ dans $M_*^+$ et $\theta$ dans $A_*^+$. On a:

$$(\omega\otimes\varphi\otimes\theta)((\Gamma\otimes i)(y^*)(1\otimes x)) = \langle W\otimes 1,\ \omega\otimes\Omega_{\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(x),\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(y)}\rangle^*$$
d'après I.8. (i).
$$= \langle(\kappa\otimes i)(W)\otimes 1,\ \omega\otimes\Omega_{\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(x),\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(y)}\rangle$$
d'après [7], lemme I.13.
$$= \langle W\otimes 1,\ \omega\circ\kappa\otimes\Omega_{\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(x),\Lambda_{\varphi\otimes\theta}(y)}\rangle$$
$$= (\omega\circ\kappa\otimes\varphi\otimes\theta)((1\otimes y^*)(\Gamma\otimes i)(x))$$
d'après I.8. (ii)

d'où le résultat.

**Corollaire I.10:** *Soient $x$ et $y$ dans $\mathfrak{N}_{i\otimes\varphi\circ\kappa}$. Alors, les deux expressions $(i\otimes\varphi\circ\kappa\otimes i)((i\otimes\Gamma)(y)^*(x\otimes 1))$ et $(i\otimes\kappa)(i\otimes\varphi\circ\kappa\otimes i)((y^*\otimes 1)(i\otimes\Gamma)(x))$ ont un sens et sont égales.*

**Démonstration:** Appliquons la proposition I.9. à l'algèbre de Kac réfléchie $\boldsymbol{K}^\varsigma$ ([17], Prop. VII.6.). On trouve, pour $a, b$ dans $\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa\otimes i}$:

$$(i\otimes\varphi\circ\kappa\otimes i)((\varsigma\Gamma\otimes i)(b^*)(1\otimes a)) = (\kappa\otimes i)((i\otimes\varphi\circ\kappa\otimes i)(1\otimes b^*)(\varsigma\Gamma\otimes i)(a))$$

En appliquant $\varsigma$ aux deux membres, on obtient:

$$(i\otimes\varphi\circ\kappa\otimes i)((\varsigma\otimes i)(i\otimes\varsigma)(\varsigma\otimes i)(\Gamma\otimes i)(b^*)(1\otimes a)) =$$
$$= (i\otimes\kappa)((i\otimes\varphi\circ\kappa\otimes i)(\varsigma\otimes i)(i\otimes\varsigma)(\varsigma\otimes i)(1\otimes b)^*(\varsigma\Gamma\otimes i)(a))$$

soit,

$$(i\otimes\varphi\circ\kappa\otimes i)((\varsigma\otimes i)(i\otimes\varsigma)(\Gamma\otimes i)(b^*)(\varsigma a\otimes 1)) =$$
$$= (i\otimes\kappa)((i\otimes\varphi\circ\kappa\otimes i)(\varsigma b^*\otimes 1)(\varsigma\otimes i)(i\otimes\varsigma)(\Gamma\otimes i)(a))$$

d'où, grâce au lemme I.5:

$$(i\otimes\varphi\circ\kappa\otimes i)((\Gamma\otimes i)(\varsigma b^*)(\varsigma a\otimes 1)) = (i\otimes\kappa)(i\otimes\varphi\circ\kappa\otimes i)((\varsigma b_*\otimes 1)(\Gamma\otimes i)(\varsigma a)) .$$

**Rappel I.11:** Il résulte de [5], 2.2.4.1., 3.1.5.(a) et 1.2.2.1. que, pour tous $\xi$, $\eta$, dans $H$, on a $\omega_{\xi,\eta}\circ\kappa=\omega_{\hat{J}\eta,\hat{J}\xi}$.

**Lemme I.12:** *Soit $\xi$ dans $\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{-1/4})$. On a* $\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa=(\omega_\xi\circ\kappa)(\hat{\Delta}^{-1/2}.)$ .

**Démonstration:** On a:

$$\begin{aligned}\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa &= \omega_{\hat{J}\hat{\Delta}^{-1/4}\xi} \quad \text{d'après I.11}\\ &= \omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\hat{J}\xi}\\ &= \omega_{\hat{J}\xi}(\hat{\Delta}^{1/2}.) \quad \text{voir (P2)}\\ &= \omega_\xi\circ\kappa(\hat{\Delta}^{11/2}.) \quad \text{d'après I.11} .\end{aligned}$$

**Corollaire I.13:** *Soient $x$ et $y$ dans $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi}$, $\xi$ dans $\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{1/4})\cap\mathcal{D}\hat{\Delta}^{-1/4})$. Alors, les deux expressions* $(\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})((i\otimes\Gamma)(y^*)(x\otimes 1))$ *et* $(\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa)$ $((y^*\otimes 1)(i\otimes\Gamma)(x))$ *ont un sens et sont égales.*

**Démonstration:** Soit $z$ dans $(A\otimes M)^+$. Grâce au corollaire I.4, on a:

$$(\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})((i\otimes\Gamma)(z)) = (\psi\otimes\varphi)(z)\|\hat{\Delta}^{-1/4}\xi\|^2 .$$

Donc, $(i\otimes\Gamma)(z)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi}}$. De même, grâce au corollaire I.4 et au lemme I.12, on a:

$$\begin{aligned}(\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa)((i\otimes\Gamma)(z)) &= (\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\hat{J}\xi})((i\otimes\Gamma)(z))\\ &= (\psi\otimes\varphi)(z)\|\hat{\Delta}^{-1/4}\hat{J}\xi\|^2\\ &= (\psi\otimes\varphi)(z)\|\hat{\Delta}^{1/4}\xi\|^2\end{aligned}$$

et $(i\otimes\Gamma)(z)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}}\circ\kappa$. Ces deux expressions de l'énoncé ont donc un sens.

De plus d'après [5], 4.2.1., (P2) et (P4), on a:

$$\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi} = (\psi\otimes\varphi\circ\kappa\otimes\omega_\xi)((1\otimes\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta}^{1/2}).)$$

et, d'après le lemme I.12:

$$\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa = (\psi\otimes\varphi\circ\kappa\otimes\omega_\xi\circ\kappa)((1\otimes\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta}^{1/2}).)$$

Par ailleurs, grâce à I.2. (ii), on a:

$$\begin{aligned}(i\otimes\Gamma)(1\otimes(\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon)(1\otimes(\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon\otimes 1) &= (1\otimes\hat{\Delta}^{1/2}\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon)(1\otimes(\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon\otimes 1)\\ &\nearrow 1\otimes\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta}^{1/2}.\end{aligned}$$

Donc, grâce à (P3), on trouve:

$$\begin{aligned}
&(\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})((i\otimes\Gamma)(y^*)(x\otimes 1)) = \\
&\quad = \lim_{\varepsilon\to 0}(\psi\otimes\varphi\circ\kappa\otimes\omega_\xi)((i\otimes\Gamma)(1\otimes(\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon)(1\otimes(\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon\otimes 1)(i\otimes\Gamma)(y^*)(x\otimes 1)) \\
&\quad = \lim_{\varepsilon\to 0}(\psi\otimes\varphi\circ\kappa\otimes\omega_\xi)((i\otimes\Gamma)((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon)y^*)((1\otimes(\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon)x\otimes 1) \\
&\quad = \lim_{\varepsilon\to 0}(\psi\otimes\varphi\circ\kappa\otimes\omega_\xi\circ\kappa)((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon)y^*\otimes 1)(i\otimes\Gamma)((1\otimes(\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon)x)
\end{aligned}$$

d'après le corollaire I.10, car $(1\otimes(\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon)x$ et $(1\otimes(\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon)y$ appartiennent à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi\circ\kappa}$.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\to 0}(\psi\otimes\varphi\circ\kappa\otimes\omega_\xi\circ\kappa)((i\otimes\Gamma)(1\otimes(\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon)(1\otimes(\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon\otimes 1)(y^*\otimes 1)(i\otimes\Gamma)(x) \\
&= (\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa)((y^*\otimes 1)(i\otimes\Gamma)(x))
\end{aligned}$$

ce qui provient des résultats énoncés ci-dessus.

**Corollaire I.14:** *Soient $x$ et $y$ dans $\mathfrak{N}_\varphi$, $\xi$ dans $\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{1/4})\cap\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{-1/4})$. On a:*

$$(\varphi\otimes\omega_{\Delta^{1/4}\xi})(\Gamma(y^*)(x\otimes 1)) = (\varphi\otimes\omega_{\Delta^{-1/4}\xi}\circ\kappa)((y^*\otimes 1)\Gamma(x)) .$$

**Démonstration:** Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à un poids $\psi$ fini et à des éléments de la forme $1\otimes x$ et $1\otimes y$.

**Lemme I.15:** *Soit $x$ dans $A\otimes\mathcal{L}(H)$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $x\in A\otimes M'$

(ii) $(x\otimes 1)(1\otimes W)=(1\otimes W)(x\otimes 1)$.

**Démonstration:** Le fait que (i) entraîne (ii), résulte de [5], 2.1.1.. Réciproquement, supposons (ii). Soit $a$ dans $M$. On a:

$$\begin{aligned}
(x\otimes 1)(1\otimes\Gamma(a)) &= (x\otimes 1)(1\otimes W)(1\otimes 1\otimes a)(1\otimes W^*) \quad \text{d'après [5], 2.2.5 (a)} \\
&= (1\otimes W)(x\otimes a)(1\otimes W^*) \quad \text{par hypothèse} \\
&= (1\otimes W)(1\otimes 1\otimes a)(1\otimes W^*)(x\otimes 1) \quad \text{par hypohèse} \\
&= (1\otimes\Gamma(a))(x\otimes 1)
\end{aligned}$$

donc, $(x\otimes 1)$ commute à $\boldsymbol{C}\otimes\Gamma(M)$, comme il commute à $\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{C}\otimes M$, il commute à $\boldsymbol{C}\otimes(\Gamma(M)\cup\boldsymbol{C}\otimes M)''=\boldsymbol{C}\otimes M\otimes M$ (d'après [4], III.4 appliqué à $\boldsymbol{K}^s$), d'où (i).

**Lemme I.16:** *Soient $x$ dans $\mathfrak{N}_\varphi$, $y$ dans $\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$. L'élément $\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(y)(x\otimes 1)$ apartient à $\mathcal{D}((\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta})^{-1/2})$.*

**Démonstration:** On a:

$$((\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta})^{-1/2})_\varepsilon \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(y)(x\otimes 1)) =$$
$$= ((\Delta\otimes\Delta)^{-1/2})_\varepsilon W(\Lambda_\varphi(x)\otimes\Lambda_\varphi(y)) \quad \text{d'après [5], 2.2.1.}$$
$$= W(1\otimes(\hat{\Delta}^{-1/2})_\varepsilon)(\Lambda_\varphi(x)\otimes\Lambda_\varphi(y)) \quad \text{d'aprés I.2.(ii) et [5], 2.2.5. (a)}$$
$$= W(\Lambda_\varphi(x)\otimes(\hat{\Delta}^{-1/2})_\varepsilon \Lambda_\varphi(y))\,.$$

Il en résulte que:

$$\begin{aligned} ||((\hat{\Delta}\otimes\hat{\Delta}^{-1/2})_\varepsilon \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(y)(x\otimes 1))||^2 &= ||\Lambda_\varphi(x)\otimes(\hat{\Delta}^{-1/2})_\varepsilon \Lambda_\varphi(y)||^2 \\ &= \varphi(x^*x)\varphi((\hat{\Delta}^{-1/2})_\varepsilon y^*y) \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \varphi(x^*x)\varphi\circ\kappa(y^*y)<\infty \end{aligned}$$

d'après [5], 4.2.1., d'où le résultat.

## II. Préliminaires concernant les produits croisés

On conserve dans ce chapitre les notations du chapitre précédent. De plus, $A$ sera supposée réalisée dans un espace hilbertien $K$. D'autre part, $\alpha$ désignera une action à droite de $\mathbb{K}$ sur $A$, au sens de [4], I.1.

On utilisera la terminologie et les notations de [4]. Toutefois, nous n'utiliserons que des actions à droite, que nous appellerons simplement "action." (Rappelons qu'une action à gauche de $\mathbb{K}$ est une action à droite de $\mathbb{K}^s$).

Enfin, $\alpha_i$ désignera une action de l'algèbre de Kac $\mathbb{K}_i$ sur l'algèbre de von Neumann $A_i$, réalisée dans l'espace hilbertien $K_i$ ($i=1, 2$).

**Définition II.1:** On pose: $A^\alpha=\{x\in A\colon \alpha(x)=x\otimes 1\}$. On dira que $A^\alpha$ est la sous-algèbre des éléments invariants par $\alpha$.

**Proposition II.2:** *L'application $T_\alpha=(i\otimes\varphi)\ \alpha$ est un poids opératoriel normal fidèle de $A$ sur $A^\alpha$.*

**Démonstration:** Soit $x$ dans $A^+$. Il est clair que $T_\alpha x$ appartient à $\mathrm{ext}^+A$; en notant encore $\alpha$ le prolongement canonique de $\alpha$ à $\mathrm{ext}^+A$, on a:

$$\begin{aligned} \alpha(T_\alpha x) &= \alpha(i\otimes\varphi)\alpha(x) \\ &= (i\otimes i\otimes\varphi)(\alpha\otimes i)\alpha(x) \\ &= (i\otimes i\otimes\varphi)(i\otimes\Gamma)\alpha(x) \quad \text{d'après [4], I.1.} \\ &= (i\otimes\varphi)\alpha(x)\otimes 1 \quad \text{d'après [17], Th. III.34 (N Kiii)} \\ &= T_\alpha x\otimes 1 \end{aligned}$$

donc $T_\alpha x$ appartient à $\mathrm{ext}^+A^\alpha$.

Comme $i\otimes\varphi$ set un poids opératoriel normal fidèle de $A\otimes M$ sur $A$, la seule vérification non triviale qui reste à effectuer est: soit a dans $A^{\alpha}$, on a:

$$\begin{aligned} T_{\alpha}(a^*xa) &= (i\otimes\varphi)((a^*\otimes 1)\alpha(x)(a\otimes 1)) \\ &= a^*(i\otimes\varphi)\alpha(x)a \\ &= a^*T_{\alpha}(x)a \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

**Définition II.3.:** On dira que l'action $\alpha$ est intégrable si le poids opératoriel $T_{\alpha}$ drfini en II.2. est semi-fini.

Remarquons que cette notion est stable par équivalence forte ([4], I.10), mais pas par équivalence.

Dans le cas où $\beta$ désigne une action d'un groupe localement compact $G$ sur $A$, l'action $\beta^{\alpha}$ de $KA(G)$ ([5], 8.1.1., [4], I.3.) sur $A$ sera intégrable si et seulement si l'ensemble $\{x\in A^+;\ \int_G \beta_s(x)ds\in A^+\}$ est faiblement dense dans $A^+$.

**Proposition II.4:** (*i*) *L'action* $\Gamma$ ([4], *exemple suivant* I.1.) *est intégrable* (ii) *L'action duale* $\tilde{\alpha}$ ([4], II.7) *est intégrable.*

**Démonstration:** (i) Cela résulte trivialement de [17], Th.III.34 (NKiii) (ii) Soit a dans $\hat{M}'$. On a:

$$\begin{aligned} T_{\tilde{\alpha}}(1\otimes a^*a) &= (i\otimes\hat{\varphi}')\tilde{\alpha}(1\otimes a^*a) \\ &= (i\otimes\hat{\varphi}')(1\otimes\hat{\Gamma}'(a^*a)) \quad \text{d'après [4], II. 56.} \\ &= \hat{\varphi}'(a^*a)\cdot 1 \quad \text{d'après [17] III. 34 appliqué à } \boldsymbol{K}^{\wedge\prime}. \end{aligned}$$

Donc, si a appartient à $\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}}$, $1\otimes a$ appartient à $\mathfrak{N}_{T\tilde{\alpha}}$, qui est ainsi dense dans $\mathcal{W}^*(\alpha)$.

