Publ. RIMS, Kyoto Univ.
16 (1980), 461–497

Sur les Singularités Essentielles et Isolées des Applications Holomorphes à Valeurs dans une Surface Complexe

A notre Professeur Kiyoshi Oka, décédé le 1^{er} *mars* 1978 *matin*

Par

Toshio NISHINO* et Masakazu SUZUKI*

Table des Matières

Introduction

Soit f une application holomorphe d'un disque pointé $\Delta^*=\{z\in \boldsymbol{C}\,|\,0<|z|<1\}$ tracé sur la droite complexe $\boldsymbol{C}$ (ou le plan d'une variable complexe z) dans une variété analytique complexe M. Désignons par $f(0; M)$ l'ensemble des points a de M pour lesquels il existe une suite de points z_n de Δ^* tendant vers

Communiqué par S. Nakano, le 25 juillet, 1978. Revu le 5 décembre, 1978.
* Faculté de Technologie, Université de Kyushu.

$z=0$ et vérifiant $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=a$.[1]

Lorsque $f(0; M)$ contient au moins deux points, on dira que f a une singularité essentielle à l'origine $z=0$.

Dans le cas où M est de dimension complexe un, M. Ohtsuka [17] a montré que, si $z=0$ est un point singulier essentiel de f, alors tout point de M appartient à $f(0; M)$, et de plus, M doit être analytiquement isomorphe ou bien à la droite projective $\boldsymbol{P}^1$ (la sphère de Riemann), ou bien à $\boldsymbol{P}^1-\{$un ou deux points$\}$, ou bien à un tore complexe. On peut considérer cette dernière assertion comme une généralisation du grand théorème de Picard, la première assertion correspondant à un théorème de Weierstrass. L'objet essentiel de ce travail est l'étude de ce genre de phénomène dans le cas où M a deux (ou plus de deux) dimensions complexes. Nous donnerons également une application de nos résultats sur $f(0; M)$ à quelques questions sur les automorphismes analytiques de surfaces complexes.

Dans le premier Chapitre (n^{os} 1 à 3), nous montrerons que cet ensemble $f(0; M)$ a quelques propriétés remarquables même au cas où la dimension complexe de M est $\geqq 2$ (cf. les Théorèmes 1, 2, et 3, ci-dessous). Signalons la pseudoconcavité de $f(0; M)$ (Théorème 1, où dim. $M=2$), qui se résulte de la pseudoconvexité des domaines de normalité des familles d'hypersurfaces analytiques trouvée dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes ([19], voir aussi [14]).

Dans le Chapitre II (n^{os} 4 à 7), nous étudierons en particulier le cas où M est une surface analytique complexe non-singulière S et où $C=f(0; S)$ est une courbe analytique compacte dans S.[2] Signalons l'inégalité parue dans notre Théorème 4 (n^o 4) qui exprime une condition pour le nombre des lieux par lesquels passent des *courbes analytiques de valeurs exceptionnelles* (cf. la Définition 2 au n^o 4) de f; elle a la même forme que l'inégalité trouvée par R. Nevanlinna et L. Ahlfors pour les ramifications complètes (cf., par exemple, la formule (67) de [25]). Les numéros 5 et 6 seront consacrés à la démonstration du Théorème 4. Au numéro 7, nous considérerons les courbes analytiques compactes C (n'ayant que des points doubles ordinaires comme points singuliers et minimales) dans S telles qu'il y ait une application holomorphe f de Δ^* dans $S-C$ vérifiant $f(0; S)=C$. L'inégalité dite plus haut nous permet de faire une

---

(1) "cluster set of f at $z=0$".

(2) Un sous-ensemble analytique de S de dimension complexe pure 1 sera appelé simplement *courbe analytique* dans S.

liste contenant tous les types de ces courbes C (Tableaux 1, 2 et 3 au n° 7).

Dans le dernier Chapitre III, nous appliquerons ces résultats à quelques questions sur les automorphismes analytiques de surfaces complexes: En considérant le complément $V=S-C$ d'une courbe analytique compacte C dans une surface complexe S, on étudiera les singularités essentielles le long de C des isomorphismes analytiques de V (Théorème 6 au n° 8); puis, dans le cas où S est compacte, on mentionnera leur rapport avec l'invariant $\bar{\kappa}(V)$ (logarithmic Kodaira dimension) de V introduit par S. Iitaka [8]. On retrouvera ici le résultat de F. Sakai [24], dans le cas de surfaces complexes: si V est de type générale (c'est-à-dire $\bar{\kappa}(V)=2$), tout automorphisme analytique de V est la restriction sur V d'une transformation biméromorphe de S (Corollaire au Théorème 7, n° 9). Pour terminer, nous avouons que la recherche de $f(0; M)$ de ce travail était motivée au début par le but de l'appliquer à quelques questions concernant les automorphismes analytiques de l'espace de deux variables complexes $\boldsymbol{C}^2$, qu'étudiait T. Kizuka à cette époque (cf. [9]).

Chapitre I.——Quelques Propriétés Générales de l'Ensemble Limite (cluster set) $f(0; M)$

1. Définition de $f(0)=f(0; M)$. On désignera par Δ_ρ^* le disque pointé $0<|z|<\rho$ de rayon $\rho>0$ dans le plan $\boldsymbol{C}$ d'une variable complexe z. On écrira Δ^* au lieu de Δ_1^*. Soit f: $\Delta^*\to M$ une application holomorphe de Δ^* dans une variété analytique complexe(3) M de dimension complexe n. Définissons *l'ensemble limite* (cluster set) $f(0; M)$ *dans M de $f(z)$ à l'origine* $z=0$ par:

$$f(0; M):=\bigcap_{\rho>0}\overline{f(\Delta_\rho^*)},$$

où $\overline{f(\Delta_\rho^*)}$ est l'adhérence de $f(\Delta_\rho^*)$ dans M. On écrira aussi $f(0)$ au lieu de $f(0; M)$.

Si $f(0)$ (fermé) est compact, il est connexe.

Proposition 1. *f se prolonge en une application holomorphe $\bar{f}$ de Δ: $|z|<1$ dans M si (et seulement si) $f(0; M)$ est un seul point de M.*

En effet, la proposition est une conséquence immédiate du "Riemann's theorem on remouvable singularities".

(3) On supposera dans tout ce qui suit que les variétés sont dénombrables à l'infini.

Le théorème suivant montre que la forme de cet ensemble $f(0)$, supposé contenant au moins deux points, est soumis à une forte restriction:

Théorème 1[4]. *Soit M une variété analytique complexe de dimension complexe 2. Si $f(0)$ d'une application holomorphe f de Δ^* dans M contient au moins deux points, cet ensemble $f(0)$ est pseudoconcave en chaque point de $f(0)$.*

(On dit ici que $f(0)$ est pseudoconcave en un point a de $f(0)$, s'il existe un voisinage U de a tel que $U-f(0)$ soit pseudoconvexe[5] ou bien vide).

En effet, supposons qu'il existe un ouvert U de M analytiquement isomorphe à un dicylindre: $|x|<1$, $|y|<1$ tel que $f(0)\cap U\neq\emptyset$, $f(0)\cap U^*=\emptyset$, où

$$U^*=\{P\in U \mid |x(P)|<r\}\cup\{P\in U \mid |x(P)|<1,\ s<|y(P)|<1\},$$
$$(0<r<1,\ 0<s<1).$$

$X(z)=x(f(z))$, $Y(z)=y(f(z))$ sont des fonctions holomorphes dans $D=f^{-1}(U)$ (non vide). Prenons un nombre réel $\varepsilon>0$ tel que l'on ait $\varepsilon<r<1-\varepsilon$, $s<1-2\varepsilon$ et $f(0)\cap U_\varepsilon\neq\emptyset$, où

$$U_\varepsilon=\{P\in U \mid |x(P)|<1-\varepsilon,\ |y(P)|<1-\varepsilon\}.$$

Considérons dans Δ_ρ^* $(0<\rho<1)$ l'image réciproque $f^{-1}(U_\varepsilon)\cap\Delta_\rho^*=D_\rho$ (non vide). Puisque $f(\Delta_\rho^*)\subset U_\varepsilon$ entraîne $f(0)=\{\text{un point}\}$, on peut supposer $D_\rho\neq\Delta_\rho^*$ pour tout ρ (>0). Donc, l'origine $z=0$ appartient à l'adhérence de la frontière γ de D_ρ dans Δ_ρ^*. Or, d'après l'hypothèse $f(0)\cap U^*=\emptyset$, on peut trouver un $\rho>0$ tel que l'on ait:

(i) $|X(z)|>\varepsilon$ pour $z\in D_\rho$

et $|Y(z)|<1-2\varepsilon$ pour $z\in D_\rho$, de sorte que

(ii) $|X(\zeta)|=1-\varepsilon$ pour $\zeta\in\gamma$.

On a donc, d'après le théorème d'Iversen (cf. Theorem 1, p. 14 de [16]), $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in D_\rho}}|X(z)|=1-\varepsilon$; d'où $f(0)\cap U_\varepsilon=\emptyset$, ce qui est contraire à la définition de $\varepsilon>0$. Donc, $f(0)$ est pseudoconcave.

2. Rapport avec la pseudo-distance de Kobayashi. Désignons par $d_M(P, Q)$ $(P, Q\in M)$ la pseudo-distance intrinsèque de M introduite par S. Kobayashi

(4) Comme on l'a déjà remarqué dans l'Introduction, ce théorème se résulte également du résultat de [19] ou de [14].

(5) Pour la notion de pseudoconvexité, voir [20].

(cf. [10], Chap. IV). Nous dirons qu'un $P \in M$ est un *point hyperbolique* de M, si l'on a $d_M(P, Q) > 0$ pour tout $Q \neq P$, et désignerons par $A(M)$ *l'ensemble des points non-hyperboliques* de M. Soit U un polycylindre fermé: $|x_i| \leqq \rho$ ($i = 1, \dots, n$, $\rho > 0$) de centre $P \in M$ dans un voisinage de coordonnées locales x_i de M. Alors, d'après H. L. Royden [22], P est un point hyperbolique de M, si et seulement si $\inf_{Q \in \partial U} d_M(P, Q) > 0$. Compte tenu de la continuité de $d_M(P, Q)$ par rapport aux P, Q, il en résulte que $A(M)$ est *fermé* (et que $d_M(P, Q)$ induit sur $M - A(M)$ la topologie usuelle. Cf. [22] Theorem 2.) On a la

Proposition 2. *Soit f une application holomorphe de Δ^* dans M. Si $f(0)$ contient au moins deux points, on a alors $f(0) \subset A(M)$.* (*Voir* [10], *Chap* VI).

Or, R. Brody [2] a montré que, si $A(M)$ est un sous-ensemble compact (non vide) de M, il existe une application holomorphe non-constante $g: \boldsymbol{C} \to M$ (evidemment, on a alors $g(\boldsymbol{C}) \subset A(M)$). De la même manière qu'il a procédé (que nous ne répétons pas ici), on voit que:

Théorème 2. *Si $f(0)$ d'une application holomorphe f de Δ^* dans M est compact et contient au moins deux points, il contient l'image $g(\boldsymbol{C})$ d'une application holomorphe non-constante g de $\boldsymbol{C}$ dans M.*

(Pour la démonstration, nous nous contentons de renvoyer le lecteur à [2]). En tenant compte du théorème d'Ohtsuka [17] cité dans l'Introduction, on en déduit le corollaire suivant:

Corollaire. *Si $f(0)$ d'une application holomorphe f de Δ^* dans M est une courbe analytique irréductible et compacte, elle est de genre $\leqq 1$.*

Ce fait-ci nous a été indiqué par T. Ueda; son idée de démonstration était d'appliquer le résultat de T. Nishino [15] et cette indication nous a donné un point de départ pour ce travail.

3. Cas où $f(0)$ est une courbe analytique. Soit M une variété analytique complexe de dimension complexe $n \geqq 2$. Un sous-ensemble analytique de M de dimension (complexe) pure un sera appelé simplement *courbe analytique* dans M.