**Définition II.5:** On dira que $\alpha$ vérifie la propriété (B) si

$$\alpha(A) = \mathcal{W}^*(a)^{\tilde{\alpha}}.$$

(L'inclusion $\alpha(A)\subset\mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\alpha}}$ est évidente, cf [4], V. (ii)).

**Proposition II.6:** (i) *On a*: $\mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\alpha}} = \mathcal{W}^*(\alpha)\cap\mathcal{L}(K)\otimes M$
$= \mathcal{W}^*(\alpha)\cap A\otimes M$

(ii) *La propriété* (*B*) *est stable par équivalence* (*cf.* [4], I.10).

**Démonstration:** (i) Ii réulte de [4], II.6(i) que:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\alpha}} &= \{x\in\mathcal{W}^*(\alpha);\ (x\otimes 1) \text{ commute à } 1\otimes(J\hat{J}\otimes J\hat{J})\mathcal{W}^*(J\hat{J}\otimes J\hat{J})\}\\ &= \mathcal{W}^*(\alpha)\cap\mathcal{L}(K)\otimes M, \quad \text{d'après le lemme I.15 appliqué à } \boldsymbol{K}^{\varsigma}\end{aligned}$$

(cf [17], VII. 10.).

Comme $\mathcal{W}^*(\alpha)\subset A\otimes\mathcal{L}(H)$, la deuxième égalité est évidente.

(ii) Soient $\alpha_1$, $\alpha_2$ deux actions telles que $\alpha_1\sim\alpha_2$ $(\Phi, \Psi, U)$. Il résulte de [4], II.3. que:

$$\begin{aligned}U\mathcal{W}^*(\alpha_1)U^* &= (\Phi^{-1}\otimes\bar{\Psi}^{-1})(\mathcal{W}^*(\alpha_2))\\ &\subset(\Phi^{-1}\otimes\bar{\Psi}^{-1})(A_2\otimes\mathcal{L}(H_2)) = A_1\otimes\mathcal{L}(H_1)\,.\end{aligned}$$

Or, d'après (i), on a:

$$\begin{aligned}U\mathcal{W}^*(\alpha_1)^{\tilde{\alpha}_1}U^* &= U\mathcal{W}^*(\alpha_1)U^*\cap\mathcal{L}(K)\otimes M_1, \text{ car } U\in\mathcal{L}(K)\otimes M_1\\ &= U\mathcal{W}^*(\alpha_1)U^*\cap A_1\otimes M_1, \quad \text{d'après ce qui précède.}\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}(\Phi\otimes\bar{\Psi})(U\mathcal{W}^*(\alpha_1)^{\tilde{\alpha}_1}U^*) &= \mathcal{W}^*(\alpha_2)\cap A_2\otimes M_2\\ &= \mathcal{W}^*(\alpha_2)^{\tilde{\alpha}_1} \quad \text{d'après (i).}\end{aligned}$$

Supposons que $\alpha_i$ vérifie $(B)$. On a:

$$\mathcal{W}^*(\alpha_2)^{\tilde{\alpha}_2} = (\Phi\otimes\bar{\Psi})(U\alpha_1(A_1)U^*) = \alpha_2(A_2), \quad \text{d'après [4], II.3, d'où (ii).}$$

**Proposition II.7:** *Soit $U$ un $1_{K}^{\mathcal{L}(K)}$-cocycle. On a:*

(i) *$U^*$ r est un $1_{K^\sigma}^{\mathcal{L}(K)}$-cocycle.*

(ii) *Si $U$ implémente une action $\alpha$ de $\boldsymbol{K}$ sur $A$, $U^*$ implémente une action de $\boldsymbol{K}^\sigma$ sur $A'$, que l'on notera $\alpha'$.*

**Démonstration:** Il résulte de [4], I.6. que:

$$(i\otimes\Gamma)(U^*) = (1\otimes\sigma)(U^*\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U^*\otimes 1)$$

donc $(i\otimes\varsigma\Gamma)(U^*)=(U^*\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U^*\otimes 1)(1\otimes\sigma)$, d'où (i).

Si l'on suppose $U(A\otimes\boldsymbol{C}_H)\ U^*\subset A\otimes\mathcal{L}(H)$, on a successivement:

$$\begin{aligned}&U(A'\otimes\mathcal{L}(H))U^*\supset A'\otimes\boldsymbol{C}_H\\ &U^*(A'\otimes\boldsymbol{C}_H)U\subset A'\otimes\mathcal{L}(H)\,, \quad \text{d'où (ii).}\end{aligned}$$

**Définition II.8:** (i) On appellera algèbre saturée par $\alpha$ l'ensemble

$$\text{Sat}\ \alpha = \{x\in A\otimes M;\ (\alpha\otimes i)(x) = (i\otimes\Gamma)(x)\}$$

(ii) On dira que l'action $\alpha$ est saturée si $\alpha(A)=\mathrm{Sat}\,\alpha$.

Remarquons qu'on a toujours $\alpha(A)\subset \mathrm{Sat}\,\alpha$. Cette notion a été introduite en [18].

**Lemme II.9:** *Soit $U$ un $1_K^{\mathcal{L}(K)}$-cocycle. On a:*

(i) $U^*(\boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}')U\subset\mathcal{L}(K)\otimes\hat{M}'$

(ii) *Si l'on suppose que $U$ implémente une action $\alpha$ de $\boldsymbol{K}$ sur $A$, on a*

$$\mathcal{W}^*(\alpha)\subset U(\mathcal{L}(K)\otimes\hat{M}')U^*$$
$$\mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\alpha}}\subset U(\mathcal{L}(K)\otimes\boldsymbol{C}_H)U^*\cap A\otimes M\,.$$

**Démonstration:** En appliquant [17], I. 2. à $\boldsymbol{K}^{\wedge\prime}$, il vient d'après [17], VII. 10.:

$$(\{\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma\}\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H))''=\hat{M}'\otimes\mathcal{L}(H)\,.$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned}&(U^*\otimes 1)(\boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}'\otimes\mathcal{L}(H))(U\otimes 1)=\\&\quad=(U^*\otimes 1)(\{1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma\}\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\boldsymbol{C}_H\otimes\mathcal{L}(H))''(U\otimes 1)\\&\quad=(\{(U^*\otimes 1)(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J}J)W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)(U\otimes 1)\}\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\boldsymbol{C}_H\otimes\mathcal{L}(H))''\,.\end{aligned}$$

Or, d'après [4], I.5. (ii) on a:

$$\begin{aligned}&(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W^*(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)\\&\quad=(i\otimes\Gamma)(U)\\&\quad=(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)\quad\text{d'après [4], I.6.}\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}&(U^*\otimes 1)(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)(U\otimes 1)\\&\quad=(1\otimes\sigma)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)\\&\quad\in(\mathcal{L}(K)\otimes\boldsymbol{C}_H\otimes M\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}'\otimes M)''\quad\text{d'après [5], 2.1.1 et 3.1.5.}\\&\quad=\mathcal{L}(K)\otimes\hat{M}'\otimes M\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que:

$$\begin{aligned}(U^*\otimes 1)(\boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}'\otimes\mathcal{L}(H))(U\otimes 1)&\subset(\mathcal{L}(K)\otimes\hat{M}'\otimes M\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\boldsymbol{C}_M\otimes\mathcal{L}(H))''\\&=\mathcal{L}(K)\otimes\hat{M}'\otimes\mathcal{L}(H)\quad\text{d'où (i).}\end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^*(\alpha)&=(\alpha(A)\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}')''\\&=(U(A\otimes\boldsymbol{C}_H)U^*\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}')''\end{aligned}$$

$$= U(A\otimes \boldsymbol{C}_H \cup U^*(\boldsymbol{C}_K\otimes \hat{M}')U)'' U^*$$
$$\subset U(A\otimes \boldsymbol{C}_H \cup \mathcal{L}(K)\otimes \hat{M}')'' U^* \quad \text{d'parès (i)}$$
$$= U(\mathcal{L}(K)\otimes \hat{M}')U^*, \quad \text{d'où la première partie de (ii).}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\alpha}} &= \mathcal{W}^*(\alpha)\cap \mathcal{L}(K)\otimes M \quad \text{d'après II.6. (i)}\\ &\subset U(\mathcal{L}(K)\otimes \hat{M}')U^* \cap \mathcal{L}(K)\otimes M \quad \text{d'après ce qui précède}\\ &= U(\mathcal{L}(K)\otimes \hat{M}' \cap \mathcal{L}(K)\otimes M)U^* \quad \text{car } U\in \mathcal{L}(K)\otimes M\\ &= U(\mathcal{L}(K)\otimes \boldsymbol{C}_H)U^* \quad \text{d'après [17]. I.4.} \end{aligned}$$

d'où (ii)

**Lemme II.10:** *Soit $U$ un $1_K^{\mathcal{L}(K)}$-cocycle qui implémente $\alpha$. Pour tout $x$ de $A\otimes\mathcal{L}(H)$, on a*

$$(\alpha\otimes i)(x) = (U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(x\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U^*\otimes 1)$$

**Démonstration:** Soient $x_1$ dans $A$ et $x_2$ dens $\mathcal{L}(H)$. On a:

$$\begin{aligned} (\alpha\otimes i)(x_1\otimes x_2) &= \alpha(x_1)\otimes x_2\\ &= U(x_1\otimes 1)U^*\otimes x_2\\ &= (U\otimes 1)(x_1\otimes 1\otimes x_2)(U^*\otimes 1)\\ &= (U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(x_1\otimes x_2\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U^*\otimes 1) \end{aligned}$$

d'où le résultat, par linéarité et continuité.

**Lemme II.11:** *Soit $U$ un $1_K^{\mathcal{L}(K)}$-cocycle qui implémente $\alpha$. On a:*

$$\begin{aligned} &A\otimes\mathcal{L}(H)\cap U(\mathcal{L}(K)\otimes\hat{M}')U^*\\ &\quad = \{x\in A\otimes\mathcal{L}(H);\ (\alpha\otimes i)(x) = (1\otimes W)(1\otimes\sigma)(x\otimes 1)(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)\}\,. \end{aligned}$$

**Démonstration:** Il résulte du fait que $U$ est un cocycle et de [4], I.5.3 que

$$(1\otimes W)(1\otimes\sigma)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*) = (U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)$$

d'où

$$(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(1\otimes\sigma)(U^*\otimes 1) = (1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)\,.$$

Il résulte alors de I.15. appliqué à $\mathbb{K}^\wedge$ qu'un élément $x$ de $A\otimes\mathcal{L}(H)$ appartient à $U$ $(\mathcal{L}(K)\otimes\hat{M}')$ $U^*$ si et seulement si $x\otimes 1$ commute à

$$(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)(U\otimes 1)(1\otimes\sigma), \quad \text{ou encore si l'on a}$$
$$(U\otimes 1)(1\otimes\sigma)(x\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U^*\otimes 1) = (1\otimes W)(1\otimes\sigma)(x\otimes 1)(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*)$$

et le lemme résulte alors de II.10.

**Proposition II.12:** *Soit $U$ un $1_K^{\mathcal{L}(K)}$-cocycle qui implémente $\alpha$. On a*

$$\begin{aligned} \mathit{Sat}\ \alpha &= A\otimes\mathcal{L}(H)\cap U(\mathcal{L}(K)\otimes \boldsymbol{C}_H)U^* \\ &= A\otimes M\cap U(\mathcal{L}(K)\otimes \boldsymbol{C}_H)U^*. \end{aligned}$$

**Démonstration:** En utilisant [4], I.5. (iii), le lemme précédent fournit:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sat}\ \alpha &= A\otimes M\cap U(\mathcal{L}(K)\otimes \hat{M}')U^* \\ &= U(U^*(A\otimes M)U\cap\mathcal{L}(K)\otimes\hat{M}')U^* \\ &\subset U(\mathcal{L}(K)\otimes M\cap\mathcal{L}(K)\otimes\hat{M}')U^* \quad \text{car } U\in\mathcal{L}(K)\otimes M \\ &= U(\mathcal{L}(K)\otimes\boldsymbol{C}_H)U^* \quad \text{d'après [17], I.4}. \end{aligned}$$

d'où la deuxième égalité. La premiére provient de ce que

$$U(\mathcal{L}(K)\otimes\boldsymbol{C}_H)U^*\subset\mathcal{L}(K)\otimes M.$$

**Proposition II.13:** *Soit $U$ un $1_K^{\mathcal{L}(K)}$-cocycle qui implémente $\alpha$. Soit $\alpha'$ l'action de $\boldsymbol{K}^\sigma$ sur $A'$ définie en* II.7. (*ii*). *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) *$\alpha$ est saturée*

(ii) *$\alpha'$ vérifie la condition* ($A$) *de* [4], III.2.

*De plus, si* (*i*) *ou* (*ii*) *est vérifiée, $\alpha$ vérifie la condition* ($B$) *de* II.5.

**Démonstration:** Il résulte de II.12 que (i) équivaut à:

$$U(A\otimes\boldsymbol{C}_H)U^* = A\otimes\mathcal{L}(H)\cap U(\mathcal{L}(K)\otimes\boldsymbol{C}_H)U^*$$

et donc, successivement à:

$$\begin{aligned} U(A'\otimes\mathcal{L}(H))U^* &= (A'\otimes\boldsymbol{C}_H\cup U(\boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H)U^*)'' \\ A'\otimes\mathcal{L}(H) &= (U^*(A'\otimes\boldsymbol{C}_H)U\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H))'' \\ &= (\alpha'(A')\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H))'' \end{aligned}$$

ce qui est l'énoncé de (ii).

D'autre part, il résulte de II.9.(ii) et II.12. que

$$\mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\tilde{\alpha}}}\subset\mathrm{Sat}\ \alpha.$$

Donc, si $\alpha$ est saturée, on a $\mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\tilde{\alpha}}}\subset\alpha(A)$, ce qui implique ($B$).

**Lemme II.14:** *On a:*

$$\mathcal{W}^*(\alpha)\otimes M = ((\alpha\otimes i)\alpha(A) \cup \boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}'\otimes M)''.$$

**Démonstration:** On a:

$$(\alpha\otimes i)\alpha(A)\subset\alpha(A)\otimes M$$

donc,

$$((\alpha\otimes i)\alpha(A) \cup \boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}'\otimes M)''\subset(\alpha(A)\otimes M \cup \boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}'\otimes M)'' = \mathcal{W}^*(\alpha)\otimes M.$$

Réciproquement,

$$\mathcal{W}^*(\alpha)\otimes M = (\alpha(A)\otimes\boldsymbol{C}_H \cup \boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}\otimes M)''.$$

Or, pour tout $x$ de $A$, on a:

$$\begin{aligned}(\alpha\otimes i)\alpha(x) &= (i\otimes\Gamma)\alpha(x)\\ &= (1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)(\alpha(x)\otimes 1)(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W^*(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)\end{aligned}$$

d'après [4], II.5. (ii)
donc:

$$\alpha(A)\otimes\boldsymbol{C}_H\subset(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W^*(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)(\alpha\otimes i)\alpha(A)(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)$$

d'où:

$$\alpha(A)\otimes\boldsymbol{C}_H\subset((\alpha\otimes i)\alpha(A) \cup \boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}'\otimes M)'' \quad \text{d'après [5], 2.1.1 et 3.1.5.}$$

Dans ces conditions:

$$\mathcal{W}^*(\alpha)\otimes M\subset((\alpha\otimes i)\alpha(A) \cup \boldsymbol{C}_K\otimes M'\otimes M)''$$

ce qui achève la démonstration.

**Lemme II.15:** (i) *La restriction de $(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)$ à l'algèbre $B=(\alpha(A)\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H))''$ est une action de $\mathbb{K}$ sur $B$. On la notera $\gamma$.*

(ii) $1\otimes\sigma W^*\sigma$ *est un $\gamma$-cocycle*

(iii) $\alpha^{\sim\sim}\sim\gamma(\Theta(\alpha\otimes i), v, 1\otimes W^*\sigma)$

*oú $\sigma$ a été défini en* [4], III.1; *$v$ désigne l'isomorphisme canonique de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{K}'^s$ défini en* [17], VII.8.).