Il convient de citer ici un théorème dû à P. Thullen [28] et à R. Remmert-K. Stein [21] sur les singularités essentielles des sous-ensembles analytiques. On dira qu'un sous-ensemble E de M est *analytique en un point* $P \in M$, s'il existe un voisinage $U=U(P)$ de P tel que $E \cap U$ soit un sous-ensemble analytique de U (y compris vide). On a alors, le

Théorème ([28], [21]). *Soit A un sous-ensemble analytique irréductible de M, et σ un sous-ensemble analytique de $M-A$ de dimension pure. Supposons que l'adhérence $\bar{\sigma}$ de σ dans M n'est pas analytique en un point P_0 de A. Alors, on a $\dim A \geqq \dim \sigma$. De plus, si $\dim A = \dim \sigma$, $\bar{\sigma}$ n'est analytique en aucun point de A (en particulier, on a $A \subset \bar{\sigma}$).*

De ce théorème, on a aussitôt:

Proposition 3. *Si $f(0)$ d'une application holomorphe de Δ^* dans M, contenant au moins deux points, est compris dans une courbe analytique C dans M, alors $f(0)$ lui-même est une courbe analytique dans M, de sorte que $f(0)$ se décompose en des composantes irréductibles de C.*

En effet, si $f(\Delta^*) \subset C$, la proposition se résulte du théorème d'Ohtsuka cité dans l'Introduction. Supposons $f(\Delta^*) \not\subset C$. On peut alors trouver $0<\rho<1$ de façon que l'image K_ρ du cercle $\partial\Delta_\rho$: $|z|=\rho$ par f se trouve dans $M-C$. Soit $M_0=M-K_\rho$. D'après l'hypothèse $f(0) \subset C$, l'image $\sigma=f(\Delta_\rho^*)$ est une courbe analytique dans M_0-C. Or, comme $f(0)$ contient au moins deux points, $\bar{\sigma}$ (l'adhérence dans M_0) n'est pas analytique en un certain point de C. Donc, d'après le Théorème que nous venons de cité ci-dessus, $f(0)$ (=l'ensemble des points de C en lesquels $\bar{\sigma}$ n'est pas analytique) est composé d'un certain nombre ($\leqq \infty$) de composantes irréductibles de C. C. Q. F. D.

Considérons maintenant le cas où $f(0)$ est une courbe analytique dans M. Une courbe analytique C dans M sera dite *de genre p*, si son modèle non-singulier (la normalisée de C) est *de genre p*.

Théorème 3. *Si $f(0)$ d'une application holomorphe f de Δ^* dans M coïncide avec une courbe analytique C dans M, toute composante irréductible de C est de genre zéro ou un.*

Pour démontrer ce théorème, préparons un lemme:

Lemme 1. *Soit C une courbe analytique non-singulière n'ayant aucune composante compacte dans M, et K un sous-ensemble compact de C. Il existe alors, un sous-ensemble compact $T(K)$ de M et une application φ de $T(K)$ sur K vérifiant les conditions suivantes:*

(i) $T(K) \cap C = K$

(ii) *φ est la restriction sur $T(K)$ d'une application holomorphe d'un voisinage de $T(K)$ sur un voisinage de K dans C telle que* $\varphi|_K = \mathrm{id}$.

(iii) *le triple $(T(K), \varphi, K)$ est un espace fibré topologique localement trivial de base K et à fibres isomorphes à un disque fermé de dimension réelle $2n-2$, n étant la dimension complexe de M.*

(Nous appellerons ce $T(K)$ *tube le long de* K et φ: $T(K) \to K$ sa *projection* ou *retraction* sur K. La réunion $\bigcup_{P \in K} \partial\varphi^{-1}(P)$ des bords des fibres de φ sera appelée le *bord* de $T = T(K)$ et désignée par bT).

En effet, C étant une variété de Stein, il existe, d'après Y.-T. Siu [26] (ou M. Suzuki [27], Lemme 3), un ouvert V de M de Stein contenant K. Pour démontrer le Lemme 1, il suffira donc de le prouver en supposant que M est une variété de Stein. Or, ceci se résulte du Hilfssatz 11 de O. Forster et K. J. Ramspott [3]. Mais, comme ce lemme joue un rôle important dans cet article, nous allons donner une démonstration simple ci-dessous (en supposant M de Stein): Comme C est une courbe non-singulière et n'a pas de composante compacte, il existe, d'après R. C. Gunning et R. Narasimhan [4], une fonction holomorphe h sur C telle que: $(*)$ sa différentielle dh ne s'annule en aucun point de C. Or, M étant de Stein, on peut trouver, d'après la théorie des ideaux de fonctions analytiques dû à K. Oka et à H. Cartan, une fonction holomorphe H sur M telle que $H_{|C} = h$. En suite, compte tenue de la condition $(*)$ ci-dessus pour dh, il existe un voisinage V' de C telle que les variétés définies par $H = \text{const.}$ soient régulières dans V'. En introduisant une métrique hermitienne sur M, désignons par $d(P, Q)$ la distance de deux points $P, Q \in M$, et considérons

$$\lambda = \inf \{d(P, Q) \mid P, Q \in K, P \neq Q, H(P) = H(Q)\}.$$

Puisque K est compact et les variétés $H = \text{const.}$ coupent C transversalement, on a $\lambda > 0$. Soit $0 < \varepsilon < \lambda/3$, et

$$F(P) = \{Q \in V' \mid H(Q) = H(P), d(P, Q) \leqq \varepsilon\}$$

pour chaque $P \in K$; alors $P \neq Q$ implique $F(P) \cap F(Q) = \emptyset$. Posons $T(K) = \bigcup_{P \in K} F(P)$, et désignons par φ l'application $T(K) \to K$ qui, à chaque point $Q \in T(K)$, associe le point $P \in K$ tel que $Q \in F(P)$. Il est clair que φ se prolonge en une application holomorphe $V \to C$ d'un voisinage V de $T(K)$ dans C et que $T(K) \cap C = K$, $\varphi_{|K} = \mathrm{id}$. Quant'à la dernière condition (iii), vu $(dH)_{|C} \neq 0$, il suffit de prendre $\varepsilon > 0$ assez petit. Et la démonstration du Lemme 1 est achevée.

Citons un autre résultat d'Ohtsuka [18] mot à mot: 《Soient G un ouvert dans le plan z, $z_0 \in \partial G$ et K un sous-ensemble compact de ∂G contenant z_0. Soit f une application de G dans une surface de Riemann R. Nous définissons le *cluster set* $f(z_0 \mid G)^{(6)}$ en z_0 par

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}(z_0)} \overline{f(U \cap G)},$$

où $\mathfrak{U}(z_0)$ est le système de voisinages de z_0 et $\overline{f(U \cap G)}$ est l'adhérence de $f(U \cap G)$, et le *boundary cluster set* $f(z_0 \mid \partial G - K)$ par

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}(z_0)} \overline{\bigcup_{z \in U \cap (\partial G - K)} f(z|G)}\text{》}.$$

On a alors, le

《**Théorème.** *Soit f une application holomorphe d'un ouvert G du plan z dans une surface de Riemann R, $z_0 \in \partial G$ et K un sous-ensemble compact de capacité logarithmique nulle qui contient z_0 et qui est contenu dans une composante connexe de ∂G. Si $f(z_0 \mid G)$ contient plus d'un point, alors $f(z_0 \mid G)$ $-f(z_0 \mid \partial G - K)$ est ouvert, et toute composante D de $f(z_0 \mid G) - f(z_0 \mid \partial G - K)$ est de genre $\leqq 1$. Si le genre de D est* 0 (*resp.* 1), *alors f prend, dans tout voisinage de z_0, tous les points de D à l'exception de deux points au plus (resp. sans exceptions).*》

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 3: En effet, supposons que C possède une composante C_0 de genre $\geqq 2$. Soit k l'ensemble des points singuliers de C (k est discret). Prenons un ouvert connexe, non-compact et relativement compact R, de genre $\geqq 2$, de $C_0 - k$. Soit V un voisinage de $\bar{R}$ dans $M - k$ tel que $C \cap V$ soit connexe et non-compact. Prenons enfin un *tube* $T = T(\bar{R})$ dans V le long de $\bar{R}$ muni d'une rétraction holomorphe φ: $T \to \bar{R}$ (cf. le Lemme 1). Puisque bT (cf. le Lemme 1) est compact et $bT \cap C = \emptyset$, il existe un rayon $\rho > 0$ tel que $f(\varDelta_\rho^*) \cap bT = \emptyset$. (Rappeler: $C = f(0)$). Soit U l'intérieur de T, et considérons $G = f^{-1}(U)$ et l'application composée $g = \varphi \circ f_{|G}$: $G \to R$. On a alors $g(\zeta) \in \partial R$ pour tout $\zeta \in \partial G \cap \varDelta_\rho^*$; par suite, $g(0 \mid \partial G - \{0\}) \subset \partial R$. D'antre part, de l'hypothèse $f(0) = C$, on a $g(0 \mid G) = \bar{R}$. Donc, d'après le théorème d'Ohtsuka que nous venons de citer, $R = g(0 \mid G) - g(0 \mid \partial G - \{0\})$ est de genre $\leqq 1$, ce qui est une contradiction. Donc, toute composante irréductible de C est de genre $\leqq 1$. C. Q. F. D.

(6) Nous avons modifié ici sa notation légèrement.

Chapitre II.——Cas où $f(0)$ Est une Courbe Analytique Compacte dans une Surface Complexe

4. Courbes de valeurs exceptionnelles et $l(\tilde{P})$. Soit S une surface complexe normale (c'est-à-dire, un espace analytique complexe normal de dimension complexe 2), et f une application holomorphe de Δ^*: $0<|z|<1$ dans S. On supposera dans ce numéro et les deux suivants (n^{os} 5, 6) que

$$C=f(0; S)$$

est une courbe analytique compacte dans S.

Soit k la réunion de l'ensemble k_0 des points singuliers de S et de l'ensemble des points singuliers de C dans $S-k_0$; k est alors discret. D'après F. Hirzebruch [6], en faisant la réduction de singularités de S et de C, on peut trouver une surface complexe non-singulière $\tilde{S}$ et une application holomorphe propre μ de $\tilde{S}$ sur S telles que $\mu|_{\tilde{S}-\mu^{-1}(k)}$ soit un isomorphisme analytique de $\tilde{S}-\mu^{-1}(k)$ sur $S-k$ et que tout point singulier de $\mu^{-1}(C)$ soit un point double ordinaire. On voit aisément qu'il y a une application holomorphe $\tilde{f}$ de Δ^* dans $\tilde{S}$ telle que $f=\mu\circ\tilde{f}$. Puisque $\tilde{C}=\tilde{f}(0; \tilde{S})\subset\mu^{-1}(C)$, $\tilde{C}$ est aussi, d'après la Proposition 3, une courbe analytique compacte, mais n'ayant, comme singularité, que des points doubles ordinaires.

On supposera donc dans ce qui suit que S est *non-singulière*, et que les singularités de $C=f(0; S)$ sont *des points doubles ordinaires* (s'il y en a).

Soit C_0 une composante irréductible de C. On désignera par $\tilde{C}_0$ son modèle non-singulière (ou la normalisée de C_0) et π: $\tilde{C}_0\to C_0$ la projection. D'après l'hypothèse ci-dessus, $\pi^{-1}(P)$ a deux points pour les points singuliers P de C_0; en dehors de ces points, π est biunivoque. Considérons un point $\tilde{P}$ de $\tilde{C}_0$, et prenons un disque $\delta=\delta(\tilde{P})$ de centre $\tilde{P}$ sur $\tilde{C}_0$ (c'est-à-dire, un ouvert δ défini par $|w|<r$ (<1) dans un voisinage de coordonnée locale $|w|<1$ de $\tilde{C}_0$ en $\tilde{P}$, $w(\tilde{P})=0$) de façon que $\pi(\bar{\delta}-\tilde{P})$ ne contienne aucun point singulier de C, où $\bar{\delta}=\delta\cup\partial\delta$. Posons

$$C(\delta)=\text{la composante connexe de } C-\pi(\partial\delta) \text{ contenant } \pi(\tilde{P}).$$

Si $\pi(\tilde{P})$ est un point régulier de C, on a $C(\delta)=\pi(\delta)$.

Définition 1. On dira que $C(\delta)$ est *de type* (l, q), si les conditions suivantes sont remplies:

1. (l, q) est une paire d'entires positifs premiers entre eux tels que $0<q<l$, ou bien $(l, q)=(1, 0)$;

2. $\Theta=C(\delta)-\pi(\delta-\tilde{P})$ est une courbe compacte et exceptionnelle dans S, ou bien $\Theta=\pi(\tilde{P})$ (dans ce cas-ci, on posera $(l, q)=(1, 0)$);

3. si l'on désigne par $\tau\colon S\to S_*=S/\Theta$ la modification analytique obtenue par la contraction de Θ, le point $\tau(\Theta)$ a un voisinage U_* analytiquement isomorphe à la normalisée $B(l, q)$ de l'hypersurface définie par l'équation: $t^l=x^{l-q}y$ dans le tricylindre: $|x|<1$, $|y|<1$, $|t|<1$ et, par cette isomorphisme, $\tau(\pi(\delta))$ (resp. $\tau(\Theta)$) correspond à l'axe: $y=t=0$ (resp. à l'origine 0: $x=y=t=0$).

($\tau(\Theta)$ est un point singulier normal de S_*, sauf le cas $l=1$ où S_* est non-singulière.)

Remarque 1. — Supposons qu'on ait $C(\delta)$ de type (l, q) tel que $\Theta\neq\pi(\tilde{P})$ et (faiblement) *minimale* au sens siuvant:

(M) *Il n'y a aucune composante irréductible de $C(\delta)$ exceptionnelle de première espèce*(7) *et contenant deux au plus de points singuliers de $C(\delta)$.*

On a alors, d'après H. Hopf [7], $l\neq 1$. De plus d'après F. Hirzebruch [6], toute composante irréductible Θ_i $(i=1, 2,\dots, r)$ de $C(\delta)$ excepté $\pi(\delta)$ est compacte, non-singulière, de genre zéro, avec le nombre d'intersection $(\Theta_i, \Theta_i)=-n_i$, où

$$l/q=n_1-\cfrac{1}{n_2-\cfrac{}{\ddots-\cfrac{1}{n_r}}}\ ,\quad (n_i\geqq 2)\ ,$$

et le graphe associé à $C(\delta)$ est de la forme suivante:

$$\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-n_1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-n_2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\cdots\cdots-\!\!\!-\!\!\overset{-n_r}{\bullet}\ ,$$

où les points $\bullet$ représentent de gauche à droite $\pi(\delta)$, Θ_1, $\Theta_2,\dots, \Theta_r$ et les lignes —— les points d'intersections de ces composantes.

Réciproquement, si $C(\delta)$ a cette forme-ci, $C(\delta)$ est de type (l, q). En effet, si $r=1$, c'est le résultat de H. Grauert ([5], §4, n° 8)(8) ; pour le cas où $r\geqq 2$, voir par exemple, E. Brieskorn [1].

(7) On dit qu'une courbe analytique irréductible C est *exceptionnelle de première espèce*, si elle est compacte, non-singulière, de genre zéro et le nombre d'intersection $(C\cdot C)=-1$.

(8) On peut le montrer également, en appliquant le résultat de K. Kodaira et de D. C. Spencer [13] de façon analogue à K. Kodaira [11], II, Appendix.

Remarque 2. — Soit $B(l, q)$ l'hypersurface normalisée considérée dans la condition 3 de la Définition 1 ci-dessus. Alors, pour toute application holomorphe h d'un voisinage du disque fermé $\bar{\Delta}$: $|z| \leqq 1$ dans $B(l, q)$ vérifiant:

a) $h(\partial\Delta) \subset \{P \in B(l, q) | 0 < |x(P)| < 1\}$;

b) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} d\log x(h(z)) = \lambda \neq 0$;

c) l'origine $(0, 0, 0) \notin h(\Delta)$,

on a l'inégalité $l \leqq \lambda$. (En effet, la fonction $x = x(P)$ sur $B(l, q)$ prend les zéros d'ordre l sur l'axe $[x=0] \cap B(l, q)$ moins l'origine; par suite, les zéros de la fonction $x(h(z))$ dans Δ sont tous d'ordre $\geqq l$.)

Définition 2. Si E est une courbe analytique dans un ouvert U de S telle que le nombre des points de l'image réciproque $f^{-1}(E)$ dans Δ^* soit fini, E sera appelée *courbe analytique de valeurs exceptionnelles* de f (dans U). Soit $E(\delta)$ la réunion dans S de toutes les courbes analytiques *connexe* de valeurs exceptionnelles E de f contenant au moins un point de $\pi(\delta)$ telles que $E \cap \pi(\partial\delta) = \emptyset$. On définit:

$$l(\delta) = \begin{cases} 1, & \text{si } E(\delta) \subset C(\delta) \text{ et } E(\delta) \neq C(\delta); \\ l, & \text{si } E(\delta) = C(\delta) \text{ et de type } (l, q); \\ \infty, & \text{autrement}, \end{cases}$$

et $l(\tilde{P}) = \inf_{\tilde{P} \in \delta} l(\delta)$.

Sous ces notations, nous allons montrer le

Théorème 4. $\sum_{\tilde{P} \in \tilde{C}_0} \left(1 - \frac{1}{l(\tilde{P})}\right) \leqq 2 - 2g$, *où g est le genre de $\tilde{C}_0$.*

On déduit aussitôt de ce théorème les propositions suivantes: 1° *toute composante irréductible de C est de genre* $\leqq 1$ (qu'on le sait déjà par le Théorème 3); 2° *si $\tilde{C}_0$ est elliptique* $(g=1)$, *on a* $l(\tilde{P}) \equiv 1$ *sur* $\tilde{C}_0$; 3° *si $\tilde{C}_0$ est rationnelle* $(g=0)$, *on a* $l(\tilde{P}) = 1$ *excepté quatre points $\tilde{P}_j$ au plus de $\tilde{C}_0$ et on a* $\sum_1^4 \left(1 - \frac{1}{l(\tilde{P}_j)}\right) \leqq 2$.

La démonstration du Théorème 4 sera achevée à la fin du nº 6.

5. Ensemble limite d'une suite d'images analytiques du disque fermé $\bar{\Delta}$: $|z| \leqq 1$. Nous allons commencer par préparer quelques lemmes:

Lemme 2. *Soit Θ une courbe irréductible, rationnelle*[9] *et non-singulière*

(9) Une courbe analytique *compacte* de genre 0 sera appelée *courbe rationnelle.*

dans une surface analytique complexe non-singulière S avec le nombre d'inter section $(\Theta \cdot \Theta) \geqq 0$, *et* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$, *une suite de courbes analytiques non-compactes dans un voisinage U de* Θ, *ayant au moins un point d'accumulation sur* Θ. *Il existe alors un entier* $n>0$ *tel que* $\sigma_n \cap \Theta \neq \emptyset$.

En effet, si $(\Theta \cdot \Theta)=0$, Θ étant non-singulière et rationnelle, on peut trouver, d'après K. Kodaira-D. C. Spencer [13] (cf. K. Kodaira [11], II, Appendix), une fonction holomorphe h dans un voisinage V de Θ qui s'annule seulement sur Θ. Prenons un nombre réel $\varepsilon>0$ tel que l'on ait $V_\varepsilon=\{P \in V \mid |h(P)|<\varepsilon\} \Subset U \cap V$. D'après l'hypothèse, il existe un entier $N>0$ tel que $\sigma'_N=\sigma_N \cap V_\varepsilon \neq \emptyset$. Or, si $\sigma_N \cap \Theta=\emptyset$, $1/h$ est holomorphe sur σ'_N et $|1/h| \equiv 1/\varepsilon$ sur le bord $\partial\sigma'_N$; on a donc, $|1/h| \leqq 1/\varepsilon$ sur σ'_N, ce qui est impossible, puisque $\sigma'_N \subset V_\varepsilon$. Donc, $\sigma_N \cap \Theta \neq \emptyset$.

Puis, si $(\Theta \cdot \Theta)=m>0$, on prend un point d'accumulation P de la suite $\{\sigma_n\}$ et m points distincts $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ de $\Theta - P$. Soit $\tilde{S}$ la surface obtenue par m transformations quadratiques (σ-processus) en ces points Q_j, et $\tilde{\Theta}$ (resp. $\tilde{\sigma}_n$) l'image de Θ (resp. de σ_n) dans $\tilde{S}$. On a alors $(\tilde{\Theta} \cdot \tilde{\Theta})=0$ et la suite $\{\tilde{\sigma}_n\}$ s'accumule au point $P \in \tilde{\Theta}$. On a donc, d'après ce qui précéde, un entier $N>0$ tel que $\tilde{\sigma}_N \cap \tilde{\Theta} \neq 0$, ce qui entraine $\sigma_N \cap \Theta \neq \emptyset$ et achève la démonstration.

Surfaces de Riemann et revêtements ramifiés. — Une variété analytique complexe de dimension complexe pure 1 sera appelée *surface de Riemann*. Soient σ, R deux surfaces de Riemann, où R est connexe; $\phi: \sigma \to R$ une application holomorphe non-dégénérée et propre(10). Alors, ϕ est surjective. (En effet, ϕ étant non-dégénérée, $\phi(\sigma)$ est ouvert; d'autre part, puisque ϕ est propre, $\phi(\sigma)$ est fermé; R étant connexe, il s'en suit que $\phi(\sigma)=R$.) Nous disons que σ est un *revêtement* (analytiquement) *ramifié de R à un nombre fini de feuillets* par rapport à la *projection* ϕ, ou simplement un *revêtement ramifié fini* de R.

On dira qu'une surface de Riemann R est *finie*, si elle est analytiquement isomorphe à une surface obtenue d'une surface de Riemann compacte $\hat{R}$ par l'exception d'un nombre fini de disques fermés disjoints les uns les autres; on désignera par $n(R)$ le nombre de ces disques exclus de $\hat{R}$. Alors, le genre $g(R)$ de R est égal à celui de $\hat{R}$, et la caractéristique (au sens d'Ahlfors) de R est donnée par:

$$e(R)=e(\hat{R})+n(R)=2g(R)-2+n(R).$$

(10) Une application $\phi: \sigma \to R$ sera dite *non-dégénérée*, si $\phi^{-1}(y)$ est discret pour tout $y \in R$; *propre*, si $\phi^{-1}(k)$ est compacte pour tout compact k de R.

Lemme 3. *Si σ est un revêtement ramifié fini et de genre zéro d'une surface de Riemann finie R, alors R est aussi de genre zéro.*

En effet, soient m le nombre de feuillets de σ et v l'ordre de ramification total de σ; on a, d'après la formule d'Hurwitz, $e(\sigma)=m\cdot e(R)+v\geqq m\cdot e(R)$. Or, $n(\sigma)\leqq m\cdot n(R)$. On a donc, $m\cdot e(\hat{R})\leqq e(\hat{\sigma})<0$; d'où $e(\hat{R})<0$. R est donc de genre zéro.

Soit maintenant $R=\Delta_w-\bigcup_{i=1}^{\alpha}\delta_i$, où Δ_w est le disque unité $|w|<1$ dans le plan w, et $\{\delta_i\}$ sont $\alpha\geqq 1$ disques analytiques fermés(11) disjoints dans Δ_w. Soit γ un compact dans le disque unité Δ_z: $|z|<1$ dont le bord $\partial\gamma$ se décompose en un nombre fini de courbes analytiques réelles (fermée), non-singulières et disjointes. Posons $\sigma=\Delta_z-\gamma$. Supposons enfin qu'il y ait une application holomorphe ϕ d'un voisinage de $\bar{\sigma}$ sur un voisinage de $\bar{R}$ vérifiant les conditions suivantes:

1. $\phi_{|\sigma}$: $\sigma\to R$ est propre;
2. $\phi^{-1}(\partial\Delta_w)=\partial\Delta_z$;
3. Pour toute composante simplement connexe γ_v de γ, la multiplicité de la courbe fermé $\partial\gamma_v$ (par rapport à ϕ) sur $\phi(\partial\gamma_v)=\partial\delta_{i(v)}$ est $\geqq 2$ (c'est-à-dire, $\phi_{|\partial\gamma_v}$ n'est pas injective).