(*Ce résultat généralise* [4], III.6 *et* III.8.)

**Démonstration:** On a:

$$\begin{aligned}(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(B) &= (i\otimes\varsigma)((\alpha\otimes i)\alpha(A)\cup \boldsymbol{C}_K\otimes\boldsymbol{C}_H\otimes\mathcal{L}(H))'' \\ &= ((i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)\alpha(A)\cup \boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H)\otimes\boldsymbol{C}_H)''.\end{aligned}$$

Or, pour tout $x$ dans $A$:

$$\begin{aligned}(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)\alpha(x) &= (i\otimes\varsigma)(i\otimes\Gamma)\alpha(x) \\ &= (i\otimes\varsigma\Gamma)\alpha(x) \\ &= (1\otimes\sigma W\sigma)(\alpha(x)\otimes 1)(1\otimes\sigma W^*\sigma) \quad \text{d'après [4], I.5. (i)}.\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)\alpha(A) &\subset (\alpha(A)\otimes\boldsymbol{C}_H\cup \boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H\otimes H))'' \\ &= B\otimes\mathcal{L}(H).\end{aligned}$$

Il résulte alors de $(*)$ que:

$$\begin{aligned}(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(B) &\subset (B\otimes\mathcal{L}(H)\cup \boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H)\otimes\boldsymbol{C}_H)'' \\ &= B\otimes\mathcal{L}(H).\end{aligned}$$

Comme $(i\otimes\varsigma)$ $(\alpha\otimes i)$ est une action de $\boldsymbol{K}$ sur $A\otimes\mathcal{L}(H)$ ([4], III.6), il en résulte que sa restriction à $B$ est une action sur $B$, d'où (i). Il résulte de [5], 2.1.1 que $1\otimes\sigma W^*\sigma\in\boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H)\otimes M\subset B\otimes M$. Par ailleurs, c'est un $(i\otimes\varsigma)$ $(\alpha\otimes i)$-cocycle ([4], III. 6). On en déduit donc (ii).

L'application $\Theta(\alpha\otimes i)$ est un isomorphisme de $B$ sur $\mathcal{W}^*(\tilde{\alpha})$.

Dans ces conditions, les démonstrations de [4], III. 7 et 8, conduisent à (iii) en $y$ remplaçant $A\otimes\mathcal{L}(H)$ par $B$ (La propriété $(A)$ n'y intervenait en effet que pour montrer que $\Theta(\alpha\otimes i)$ est un isomorphisme de $A\otimes\mathcal{L}(H)$ sur $\mathcal{W}^*(\tilde{\alpha})$).

**Lemme II.16:** *Soient $\alpha_1$ et $\alpha_2$ deux actions équivalentes telles que*

$$\alpha_2 \sim \alpha_1(\Phi, \Psi, U).$$

*On a, pour tout $x$ de $A_1$:*

$$\alpha_1(x) = U^*(x\otimes 1)U \Leftrightarrow \Phi(x)\in A_2^{\alpha_2}.$$

**Démonstration:** Pour $x$ dans $A_1$, on a en effet

$$\alpha_2(\Phi(x)) = (\Phi\otimes\Psi)(U\alpha_1(x)U^*).$$

Donc $\alpha_1(x)=U^*(x\otimes 1)U$ équivaut à $\alpha_2(\Phi(x))=(\Phi\otimes\Psi)(x\otimes 1)=\Phi(x)\otimes 1$ d'où le résultat.

**Lemme II.17:** *Pour toute algèbre de von Neumann $B$, on a*

(i) $\beta=(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)$ *est une action de* $\mathbb{K}$ *sur* $A\otimes B$
(ii) $(A\otimes B)^{\beta}=A^{\alpha}\otimes B$.

**Démonstration:** Il est clair que $\beta(A\otimes B)\subset A\otimes B\otimes M$. De plus:

$$\begin{aligned}(\beta\otimes i)\beta &= ((i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)\otimes i)(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)\\ &= (i\otimes\varsigma\otimes i)(\alpha\otimes i\otimes i)(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)\\ &= (i\otimes\varsigma\otimes i)(i\otimes i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i\otimes i)(\alpha\otimes i)\\ &= (i\otimes(\varsigma\otimes i)(i\otimes\varsigma))((i\otimes\Gamma)\alpha\otimes i)\\ &= (i\otimes(\varsigma\otimes i)(i\otimes\varsigma)(\Gamma\otimes i))(\alpha\otimes i)\\ &= (i\otimes(i\otimes\Gamma)\varsigma)(\alpha\otimes i) \qquad \text{d'après I.5.}\\ &= (i\otimes i\otimes\Gamma)(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)\\ &= (i\otimes i\otimes\Gamma)\beta \qquad \text{d'poù (i).}\end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que $A^{\alpha}\otimes B\subset(A\otimes B)^{\beta}$. Réciproquement, soit $x$ dans $(A\otimes B)^{\beta}$. On a $\beta(x)=x\otimes 1$, c'est-à-dire:

$$(\alpha\otimes i)(x)=(i\otimes\varsigma)(x\otimes 1)\,.$$

Pour tout $\Omega$ dans $B_*^+$, on a $(i\otimes\Omega)(x)\in A$, puis:

$$\begin{aligned}\alpha((i\otimes\Omega)(x)) &= (i\otimes i\otimes\Omega)(\alpha\otimes i)(x)\\ &= (i\otimes i\otimes\Omega)(i\otimes\varsigma)(x\otimes 1)\\ &= (i\otimes\Omega\otimes i)(x\otimes 1)\\ &= (i\otimes\Omega)(x)\otimes 1\end{aligned}$$

donc $(i\otimes\Omega)(x)\in A^{\alpha}$.

Pour tout $y$ de $(A^{\alpha})'$ on a donc

$$\begin{aligned}(i\otimes\Omega)(x(y\otimes 1)) &= (i\otimes\Omega)(x)y\\ &= y(i\otimes\Omega)(x)\\ &= (i\otimes\Omega)((y\otimes 1)x)\end{aligned}$$

d'où $x(y\otimes 1)=(y\otimes 1)x$, et on en déduit $x\in A^{\alpha}\otimes B$ d'où (ii).

## III. Poids relativement invariants et formes canoniques

On conserve les notations du chapitre précédent.

**Définition III.1:** On dira qu'un poids $\psi$ de $P(A)$ est $\hat{\Delta}^{-1}$-relativement invariant par rapport à $\alpha$ s'il vérifie les conditions suivantes:

(i) $(\psi\otimes i)(\alpha(x))=\psi(x)\hat{\Delta}^{-1}$ $\quad(\forall x\in A^+)$

(ii) $(\psi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(y^*)(x\otimes 1))=(\psi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa)((y^*\otimes 1)\alpha(x))$
$(\forall x, y\in\mathfrak{N}_\psi, \forall\xi\in\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{1/4})\cap\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{-1/4}))$.

Remarquons que (i) implique que pour $x$ et $y$ dans $\mathfrak{N}_\psi$ et $\xi$ dans $\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{1/4})\cap(\hat{\Delta}^{-1/4})$ on a:

$$(\psi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi})(\alpha(y^*y)) = \psi(y^*y)\|\hat{\Delta}^{-1/4}\xi\|^2 .$$

et

$$\begin{aligned}(\psi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa)(\alpha(x^*x)) &= (\psi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\hat{J}\xi})(\alpha(x^*x)) \quad \text{d'après I.12}\\ &= \psi(x^*x)\|\hat{\Delta}^{-1/4}\hat{J}\xi\|^2\\ &= \psi(x^*x)\|\hat{\Delta}^{1/4}\xi\|^2\end{aligned}$$

les deux membres de l'égalité (ii) ont alors un sens.
(le cas échéant, on dira invariant à la place de 1-relativement invariant).

**Proposition III.2:** *Soient $G$ un groupe localement compact de module $\Delta_G$, $\beta$ une action continue de $G$ sur$A$, $\psi$ dans $P(A)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\psi$ est relativement invariant par rapport à $\beta$, de module $\Delta_G^{-}{}'$ (voir* [20]. *Def* 5.1), *c'est-à-dire*: $\psi\circ\beta_s=\Delta_G^{-1}(s)\psi(\forall s\in G)$.

(ii) *$\psi$ est $\hat{\Delta}^{-1}$-relativement invariant par rapport à l'action $\beta^d$ de $KA(G)$* ([5], 8.1.1 *et* [4], I.3).

**Démonstration:** Comme, dans le cas où $\boldsymbol{K}=KA(G)$, $\hat{\Delta}$ est l'opérateur modulaire associé au poids de Haar de $KA(G)^\wedge=KS(G)$ ([5], 8.1.4 (c)), c'est à dire la multiplication dans $L^2(G)$ par la fonction $\Delta_G$ ([5]. 8.1.7), l'implication (ii)$\Rightarrow$(i) est claire.

Réciproquement, supposons (i); soient $f$ dans $L^1(G)^+$ et $x$ dans $A^+$. On a:

$$\int_G f(s)\psi(\beta_s(x))ds = \psi(x)\int_G f(s)\Delta_G(s)^{-1}ds$$

ce qui s'écrit encore, en considérant $L^1(G)$ comme le prédual de $L^\infty(G)$:

$$(\psi\otimes f)(\beta^d(x)) = \psi(x)\langle\Delta^{-1}, f\rangle$$

d'où, par définition du poids opératoriel $\psi\otimes i$, la condition (i) de III.1.

Soit maintenant $f$ dans $L^2(G)$ telle que $\Delta_G^{1/4}f$ et $\hat{\Delta}_G^{-1/4}f$ appartiennent à $L^2(G)$. On a alors, pour $x$ et $y$ dans $\mathfrak{N}_\psi$:

$$\int_G \psi(\beta_s(y)^*x)\Delta_G(s)^{1/2}|f(s)|^2 ds = \int_G \psi(\beta_s(y\beta(_{-s}(x)))\Delta_G(s)^{1/2}|f(s)|^2 ds$$
$$= \int_G \psi(y^*\beta_{-s}(x))\Delta_G(s)^{-1/2}|f(s)|^2 ds$$

par hypothèse d'où la condition (ii) de III.1.

**Proposition III.3:** *Le poids de Haar $\varphi$ est $\hat{\Delta}^{-1}$-relativement invariant par rapport à l'action $\Gamma$.*

**Démonstration:** Cela résulte de I.3 et I.14.

**Théorème III.4:** *On suppose $\alpha$ intégrable. Soit $\psi$ dans $P(A^{\alpha})$. Le poids $\psi\circ T_\alpha$ appartient* à *$P(A)$ et il est $\hat{\Delta}^{-1}$-relativement invariant par rapport* à *$\alpha$.*

**Démonstration:** Par hypothèse (II.3) $T_\alpha$ est normal, semi-fini et fidèle, donc $\psi\circ T_\alpha \in P(A)$ ([9], Prop. 2.3.).

De plus, pour tout $x$ dans $A^+$ et $\xi$ dans $\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{-1/2})$, on a:

$$\begin{aligned}(\psi\circ T_\alpha\otimes\omega_\xi)(\alpha(x)) &= (\psi\otimes\omega_\xi)((T_\alpha\otimes i)(\alpha(x)) \\ &= (\psi\otimes\omega_\xi)((i\otimes\varphi)\alpha\otimes i)(\alpha(x)) \\ &= (\psi\otimes\omega_\xi)(i\otimes\varphi\otimes i)(i\otimes\Gamma)(\alpha(x)) \\ &= (\psi\otimes\varphi\otimes\omega_\xi)(i\otimes\Gamma)(\alpha(x)) \\ &= (\psi\otimes\varphi)(\alpha(x))||\hat{\Delta}^{-1/2}\xi||^2 \quad \text{d'après I.4.} \\ &= \psi(i\otimes\varphi)(\alpha(x))||\hat{\Delta}^{-1/2}\xi||^2 \\ &= \psi\circ T_\alpha(x)||\hat{\Delta}^{-1/2}\xi||^2\,.\end{aligned}$$

Soit $x$ dans $\mathfrak{M}^+_{\psi\circ T_\alpha}$. On sait ([9], lemme 1.4.) qu'il existe un sous-espace fermé $H'$ de $H$, et un opérateur autoadjoint positif $T$ sur $H'$, tels que $\mathcal{D}(T)^- = H'$ et

$$\begin{aligned}\omega_\eta((\psi\circ T_\alpha\otimes i)(\alpha(x))) &= ||T^{1/2}\eta||^2 \qquad \text{si } \eta\in\mathcal{D}(T^{1/2}) \\ &= +\infty \qquad \text{sinon.}\end{aligned}$$

Il résulte de ce qui précède que $\mathcal{D}(T^{1/2})$ contient $\mathcal{D}(\Delta^{-1/2})$ dense dans $H$, donc que $H' = H$.

De plus pour tout $\xi$ de $\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{-1/2})$, on a:

$$||T^{1/2}\xi||^2 = \psi\circ T_\alpha(x)||\hat{\Delta}^{-1/2}\xi||^2\,.$$

Par l'unicité de la décomposition polaire, il en résulte:

$$T^{1/2} = \psi\circ T_\alpha(x)^{1/2}\hat{\Delta}^{-1/2}$$

et donc

$$T=\psi\circ T_\alpha(x)\hat{\Delta}^{-1}$$

finalement

$$(\psi\circ T_\alpha\otimes i)(\alpha(x))=\psi\circ T_\alpha(x)\hat{\Delta}^{-1}\qquad \forall(x)\in\mathfrak{M}^+_{\psi\circ T_\alpha}$$

d'où la condition (i) de III.1,. par normalité.

Soient $x$ et $y$ dans $\mathfrak{N}_{\psi\circ T_\alpha}$ (alors $\alpha(x)$ et $\alpha(y)$ appartiennent à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi}$) et $\xi$ dans $\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{1/4})\cap\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{-1/4})$. Alors:

$$\begin{aligned}(\psi\circ T_\alpha\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(y^*)(x\otimes 1))&=(\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})((\alpha\otimes i)(\alpha(y^*)(x\otimes 1)))\\ &=(\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})((i\otimes\Gamma)(\alpha(y^*))(\alpha(x)\otimes 1))\\ &=(\psi\otimes\psi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi}\circ\kappa)((\alpha(y^*)\otimes 1)(i\otimes\Gamma)(\alpha(x)))\qquad \text{d'après I.13.}\\ &=(\psi\otimes\varphi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa)((\alpha\otimes i)((y^*\otimes 1)\alpha(x)))\\ &=(\psi\circ T_\alpha\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa)((y^*\otimes 1)\alpha(x))\end{aligned}$$

d'où la condition (ii) de III.1.

**Définition III.5:** On dira que le quadruplet $(\mathcal{H},\rho,\mathcal{J},U)$, où $\mathcal{H}$ est un espace hilbertien, $\rho$ une représentation normale fidèle de $A$ sur $\mathcal{H}$, $\mathcal{J}$ un opérateur involutif, isométrique et antilinéaire sur $\mathcal{H}$ et $U$ un opérateur unitaire de $\mathcal{L}(\mathcal{H}\otimes H)$ est une forme canonique de $\alpha$ si:

(i) $\mathcal{J}\rho(A)\mathcal{J}=\rho(A)'$

(ii) $U$ est un $1^{\mathcal{L}(\mathcal{H})}_K$-cocycle qui implémente l'action $(\rho\otimes i)\alpha\rho^{-1}$ sur $\rho(A)$

(iii) $(\mathcal{J}\otimes\hat{J})U(\mathcal{J}\otimes\hat{J})=U^*$.

Remarquons que (iii) signifie qu'à $\rho$ près, $U$ implémente $\alpha$ sur $A$.