Lemme 4. *Dans ces hypothèses, on a*: $\alpha(=$ *le nombre des disques* $\delta_i)=1$.

En effet, soit $m(\geqq 2)$ le nombre de feuillets de σ sur R. Comme on l'a déjà vu dans la preuve du Lemme 3, on a $m\cdot e(R)\leqq e(\sigma)$. D'autre part, $e(R)=\alpha-1$ et $e(\sigma)=e(\Delta_z)-e(\gamma)\leqq -1+p$, où p est le nombre des composantes simplement connexes de γ. Or, d'après les hypothèses 2 et 3, on a $p\leqq\alpha\cdot\frac{m}{2}$. Par conséquent, $m(\alpha-1)\leqq -1+\alpha\cdot\frac{m}{2}$, d'où $\alpha/2\leqq 1-\frac{1}{m}<1$; α étant un entier $\geqq 1$, on a $\alpha=1$. C.Q.F.D.

Nous allons maintenant prouver la

Proposition 4. *Soient S une surface complexe non-singulière, C une courbe analytique compacte sur S dont les points singuliers sont des points doubles ordinaires, et P_0 un point double de C. Soit Γ: $|x|\leqq 1$, $|y|\leqq 1$(12) un dicylindre fermé de coordonnées locales x, y de S en P_0 tel que $\Gamma\cap C=\{P\in\Gamma\mid x(P)\cdot y(P)$*

(11) Nous appellerons un ouvert (resp. fermé) contractile limité par une seule courbe analytique réelle fermée et non-singulière (sur une surface de Riemann) *disque analytique* (resp. *disque analytique fermé*).

(12) On suppose que x et y sont holomorphes au voisinage de Γ.

$=0\}$; *posons*

$$K=\{P\in\Gamma \mid |x(P)|<s_0,\ y(P)=0\} \quad (0<s_0<1),$$

$$C(K)=\textit{la composante connexe de } C-\partial K \textit{ contenant } P_0\,.$$

Et supposons qu'on ait une suite d'applications holomorphes $f_1, f_2,\dots, f_n,\dots$, *du voisinage de* $\bar\Delta$: $|z|\leqq 1$ *dans* S *vérifiant les conditions suivantes* $(0<s_0<s<1)$:

(1) $f_n(\partial\Delta)\subset\{P\in\Gamma \mid s_0\leqq|x(P)|\leqq s\}$ *et*

$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1} d\log x(f_n(z))=\lambda$ (*indépendant de* n) >0;

(2) $f_n(\bar\Delta)\cap C(K)=\emptyset$;

(3) $f_n(\bar\Delta)\cap\{P\in\Gamma \mid s<|x(P)|\leqq 1\}=\emptyset$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\bar\Delta)\subset C$.[13]

Alors, $C(K)$ *est de type* (l, q) *avec* $l\leqq\lambda$ *et* $C(K)\subset\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\bar\Delta)$.

Démonstration. $C(K)$ est une courbe analytique dans $S-\partial K$. Soient K, $\Theta_1, \Theta_2,\dots, \Theta_r$ les composantes irréductibles de $C(K)$ numérotées de telle manière que $\Theta_1\cap K\neq\emptyset$, $\Theta_k\cap\bigcup_{i=1}^{k-1}\Theta_i\neq\emptyset$ $(k=2,\dots, r)$. Posons $\Theta=\bigcup_{i=1}^{r}\Theta_i$. D'après les Remarques 1 et 2 à la Définition 1 (nº 4), il suffira de prouver trois choses suivantes: (a) Toute composante Θ_i $(i=1, 2,\dots, r)$ est compacte, non-singulière, rationnelle et de nombre d'intersection $(\Theta_i, \Theta_i)<0$; (b) $C(K)$ supposé minimal au sens (M) de la Remarque 1 (nº 4), son graphe est linéaire:

$$\overset{K}{\bullet}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{\Theta_1}{\bullet}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{\Theta_2}{\bullet}\!-\!\!-\!\cdots\cdots\!-\!\!-\!\overset{\Theta_r}{\bullet}\quad;$$

et (c) $C(K)\subset\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\bar\Delta)$.

1° A cet effet, prenons un dicylindre fermé Γ_μ: $|x_\mu|\leqq 1$, $|y_\mu|\leqq 1$[12] de coordonnées locales x_μ, y_μ de S à chaque point singulier P_μ $(\mu=0, 1,\dots, m)$ de $C(K)$, disjoint l'un de l'autre et tel que l'on ait $\Gamma_\mu\cap C=\{P\in\Gamma_\mu \mid x_\mu(P)\cdot y_\mu(P)=0\}$, où $(\Gamma_0, x_0, y_0)=(\Gamma, x, y)$. Soit $s<s_1<1$, et $R=\Theta-\bigcup_{\mu=0}^{m}\Gamma_\mu(s_1)$, où $\Gamma_\mu(\rho)=\{P\in\Gamma_\mu \mid |x_\mu(P)|\leqq\rho,\ |y_\mu(P)|\leqq\rho\}$ pour $0<\rho<1$. Prenons un tube T le long de $\bar R$ (cf. Lemme 1, nº 3) dans $S-\{P_\mu\}$, muni d'une rétraction holomorphe φ: $T\to\bar R$ et tel que:

(5) $\Gamma_\mu\cap T\subset\{P\in\Gamma_\mu \mid s<|x_\mu(P)|\leqq 1,\ |y_\mu(P)|<s\}$
$\qquad\cup\{P\in\Gamma_\mu \mid |x_\mu(P)|<s,\ s<|y_\mu(P)|\leqq 1\}$;

(13) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\bar\Delta):=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(\bar\Delta)}$ (définition).

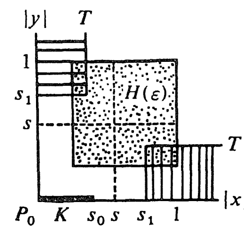
(6) $\varphi^{-1}(\partial R) \subset \bigcup_{\mu=0}^{m} \{\Gamma_\mu - \Gamma_\mu(s)\}$,

et désignons par R_i (resp. T_i) la composante connexe de R sur Θ_i (resp. de T contenant R_i). De l'hypothèse (4), il existe un entier $N \geqq 1$ tel que pour tout $n \geqq N$ l'on ait:

(7) $f_n(\bar{\Delta}) \cap bT$ (cf. le Lemme 1, n° 3) $=\emptyset$;

(8) $f_n(\bar{\Delta}) \cap H_\mu(\varepsilon) = \emptyset$ pour $\mu = 0, 1, \ldots, m$;

où $H_\mu(\varepsilon) = \{P \in \Gamma_\mu \mid \varepsilon \leqq |x_\mu(P)| \leqq 1,\ \varepsilon \leqq |y_\mu(P)| \leqq 1\}$ et ε est un nombre réel compris dans $0 < \varepsilon < s_0$ tel que l'on ait



(9) $\Gamma_\mu \cap bT \subset H_\mu(\varepsilon)$.

Fixons un $n \geqq N$ pour le moment. Alors, *$f_n(\bar{\Delta})$ est inclu dans $W = \bigcup_{\mu=0}^{m} [\Gamma_\mu - H_\mu(\varepsilon)] \cup V$, où V est l'intérieur de T.* Considérons l'image réciproque $D = f_n^{-1}(V)$ dans Δ: $|z| < 1$. D'après l'hypothèse (1), on a $D \Subset \Delta$. En variant s_1 légèrement (s'il est nécessaire), on peut supposer que le bord ∂D de D se décompose en un nombre fini de courbes analytiques réelles fermées, disjointes et non-singulières (pour tout $n \geqq N$). Soient $\{D_k\}$ les composantes connexes de D, et désignons par $R_{i(k)}$ la composante connexe de R contenant $\varphi(f_n(D_k))$. Alors, d'après la condition (7), $D_k \xrightarrow{\varphi \circ f_n} R_{i(k)}$ est propre.

(10) *D_k est un revêtement ramifié fini de $R_{i(k)}$ par rapport à la projection $\varphi_k = \varphi \circ f_{n|D_k}$.*

D'autre part, si $G_0 = f_n^{-1}(\Gamma - V)$ était simplement connexe (c'est-à-dire $G_0 = \bar{\Delta}$), la fonction $x(f(z))$ devrait avoir des zéros dans Δ, d'après l'hypothèse (1), et on aurait $f_n(\Delta) \cap \Theta_1 \neq \emptyset$ contrairement à (2); si en suite $\bar{\Delta} - D$ possédait une composante simplement connexe $G_j\,(\neq G_0)$, l'image $\sigma = f_n(G_j)$ se trouverait dans un $\Gamma_\mu - V$ et son bord unique $\partial\sigma\,(=f_n(\partial G_j))$ dans $\varphi^{-1}(c)$, c étant le cercle $|x_\mu| = s_1$ sur l'axe x_μ ou bien $|y_\mu| = s_1$ sur l'axe y_μ; soit c sur l'axe x_μ pour fixer l'idée; on vérifierait aisément $(1/2\pi i)\int_{\partial\sigma} d\log x_\mu \neq 0$; d'où $\sigma \cap$ (l'axe y_μ) $\neq \emptyset$ contrairement à (2). Donc,

(11) *$\Delta - D$ ne possède aucune composante simplement connexe.*

De la même manière, puisque $f_n(\Delta) \cap K = \emptyset$, tenant compte de (3) et de (8), on obtient la proposition:

(12) *$G_0 = f_n^{-1}(\Gamma - V)$ (dont le bord contient $\partial\Delta$) est connexe.*

Maintenant, considérons un couple (γ_1, A) d'une composante connexe γ_1

(courbe fermée) de ∂D telle que le côté intérieur de γ_1 appartienne à D (par exemple, une composante de ∂G_0 dans Δ) et d'une suite

$$A:\quad 0_1 \sim\!\sim\!\sim 0_2 \text{ ——— } 0_3 \sim\!\sim\!\sim 0_4 \text{ ——— } \cdots\cdots\cdots \sim\!\sim\!\sim 0_\lambda$$

de composantes connexes 0_λ de ∂R, où $0_1 = \varphi\circ f_n(\gamma_1)$, où $\sim\!\sim\!\sim$ et —— apparaissent alternativement et $0_\lambda \sim\!\sim\!\sim 0_{\lambda+1}$ (resp. 0_λ —— $0_{\lambda+1}$) signifie que 0_λ et $0_{\lambda+1}$ sont sur la même $\bar{R}_i$ (resp. Γ_μ). Alors, d'après (10) et (11), nous obtenons la proposition suivante:

(13) *Pour tout couple* (γ_1, A), *il existe une suite*

$$\tilde{A}:\quad \gamma_1 \sim\!\sim\!\sim \gamma_2 \text{ ——— } \gamma_3 \sim\!\sim\!\sim \gamma_4 \text{ ——— } \cdots\cdots\cdots \sim\!\sim\!\sim \gamma_\lambda$$

de composantes connexes γ_λ *de* ∂D *telle que l'on ait*

$$\varphi\circ f_n(\gamma_\lambda) = 0_\lambda \quad \textit{pour tout} \quad \lambda\,,$$

où $\gamma_\lambda \sim\!\sim\!\sim \gamma_{\lambda+1}$ (*resp.* γ_λ —— $\gamma_{\lambda+1}$) *signifie que* γ_λ *et* $\gamma_{\lambda+1}$ *sont sur la même* D_k (*resp. la même composante connexe* G_j *de* $\Delta - D$).

Puisque les $\sim\!\sim\!\sim$ et —— apparaissent alternativement dans la suite $\tilde{A}$, $\gamma_{\lambda+1}$ se trouve dans l'intérieur de la courbe γ_λ; en particulier, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\lambda, \ldots$ sont différentes les unes des autres. Par conséquent, la longueur de la suite (A) est nécessairement finie, ce qui entraîne que *tout composante* Θ_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ *de* Θ *est non-singulière* et *le graphe associé à* $C(K)$ *est contractile* (*un arbre*).