**Exemple III.6:** (i) Soit $\beta$ une action continue d'un groupe localement compact $G$ sur $A$. Le quadruplet $(\mathcal{H},\rho,\mathcal{J},(u_s)_{s\in G})$ est une forme canonique de $\beta^d$ si:

$$\mathcal{J}\rho(A)\mathcal{J}=\rho(A)'$$

l'application $s\to u_s$ est une représentation unitaire continue de $G$ sur $\mathcal{H}$ telle que $u_s\rho(x)u_s^*=\rho(\beta_s(x))$.

$$\mathcal{J}u_s=u_s\mathcal{J}\qquad(\forall s\in G)$$

(ii) le quadruplet $(H,i,J,\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)$ est une forme canonique de l'action $\Gamma$.

Dans ce qui suit on suppose que le poids $\psi$ est $\hat{\Delta}^{-1}$ relativement invariant par rapport à $\alpha$.

De plus, pour simplifier les notations, on identifie $A$ et $\pi_\psi(A)$, autrement dit on considère $A\subset\mathcal{L}(H_\psi)$.

**Lemme III.7:** (i) *Il existe une unique isométrie $U_\psi$ telle que, pour tous $x$ de $\mathfrak{N}_\psi$ et $y$ de $\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$, on ait:*

$$U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\varphi(y)) = \Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(x)(1\otimes y))$$

(ii) $U_\psi\in\mathcal{L}(H_\psi)\otimes M$

(iii) $\alpha(a)U_\psi=U_\psi(a\otimes 1)$.

**Démonstration:** D'après [5], 2.3.2.1., $\Lambda_\varphi(y)$ appartient à $\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{-1/2})$ et donc grâce à III.1. (ii), on a:

$$(\psi\otimes\omega_{\Lambda_\varphi(y)})(\alpha(x^*x)) = \psi(x^*x)||\hat{\Delta}^{-1/2}\Lambda_\varphi(y)||^2.$$

Donc $\alpha(x^*x)$ appartient à $\mathfrak{M}_{\psi\otimes\omega_{\Lambda_\varphi(y)}}$: en utilisant [17], II.11. il vient alors:

$$(\psi\otimes\omega_{\Lambda_\varphi(y)})(\alpha(x^*x)) = (\psi\otimes\varphi)((1\otimes y^*)\alpha(x^*x)(1\otimes y)) .$$

Ainsi $\alpha(x)(1\otimes y)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi}$ et

$$||\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(x)(1\otimes y))||^2 = ||\Lambda_\psi(x)||^2||\hat{\Delta}^{-1/2}\Lambda_\varphi(y)||^2.$$

Comme $\Lambda_\psi(\mathfrak{N}_\psi)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\psi\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa})$ est dense dans $H_{\psi\otimes\varphi}$, on en déduit (i) par polarisation.

Soit $\xi$ dans l'algèbre hilbertienne à droite $\mathfrak{U}'_\psi$ associée au poids $\psi$. On notera $\pi'_\psi(\xi)$ le prolongement continu à $H_\psi$ de la multiplication à droite par $\xi$ dans $\mathfrak{U}'_\psi$. Soit $\eta$ dans $\mathfrak{U}'$. On a:

$$\begin{aligned}(\pi'_\psi(\xi)\otimes\pi'(\eta))U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\Lambda_\varphi(y)) &= (\pi'_\psi(\xi)\otimes\pi'(\eta))\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(x)(1\otimes y))\\ &= \alpha(x)(1\otimes y)(\xi\otimes\eta)\\ &= \alpha(x)(\xi\otimes y\eta)\\ &= \alpha(x)(1\otimes\pi'(\eta))(\xi\otimes\Lambda_\varphi(y))\\ &= (1\otimes\pi'(\eta))\alpha(x)(\xi\otimes\Lambda_\varphi(y)) .\end{aligned}$$

En faisant tendre fortement $\pi'(\pi)$ vers 1, on obtient:

$$(\pi'_\psi(\xi)\otimes 1)U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\Lambda_\varphi(y)) = \alpha(x)(\xi\otimes\Lambda_\varphi(y))$$

Comme $\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa})$ est un domaine essentiel pour $\hat{\Delta}^{-1/2}$ ([5], lemme 3.1.2. (b)) on en déduit:

$$(\pi'_\psi(\xi)\otimes 1)U_\psi(\Lambda_\sigma(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\zeta) = \alpha(x)(\xi\otimes\zeta), \qquad \forall\zeta\in\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{-1/2})\ (*).$$

Soit alors $z$ dans, $M'$ comme $\hat{\Delta}^{-1/2}$ est affilié au centre de $M$, $z\zeta$ appartient à $\mathcal{D}(\hat{\Delta}^{-1/2})$ et $\hat{\Delta}^{-1/2}z\zeta = z\hat{\Delta}^{-1/2}\zeta$. D'où:

$$\begin{aligned}
&(\pi'_\psi(\xi)\otimes 1)U_\psi(1\otimes z)(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\zeta)\\
&\quad = (\pi'_\psi(\xi)\otimes 1)U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}z\zeta)\\
&\quad = \alpha(x)(\xi\otimes z\zeta) \qquad\qquad \text{d'après } (*)\\
&\quad = \alpha(x)(1\otimes z)(\xi\otimes\zeta)\\
&\quad = (1\otimes z)\alpha(x)(\xi\otimes\zeta)\\
&\quad = (1\otimes z)(\pi'_\psi(\xi)\otimes 1)U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\zeta) \qquad \text{d'après } (*).
\end{aligned}$$

En faisant tendre fortement $\pi'_\psi(\xi)$ vers 1, il vient:

$$U_\psi(1\otimes z)(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\zeta) = (1\otimes z)U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\zeta).$$

Par linéarité et densité, on en déduit:

$$U_\psi(1\otimes z) = (1\otimes z)U_\psi, \qquad \text{d'où (ii)}.$$

Soit a dans $A$. On a:

$$\begin{aligned}
U_\psi(a\otimes 1)(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\Lambda_\varphi(y)) &= U_\varphi(\Lambda_\psi(ax)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\Lambda_\varphi(y))\\
&= \Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(ax)(1\otimes y))\\
&= \alpha(a)\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(x)(1\otimes y))\\
&= \alpha(a)U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\Lambda_\varphi(y))
\end{aligned}$$

d'où (iii) par linéarité et densité.

**Lemme III.8:** *Soit $U_\psi$ l'isométrie construite en* III.7.

(i) *la relation $\mu(\omega)=(i\otimes\omega)(U_\psi^*)$, pour $\omega$ dans $M_*$ définit une application linéaire continue $\mu$ de $M_*$ dans $\mathcal{L}(H_\psi)$.*

(ii) *pour tous $\xi$, $\eta$ dans $H_\psi$ et $\zeta$, $\theta$ dans $H$, on a:*

$$\begin{aligned}
(\mu(\omega_{\zeta,\theta})\xi\,|\,\eta) &= \langle U_\psi^*,\ \Omega_{\xi,\eta}\otimes\omega_{\zeta,\theta}\rangle\\
&= (\xi\otimes\zeta\,|\,U_\psi(\eta\otimes\theta)).
\end{aligned}$$

**Démonstration:** On a:

$$\begin{aligned}
\|\mu(\omega)\| &= \sup\{|\langle\mu(\omega),\ \Omega\rangle,\ \Omega\in\mathcal{L}(H)_*,\ \|\Omega\|\leqslant 1\}\\
&= \sup\{|(\Omega\otimes\omega)(U_\psi^*)|,\ \Omega\in\mathcal{L}(H)_*,\ \|\Omega\|\leqslant 1\}\\
&\leqslant\|\omega\|, \qquad \text{d'où (i)}.
\end{aligned}$$

La preuve de (ii) est triviale.

Dans ce qui suit, on considère $U_\psi$ et $\mu$ tels qu'ils ont été définis en III.7 et III.8.

**Lemme III.9:** (i) $(i\otimes\kappa)(U_\psi)=U_\psi^*$

(ii) *Pour tout* $\omega$ *de* $M_*$, *on a*: $\mu(\omega^\circ)=\mu(\omega)^*$.

*Remarquons que pour* $\xi$ *dans* $H$, *grâce à* [5], 1.2.2.1 *et au rappel* I.11, (*ii*) *fournit* $\mu(\omega_\xi)^*=\mu(\omega_{\hat{J}\xi})$.

**Démonstration:** Soient $x$ et $y$ dans $\mathfrak{N}_\varphi$ et $\xi$ dans $\hat{\mathfrak{A}}_\circ\dagger\hat{\mathfrak{A}}_\circ$, de sorte que d'une part $\xi$ et $\hat{J}\xi$ appartiennent à $\bigcap_{s\in C}\mathcal{D}(\hat{\Delta}^s)$ et, d'autre part d'après [5] 3.1.2., $\pi(\xi)$ et $\pi(\hat{J}\xi)$ sont définis et appartiennent à $\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$. On a alors:

$$\begin{aligned}
&\langle(i\otimes\kappa)(U_\psi),\ \Omega_{\Lambda_\psi(x),\Lambda_\psi(y)}\otimes\omega_\xi\rangle\\
&=\langle U_\psi,\ \Omega_{\Lambda_\psi(x),\Lambda_\psi(y)}\otimes\omega_\xi\circ\kappa\rangle\\
&=\langle U_\psi,\ \Omega_{\Lambda_\psi(x),\Lambda_\psi(y)}\otimes\omega_{\hat{J}\xi}\rangle \qquad \text{d'après le rappel I.11}\\
&=(U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{J}\xi)\mid\Lambda_\psi(y)\otimes\hat{J}\xi)\\
&=((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\hat{J}\xi)\mid\Lambda_\psi(y)\otimes\hat{J}\xi) \qquad \text{d'après III.7 (ii) et [5] 4.2.1.}\\
&=((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(x)(1\otimes\pi(\hat{J}\xi)))\mid\Lambda_\psi(y)\otimes\hat{J}\xi) \qquad \text{d'après III.7 (i).}\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(x)(1\otimes\pi(\hat{J}\xi)))\mid\Lambda_\psi(y)\otimes\hat{J}\xi)\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}(\psi\otimes\varphi)((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon(y^*\otimes\pi(\hat{J}\xi)^*)\alpha(x)(1\otimes\pi(\hat{J}\xi)))\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}(\psi\otimes\omega_{\hat{J}\xi})((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon(y^*\otimes1)\alpha(x)) \qquad \text{grâce à [17], II.11.}\\
&=(\psi\otimes\omega_{\hat{J}\xi}(\hat{\Delta}^{1/2}\cdot))((y^*\otimes1)\alpha(x)) \qquad \text{grâce à (P4)}\\
&=(\psi\otimes(\omega_\xi\circ\kappa)(\hat{\Delta}^{1/2}\cdot))((y^*\otimes1)\alpha(x)) \qquad \text{d'après le rappel I.11}\\
&=(\psi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa)((y^*\otimes1)\alpha(x)) \qquad \text{d'après I.12}\\
&=(\psi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(y^*)(x\otimes1)) \qquad \text{d'après III.1 (ii)}\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}(\psi\otimes\omega_\xi)((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon\alpha(y^*)(x\otimes1))\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}(\psi\otimes\varphi)((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon(1\otimes\pi(\xi)^*)\alpha(y^*)(x\otimes\pi(\xi))) \qquad \text{grâce à [17], II.11.}\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}((1\otimes\Delta^{1/2})_\varepsilon(\Lambda_\psi(x))\otimes\xi)\mid\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(y)(1\otimes\pi)(\xi)))\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon(\Lambda_\psi(x)\otimes\xi)\mid U_\psi(\Lambda_\psi(y)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\xi)) \qquad \text{d'après III.7. (i)}\\
&=(\Lambda_\psi(x)\otimes\xi\mid U_\psi(\Lambda_\psi(y)\otimes\xi)) \qquad \text{d'après III.7. (ii) et [5] 4.2.1.}\\
&=\langle U_\psi^*,\ \Omega_{\Lambda_\psi(x),\Lambda_\psi(y)}\otimes\omega_\xi\rangle
\end{aligned}$$

d'où (i), par densité.

Soit $\omega$ dans $M_*^+$. D'après [5], 1.2.2.1., on a:

$$\begin{aligned}
\mu(\omega^\circ) &= \mu(\omega\circ\kappa) \\
&= (i\otimes\omega\circ\kappa)(U_\psi^*) \\
&= (i\otimes\omega)(U_\psi) && \text{d'après (i)} \\
&= ((i\otimes\omega)(U_\psi^*))^* && \text{car } \omega \text{ est positif} \\
&= \mu(\omega)^* .
\end{aligned}$$

Oon en déduit (ii) par antilinéarité

**Lemme III.10:** *Soint $x$ dans $\mathfrak{N}_\psi$ et $\xi$ dans $\hat{\mathfrak{A}}_\circ\dagger\hat{\mathfrak{A}}_\circ$. Alors $(i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(x))$ appartient a $\mathfrak{N}_\psi$ et $\Lambda_\psi((i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(x)))=\mu(\omega_\xi)^*\Lambda_\psi(x)$.*

**Démonstration:** Supposons que $\|\hat{\Delta}^{1/4}\xi\|=1$; alors $i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi}$ est une espérance conditionnelle et, d'après [21]:

$$((i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(x)))^*(i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(x))\leqslant(i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(x^*x))$$

d'où

$$\begin{aligned}
\psi(((i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(x)))^*(i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi})(\alpha(x)))&\leqslant(\psi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(x^*x)) \\
&= \psi(x^*x)\|\hat{\Delta}^{-1/4}\xi\|^2 \qquad \text{d'après III.1(i).}
\end{aligned}$$

d'où, par linéarité, la première partie du lemme.

Soit $y$ dans $\mathfrak{N}_\psi$. On a:

$$\begin{aligned}
(\Lambda_\psi((i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(x)))\,|\,\Lambda_\psi(y)) &= \psi(y^*(i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi})(\alpha(x))) \\
&= \psi((i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})((y^*\otimes 1)\alpha(x))) && \text{d'après [21]} \\
&= (\psi\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})((y^*\otimes 1)\alpha(x)) && \text{grâce à [17], 0.4.} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}(\psi\otimes\omega_\xi)((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon(y^*\otimes 1)\alpha(x)) \\
& && \text{grâce à (P2) et (P4)} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}(\psi\otimes\varphi)((1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon(y^*\otimes\pi(\xi)^*)\alpha(x)(1\otimes\pi(\xi)) \\
& && \text{grâce à [17], II.11.} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}(\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(x)(1\otimes\pi(\xi)))\,|\,(1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon(\Lambda_\psi(y)\otimes\xi)) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}(U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\xi)\,|\,(1\otimes\hat{\Delta}^{1/2})_\varepsilon(\Lambda_\psi(y)\otimes\xi)) \\
& && \text{d'après III.7 (i)} \\
&= (U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\xi)\,|\,\Lambda_\psi(y)\otimes\xi) && \text{d'après III.7 (ii)} \\
& && \text{et [5], 4.2.1.} \\
&= (\mu(\omega_\xi)\Lambda_\psi(y)\,|\,\Lambda_\psi(x))^- && \text{d'après III.8 (ii)} \\
&= (\mu(\omega_\xi)^*\Lambda_\psi(x)\,|\,\Lambda_\psi(y))
\end{aligned}$$

d'où le lemme, par linéarité et densité.

**Lemme III.11:** (i) *Pour tout* $\omega$ *de* $M_*$ *et* $t$ *de* $\boldsymbol{R}$, $\mu(\omega)$ *commute à* $\Delta_\psi^{it}$ ($\Delta_\psi$ *est l'opérateur modulaire associe au poids* $\psi$).

(ii) *Pour tout* $\omega$ *de* $M_*^+$, $\mu(\omega)$ *commute à* $J_\psi$ ($J_\psi$ *est l'involution antilinéaire isométrique associée à* $\psi$).

(iii) *Pour tout* $t$ *de* $\boldsymbol{R}$, *on a*: $(\Delta_\psi^{it}\otimes 1)U_\psi = U_\psi(\Delta_\psi^{it}\otimes 1)$

**Démonstration:** Soient $x$ dans $\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$ et $\xi$ dans $\hat{\mathfrak{A}}_0 \dagger \hat{\mathfrak{A}}_0$. Il résulte du lemme précédent que $\mu(\omega_\xi)^* \Lambda_\psi(x) = \Lambda_\psi((i\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(x)))$ appartient à $\Lambda_\psi(\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*)$ et donc au domaine de $S_\psi$ (prolongement fermé de l'application $\Lambda_\psi(x) \to \Lambda_\psi/(x^*)$ définie sur $\Lambda_\psi(\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*)$). De plus:

$$\begin{aligned} S_\psi\mu(\omega_\xi)^*\Lambda_\psi(x) &= \Lambda_\psi((i\otimes\omega_{\Delta^{1/4}\xi})(\alpha(x^*))) \\ &= \mu(\omega_\xi)^*\Lambda_\psi(x^*) \\ &= \mu(\omega_\xi)^* S_\psi \Lambda_\psi(x) \end{aligned}$$

par suite, comme $\Lambda_\psi(\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*)$ est un domaine essentiel pour $S_\psi$:

$$\mu(\omega_\xi)^* S_\psi \subset S_\psi \mu(\omega_\xi)^* . \qquad (*)$$

Le vecteur $\hat{J}\xi$ vérifie les mêmes hypothèses que $\xi$; on en déduit donc (III.9 (ii)) que:

$$\mu(\omega_\xi) S_\psi \subset S_\psi \mu(\omega_\xi) . \qquad (**)$$

D'autre part, en transposant (*) il vient:

$$\mu(\omega_\xi) F_\psi \subset F_\psi \mu(\omega_\xi) \qquad \text{et:}$$
$$\mu(\omega_\xi)\Delta_\psi = \mu(\omega_\xi) F_\psi S_\psi \subset F_\psi \mu(\omega_\xi) S_\psi \subset F_\psi S_\psi \mu(\omega_\xi) = \Delta_\psi \mu(\omega_\xi)$$

d'où

$$\mu(\omega_\xi)\Delta_\psi^{it} = \Delta_\psi^{it}\mu(\omega_\xi) \qquad (\forall t\in\boldsymbol{R},\ \forall \xi\in\mathfrak{A}_0\dagger\mathfrak{A}_0)$$

et (i) en résulte par linéarité et continuité (cf. III.8 (ii)).

On a également

$$\begin{aligned} \mu(\omega_\xi) J_\psi \Lambda_\psi(x) &= \mu(\omega_\xi)\Delta_\psi^{1/2} S_\psi \Lambda_\psi(x) \\ &= \Delta_\psi^{1/2}\mu(\omega_\xi) S_\psi \Lambda_\psi(x) && \text{d'après ce qui précède} \\ &= \Delta_\psi^{1/2} S_\psi \mu(\omega_\xi)\Lambda_\psi(x) && \text{d'après } (**) \\ &= J_\psi \mu(\omega_\xi)\Lambda_\psi(x) \end{aligned}$$

et (ii) s'en déduit par densité et continuité.

Soient $\xi_1$, $\xi_2$ dans $H_\psi$ et $\eta$, $\zeta$ dans $H$. On a:

$$\begin{aligned}(\xi_1\otimes\eta\,|\,(\Delta_\psi^{it}\otimes 1)U_\psi(\xi_2\otimes\zeta)) &= (\Delta_\psi^{-it}\xi_1\otimes\eta\,|\,U_\psi(\xi_2\otimes\zeta))\\ &= (\mu(\omega_{\eta,\zeta})\Delta_\psi^{-it}\xi_1\,|\,\xi_2) && \text{d'après III.8 (ii)}\\ &= (\Delta_\psi^{-it}\mu(\omega_{\eta,\zeta})\xi_1\,|\,\xi_2) && \text{d'après (i)}\\ &= (\mu(\omega_{\eta,\zeta})\xi_1\,|\,\Delta_\psi^{it}\xi_2)\\ &= (\xi_1\otimes\eta\,|\,U_\psi(\Delta_\psi^{it}\xi_2\otimes\zeta)) && \text{d'après III.8 (ii).}\\ &= (\xi_1\otimes\eta\,|\,U_\psi(\Delta_\psi^{it}\otimes 1)(\xi_2\otimes\zeta))\end{aligned}$$

d'où (iii) par linéarité, densité et continuité.

**Lemme III.12:** $(J_\psi\otimes\hat{J})U_\psi(J_\psi\otimes\hat{J})=U_\psi^*$

**Démonstration:** Soient $\xi$ dans $H$ et $\eta$, $\zeta$ dans $H_\psi$. On a:

$$\begin{aligned}((J_\psi\otimes\hat{J})U_\psi(J_\psi\otimes\hat{J})(\eta\otimes\xi)\,|\,\zeta\otimes\xi) &= (J_\psi\zeta\otimes\hat{J}\xi\,|\,U_\psi(J_\psi\eta\otimes\hat{J}\xi))\\ &= (\mu(\omega_{\hat{J}\xi})J_\psi\zeta\,|\,J_\psi\eta) && \text{d'après III.8 (ii)}\\ &= (\eta\,|\,\mu(\omega_{J\xi})\zeta) && \text{d'après III.11 (ii)}\\ &= (\eta\,|\,\mu(\omega_\xi)^*)\zeta && \text{grâce à III.9 (ii).}\\ &= (\mu(\omega_\xi)\eta\,|\,\zeta)\\ &= (\eta\otimes\xi\,|\,U_\psi(\zeta\otimes\xi)) && \text{d'après III.8 (ii)}\\ &= (U_\psi^*(\eta\otimes\xi)\,|\,\zeta\otimes\xi)\end{aligned}$$

d'où le résultat, par polarisation, linéarité et continuité.

**Corollaire III.13:** (i) *$U_\psi$ est unitaire*

(ii) $\alpha(a)=U_\psi(a\otimes 1)U_\psi^*$ $\quad(\forall a\in A)$

(iii) $\alpha\sigma_t^\psi=(\sigma_t^\psi\otimes i)\alpha$ $\quad(\forall t\in\boldsymbol{R})$.

**Démonstration:** (i) résulte trivialement de III.12; (ii) de III.7. (iii) et de (i); et (iii) de III.11. (iii) et de (ii).

**Lemme III.14:** *Soient $a$ dans $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi}$, $y$ dans $\mathfrak{N}_\varphi$; alors $(i\otimes\Gamma)(a)(1\otimes y\otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}$ et:*

$$\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}((i\otimes\Gamma)(a)(1\otimes y\otimes 1)) = (1\otimes W)(1\otimes\sigma)(\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(a)\otimes\Lambda_\varphi(y))\,.$$

**Démonstration:** Soient $a_1$ dans $\mathfrak{N}_\psi$ et $a_2$ dans $\mathfrak{N}_\varphi$. On a:

$$\begin{aligned}(i\otimes\Gamma)(a_1\otimes a_2)(1\otimes y\otimes 1) &= a_1\otimes\Gamma(a_2)(y\otimes 1)\\ &\in\mathfrak{N}_\psi\otimes\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi} && \text{d'après [5], 2.1.1.}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}(a_1\otimes\Gamma(a_2)(y\otimes 1)) &= \Lambda_\psi(a_1)\otimes W(\Lambda_\varphi(y)\otimes\Lambda_\varphi(a_2)) \qquad \text{d'après [5], 2.1.1.}\\ &= (1\otimes W)(1\otimes\sigma)(\Lambda_\psi(a_1)\otimes\Lambda_\psi(a_2)\otimes\Lambda_\varphi(y)) \; (*)\,.\end{aligned}$$

Considérons sur $A\otimes M$ les deux poids normaux définis par

$$\begin{aligned}\Phi(b) &= (\psi\otimes\varphi)(b)\varphi(y^*y)\\ \Psi(b) &= (\psi\otimes\varphi\otimes\varphi)((1\otimes y^*\otimes 1)(1\otimes\Gamma)(b)(1\otimes y\otimes 1))\,.\end{aligned}$$

Il en clair que $\Phi$ est semi-fini et fidèle, il résulte de ce qui précède que $\Psi$ est semi-fini. Il résulte de [5] 2.2.5. (c) que $\Psi$ est invariant par $\sigma=\sigma^\psi\otimes\sigma^\varphi$; comme $W$ est unitaire, le lemme 4.1.1. de [5] (avec $E=\mathfrak{N}_\psi\otimes\mathfrak{N}_\varphi$) permet de conclure que $\Phi=\Psi$.

Donc, si a appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi}$, $(i\otimes\Gamma)(a)(1\otimes y\otimes 1)$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}$ et $||\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}((i\otimes\Gamma)(a)(1\otimes y\otimes 1))||=||\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}(a\otimes y)||$.

Ainsi il existe une isométrie de $H_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}$ dans lui-même qui envoie $\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}(a\otimes y)$ sur $\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}((i\otimes\Gamma)(a)(1\otimes y\otimes 1))$; il résulte de $(*)$ qu'elle coincide avec $(1\otimes W)(1\otimes\sigma)$ sur $\Lambda_\psi(\mathfrak{N}_\psi)\otimes\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)\otimes\Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi)$, d'où le lemme

**Lemme III.15:** *Soit a dans* $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi}$, *z dans* $\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$. *Alors* $(\alpha\otimes i)(a)\cdot(1\otimes z\otimes 1)$ *appartient a* $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}$ *et*

$$\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}((\alpha\otimes i)(a)(1\otimes z\otimes 1)) = (1\otimes\Delta^{-1/2}\otimes 1)(U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}(a\otimes z)$$

**Démonstration:** Soient $a_1$, dans $\mathcal{N}_\psi$ et $a_2$ dans $\mathcal{N}_\varphi$. Il résulte de III.7 (i) que

$$\begin{aligned}\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}(\alpha(a_1)(1\otimes z)\otimes a_2) &= U_\psi(\Lambda_\psi(a_1)\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\varphi(z))\otimes\Lambda_\varphi(a_2)\\ &= (U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)(\Lambda_\psi(a_1)\otimes\Lambda_\varphi(a_2)\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\varphi(z))\,.\end{aligned}$$

Considérons sur $A\otimes M$ les deux poids normaux définis par:

$$\begin{aligned}\Phi(b) &= (\Psi\otimes\varphi)(b)\varphi\circ\kappa(z^*z)\\ \Psi(b) &= (\psi\otimes\varphi\otimes\varphi)((1\otimes z^*\otimes 1)(\alpha\otimes i)(b)(1\otimes z\otimes 1))\,.\end{aligned}$$

Comme il résulte de III.13 (iii) que $\Psi$ est invariant par $\sigma=\sigma^\psi\otimes\sigma^\varphi$ et que $\Delta$ est la dérivée de Radon-Nikodym de $\varphi$ par rapport à $\varphi\circ\kappa$ ([5], 4.2.1.) en utilisant [5] 4.1.1. (avec $E=\mathfrak{N}_\psi\otimes(\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa})$). On prouve que $\Phi=\Psi$

Ainsi-*t*-on:

$$(U_\psi\otimes 1))(1\otimes\sigma)(\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(a)\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\varphi(z)) = \Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}((\alpha\otimes i)(a)(1\otimes z\otimes 1))$$

et le lemme résulte de III.7 (ii) et [5] 4.2.1.

**Lemme III.16:** *Soient $x$ dans $\mathfrak{N}_\varphi$ et $\xi$ dans $\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\mathfrak{N}_{\varphi\otimes\varphi})\cap\mathcal{D}(\Delta^{-1/2}\otimes\Delta^{-1/2})$. Alors $((\alpha\otimes i)\alpha(x))(1\otimes(\pi\otimes\pi)(\xi))$ appartient à $\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}$ et*

$$\begin{aligned}&\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}(((\alpha\otimes i)\alpha(x))(1\otimes(\pi\otimes\pi)(\xi)))\\&\quad=(1\otimes\Delta^{-1/2}\otimes\Delta^{-1/2})(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(\Lambda_\psi(x)\otimes\xi)\,.\end{aligned}$$

**Démonstration:** Soient $a_1$ et $a_2$ dans $\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$. On a $\alpha(x)(1\otimes a_2)\in\mathfrak{N}_{\psi\otimes\varphi}$ d'après III.7 (i), et il résulte de III.15 que:

$$\begin{aligned}&\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}((\alpha\otimes i)(\alpha(x)(1\otimes a_2))(1\otimes a_1\otimes1))=\\&\quad=(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(x)(1\otimes a_2))\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\varphi(a_1)\\&\quad=(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(U_\varphi\otimes1)(\Lambda_\psi(x)\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\varphi(a_2)\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\varphi(a_1))\\&\qquad\qquad\text{d'après III.7 (i)}\\&\quad=(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(\Lambda_\psi(x)\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\varphi(a_1)\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\varphi(a_2))\,.\end{aligned}$$

Soient $\eta$ dans $\mathfrak{A}'_{\varphi\otimes\varphi}$ et $\zeta$ dans $\mathfrak{A}'_\psi$. On a donc:

$$\begin{aligned}&(\pi'_\psi(\zeta)\otimes(\pi\otimes\pi)'(\eta))(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(\Lambda_\psi(x)\otimes\hat{\Delta}^{-1/2}\Lambda_\varphi(a_1)\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\varphi(a_2))\\&\quad=(\alpha\otimes i)(\alpha(x))(1\otimes a_1\otimes a_2)(\zeta\otimes\eta)\\&\quad=(\alpha\otimes i)(\alpha(x))((1\otimes(\pi\otimes\pi)'(\eta))(\zeta\otimes\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(a_1\otimes a_2))\,.\end{aligned}$$

On peut choisir $a_1$ et $a_2$ de telle sorte que $\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(a_1\otimes a_2)$ tende vers $\xi$ et $\Delta^{-1/2}\Lambda_\varphi(a_1)\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\psi(a_2)$ tende vers $(\Delta^{-1/2}\otimes\Delta^{-1/2})\xi$ (cf. [5] 3.1.2 (b)). On obtient:

$$\begin{aligned}&(\pi'_\psi(\zeta)\otimes(\pi\otimes\pi)'(\eta))(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(\Lambda_\psi(x)\otimes(\hat{\Delta}^{-1/2}\otimes\hat{\Delta}^{-1/2})\xi)\\&\quad=(\alpha\otimes i)(\alpha(x))((1\otimes(\pi\otimes\pi)'(\eta))(\zeta\otimes\xi))\\&\quad=(\alpha\otimes i)(\alpha(x))((1\otimes(\pi\otimes\pi)(\xi))(\zeta\otimes\eta))\,.\end{aligned}$$

Donc, le vecteur $(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(\Lambda_\psi(x)\otimes(\Delta^{-1/2}\otimes\Delta^{-1/2})\xi)$ est borné à gauche par rapport à $\psi\otimes\varphi\otimes\varphi$ et l'on a:

$$\begin{aligned}&(\pi_\psi\otimes\pi\otimes\pi)((U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(\Lambda_\psi(x)\otimes(\Delta^{-1/2}\otimes\Delta^{-1/2})\xi))=\\&\quad=(\alpha\otimes i)(\alpha(x))(1\otimes(\pi\otimes\pi)(\xi))\end{aligned}$$

Le lemme résulte alors de III.7 (iii) et [5] 4.2.1.

**Lemme III.17:**

$$(1\otimes W)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)=(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes1)(1\otimes\sigma)(1\otimes W)\,.$$

**Démonstration:** Soient $x$ dans $\mathfrak{N}_\psi$, $y$ dans $\mathfrak{N}_\varphi$, $z$ dans $\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_{\varphi\circ\kappa}$. On a:

$(1\otimes W)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}(x\otimes y\otimes z)$

$= (1\otimes W)(1\otimes\sigma)(U_\psi\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(x\otimes z)\otimes\Lambda_\varphi(y))$

$= (1\otimes W)(1\otimes\sigma)((1\otimes\Delta^{1/2})U_\psi(\Lambda_\psi(x)\otimes\Delta^{-1/2}\Lambda_\psi(z))\otimes\Lambda_\varphi(y))$

d'après III.7 (ii) et [5], 4.2.1.