De plus, si l'on prend une composante de ∂G_0 dans Δ comme γ_1, il résulte de (13) que l'application $D \xrightarrow{\varphi\circ f_n} R$ est surjective $(n \geqq N)$; on en déduit deux choses: d'une part, d'après le Lemme 3, *toute* Θ_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ *est de genre zéro*; d'autre part, en faisant $n \to \infty$, on a

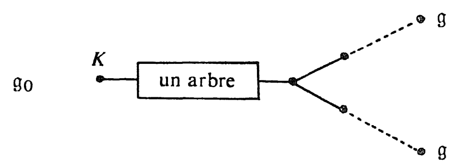
(14) $R \subset \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\Delta)$;

par suite, d'après l'hypothèse (3), on a $\bar{\Theta} \cap \partial K = \emptyset$, et Θ *est donc compacte.*

Nous avons ainsi vu que chaque Θ_i est une courbe compacte, rationnelle et non-singulière dans S. Dans $U = S - \{P \in \Gamma \mid s_0 \leqq |x(P)| \leqq s\}$, on a une suite de courbes analytiques $\{\sigma_n = f_n(\Delta) \cap U,\ n=1, 2, \ldots\}$ telle que l'on ait $\sigma_n \cap \Theta_i = \emptyset$ pour tout n et $\Theta_i \cap \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n \neq \emptyset$. On a donc, d'après le Lemme 2, $(\Theta_i \cdot \Theta_i) < 0$ pour tout i.

2° Après avoir prouvé (a), il nous reste à prouver (b), c'est-à-dire que, $C(K)$ supposé minimal, le graphe $\mathfrak{g}$ associé à $C(K)$ est linéaire. Nous avons déjà vu dans 1° que $\mathfrak{g}$ est un arbre. Supposons que $\mathfrak{g}$ ne soit pas linéaire: $\mathfrak{g}$ posséderait alors un point à $\alpha+1$ branches $(\alpha \geqq 2)$ tel que, exceptée la branche

$\mathfrak{g}_0$ qui contienne le point correspondant à la composante K de $C(K)$, toute autre branch $\mathfrak{g}_\nu$ $(\nu=1, 2,\dots, \alpha)$ soit linéaire:



Soit Θ_{i_0} la composante de Θ correspondant à ce point, et W_0 la composante connexe de $W-T_{i_0}$ contenant K, où $W=\bigcup_{\mu=0}^{m} [\Gamma_\mu - H_\mu(\varepsilon)] \cup V$. R_{i_0} s'obtiendrait de $\Delta_w=\Theta_{i_0}-\overline{W}_0$ analytiquement isomorphe à un disque $|w|<1$ dans le plan w par l'exclusion de $\alpha(\geqq 2)$ disques analytiques fermés disjoints. Or, on déduit aussitôt des propositions (13) et (12) de 1° ci-dessus, que $f_n^{-1}(W_0)$ $(n\geqq N)$ ne possède aucune composante simplement connexe, de sorte que le complément $\Delta-\overline{f_n^{-1}(w_0)}$ possède au moins une composante simplement connexe F. D'après (10), $\sigma=F\cap f_n^{-1}(V_{i_0})$ est un revêtement ramifié fini de R_{i_0} par rapport à la projection $\phi=\varphi\circ f_{n|\bar{\sigma}}$, et on a $\phi^{-1}(\partial\Delta_w)=\partial F$. D'autre part, compte tenue de la proposition (a) déjà prouvée et de la Remarque 1 (n° 4), la partie de Θ correspondant à chaque sous-graphe linéaire $\mathfrak{g}_\nu$ $(\nu=1, 2,\dots, \alpha)$ serait de type (l_ν, q_ν) avec $l_\nu\geqq 2$; de la sorte, d'après la Remarque 2 du n° 4, le bord $\partial\gamma$ de chaque composante simplement connexe γ de $F-\sigma$ serait multivalent sur $\phi(\partial\gamma)$, ce qui contredit le Lemme 4, car on a supposé $\alpha\geqq 2$. Donc, $\mathfrak{g}$ est linéaire (la proposition (b)). Quant'à $C(K)\subset\lim_{n\to\infty} f_n(\Delta)$, il suffit de faire $\varepsilon\to 0$ dans la condition (8), tenant compte de (14). La Proposition 4 est démontrée.

Lemme 5. *Soit E une courbe analytique dans une surface complexe non-singulière U, et considérons une suite de courbes analytiques σ_n dans U telles que $\sigma_n\cap E=\emptyset$. Alors, l'ensemble*

$$(\lim_{n\to\infty}\sigma_n)\cap E$$

n'a pas de point isolé. (Où $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{\nu=n}^{\infty}\sigma_\nu}$.)

En effet, supposons que P_0 soit un point isolé de $\Sigma=(\lim\sigma_n)\cap E$. Prenons un voisinage $V\Subset U$ de P_0 tel que l'on ait $\overline{V}\cap\Sigma=\{P_0\}$ et que E s'écrite $f=0$ dans un voisinage V' de $\overline{V}$ à l'aide d'une fonction holomorphe f. $\lim\sigma_n$ étant fermé et $E\cap\partial V$ compact, il existe un voisinage $W(\Subset V')$ de $E\cap\partial V$ tel que

$(\lim \sigma_n) \cap W = \emptyset$. Soit λ le minimum des modules $|f(P)|$ pour $P \in (\partial V) - W (>0)$, et posons $D = \{P \in V \mid |f(P)| < \lambda\}$. On a $\partial D \cap \{P \in V' \mid |f(P)| < \lambda\} \subset W$. Or, si l'on prend un entier N suffisamment grand, on a $\sigma_N \cap \overline{W} = \emptyset$ et $\sigma_N \cap D \neq \emptyset$. Par conséquent, l'application $z = f_{|\sigma_N \cap D}$: $\sigma_N \cap D \to |z| < \lambda$ est propre, non-dégénérée, de sorte que surjective. Donc, f prend 0 à un point de σ_N, c'est-à-dire $\sigma_N \cap E \neq \emptyset$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, Σ n'a pas de point isolé.

C.Q.F.D.

Revenons maintenant à la situation du n° 4, et rappelons les S, f: $\Delta^* \to S$, $C = f(0; S)$, C_0, π: $\tilde{C}_0 \to C_0$, $l(\delta)$, $l(\tilde{P})$, etc.. Soient $\tilde{P}$ un point de $\tilde{C}_0$, δ un disque analytique sur $\tilde{C}_0$ de centre $\tilde{P}$ et Γ: $|x| < 1$, $|y| < 1$ un voisinage de coordonnées locales x, y de S en $\pi(\tilde{P})$ tel que:

1. $\pi(\bar{\delta}) \subset \{P \in \Gamma \mid |x(P)| < s_0,\ y(P) = 0\} \quad (0 < s_0 < 1)$;
2. $C \cap \Gamma \subset \{P \in \Gamma \mid x(P) \cdot y(P) = 0\}$.

Cela posé, on a la

Proposition 5. *Supposons qu'il existe un entier $m > 0$ et une suite infinie de disques analytiques*[11] *disjoints $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$, dans Δ^*: $0 < |z| < 1$ tendant vers l'origine $z = 0$ et vérifiant les conditions suivantes (pour un nombre réel s compris dans $s_0 < s < 1$):*

a) $f(\partial \Delta_n) \subset \{P \in \Gamma \mid s_0 < |x(P)| < s\}$;

b) $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial \Delta_n} d \log x(f(z)) = m$ (*indépendant de* n) > 0;

c) $f(\Delta_n) \cap \{P \in \Gamma \mid s < |x(P)| < 1\} = \emptyset$.

Alors, on a $l(\tilde{P}) \leqq m (< \infty)$.

Démonstration. — 1° Montrons d'abord $E(\delta) \subset C(\delta)$. Pour cela, étant donnée une courbe analytique *connexe* E de valeurs exceptionnelles de f telle que $E \cap \pi(\delta) \neq \emptyset$ et $E \cap \pi(\partial \delta) = \emptyset$ dans un sous-domaine U de S, nous avons à prouver $E \subset C(\delta)$. Soit $H_\varepsilon = \{P \in \Gamma \mid s_0 - \varepsilon \leqq |x(P)| \leqq s + \varepsilon,\ |y(P)| \leqq \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que l'on ait $\pi(\bar{\delta}) \cap H_\varepsilon = \emptyset$. Il suffira de prouver $E - H_\varepsilon \subset C(\delta)$, car cela entraîne, faisant $\varepsilon \to 0$, $E \subset C(\delta)$. On peut donc supposer à nouveau $U \cap H_\varepsilon = \emptyset$ et $E \cap H_\varepsilon = \emptyset$. Maintenant, puisque $\lim_{n \to \infty} f(\partial \Delta_n) \subset H_{\varepsilon/2}$, il existe un entier $N > 0$ tel que, pour tout $n \geqq N$, $\sigma_n = f(\Delta_n) \cap U$ soit une courbe analytique de U.

D'après le théorème de P. Thullen cité au n° 3, $\bigcup_{n \geqq N} \sigma_n$ étant une courbe analytique de $U - C$, $\Sigma = \lim_{n \to \infty} \sigma_n$ se compose de composantes irréductibles de

$C \cap U$. Remarquons que Σ contient $\pi(\delta) \cap U(\neq \emptyset)$. Or, d'après le Lemme 5, $E_i \cap \Sigma$ n'est discret pour aucune composante irréductible E_i de E. Comme $E \cap \Sigma \neq \emptyset$ et E connexe, il s'en suit que $E \subset \Sigma$.

2° Après avoir prouvé $E(\delta) \subset C(\delta)$, il nous reste à prouver, pour le cas $E(\delta) = C(\delta)$, que $C(\delta)$ est de type (l, q) avec $l \leqq m$. Or, cela résulte de la Proposition 4, car les $\bar{\varDelta}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ sont analytiquement équivalentes au disque unité fermé $\bar{\varDelta}$: $|z| \leqq 1$ du plan d'une variable complexe z. La Proposition 5 se trouve démontrée.

6. Surfaces de recouvrements d'Ahlfors. Dans ce numéro, une *surface de Riemann finie* signifiera une surface de Riemann *compacte, à bords réguliers* ou *sans bord, triangularisée.* Soit R une surface de Riemann finie, munie d'une métrique conforme $ds = \mu(z)|dz|$ à coefficient $\mu(z)$ strictement positif en tout point de R. Soit F une surface de recouvrement finie(14) de R. On munit F de la métrique $d\tilde{s} = \tilde{\mu}(z)|dz|$ induite de ds par la projection. (Le coefficient de $d\tilde{s}$ s'annule aux points de ramifications de F). On posera, pour chaque arc régulier γ sur R (resp. F), $|\gamma| = \int_\gamma ds$ $\left(\text{resp.} \int_\gamma d\tilde{s}\right)$ et, pour chaque région $\varDelta$ de R (resp. de F), $|\varDelta| = \iint_\varDelta \mu(z)^2 dxdy$ $\left(\text{resp.} \iint_\varDelta \tilde{\mu}(z)^2 dxdy\right)$, où $z = x + \sqrt{-1}y$. Le théorème principal de L. Ahlfors(15) dit qu'il existe une constante $k>0$ dépendant seulement de (R, ds) telle que

$$(1) \qquad e^+(F) \geqq M(F) \cdot e(R) - k \cdot L(F),$$

où $e^+(F) = \max\{e(F), 0\}$, $e(F)$ et $e(R)$ étant les caractéristiques de F et de R respectivement(16), $M(F) = \dfrac{|F|}{|R|}$ est la moyenne de nombre de feuillets de F et $L(F) = |\partial F|$ la longueur de la frontière ∂F de F *relative à* R. Le second théorème de recouvrement de L. Ahlfors dit que, pour chaque arc régulier γ sur R, il existe une constante $k'>0$ dépendant seulement de γ et de (R, ds) telle que

$$(2) \qquad |M(F) - M(\gamma)| < k' \cdot L(F),$$

où $M(\gamma) = |$la partie de F au-dessus de $\gamma| / |\gamma|$ est la moyenne de nombre de

(14) 《finite covering surface》 dans [25], qui peut avoir des points de ramification et aussi des points frontières relatifs à R. Nous adoptons ici la terminologie 《*surface de recouvrement*》 avec J. Dufrenoy (*Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* (3) **58** (1941), 179–259).

(15) Pour la théorie d'Ahlfors de 《covering surfaces》 appliquée ci-dessous, voir par exemple [25], Chapter VI.

(16) La caractéristique $e(R)$ d'une surface de Riemann finie (triangularisée) R ayant f faces, a arêtes intérieurs et s somments intérieurs est, par définition, $e(R) = -s + a - f$ (cf. n° 5).

feuillets de F au-dessus de γ. On remarquera que γ peut se trouver sur le bord ∂R de R.

Soit F^* une surface de recouvrement infinie et à bords(17) d'une surface de Riemann finie R. On dira qu'une suite croissante de sous-ensembles compacts $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots$ de F^* telle que $F^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ est une *exhaustion régulière* de F^*, si les deux conditions suivantes sont remplies:

1° chaque F_n est une surface de Riemann finie;

2° on a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{L(F_n)}{M(F_n)} = 0$.

S'il existe une exhaustion régulière de F^*, on dira que F^* est *régulièrement exhaustible*. Comme une conséquence immédiate de (1) et de (2), nous avons le

Lemme 6. *Si $\{F_n\}$ est une exhaustion régulière de F^* on a alors:*

$$e(R) \leqq \varliminf_{n\to\infty} \frac{e^+(F_n)}{M(F_n)}\,; \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n(\gamma)}{M(F_n)} = 1 \qquad \textit{pour tout arc régulier } \gamma \textit{ sur } R\,, \tag{4}$$

où $M_n(\gamma)$ est la moyenne de nombre de feuillets de F_n au-desses de γ.

Soit maintenant R une surface de Riemann fermée, $R_0 = R - \bigcup_{\nu=1}^{q} \delta_\nu$ le complément sur R de $q\,(\geqq 2)$ disques fermés $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_q$ disjoints. Soit D un ouvert non borné de Δ^*: $1<|z|<\infty$ dans le plan d'une variable complexe z telle que sa frontière $\partial^* D = \partial D \cap \Delta^*$ dans Δ^* soit composée de courbes analytiques réelles non-singulières et disjointes les unes les autres, et supposons qu'il existe une application holomorphe φ d'un voisinage de l'adhérence $\bar{D}$ (dans le plan z) de D dans R vérifiant les conditions suivantes:

$$\text{(i)}\ \ \varphi(D) \subset R_0; \qquad \text{(ii)}\ \ \varphi(\partial^* D) \subset \partial R_0; \qquad \text{(iii)}\ \ \varphi(\infty \mid D) = \bar{R}_0\,,$$

où $\varphi(\infty \mid D) = \bigcap_{r>1} \overline{\varphi(D \cap \{|z|>r\}}$. Soit $(\gamma)_\nu$ l'ensemble des composantes simplement connexes compactes γ de $\Delta^* - D$ telles que $\varphi(\partial\gamma) = \partial\delta_\nu$. Posons

$$m_\nu = \sup\left\{ m \in \boldsymbol{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \textit{le nombre des } \gamma \in (\gamma)_\nu \textit{ vérifiant} \\ |\partial\gamma|/|\partial\delta_\nu| < m \textit{ soit fini} \end{array} \right\}, \tag{5}$$

où $\boldsymbol{N}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs.

(17) 《infinite bordered covering surface》 dans [25].

On a alors le

Lemme 7. $\sum_{\nu=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_\nu}\right)\leqq -e(R)$.

1° En effet, nous regardons $\bar{D}$ comme une surface de recouvrement à bords de $\bar{R}_0$ par rapport à la projection φ, et munissons $\bar{R}_0$ d'une métrique conforme ds à coefficient strictement positif (par exemple, la restriction sur $\bar{R}_0$ de la métrique de Poincaré de $R-\bigcup_{\nu=1}^{q}\delta'_\nu$, chaque δ'_ν étant un disque fermé à l'intérieur de δ_ν). $\bar{D}$ est alors régulièrement exhaustible. En effet, considérons $D(r)=D\cap\{1\leqq|z|\leqq r\}$ et $C(r)=\bar{D}\cap\{|z|=r\}$ pour $r>1$. L'aire $A(r)$ de $D(r)$ et la longueur $L(r)$ de $C(r)$ serons mesurées par la métrique $\varphi^*ds=\mu(z)\,|dz|$ induite de ds par φ. La longueur de $C(r)$ mesurée par la métrique euclidienne $|dz|$ sera notée $l(r)$. On déduit alors, à l'aide du lemme de Schwarz,

$$L(r)^2=\left(\int_{C(r)}\mu(z)|dz|\right)^2\leqq l(r)\cdot\int_{C(r)}\mu(z)^2|dz|\leqq 2\pi r\cdot\frac{dA(r)}{dr},$$

d'où

$$\frac{dr}{r}\leqq 2\pi\cdot\frac{dA(r)}{L(r)^2}. \tag{6}$$

S'il existe un $\varepsilon>0$ tel que $L(r)>\varepsilon$ pour tout $r\geqq r_0$, on aura

$$\frac{2\pi}{\varepsilon^2}[A(r)-A(r_0)]>\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r}=\log r-\log r_0\to\infty\quad(r\to\infty).$$

Par suite, si $A(r)$ était borné, il existerait une suite de nombres positifs $1<r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots$ telle que $\lim_{n\to\infty}r_n=\infty$ et $\lim_{n\to\infty}L(r_n)=0$. En remplaçant $\{r_n\}$ en cas de nécessité par une de ses suites partielles, on pourrait supposer que l'image $\varphi(C(r_n))$ converge à un point P de $\bar{R}_0$. Posons $G(n)=D\cap\{r_n<|z|<r_{n+1}\}$. Il existerait alors, quelque soit U un voisinage de $\partial R_0\cup\{P\}$, un entier $N>0$ tel que l'on ait $\varphi(\partial G(n))\subset U$ pour tout $n\geqq N$. Or, $\lim_{n\to\infty}|G(n)|=0$, $A(r)$ étant borné. Donc, si $|R_0-U|>0$, il existerait un entier $N'(\geqq N)$ tel que $\varphi(G(n))\subset U$ pour tout $n\geqq N'$, de sorte que $\varphi(D\cap\{|z|\geqq N'\})\subset U$. En faisant $U\to\partial R_0\cup\{P\}$, on obtiendrait $\varphi(\infty\mid D)\subset\partial R_0\cup\{P\}$, ce qui est contraire à (iii). On a donc

$$\lim_{r\to\infty}A(r)=\infty. \tag{7}$$

Or, on a, d'après (6),

$$2\pi\int_1^r\frac{dA(r)}{L(r)^2}\geqq\int_1^r\frac{dr}{r}=\log r\to\infty,\quad \text{si } r\to\infty, \tag{8}$$

Supposons qu'il existe un $\varepsilon>0$ et $r_0>1$ tels que l'on ait $L(r)>\varepsilon A(r)$ pour tout $r\geqq r_0$; on aurait alors

$$\int_{r_0}^{r}\frac{dA(r)}{L(r)^2}\leqq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{r_0}^{r}\frac{dA(r)}{A(r)^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{A(r_0)}-\frac{1}{A(r)}\right]<\frac{1}{\varepsilon^2 A(r_0)},$$

ce qui est contraire à (8). Il existe donc, une suite $r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots\to\infty$ telle que l'on ait, tenant compte de (7),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L(r_n)+L(1)}{A(r_n)}=0.$$

On obtient ainsi une exhaustion régulière $\{\overline{D(r_n)}\}_{n=1,2,\dots}$ de $\bar{D}$.

2° Posons maintenant $D_n=D(r_n)$, $\Delta(1, r_n)=\{z\in\boldsymbol{C}\mid 1<|z|<r_n\}$ et soit D'_n la réunion de D_n et des composantes compactes de $\Delta(1, r_n)-D_n$. On a alors

$$0\geqq e(D'_n)=e(D_n)+e(D'_n-D_n),$$

$D'_n\cap(\partial D_n)$ se décomposant en des courbes simples fermées. Si l'on désigne le nombre des composantes simplement connexes γ de D'_n-D_n tels que $\varphi(\partial\gamma)=\partial\delta_\nu$ par $N_{\nu,n}$, on en déduit

$$e(D_n)\leqq -e(D'_n-D_n)\leqq\sum_{\nu=1}^{q}N_{\nu,n}$$

et, tenant compte de (4) et de (7),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{e^+(D_n)}{M(D_n)}\leqq\sum_{\nu=1}^{q}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{N_{\nu,n}}{M(D_n)}=\sum_{\nu=1}^{q}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{N_{\nu,n}}{M_n(\partial\delta_\nu)}\leqq\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{m_\nu};$$

donc, d'après (3),

$$q+e(R)=e(R_0)\leqq\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{m_\nu},\quad\text{d'où}\ \sum_{\nu=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_\nu}\right)\leqq -e(R).$$

C.Q.F.D.

La *démonstration* du Théorème 4 est maintenant immédiate. En effet, rappelons les notations S, $f\colon\Delta^*\to S$, $C=f(0; S)$; $\tilde{C}_0\xrightarrow{\pi}C_0$, $l(\tilde{P})$ etc. du n° 4. Prenons un nombre fini de points $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2,\dots, \tilde{P}_q$ de $\tilde{C}_0$, comprenant tous les points de $\tilde{C}_0$ qui correspondent par π aux points singuliers de C sur C_0, et, pour chaque $\nu(=1, 2,\dots, q)$, un dicylindre fermé Γ_ν: $|x_\nu|\leqq 1$, $|y_\nu|\leqq 1$[12] de coordonées locales x_ν, y_ν de S au point $\pi(P_\nu)$ de façon que:

(i) $C\cap T_\nu\subset\{P\in\Gamma_\nu\mid x_\nu(P)\cdot y_\nu(P)=0\}$;

(ii) un petit voisinage de $\tilde{P}_\nu$ s'applique sur $\{P\in\Gamma_\nu\mid y_\nu(P)=0\}$ par π;

(iii) $\Gamma_\mu\cap\Gamma_\nu=\emptyset$ pour $\pi(P_\mu)\neq\pi(P_\nu)$;

(iv) $(\Gamma_\mu, x_\mu, y_\mu)=(\Gamma_\nu, y_\nu, x_\nu)$ pour $\pi(P_\mu)=\pi(P_\nu)$, $\mu\neq\nu$.

Posons $\Gamma_\nu(s)=\{P\in\Gamma_\nu \mid |x_\nu(P)|<s,\ |y_\nu(P)|<s\}$, $R(s)=C_0-\bigcup_{\nu=1}^{q}\Gamma_\nu(s)$ pour chaque $0<s<1$. Prenant un $0<s_0<1$, soit T un tube le long de $R_0=R(s_0)$ muni d'une rétraction analytique φ: $T\to R_0$ (cf. le Lemme 1) tel que:

(v) $T\cap C=R_0$;

(vi) $\Gamma_\nu\cap T\subset\{P\in\Gamma_\nu \mid s_1<|x_\nu(P)|\leqq 1,\ |y_\nu(P)|\leqq s_1\}\cup\{P\in\Gamma_\nu \mid |x_\nu(P)|<s_1,\ s_1<|y_\nu(P)|<1\}$ pour un $0<s_1<s_0$;

(vii) $\varphi^{-1}(\partial R_0)\subset\bigcup_{\nu=1}^{q}\Gamma_\nu(s')$ pour un $s_0<s'<1$.