$= (1\otimes W)(1\otimes\sigma)(1\otimes\Delta^{1/2}\otimes 1)(\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(x)(1\otimes z))\otimes\Lambda_\varphi(y))$ d'après III.7 (i)

$= (1\otimes\Delta^{1/2}\otimes\Delta^{1/2})(1\otimes W)(1\otimes\sigma)(\Lambda_{\psi\otimes\varphi}(\alpha(x)(1\otimes z))\otimes\Lambda_\varphi(y))$ d'après I.1.

$= (1\otimes\Delta^{1/2}\otimes\Delta^{1/2})\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}((i\otimes\Gamma)(\alpha(x)(1\otimes z))(1\otimes y\otimes 1))$ d'après III.14

$= (1\otimes\Delta^{1/2}\otimes\Delta^{1/2})\Lambda_{\psi\otimes\varphi\otimes\varphi}((\alpha\otimes i)(\alpha(x))(1\otimes\Gamma(z)(y\otimes 1)))$

$= (U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)(\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(z)(y\otimes 1)))$ d'après I.16 et III.16

$= (U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)(1\otimes W)(\Lambda_\psi(x)\otimes\Lambda_\varphi(y)\otimes\Lambda_\varphi(z))$

d'après [5] 2.1.1.

d'où le résultat.

**Théorème III.18:** *Le quadruplet $(H_\psi, \pi_\psi, J_\psi, U_\psi)$ est une forme canonique de $\alpha$.*

**Démonstration:** Il résulte du lemme précédent que:

$$(1\otimes W)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)(1\otimes W^*) = (U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)$$

Soit, d'après [4], I.5 (iii) et III.7 (ii)

$$(i\otimes\Gamma)(U_\psi) = (U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)(U_\psi\otimes 1)(1\otimes\sigma)$$

Le théorème résulte alors de III.12 et III.13 (i) et (ii).

**Corollaire III.19:** *On suppose $\alpha$ integrable. Soit $\psi'$ dans $P(A)$. Alors il existe un unitaire $U$ dans $\mathcal{L}(H_{\psi'})\otimes M$ tel que $(H_{\psi'}, \pi_{\psi'}, J_{\psi'}, U)$ soit une forme canonique de $\alpha$.*

**Démonstration:** D'après III.4, il existe un poids $\psi$ sur $A$, $\hat{\Delta}^{-1}$ relativement invariant par rapport à $\alpha$. D'après le théorème précédent, il existe $U_\psi$ tel que $(H_\psi, \pi_\psi, J_\psi, U_\psi)$ soit une forme canonique de $\alpha$. Soit alors $V$ l'unitaire $H_\psi\to H_{\psi'}$ construit comme en [8], 2.18. Posons $U=(V\otimes 1)U_\psi(V^*\otimes 1)$; le résultat se déduit alors aisément de [8], 2.18.

## IV. Propriétés des produits croisés

On utilise les notations du chapitre II.

**Lemme IV.1:** (i) *On suppose que $\alpha$ admet une forme canonique* ($\mathcal{H}$, $\rho$, $\mathcal{J}$, $U$). *Alors si $\alpha$ vérifie* ($A$), *elle vérifie* ($B$).

(ii) *Toute action duale vérifie* ($B$).

**Démonstration:** On pose $\beta=(\rho\otimes i)\alpha\rho^{-1}$. On suppose que $\alpha$ vérifie ($A$), il résulte alors de [4], III.10 que $\beta$ également. Autrement dit:

$$(\beta(\rho(A))\cup \boldsymbol{C}_{\mathcal{H}}\otimes\mathcal{L}(H))''=\rho(A)\otimes\mathcal{L}(H)$$

soit encore:

$$(U(\rho(A)\otimes\boldsymbol{C}_H)U^*\cup \boldsymbol{C}_{\mathcal{H}}\otimes\mathcal{L}(H))''=\rho(A)\otimes\mathcal{L}(H)$$

d'où, d'après III.5. (iv):

$$((\mathcal{J}\otimes\hat{J})U^*(\mathcal{J}\otimes\hat{J})(\rho(A)\otimes\boldsymbol{C}_H)(\mathcal{J}\otimes\hat{J})U(\mathcal{J}\otimes\hat{J})\cup \boldsymbol{C}_{\mathcal{H}}\otimes\mathcal{L}(H))''=\rho(A)\otimes\mathcal{L}(H)$$

et, grâce à III.5. (ii):

$$(U^*(\rho(A)'\otimes\boldsymbol{C}_H)U\cup \boldsymbol{C}_{\mathcal{H}}\otimes\mathcal{L}(H))''=\rho(A)'\otimes\mathcal{L}(H)\,.$$

Ainsi, l'action $\beta'$ implémentée par $U^*$ sur $\rho(A)'$ (II.7) vérifie ($A$); donc $\beta$ vérifie ($B$) (II.13) et $\alpha$ également (II.6. (ii)); ce qui achève la démonstration de (i).

D'après [4], III 5., toute action duale vérifie ($A$) et d'après II.4 est intégrable, donc admet une forme canonique (III.19). Ainsi (ii) résulte de (i).

**Théorème IV.2:** (i) *Toute action vérifie* ($A$)

(ii) *Toute action vérifie* ($B$)

(iii) *Toute action est saturée*

**Démonstration:** D'après le lemme précédent, l'action biduale $\tilde{\tilde{\alpha}}$ vérifie ($B$). D'autre part, d'action $\gamma$ introduite en II.15. (i) est équivalente à $\tilde{\tilde{\alpha}}$ (II.15. (iii)), elle vérifie donc ($B$) (II.6. (ii)).

Or, par définition:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^*(\gamma) &= ((i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(\alpha(A)\cup \boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H))''\cup \boldsymbol{C}_{K\otimes H}\otimes\hat{M}')''\\
&= ((i\otimes\varsigma)((\alpha\otimes i)(\alpha(A))\cup \boldsymbol{C}_{K\otimes H}\otimes\mathcal{L}(H))''\cup \boldsymbol{C}_{K\otimes H}\otimes\hat{M}')''\\
&= (i\otimes\varsigma)((\alpha\otimes i)(\alpha(A))\cup \boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}'\otimes\mathcal{L}(H))''\\
&= (i\otimes\varsigma)(((\alpha\otimes i)(\alpha(A))\cup \boldsymbol{C}_K\otimes\hat{M}'\otimes M)''\cup \boldsymbol{C}_{K\otimes H}\otimes\mathcal{L}(H))''\\
&= (i\otimes\varsigma)(\mathcal{W}^*(\alpha)\otimes M\cup \boldsymbol{C}_{K\otimes H}\otimes\mathcal{L}(H))'' \qquad \text{d'après II.14.}\\
&= (i\otimes\varsigma)(\mathcal{W}^*(\alpha)\otimes\mathcal{L}(H))\,.
\end{aligned}$$

Et donc, d'après II.6. (i):

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^*(\gamma)^{\tilde{\gamma}} &= \mathcal{W}^*(\gamma)\cap\mathcal{L}(K\otimes H)\otimes M\\ &= (i\otimes\varsigma)(\mathcal{W}^*(\alpha)\otimes\mathcal{L}(H)\cap\mathcal{L}(K)\otimes M\otimes\mathcal{L}(H))\\ &= (i\otimes\varsigma)((\mathcal{W}^*(\alpha)\cap\mathcal{L}(K)\otimes M)\otimes\mathcal{L}(H))\\ &= (i\otimes\varsigma)(\mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\alpha}}\otimes\mathcal{L}(H)) \qquad \text{grâce à II.6.(i).}\end{aligned}$$

Donc, comme $\gamma$ vérifie (B), on a:

$$\begin{aligned}(i\otimes\varsigma)(\mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\alpha}}\otimes\mathcal{L}(H)) &= \gamma((\alpha(A)\cup \boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H))'')\\ &= (i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(\alpha(A)\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H))''\end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^*(\alpha)^{\alpha}\otimes\mathcal{L}(H) &= (\alpha\otimes i)(\alpha(A)\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H))'' \qquad (*)\\ &\subset (\alpha\otimes i)(A\otimes\mathcal{L}(H))\\ &= \alpha(A)\otimes\mathcal{L}(H)\end{aligned}$$

ainsi:

$\mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\alpha}}\subset\alpha(A)$, d'où (ii), d'après [4], II.6.

La relation $(*)$ s'écrit alors:

$$\alpha(A)\otimes\mathcal{L}(H) = (\alpha\otimes i)(\alpha(A)\cup\boldsymbol{C}_K\otimes\mathcal{L}(H))''$$

comme $\alpha\otimes i$ est injectif, on en déduit (i).

Supposons $\alpha$ implémentée par un $1_K^{\mathcal{L}(K)}$-cocycle $U$; d'après (i) l'action $\alpha'$ de $\boldsymbol{K}^s$ sur $A'$ implémentée par $U^*$ vérifie $(A)$; $\alpha$ est donc saturée (II.13).

Supposons $\alpha$ quelconque; il résulte de [4], I.13. que la restriction de $(\alpha\otimes i)$ à $\alpha(A)$ est une action implémentée et donc saturée. On a donc:

$$\begin{aligned}(\alpha\otimes i)(\alpha(A)) &= \{x\in\alpha(A)\otimes M;\ (\alpha\otimes i\otimes i)(x) = (i\otimes i\otimes\Gamma)(x)\}\\ &= \{(\alpha\otimes i)(y);\ y\in A\otimes M,\ (\alpha\otimes i\otimes i)(\alpha\otimes i)(y) = (i\otimes i\otimes\Gamma)(\alpha\otimes i)(y)\}\\ &= \{(\alpha\otimes i)(y);\ y\in A\otimes M,\ (\alpha\otimes i\otimes i)(\alpha\otimes i)(y) = (\alpha\otimes i\otimes i)(i\otimes\Gamma)(y)\}\\ &= \{(\alpha\otimes i)y;\ y\in A\otimes M,\ (\alpha\otimes i)(y) = (i\otimes\Gamma)(y)\}\end{aligned}$$

d'où (iii). Grâce à (iii) on obtient alors immédiatement (ii) en utilisant II.13.

**Théorème IV.3** (*Bidualité*): *Toute action* $\alpha$ *est telle que*:

(i) $(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)$ *est une action de* $\boldsymbol{K}$ *sur* $A\otimes\mathcal{L}(H)$

(ii) $1\otimes\sigma W^*\sigma$ *est un* $(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)$*-cocycle*

(iii) $\tilde{\tilde{\alpha}}\sim(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(\Theta(\alpha\otimes i),\ v,\ 1\otimes\sigma W^*\sigma)$

(*pour les définitions de* $\Theta$ *et* $v$, *voir lemme II.*15).

**Démonstration:** Cela résulte de [4], II.8 et IV.2 (i).

Ce résultat généralise [20], 4.5, [13] th 2 et 3, [14], 7.1.

**Lemme IV.4:** *La restriction de $\Theta(\alpha\otimes i)$ à $\mathcal{W}^*(\alpha)$ est égale à $\tilde{\alpha}$.*

**Démonstration:** On a: $\Theta(\alpha\otimes i)\alpha(x) = \alpha(x)\otimes 1$ pour $x$ dans $A$

et $\Theta(1\otimes 1\otimes y) = 1\otimes\hat{\Gamma}'(y)$ pour $y$ dans $\hat{M}'$

(voir le calcul fait en [4], III.1).

Il résulte donc de [4], II.6. (ii) que:

$$\Theta(\alpha\otimes i)(\alpha(x)) = \alpha(\alpha(x)) \qquad (\forall x\in A)$$
$$\Theta(\alpha\otimes i)(1\otimes y) = \alpha(1\otimes y) \qquad (\forall y\in M')$$

d'où le résultat, en appliquant [4], II.1.

**Proposition IV.5:** *L'action $\beta$ de $\boldsymbol{K}$ sur $A\otimes\mathcal{L}(H)$ définie par*

$$\beta\sim(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i) \qquad (i,\ i,\ 1\otimes\sigma W^*\sigma)$$

*vérifie*: (i) $\tilde{\tilde{\alpha}}\approx\beta\ (\Theta(\alpha\otimes i),\ v)$

(ii) $(A\otimes\mathcal{L}(H))^\beta=\mathcal{W}^*(\alpha)$.

**Démonstration:** La définition de $\beta$ provient de IV.3. (i) et (ii) et de [4], I.8.

La relation (i) résulte de IV.3. (iii) en utilisant les formules de composition des équivalences ([4], I.11. 1 et 2).

Il résulte de II.16 que:

$(A\otimes\mathcal{L}(H))^\beta=\{x\in A\otimes\mathcal{L}(H);\ \Theta(\alpha\otimes i)(x)\in\mathcal{W}^*(\tilde{\alpha})^{\alpha\sim\sim}\}$, or en appliquant V.2. (ii) à $\tilde{\alpha}$, on obtient $\mathcal{W}^*(\tilde{\alpha})^{\alpha\sim\sim}=\tilde{\alpha}(\mathcal{W}^*(\alpha))$, d'où (ii), grâce à IV.4.

**Corollaire IV.6:** *On suppose $\alpha$ implémentée par un $1_{\boldsymbol{K}}^{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$-cocycle $U$. Alors*:

$$\mathcal{W}^*(\alpha) = A\otimes\mathcal{L}(H)\cap U(\mathcal{L}(K)\otimes\hat{M}')U^*\,.$$

**Démonstration:** On a:

$$\mathcal{W}^*(\alpha) = (A\otimes\mathcal{L}(H))^\beta \qquad \text{d'après IV.5. (ii)}$$
$$= \{x\in A\otimes\mathcal{L}(H);\ (i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(x)=(1\otimes\sigma W\sigma)(x\otimes 1)(1\otimes\sigma W^*\sigma)\}$$

d'après II.16.

d'où le résultat, grâce à II.11.

**Théorème IV.7** (*Commutation*): *On suppose $\alpha$ implémentée par un $1_{K}^{\mathcal{L}(K)}$-cocycle $U$; soit $\alpha'$ l'action de $\boldsymbol{K}^{s}$ sur $A'$ implémentée par $U^*$. Alors*:

$$\mathcal{W}^*(\alpha)' = U\mathcal{W}^*(\alpha')U^*.$$

**Démonstration:** Il résulte de IV.6. que:

$$\mathcal{W}^*(\alpha)' = (A'\otimes \boldsymbol{C}_H \cup U(\boldsymbol{C}_K\otimes \hat{M})U^*)''$$

et donc:

$$\begin{aligned} U^*\mathcal{W}^*(\alpha)'U &= (\alpha'(A') \cup \boldsymbol{C}_K\otimes \hat{M})'' \\ &= \mathcal{W}^*(\alpha') \qquad \text{par définition.} \end{aligned}$$

Cela généralise [3], th. 3.14. et [13], th. 5.

**Corollaire IV.8:** *On suppose que $\alpha$ admet une forme canonique $(\mathcal{H}, \rho, \mathcal{J}, U)$. Alors $(\mathcal{H}\otimes H, \rho\otimes i, U(\mathcal{J}\otimes \hat{J}), 1\otimes(J\hat{J}\otimes J\hat{J})W^*(J\hat{J}\otimes J\hat{J}))$ est une forme canonique de $\tilde{\alpha}$.*

**Démonstration:** Comme $(\mathcal{H}, \rho, \mathcal{J}, U)$ est une forme canonique, on a: $U(\mathcal{J}\otimes\hat{J})U(\mathcal{J}\otimes\hat{J}) = UU^* = 1$, donc l'opérateur $U(\mathcal{J}\otimes\hat{J})$ est involutif. Il est clair que $1\otimes(J\hat{J}\otimes J\hat{J})W^*(J\hat{J}\otimes J\hat{J})$ est un opérateur unitaire de $\mathcal{L}(\mathcal{H})\otimes H\otimes H$.