Comme $f(0;S)=C$, on peut trouver un nombre réel $\rho>0$ tel que $f(\bar{\Delta}_\rho^*)\cap bT=\emptyset$, où $\bar{\Delta}_\rho^*$: $0<|z|\leqq\rho$ et $bT=\bigcup_{w\in R_0}\partial\varphi^{-1}(w)$ (cf. le Lemme 1). On peut regarder $F_0=\bar{\Delta}_\rho^*\cap f^{-1}(T)$ comme une surface de recouvrement à bords de R_0 par rapport à la projection $\psi=\varphi\circ f$. Choisissons s dans $s_0<s<1$ de façon que $\varphi^{-1}(\partial R(s))\subset\bigcup_{\nu=1}^{q}\Gamma_\nu$ et que F_0 ne ramifie pas au-dessus de $\partial R(s)$. Soit $F=\psi^{-1}(R(s))$, et soit D l'ensemble des points intérieurs de F. Alors, $\partial^*D=\partial D\cap\Delta_\rho^*$ est non-singulière (où Δ_ρ^*: $0<|z|<\rho$), $\psi(D)\subset R(s)-\partial R(s)$, $\psi(\partial^*D)\subset\partial R(s)$ et $\psi(0\mid D)=R(s)$. Soit δ_ν la composante connexe de $\pi^{-1}(C_0\cap\Gamma_\nu(s))$ contenant $\tilde{P}_\nu$, $(\gamma)_\nu$ l'ensemble des composantes simplement connexes compactes γ de Δ_ρ^*-D telles que $\psi(\partial\gamma)=\pi(\partial\delta_\nu)$, et enfin

$$m_\nu=\sup\left\{ m\in \boldsymbol{N}\ \middle|\ \begin{array}{l} \textit{le nombre des } \gamma\in(\gamma)_\nu \textit{ vérifiant} \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial\gamma} d\log x_\nu(f(z))<m \textit{ soit fini} \end{array}\right\}.$$

Alors, d'après la Proposition 5, on a $l(\tilde{P}_\nu)\leqq m_\nu$. D'autre part, d'après le Lemme 7, on a

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_\nu}\right)\leqq -e(\tilde{C}_0)\,,$$

d'où

$$\sum_{\nu=1}^{q}\left(1-\frac{1}{l(\tilde{P}_\nu)}\right)\leqq -e(\tilde{C}_0)\,.$$

La suite $\{P_\nu\}_{\nu=1,2,\dots,q}$ étant arbitraire (dans la mesure qu'elle contient tous les points de $\tilde{C}_0$ correspondant aux points singuliers de C sur C_0), on en déduit aussitôt que le nombre des points $\tilde{P}$ de $\tilde{C}_0$ tels que $l(\tilde{P})\geqq 2$ ne dépasse pas $-2e(\tilde{C}_0)\,(<\infty)$, et que

$$\sum_{\tilde{P}\in\tilde{C}_0}\left(1-\frac{1}{l(\tilde{P})}\right)\leqq -e(\tilde{C}_0)\ (=2-2g)\,.$$

C. Q. F. D.

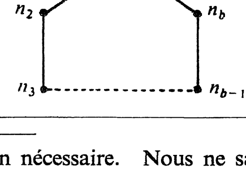
7. Liste des types de $f(0)$ compacts compris dans une courbe de valeurs exceptionnelles. Soit S une surface complexe non-singulière, E une courbe analytique connexe sur S *n'ayant que des points doubles ordinaires comme points singuliers* et *minimale* au sens suivant: toute composante irréductible compacte exceptionelle de première espèce[7] de E passe par au moins trois points singuliers de E. Soit $f: \Delta^* \to S-E$ une application holomorphe du disque pointé Δ^*: $0<|z|<1$ dans $S-E$ telle que

$$C=f(0; S)$$

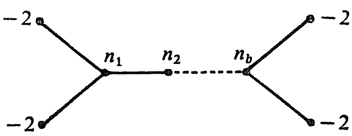
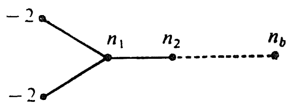
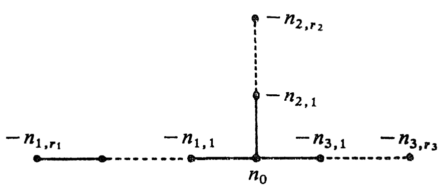
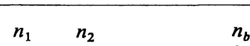
soit un sous-ensemble compact de E contenant au moins deux points. ($f(0; S-E)=\emptyset$). Alors, d'après la Proposition 3, C est une courbe analytique compacte composée de composantes irréductibles de E. En appliquant le Théorème 4 à chaque composante irréductible de C, on déduit aussitôt que:

Théorème 5. (i) *C doit être de l'un des types (α) à (ε) donnés dans le Tableau* 1 *ci-dessous*[18]; (ii) *Si $E_*=E-C\neq\emptyset$, C est alors de type (γ), (γ') ou (ε), les lieux d'intersection de $\bar{E}_*$ avec C étant indiqués dans le Tableau* 2 *ci-dessous*[18].

Tableau 1.

<table>
<tr><td colspan="2">Nom de Type</td><td colspan="2">Explication de la courbe C</td><td>☆</td></tr>
<tr><td>(α)</td><td>$\alpha(n)$</td><td colspan="2">irréductible, elliptique, non-singulière et de nombre d'intersection $(C\cdot C)=n$</td><td rowspan="2">$n\geqq 0$</td></tr>
<tr><td>$(\beta)_1$</td><td>$\beta(n)$</td><td colspan="2">irréductible, rationnelle, à un seul point double ordinaire et $(C\cdot C)=n$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Ci-dessous, chaque composante irréductible C_i de C est non-singulière, rationnelle et représentée par un point $\cdot$; chaque ligne —— représente un point d'intersection. Chaque entier adjacent à un point est le nombre d'intersection $(C_i\cdot C_i)$ de C_i correspondante.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td>☆</td></tr>
<tr><td>$(\beta)_b$</td><td>$\beta(n_1, n_2, ., n_b)$</td><td></td><td>$(b\geqq 2)$</td><td>Tous les $n_i=-2$ ou bien $\max\{n_1, n_2,\dots, n_b\}\geqq 0$</td></tr>
</table>

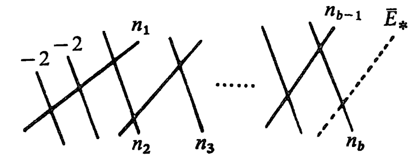
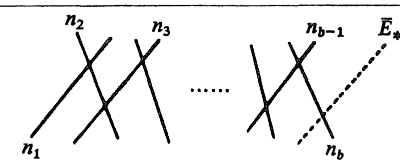
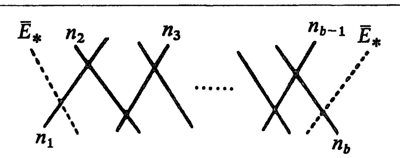
(18) Ce n'est qu'une condition nécessaire. Nous ne savons pas encore s'il existe une application holomorphe $f: \Delta^*\to S-C$ vérifiant $C=f(0; S)$ pour toutes les courbes C appartenant au Tableau 1.

(γ)	$\gamma(n_1, n_2,\ldots, n_b)$	 $(b\geqq 1)$	Tous les $n_i=-2$ ou bien $\max\{n_1+1, n_2,\ldots, n_{b-1}, n_b+1\}\geqq 0$
(γ')	$\gamma'(n_1, n_2,\ldots, n_b)$	 $(b\geqq 2)$	$\max\{n_1+1, n_2,\ldots, n_b\}\geqq 0$
(δ)	$\delta\left(n_0\,\middle\vert\,\frac{q_1}{l_1}, \frac{q_2}{l_2}, \frac{q_3}{l_3}\right)$	 (1) Pour chaque $i=1, 2, 3$, (l_i, q_i) est une paire d'entiers $0<q_i<l_i$ premiers entre eux et $\frac{l_i}{q_i}=n_{i,1}-\cfrac{1}{n_{i,2}-\cfrac{}{\ddots-\cfrac{1}{n_{i,r_i}}}}$, où $n_{i,j}\geqq 2$; (2) $\sum_{i=1}^{3}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)\leqq 2$.	$n_0\geqq 2$, où on a l'égalité seulement si: $\left(\frac{q_1}{l_1}, \frac{q_2}{l_2}, \frac{q_3}{l_3}\right)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right), \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \\ \text{ou bien} \\ \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).\end{cases}$
(ε)	$\varepsilon(n_1, n_2,\cdots, n_b)$	 $(b\geqq 1)$	$\max\{n_1, n_2,\ldots, n_b\}\geqq 0$

Remarque 1. Dans la colonne ☆ du Tableau 1, on a écrit les conditions pour que la matrice des nombres d'intersections $((C_i\cdot C_j))$ ne soit pas négative définite. En effet, si $((C_i\cdot C_j))$ était négative définite, C serait, d'après H. Grauert [5], exceptionnelle; par suite, d'après la Proposition 1, f serait holomorphe en $z=0$, contrairement à $C=f(0; S)$.

Remarque 2. Pour le type (δ), il suit de la condition (2) que $(l_1, l_2, l_3)=(2, 3, 6-m)$ avec $m=0, 1, 2, 3$; $(2, 4, 4)$ ou $(3, 3, 3)$.

Tableau 2.

Nom de Type	Nombre des points de $C\cap\bar{E}_*$	Lieux de $C\cap\bar{E}_*$
$\gamma'(n_1, n_2,\dots, n_b)$	1	
$\varepsilon(n_1, n_2,\dots, n_b)$	1	
	2	

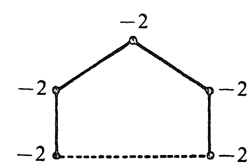
Corollaire 1. *Soient (S, E) les mêmes qu'au début du présent numéro, et f_ν: $\Delta^*\to S-E$ $(\nu=1, 2,\dots, n)$ un nombre fini d'applications holomorphes de Δ^* dans $S-E$ telles que $C^{(\nu)}=f_\nu(0; S)$ soit une courbe compacte sur E et que la réunion $C=\bigcup_{\nu=1}^{n} C^{(\nu)}$ soit connexe. Alors, C est aussi de l'un des types (α) à (ε) du Tableau 1. En outre, si $E^*=E-C\neq\emptyset$, elle doit appartenir au Tableau 2.*

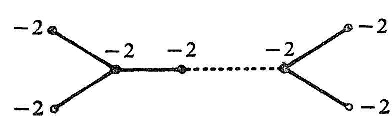
Compléments au Tableau 1.— Supposons que S est compacte. En vertu du théorème de Kodaira-Spencer [13] et du Théorème 5.1 de Kodaira [11], si S ou l'une des équivalentes birationnelles de S contient une courbe rationnelle non-singulière Θ telle que $(\Theta\cdot\Theta)\geqq 0$, S est une surface réglée (ruled surface). Donc, S est une surface réglée, si C est de l'un des types suivants: $\beta(n)$ avec $n\geqq 4$; $\beta(n_1, n_2,\dots, n_b)$ avec $b\geqq 2$, $\max\{n_1, n_2,\dots, n_b\}\geqq 0$; $\gamma(n_1, n_2,\dots, n_b)$ avec $\max\{n_1+1, n_2,\dots, n_{b-1}, n_b+1\}\geqq 0$; $\gamma'(n_1, n_2,\dots, n_b)$; $\delta\left(n_0\,\middle|\,\frac{q_1}{l_1}, \frac{q_2}{l_2}, \frac{q_3}{l_3}\right)$ avec $n_0\geqq 0$; $\delta\left(-1\,\middle|\,\frac{q_1}{l_1}, \frac{q_2}{l_2}, \frac{q_3}{l_3}\right)$ avec $n_{i,1}=2$ pour au moins deux $i\in\{1, 2, 3\}$; $\delta\left(-1\,\middle|\,\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et $\varepsilon(n_1, n_2,\dots, n_b)$. D'autre part, d'après le Théorème 56 de Kodaira [12], si une surface complexe non-singulière et compacte contient deux courbes exceptionnelles de première espèce qui intersectent l'une l'autre, elle est réglée. Donc, S est réglée pour les cas suivants également: $\beta(3)$, $\delta\left(-1\,\middle|\,\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $\delta\left(-1\,\middle|\,\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$. Considérons enfin une surface complexe non-singulière et compacte S_1 contenant une courbe analytique irréductible C_1 avec $(C_1 \cdot C_1) = n > 0$ et $\pi(C_1)$ (le genre virtuel de C_1)$=1$; alors, d'après K. Kodaira [11] (Th. 3.3), S est algébrique; d'autre part, K_1 étant le diviseur canonique de S_1, $\pi(C_1) = \frac{(K_1 \cdot C_1) + (C_1^2)}{2} + 1 = 1$ entraine $(K_1 \cdot C_1) < 0$, de sorte que $P_m = \dim H^0(S_1, mK_1) = 0$ pour tout $m > 0$; donc, d'après F. Enriques (cf. I. R. Šafarevič [23], Chap. IV), S est une surface réglée. Par conséquent, si C est de l'un des types $\alpha(n)$, $\beta(n)$, $\delta\left(-1 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6-n}\right)$ avec $n > 0$, S est réglée.(*) Nous obtenons ainsi le

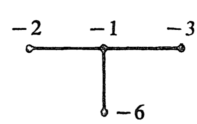
Corollaire 2. *Dans la situation du Théorème* 1, *si S est une surface compacte non-réglée, alors C est de l'un des dix types suivants* (*Tableau* 3):

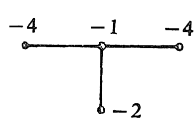
Tableau 3.