Soit $\rho$ la représentation de $A$ sur $\mathcal{H}$ (III.5), il est clair que $\rho\otimes i$ est une représentation normale fidèle de $\mathcal{W}^*(\alpha)$ sur $\mathcal{H}\otimes H$.

On pose $\beta = (\rho\otimes i)\alpha\rho^{-1}$; cette action de $\boldsymbol{K}$ sur $\rho(A)$ est implémentée par $U$; on notera $\beta'$ l'action de $\boldsymbol{K}^s$ sur $\rho(A)'$ implémentée par $U^*$.

D'après [4], II.4, on a:

$$\mathcal{W}^*(\beta) = (\rho\otimes i)\mathcal{W}^*(\alpha) \tag{$*$}$$

Puis:

$$\begin{aligned}
&U(\mathcal{J}\otimes\hat{J})(\rho\otimes i)(\mathcal{W}^*(\alpha))U(\mathcal{J}\otimes\hat{J}) \\
&\quad = U(\mathcal{J}\otimes\hat{J})(\rho\otimes i)\mathcal{W}^*(\alpha)(\mathcal{J}\otimes\hat{J})U^* && \text{d'après III.5. (iv)} \\
&\quad = U(\mathcal{J}\otimes\hat{J})\mathcal{W}^*(\beta)(\mathcal{J}\otimes\hat{J})U^* && \text{d'après } (*) \\
&\quad = U(\mathcal{J}\otimes\hat{J})(U(\rho(A)\otimes \boldsymbol{C}_H)U^* \cup \boldsymbol{C}_{\mathcal{H}}\otimes\hat{M})''(\mathcal{J}\otimes\hat{J})U^* && \text{par définition} \\
&\quad = U((\mathcal{J}\otimes\hat{J})U(\rho(A)\otimes \boldsymbol{C}_H)U^*(\mathcal{J}\otimes\hat{J}) \cup \boldsymbol{C}_{\mathcal{H}}\otimes\hat{M})''U^* \\
&\quad = U(U^*(\mathcal{J}\rho(A)\mathcal{J}\otimes \boldsymbol{C}_H)U \cup \boldsymbol{C}_{\mathcal{H}}\otimes\hat{M})''U^* && \text{d'après III.5. (iv)} \\
&\quad = U(U^*(\rho(A)'\otimes \boldsymbol{C}_H)U \cup \boldsymbol{C}_{\mathcal{H}}\otimes M)''U^* && \text{d'après III.5. (ii)} \\
&\quad = U\mathcal{W}^*(\beta')U^* && \text{par définition} \\
&\quad = \mathcal{W}^*(\beta)' && \text{d'après IV.6.} \\
&\quad = (\rho\otimes i)(\mathcal{W}^*(\alpha))' && \text{d'après } (*)
\end{aligned}$$

d'où (i) de III.5.

D'autre part, [4], II.6. (i) énonce que $1\otimes(J\hat{J}\otimes J\hat{J})W^*(J\hat{J}\otimes J\hat{J})$ implémente $\tilde{\beta}$ sur $\mathcal{W}^*(\beta)$; or, d'après [4], II.8., on a:

$$\tilde{\beta}\approx\tilde{\alpha}(\rho\otimes i,\ i)$$

soit $\tilde{\beta}=(\rho\otimes i\otimes i)\tilde{\alpha}(\rho\otimes i)^{-1}$, d'où (ii) de III.5.

Enfin, on a:

$$
\begin{aligned}
&(U(\mathcal{J}\otimes\hat{J})\otimes J)(1\otimes(J\hat{J}\otimes J\hat{J})W^*(J\hat{J}\otimes J\hat{J})(U(\mathcal{J}\otimes\hat{J})\otimes J)\\
&\quad=(U\otimes 1)(\mathcal{J}\otimes J\otimes\hat{J})(1\otimes W^*)(\mathcal{J}\otimes J\otimes\hat{J})(U^*\otimes 1) \qquad \text{d'après III.5. (iv)}\\
&\quad=(U\otimes 1)(1\otimes(J\hat{J}\otimes J\hat{J})W(J\hat{J}\otimes J\hat{J}))(U^*\otimes 1) \qquad \text{d'après [5], 3.1.5. (b)}\\
&\quad=1\otimes(J\hat{J}\otimes J\hat{J})W(J\hat{J}\otimes J\hat{J})
\end{aligned}
$$

car $U\otimes 1\in\mathcal{L}(\mathcal{H})\otimes M\otimes \boldsymbol{C}_H$

et $1\otimes(JJ\otimes JJ)W(JJ\otimes JJ)\in\boldsymbol{C}_{\mathcal{H}}\otimes M'\otimes\mathcal{L}(H)$ d'après [5], 2.1.1.

d'où (iii) de III.5.

## V. Caractérisation des produits croisés

On utilise les notations du chapitre II.

**Lemme V.1:** *Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien, $B$ une algèbre de von Neumann sur $\mathcal{H}$. On suppose qu'il existe une action $\beta$ de $\hat{\boldsymbol{K}}'$ sur $B$ et un morphisme normal $\nu$ de $\hat{M}'$ sur $B$ tel que*:

$$\nu(1)=1$$
$$\beta\nu=(\nu\otimes i)\hat{\Gamma}'\,.$$

*Alors $Y=(\nu\otimes i)(\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)$ est un $1_{\boldsymbol{K}}^{B}$-cocycle qui implémente une action de $\boldsymbol{K}$ sur $B^{\beta}$, qu'on notera $\delta$.*

**Démonstration:** En faisant $\mathcal{H}=\boldsymbol{C}$ dans [4], I.13. (i), on voit que $\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma$ est un $1_{\boldsymbol{K}}^{\mathcal{L}(H)}$-cocycle. Plus précisément, comme cet opérateur appartient à $\hat{M}'\otimes M$ ([5], 2.1.5. (b)), c'est un $1_{\boldsymbol{K}}^{M'}$-cocycle. On en déduit facilement que $Y$ est un $1_{\boldsymbol{K}}^{B}$-cocycle.

Calculons:

$$
\begin{aligned}
&(\beta\otimes i)(Y)\\
&\quad=(\beta\nu\otimes i)(\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)\\
&\quad=(\nu\otimes i\otimes i)(\hat{\Gamma}'\otimes i)(\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)\\
&\quad=(\nu\otimes i\otimes i)((\sigma\otimes 1)(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)(\sigma\otimes 1)(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma))
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\text{d'après [17], II. 6}\\
&\qquad\qquad\qquad\text{appliqué à } \hat{\mathbf{K}}' \text{ (cf. [17], III.14)}\\
&=(\nu\otimes i\otimes i)((\varsigma\otimes i)(i\otimes\varsigma)(i\otimes(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J}))(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)\\
&=(\nu\otimes i\otimes i)((i\otimes\varsigma)(\varsigma\otimes i)((\hat{J}\otimes\hat{J})(W(\hat{J}\otimes\hat{J})\otimes 1))(1\otimes\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma)\\
&=(i\otimes\varsigma)((\nu\otimes i)(\sigma(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})\sigma\otimes 1)(1\otimes(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})))\\
&=(i\otimes\varsigma)((Y\otimes 1)(1\otimes(\hat{J}\otimes\hat{J})W(\hat{J}\otimes\hat{J})))\qquad(*)
\end{aligned}$$

Soit $x$ dans $B^{\beta}$. On a:

$$\begin{aligned}
&(i\otimes\varsigma)(\beta\otimes i)(Y(x\otimes 1)Y^*)\\
&\quad=(i\otimes\varsigma)((\beta\otimes i)(Y)(x\otimes 1\otimes 1)(\beta\otimes i)(Y^*))\\
&\quad=(Y\otimes 1)(1\otimes(J\otimes J)W(J\otimes J))(x\otimes 1\otimes 1)(1\otimes(J\otimes J)W^*(J\otimes J))(Y^*\otimes 1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{d'après } (*)\\
&\quad=(Y(x\otimes 1)Y^*)\otimes 1\,.
\end{aligned}$$

Ainsi $Y(x\otimes 1)Y^*$ appartient à $(B\otimes M)^{(i\otimes\varsigma)(\beta\otimes i)}=B^{\beta}\otimes M$, d'après II.17, d'où le résultat.

**Théorème V.2:** *Soit $B$ une algèbre de von Neumann. Les propositions suivantes sont équivalentes*:

(i) *il existe une action $\beta$ de $\hat{\mathbf{K}}'$ sur $B$ et un morphisme normal $\nu$ de $\hat{M}'$ dans $B$ tel que $\nu(1)=1$ et $\beta\nu=(\nu\otimes i)\hat{\Gamma}'$*

(ii) *il existe une algèbre de von Neumann $C$, une action $\gamma$ de $\mathbf{K}$ soit $C$ telle que $B$ soit isomorphe à $\mathcal{W}^*(\gamma)$.*

(*Ceci généralise* [12], *th.* 1, [13], *th.* 1 *et* [14], *th.* 8.3.).

**Démonstration:** Supposons (ii), notons $\phi$ l'isomorphisme de $B$ sur $\mathcal{W}^*(\gamma)$. Il est clair que $\beta=(\phi^{-1}\otimes i)\tilde{\gamma}\phi$ et $\nu$ défini par $\nu(x)=\phi^{-1}(1\otimes x)$ (pour $x$ dans $\hat{M}'$) vérifient (i).

Réciproquement, supposons (i) et reprenons les notations de V.1.. Notons $\Psi$ le morphisme normal injectif $(\mathrm{Ad}\ Y)\circ\beta$ de $B$ dans $B\otimes\mathcal{L}(H)$. On a, par définition:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^*(\delta)&=(\delta(B^{\beta})\cup\mathbf{C}_{\mathcal{H}}\otimes\hat{M}')''\\
&=((\mathrm{Ad}\ Y)(B^{\beta}\otimes\mathbf{C}_H)\cup\mathbf{C}_{\mathcal{H}}\otimes\hat{M}')''\\
&=(\mathrm{Ad}\ Y)(B^{\beta}\otimes\mathbf{C}_H\cup(\mathrm{Ad}\ Y^*)(\mathbf{C}_{\mathcal{H}}\otimes\hat{M}')''
\end{aligned}$$

Or, pour $x$ dans $\hat{M}'$, on a:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}\, Y^*)(1\otimes x) &= (\nu\otimes i)((\mathrm{Ad}(\sigma(J\otimes J)W^*(J\otimes J)\sigma))(1\otimes x))\\ &= (\nu\otimes i)(\hat{\Gamma}'(x)) \qquad \text{d'après [5], 2.2.5. (a) appliqué à}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \hat{\boldsymbol{K}}' \text{ (cf. [17], VII.10).}\\ &= \beta\nu(x) \qquad \text{par hypothèse.}\end{aligned}$$

Il en résulte que:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^*(\delta) &= (\mathrm{Ad}\, Y)(B^\beta\otimes \boldsymbol{C}_{\mathcal{H}} \cup \beta\nu(\hat{M}'))''\\ &= (\mathrm{Ad}\, Y)\circ\beta(B^\beta \cup \nu(\hat{M}'))''\\ &= \Psi(B^\beta \cup \nu(\hat{M}'))''\\ &\subset \Psi(B) \qquad (*)\end{aligned}$$

Soit $y$ dans $B$. On a:

$$\begin{aligned}&(i\otimes\varsigma)(\beta\otimes i)(\Psi(y))\\ &\quad = (\mathrm{Ad}((i\otimes\varsigma)(\beta\otimes i)(Y)))((i\otimes\varsigma)(\beta\otimes i)(\beta(y)))\\ &\quad = \mathrm{Ad}(Y\otimes 1)\mathrm{Ad}(1\otimes(J\otimes J)W(J\otimes J))((i\otimes\varsigma)(\beta\otimes i)(\beta(y)))\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{d'après l'égalité } (*) \text{ de V.1.}\\ &\quad = \mathrm{Ad}(Y\otimes 1)(i\otimes\varsigma)\mathrm{Ad}(1\otimes\sigma(J\otimes J)W(J\otimes J)\sigma)((i\otimes\hat{\Gamma}')(\beta(y)))\\ &\quad = \mathrm{Ad}(Y\otimes 1)(\beta(y)\otimes 1) \qquad \text{d'après [4] I.5. (iii) appliquée à } \hat{\boldsymbol{K}}'\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(cf. [17], VII.10)}\\ &\quad = \Psi(y)\otimes 1\,.\end{aligned}$$

Donc $\Psi(y)$ appartient à $(B\otimes\mathcal{L}(H))^{(i\otimes\varsigma)(\beta\otimes i)}=B^\beta\otimes\mathcal{L}(H)$ d'après II.17.
D'autre part, comme $\beta(y)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{H})\otimes\hat{M}'$ on obtient:

$$\begin{aligned}\Psi(y) &\in (B^\beta\otimes\mathcal{L}(H))\cap(\mathrm{Ad}\, Y)(\mathcal{L}(\mathcal{H})\otimes\hat{M}')\\ &= \mathcal{W}^*(\delta) \qquad \text{d'après IV.6.}\end{aligned}$$

donc $\Psi(B)=\mathcal{W}^*(\delta)$. $\quad (**)$

Il en résulte que $C=B^\beta$ et $\gamma=\delta$ satisfont (i).

**Proposition V.3:** *On suppose vérifiées les conditions équivalentes de* V.2.. *En notant $\phi$ l'isomorphisme de $B$ sur $\mathcal{W}^*(\gamma)$, on a:*

(i) $\tilde{\gamma}\approx\beta(\phi, i)$

(ii) $\phi\nu(x)=1\otimes x \qquad (\forall x\in\hat{M}')$

*De plus toute action $\gamma$ vérifiant (i) et (ii) est unique à équivalence forte pres.*

**Démonstration:** Soit $y$ dans $B$. On a, en reprenant les notations de V.2. et en notant encore $\Psi$ l'isomorphisme de $B$ sur $\mathcal{W}^*(\delta)$ obtenu à partir de $\Psi$:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(\Psi(y)) &= \tilde{\delta}(\mathrm{Ad}\ Y)\beta(y)\\ &= \mathrm{Ad}(1\otimes(JJ\otimes JJ)W^*(JJ\otimes JJ))\,\mathrm{Ad}(Y\otimes 1)(\beta(y)\otimes 1)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\text{d'après [4], II.6 (i)}\\ &= \mathrm{Ad}(Y\otimes 1)\,\mathrm{Ad}(1\otimes(JJ\otimes JJ)W^*(JJ\otimes JJ))(\beta(y)\otimes 1)\end{aligned}$$

car d'après [5], 2.1.5. (b), $1\otimes(JJ\otimes JJ)W^*(JJ\otimes JJ)$ appartient à $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}\otimes M'\otimes\hat{M}'$ et $Y\otimes 1$ appartient à $B\otimes M\otimes \boldsymbol{C}_H$.

D'autre part, d'après [4], I.5. (ii) appliqué à $\hat{\mathbb{K}}'$ (cf. [17], VII.10), on a:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(1\otimes(JJ\otimes JJ)W^*(JJ\otimes JJ))(\beta(y)\otimes 1) &= (i\otimes\hat{\Gamma}')(\beta(y))\\ &= (\beta\otimes i)(\beta(y))\end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(\Psi(y)) &= \mathrm{Ad}(Y\otimes 1)(\beta\otimes i)(\beta(y))\\ &= (\Psi\otimes i)(\beta(y))\,, \qquad \text{d'où (i).}\end{aligned}$$

Soit $x$ dans $\hat{M}'$. On a:

$$\begin{aligned}\Psi\nu(x) &= (\mathrm{Ad}\ Y)\beta\nu(x)\\ &= (\mathrm{Ad}\ Y)(\nu\otimes i)\hat{\Gamma}'(x)\\ &= (\nu\otimes i)((\mathrm{Ad}(\sigma(J\otimes J)W(J\otimes J)\sigma))(\Gamma'(x))\\ &= (\nu\otimes i)(1\otimes x) \qquad \text{d'après [5], 2.2.5. (b) appliqué } \hat{\mathbb{K}}'\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(cf. [17], VII.10)}\\ &= 1\otimes x\,, \qquad \text{d'où (ii).}\end{aligned}$$

Soit $(C, \gamma, \phi)$ vérifiant (i) et (ii). D'après II.16., il résulte de (i) que:

$$\gamma(C) = \mathcal{W}^*(\gamma)^{\tilde{\gamma}} = \phi(B^\beta)$$

Donc $\phi^{-1}\circ\gamma$ réalise un isomorphisme de $C$ sur $B^\beta$. De plus, pour $y$ dans $C$, on a:

$$\begin{aligned}(\Phi\otimes i)\delta\Phi^{-1}\gamma(y) &= (\Phi\otimes i)(\mathrm{Ad}\ Y)(\Phi^{-1}\gamma(y)\otimes 1)\\ &= (\mathrm{Ad}(\phi\nu\otimes i)(\sigma(J\otimes J)W(J\otimes J)\sigma))(\gamma(y)\otimes 1)\\ &= (\mathrm{Ad}(1\otimes\sigma(J\otimes J)W(J\otimes J)\sigma))(\gamma(y)\otimes 1) \qquad \text{d'après (ii)}\\ &= (i\otimes\Gamma)(\gamma(y)) \qquad \text{d'après [4], I.5. (ii).}\\ &= (\gamma\otimes i)(\gamma(y))\end{aligned}$$

Ainsi:

$$\delta\Phi^{-1}\gamma(y) = (\Phi^{-1}\gamma\otimes i)(\gamma(y))$$

soit:

$$\delta \approx \gamma(\Phi^{-1}\gamma, i) \qquad \text{d'où le résultat.}$$

**Proposition V.4:** *Avec les hypothèses et notations de* V.1.. *On a*:

(i) $B=(B^{\beta}\cup\nu(\hat{M}'))''$

(ii) *Il existe un isomorphisme* $\Xi$ *de* $\mathcal{W}^*(\beta)$ *sur* $B^{\beta}\otimes\mathcal{L}(H)$ *tel que l'on ait* $\tilde{\beta}\sim(i\otimes\varsigma)(\delta\otimes i)$ $(\Xi, v, 1\otimes\sigma W^*\sigma)$. (*Ceci généralise* [14], *th.* 8.2. *et* 8.4.).

**Démonstration:** L'assertion (i) résulte des égalités (*) et (**) de V.2., car $\Psi$ est injective.

D'après V.3. (i), il résulte de [4], II.8. que:

$$\delta^{\sim\sim}\approx\tilde{\beta}(\Psi\otimes i, i)$$

Comme, d'après IV.3. il existe un isomorphisme $\Xi'$ tel que

$$\delta^{\sim\sim}\sim(i\otimes\varsigma)(\delta\otimes i) \qquad (\Xi', v, 1\otimes\sigma W^*\sigma) \text{ (ii) résulte}$$

de [4], 1.1.2..

## VI. Poids dual sur le produit croise

On utilisera les notations du chapitre II.

**Définition VI.1:** Soit $\psi$ dans $P(A)$. On pose $\tilde{\psi}=\psi\circ\alpha^{-1}\circ T_{\tilde{\alpha}}$; comme d'après II.4 (ii) et IV.2 (ii), $T_{\tilde{\alpha}}$ est un poids opératoriel normal, semi-fini et fidèle de $\mathcal{W}^*(\alpha)$ sur $\mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\alpha}}=\alpha(A)$, $\tilde{\psi}$ appartient à $P(\mathcal{W}^*(\alpha))$. On dira que $\tilde{\psi}$ est le poids dual de $\psi$.

Cette définition généralise [20], 4.3 et [6].

**Proposition VI.2:** *Tout poids dual est* $\Delta^{-1}$*-relativement invariant par rapport à* $\tilde{\alpha}$.

**Démonstration:** Comme l'action $\tilde{\alpha}$ est intégrable, cela résulte de III.4.

**Lemme VI.3:** *Soient* $\psi_1$ *et* $\psi_2$ *deux poids sur* $A$ $\Delta^{-1}$*-relativement invariants par rapport à* $\alpha$. *Alors le poids* $\Omega$ *construit sur* $A\otimes F_2$ *à partir de* $\psi_1$ *et* $\psi_2$ *comme en* [2], 1.2.2. *est* $\Delta^{-1}$*-relativement invariant par rapport à* $(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)$.

**Démonstration:** Soit $\omega$ dans $M_*^+$. Le poids sur $A\otimes M\otimes F_2$ construit comme en [2], 1.2.2. à partir de $\psi_1\otimes\omega$ et $\psi_2\otimes\omega$ est, d'après [11], p.5, égal à $(\Omega\otimes\omega)(i\otimes\varsigma)$.

Soient alors $x_{i,j}$ $(i, j=1, 2)$ dans $A$ tels que l'élément $\sum_{i,j} x_{i,j}\otimes e_{i,j}$ de $A\otimes F_2$ soit positif. L'élément $\sum_{i,j} \alpha(x_{i,j})\otimes e_{i,j}$ est positif et l'on a:

$$\begin{aligned}(\Omega\otimes\omega)(i\otimes\varsigma)(\sum_{i,j} \alpha(x_{i,j})\otimes e_{i,j}) &= (\psi_1\otimes\omega)(\alpha(x_{1,1}))+(\psi_2\otimes\omega)(\alpha(x_{2,2}))\\ &= (\psi_1(x_{1,1})+\psi_2(x_{2,2}))\langle\Delta^{-1}, \omega\rangle\\ &\qquad \text{d'après III.1 (i)}\\ &= \Omega(\sum_{i,j} x_{i,j}\otimes e_{i,j})\langle\Delta^{-1}, \omega\rangle\end{aligned}$$

autrement dit

$$(\Omega\otimes i)(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(x)=\Omega(x)\Delta^{-1} \qquad (\forall x\in(A\otimes F_2)^+)$$

d'où (i) de III.1.

Soient $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ $(i, j=1, 2)$ dans $A$ tels que

$$x = \sum_{i,j} x_{i,j}\otimes e_{i,j} \quad \text{et} \quad y = \sum_{i,j} y_{i,j}\otimes e_{i,j}$$

appartiennent à $\mathfrak{N}_\Omega$, soit $x_{i,j}$ et $y_{i,j}$ appartiennent à $\mathfrak{N}_{\varphi_j}$. On a:

$$\begin{aligned}(y^*\otimes i)(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(x) &= (\sum_{k,l} y^*_{k,l}\otimes e_{l,k}\otimes 1)(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(\sum_{k,l} x_{i,j}\otimes e_{i,j})\\ &= (i\otimes\varsigma)\sum_{i,j,k,l}(y^*_{k,l}\otimes 1\otimes e_{l,k})(\alpha(x_{i,j})\otimes e_{i,j})\\ &= (i\otimes\varsigma)\sum_{i,j,l}((y^*_{i,l}\otimes 1)\alpha(x_{i,j}))\otimes e_{l,j}\end{aligned}$$

De même:

$$(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(y^*)(x\otimes 1) = (i\otimes\varsigma)\sum_{i,j,l}\alpha(y^*_{i,l})(x_{i,j}\otimes 1)\otimes e_{l,j}\,.$$

Ainsi, pour $\xi$ dans $\mathcal{D}(\Delta^{1/4})\cap\mathcal{D}(\Delta^{-1/4})$, on obtient:

$$\begin{aligned}&(\Omega\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})((i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(y^*)(x\otimes 1))\\ &\quad=\sum_{i,j}(\psi_j\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{1/4}\xi})(\alpha(y^*_{i,j})(x_{i,j}\otimes 1))\\ &\quad=\sum_{i,j}(\psi_j\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa)((y^*_{i,j}\otimes 1)\alpha(x_{i,j})) \qquad \text{d'après III.1 (ii)}\\ &\quad=(\Omega\otimes\omega_{\hat{\Delta}^{-1/4}\xi}\circ\kappa)((y^*\otimes 1)(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(x))\end{aligned}$$

d'où (ii) de III.1.

**Proposition VI.4:** *Soient $\psi_1$ et $\psi_2$ deux poids sur $A$ $\Delta^{-1}$-relativement invariants par rapport à $\alpha$. Alors, le cocycle $(D\psi_1: D\psi_2)_t$ (cf. [2] 1.2.2.) appartient à $A^\alpha$ pour tout $t$ de $\boldsymbol{R}$.*

**Démonstration:** Reprenons les notations de VI.3. On a:

$$\begin{aligned}
&(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)((D\psi_1: D\psi_2)_t\otimes e_{2,1})\\
&\quad=(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(\sigma_t^{\Omega}(1\otimes e_{2,1})) &&\text{d'après [2], 1.2.2}\\
&\quad=(\sigma_t^{\Omega}\otimes i)(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)(1\otimes e_{2\,1}) &&\text{d'après VI.3 et III.13 (iii)}\\
&\quad=(\sigma_t^{\Omega}\otimes i)(1\otimes e_{2,1}\otimes 1)\\
&\quad=(D\psi_1: D\psi_2)_t\otimes e_{2,1}\otimes 1 &&\text{d'après [2], 1,2.2.}
\end{aligned}$$

Ainsi $(D\psi_1: D\psi_2)_t\otimes e_{2,1}$ appartient à $(A\otimes F_2)^{(i\otimes\varsigma)(\alpha\otimes i)}=A^{\alpha}\otimes F_2$ d'après II.17, d'où le résultat.

**Théorème VI.5:** *L'application* $\psi\to\tilde{\psi}$ *définie en* VI.1 *est une bijection de* $P(A)$ *sur l'ensemble des poids sur* $\mathcal{W}^*(\alpha)$ $\Delta^{-1}$*-relativement invariants par rapport à* $\tilde{\alpha}$.

**Démonstration:** Soient $\psi'$ un poids sur $\mathcal{W}^*(\alpha)$ $\Delta^{-1}$-relativement invariant par rapport à $\tilde{\alpha}$ et $\psi$ dans $P(A)$. Il résulte de V1.2, de VI.4 et de IV.2. (ii) que

$$(D\psi': D\tilde{\psi})_t\in\mathcal{W}^*(\alpha)^{\tilde{\alpha}}=\alpha(A)\,.$$

D'autre part d'après [9], 4.7 on a, pour tout $x$ de $A$:

$$\begin{aligned}
\sigma_t^{\psi}(\alpha(x)) &= \sigma_t^{\tilde{\psi}\circ\alpha^{-1}}(\alpha(x))\\
&=(\sigma_t^{\psi}(x))\,.
\end{aligned}$$

Donc, comme $(D\psi': D\tilde{\psi})_t$ est un $\sigma_t^{\tilde{\psi}}$-cocycle, on obtient que $\alpha^{-1}((D\psi': D\tilde{\psi})_t)$ est un $\sigma_t^{\psi}$-cocycle. Dans ces conditions, le théorème 1.2.4 de [2] donne l'existence de $\psi_1$ dans $P(A)$ tel que $(D\psi_1: D\psi)_t=\alpha^{-1}((D\psi': D\tilde{\psi})_t)$. Soit aussi:

$$\begin{aligned}
(D\tilde{\psi}': D\psi)_t &= \alpha((D\psi_1: D\psi)_t)\\
&=(D\psi_1\circ\alpha^{-1}: D\psi\circ\alpha^{-1})_t\\
&=(D\tilde{\psi}_1: D\tilde{\psi})_t \qquad\text{d'après [9], 4.7.}
\end{aligned}$$

ce qui implique ([2], th. 1.3.4.)

$$\psi'=\tilde{\psi}_1$$

ce qui, compte tenu de VI.2, achève la démonstration.

**Cas particulier VI.6:** Soit $G$ un groupe localement compact.

(i) Soit $\beta$ une action continue de $G$ sur $A$. D'après [4], II.2 (ii), le produit croisé au sens de [20], 3.3., noté $\mathcal{R}(A,\beta)$ est égal à $\mathcal{W}^*(\beta^g)$. Une théorie du poids dual sur $\mathcal{R}(A,\beta)$ est développée dans [3], [10], [16] et [20]; une nouvelle construction en est donnée dans [6]. Celle ci est en fait un cas particulier de la définition VI.1.

Il en résulte que l'application $\psi \to \tilde{\psi}$ une bijection de $P(A)$ sur l'ensemble des poids sur $\mathscr{R}(A, \beta)$ invariants par rapport à $\tilde{\beta}^g$. (Ce résultat a été obtenu indépendamment dans [19], III.12).

(ii) Soit $\alpha$ une action de $KS(G)$ sur $A$. D'après [4], I.3 (ii), il existe une action continue $\gamma$ de $G$ sur $\mathscr{W}^*(\alpha)$ telle que $\gamma^d = \tilde{\alpha}$. Il en résulte que l'application $\psi \to \tilde{\psi}$ est une bijection de $P(A)$ sur l'ensemble des poids sur $\mathscr{W}^*(\alpha)$ relativement invariants par rapport à $\gamma$, de module $\Delta_G^{-1}$.

Ainsi, dans le cas où $G$ n'est pas unimodulaire, cette dernière affirmation fait apparaître que le théorème III.2.1 de [19] est erronné. En effet, alors le poids opératoriel $Q_G$ (notation de [19]) n'est pas invariant, mais relativement invariant.

## Bibliographie


[1] Combes F., Poids sur une $C^*$-algèbre, *J. Math. pures et appl.*, **47** (1968), 57–100.

[2] Connes A., Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 4ème série*, 6, fasc. 2, (1973), 133–252.

[3] Digernes T., Duality for weights on covariant systems and its applications, *Dissertation, U.C.L.A.*, 1975.

[4] Enock M., Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac, *J.F.A.*, **26** (1977), 16–47.

[5] Enock M. et Schwartz J. M., Une dualité dans les algèbres de von Neumann, *Bull. Soc. Math. France, Supp. Mémoire* **44** (1975), 1–144.

[6] ———, Une nouvelle construction du poids dual sur le produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe localement compact. *C.R. Acad. Sc. Paris, série A.* **282** (1976), 415–418.

[7] ———, Algèbres de Kac et produits croisés, *C.R. Acad. Sc. Paris, série A*, **283** (1976), 321–323.

[8] Haagerup U., The standard form of von Neumann algebras, Københavns Univ. *Math. Inst., Preprint series* **15**, 1973.

[9] ———, Operator valued weights in von Neumann algebras, *Odense Mat. Inst. Preprint* **12**, 1975.

[10] ———, On the dual weights for crossed products of von Neumann algebras, *Odense Mat. Inst. Preprint* **10**, 1975.

[11] Havet J. F., Quelques propriétés des systèmes dynamiques non commutatifs, *thèse 3ème cycle, Univ. Orléans*, 1976.

[12] Landstad M., Duality for covariant systems. *Trondheim Preprint*, 1974.

[13] ———, Duality for dual covariance algebras, *Comm. Math. Phys.*, **52**, (1977), 191–202.

[14] Nakagami Y., Dual action on a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group, *Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.*, **12** (1977), 727–775.

[15] Pedersen G. K. et Takesaki M., The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras, *Acta. Math.*, **130** (1973), 53–87.

[16] Sauvageot J. L., Sur le type du produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France, à paraître*

[17] Schwartz J. M., Sur la structure des algèbres de Kac, *Tirage préliminaire, 2ème édition, Novembre* 1977.

[18] Strătilă, Ş. Voiculescu D. et Zsidó L., Sur les produits croisés, *C.R. Acad. Sc. Paris, série A,* **282** (1976), 779–782.

[19] ———, On crossed products, I et II, Rev. *Roumaine Math. P. et appl.* **21** (1976), 1411–1449 et **22** (1977), 83–117.

[20] Takesaki M., Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III. *Acta. Math.,* **131** (1973), 249–310.

[21] Tomiyama J., On the projections of norm one in $W^*$-algebras, *Proc. Jap. Acad.* **33**, (1957), 608–612.