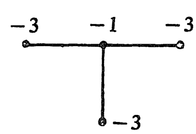
(1) $\alpha(0)$; (2) $\beta(0)$;

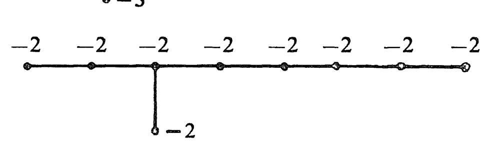
(3) $\beta(-2, -2, \dots, -2) =$  (le nombre des points$\geqq 2$);

(4) $\gamma(-2, -2, \dots, -2) =$  ;

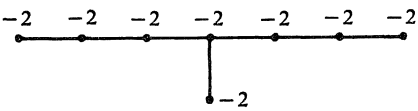
(5) $\delta\left(-1 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) =$  ;

(6) $\delta\left(-1 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) =$  ;

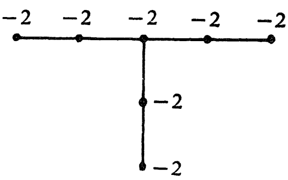
(7) $\delta\left(-1 \middle| \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) =$  ;

(8) $\delta\left(-2 \middle| \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right) =$  ;

(*) Nous devons cet imposibilité de $\alpha(n)$, $\beta(n)$, $\delta\left(-1 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6-n}\right)$ avec $n > 0$ dans le Tableau 3 ci-dessous au Referee du présent article, que nous voudrions remercier ici.

(9) $\delta\left(-2\,\middle|\,\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)=$ 

;

(10) $\delta\left(-2\,\middle|\,\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=$ 

Remarque. — Si S est une surface compacte réglée non-rationnelle (c'est-à-dire qu'il existe une application holomorphe propre $\pi: S \to R$ de S sur une courbe compacte R de genre $\geqq 1$ dont les fibres génériques $\pi^{-1}(t)$ sont isomorphes à la droite projective $\boldsymbol{P}^1$), alors $C=f(0;\, S)$ est ou bien un fibre de π, ou bien R est de genre 1 et C de type $\alpha(n)$.

Chapitre III. — Singularités Essentielles des Isomorphismes Analytiques le Long d'une Courbe Compacte

8. $\boldsymbol{\varphi_{ess}(\Sigma)}$. Soient S, S' deux surfaces complexes non-singulières et E, E' deux courbes analytiques *compactes* et *connexes* sur S, S' respectivement. Soit $\varphi: S-E \to S'-E'$ une application holomorphe non-dégénérée. Pour chaque sous-ensemble fermé K de E, nous poserons

$$\varphi(K;\, S') = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(K)} \overline{\varphi(U-E)},$$

où $\mathfrak{U}(K)$ est un système fondamental de voisinages de K et $\overline{\varphi(U-E)}$ l'adhérence dans S' de $\varphi(U-E)$. *Nous supposerons dans ce qui suit que*:

$$(1)\quad \varphi(E;\, S') \subset E' \qquad \text{et} \qquad (2)\quad \varphi(E;\, S') \neq \text{vide}.$$

Comme on le vérifie aisément, il existe une paire de voisinages $V(\Subset S)$, $V'(\Subset S')$ de E, E' respectivement tels que $\varphi_{|V-E}: V-E \to V'-E'$ soit propre et surjective. On a, par conséquent, $\varphi(E;\, S') = E'$.

On dira que φ est *méromorphe* à un point P de E, s'il existe un voisinage $U=U(P)$ de P tel que l'adhérence $\overline{G_U}$ dans $U \times S'$ du graphique

$$G_U = \{(x,\, \varphi(x)) \mid x \in U-E\}$$

soit un sous-ensemble analytique de $U \times S'$. Au cas contraire, on dira que P

est un *point singulier essentiel* de φ (par rapport à S'). *L'ensemble de ces points singuliers essentiels de φ sur E sera désigné par Σ.*

D'après l'hypothèse (1), le graphique $G=\{(x, \varphi(x)) \mid x \in S-E\}$ de φ est un sous-ensemble analytique de $S \times S' - E \times E'$ de dimension pure 2. Comme $E \times E'$ est un sous-ensemble analytique de $S \times S'$ de dimension pure 2, il en résulte que, d'après le théorème de Remmert-Stein cité au nº 3, l'ensemble $\mathfrak{A}$ des points (x, y) de $E \times E'$ tels que l'adhérence $\bar{G}$ de G dans $S \times S'$ ne soit pas analytique[19] en (x, y) est une réunion (finie) de composantes irréductibles de $E \times E'$. Par définition, la projection sur S de $\mathfrak{A}$ coïncide avec Σ. *Nous désignerons par $\Sigma' = \varphi_{ess}(\Sigma)$ la projection sur S' de $\mathfrak{A}$* (et l'appellerons *l'ensemble limite essentiel de φ dans S' le long de Σ*).

Soient $\{E_i\}_{i \in I}$ (resp. $\{E'_j\}_{j \in J}$) les composnantes irréductibles de E (resp. de E'). Alors, il est clair que les composantes irréductibles de $E \times E'$ sont $\{E_i \times E'_j\}_{(i,j) \in I \times J}$. On a donc, la

Proposition 6. *Σ (resp. $\varphi_{ess}(\Sigma)$) est une courbe analytique compacte dans S (resp. S') composée de composantes irréductibles de E (resp. de E').*

Pour chaque composante irréductible Σ_i ($i \in I_0 \subset I$) de Σ, nous désignerons la réunion $\bigcup_{\Sigma_i \times E'_j \subset \mathfrak{A}} E'_j$ $(\subset \Sigma')$ par $\varphi_{ess}(\Sigma_i)$. On a

(3) $\quad \Sigma' = \varphi_{ess}(\Sigma) = \bigcup_{i \in I_0} \varphi_{ess}(\Sigma_i)\,.$

Lemme 8. *Soit $i \in I_0$; Γ: $|z|<1$, $|w|<1$ un voisinage de coordonnées locales z, w de S en un point régulier a de Σ_i tel que $\Gamma \cap E = \{P \in \Gamma \mid z(P)=0\}$ $(\subset \Sigma_i)$. Considérons les applications holomorphes f_i: $\Delta^* \to S'$ définies par*

$$f_i(z) = \varphi(z, w), \quad (0<|z|<1;\ w\text{: fixe dans } |w|<1),$$

en identifiant (z, w) avec le point de Γ de coordonnées z, w. Alors, pour presque tout[20] *w dans $|w|<1$, on a*

$$f_i(0; S') = \varphi_{ess}(\Sigma_i)\,.$$

En effet, prenons un point régulier b_j de E' sur chaque composante irréductible Σ'_j de $\varphi_{ess}(\Sigma_i)$, et un voisinage Γ'_j: $|z_j|<2$, $|w_j|<2$ de coordonnées locales z_j, w_j de S' en b_j de façon que $\Gamma'_j \cap E' = \{Q \in \Gamma'_j \mid z_j(Q)=0\}$. Posons

(19) On dira qu'un fermé $\bar{G}$ d'une variété analytique complexe M est *analytique en un point* $P \in M$, s'il existe un voisinage $U=U(P)$ de P tel que $\bar{G} \cap U$ soit un sous-ensemble analytique de U.

(20) Le sens du mot «presque tout» sera clarifié dans la démonstration.

$\Gamma_j = \{Q \in \Gamma'_j \,|\, |z_j(Q)| < 1,\ |w_j(Q)| < 1\}$. Considérons dans le disque unité $\Delta_{(w)}$: $|w| < 1$ du plan w l'ensemble

$$K_j(n) = \left\{ w \in \Delta_{(w)} \,\middle|\, \varphi(z, w) \notin \Gamma_j \quad \text{pour} \quad 0 < |z| \leqq \frac{1}{n} \right\}$$

pour chaque entier $n \geqq 2$. Ce sont fermés dans $\Delta_{(w)}$. Nous allons montrer que la réunion $K_j = \bigcup_{n=2}^{\infty} K_j(n)$ est de capacité logarithmique nulle. En effet, si au contraire $\mathrm{Cap}\,(K_j) > 0$, on aurait un entier $N \geqq 2$ tel que $\mathrm{Cap}\,(K_j(N)) > 0$. Soit w_0 un point de $K_j(N)$ tel que $\mathrm{Cap}\,(K_j(N) \cap \varepsilon) > 0$ pour tout voisinage ε de w_0. Comme $w_0 \in K_j(N)$, on a

$$(\{P \in \Gamma \,|\, |z(P)| \leqq 1/N,\ w(P) = w_0\} \times \Gamma_j) \cap G = \emptyset,$$

où G est le graphique de φ dans $S \times S'$. G étant fermé dans $S \times S' - E \times E'$, on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\text{(5)} \qquad \left\{ (P, Q) \in \Gamma \times \Gamma_j \,\middle|\, \begin{array}{l} \max\,(|z(P)|,\ |z_j(Q)|) = \dfrac{1}{N}, \\ \max\,(|w(P) - w_0|,\ |w_j(Q)|) < \varepsilon \end{array} \right\} \cap G = \emptyset.$$

Posons $U = \{P \in \Gamma \,|\, |z(P)| < 1/N,\ |w(P) - w_0| < \varepsilon\}$, $U_j = \{Q \in \Gamma_j \,|\, |z_j(Q)| < 1/N,\ |w_j(Q)| < \varepsilon\}$. Comme on a pris $\Sigma'_j \subset \varphi_{ess}(\Sigma_i)$, il existe un point (P_j, Q_j) de G dans $U \times U_j$. L'image réciproque R_j dans U de $\{Q \in U_j \,|\, w_j(Q) = w_j(Q_j)\}$ par $\varphi_{|U}$ est donc, compte tenu (5), un sous-ensemble analytique de U de dimension pure un (courbe analytique). D'après (5) de nouveau, on a $\bar{R}_j \cap \{P \in \bar{U} \,|\, |z(P)| = 1/N\} = \emptyset$; donc

$$\text{(6)} \quad |w(P) - w_0| = 0 \quad \text{ou bien} \quad z(P) = 0 \quad \text{pour} \quad P \in \partial R_j.$$

Prenons maintenant un sous-ensemble compact κ de $K_j(N) \cap [|w - w_0| < \varepsilon]$ de capacité logarithmique non nulle, et soit $h(w)$ la solution du problème de Dirichlet

$$h(w) = \begin{cases} 0, & |w - w_0| = \varepsilon; \\ 1, & w \in \kappa, \end{cases}$$

dans D; $h(w)$ est une fonction harmonique et $0 < h(w) < 1$ dans $D - \kappa$. Or, puisque $w(x) \notin \kappa$ pour $x \in R_j$, $h(w(x))$ est une fonction harmonique bornée sur (la normalisée de) R_j. D'autre part, on a une autre fonction harmonique *négative* $\log |z(x)|$ $(< -\log N)$ sur R_j, vérifiant (d'après (6)):

$$\lim_{\substack{x \to P \\ x \in R_j}} h(w(x)) = 0 \quad \text{pour tout} \quad P \in \partial R_j \quad \text{tel que} \quad \log |z(P)| \neq -\infty.$$

On a donc, d'après le théorème de Riesz, $h(w(x)) \equiv 0$ sur R_j, ce qui est absurde, puisque pour le point $P_j \in R_j$ on a $w(P_j) \in D$ et $h(w(P_j)) > 0$. Donc, $\mathrm{Cap}(K_j) = 0$.

Le nombre des composantes irréductibles Σ'_j de $\varphi_{ess}(\Sigma_i)$ étant fini, $K = \bigcup_{\Sigma'_j} K_j$ est aussi de capacité logarithmique nulle. Prenons un point quelconque w_i de $\Delta_{(w)} - K$, et posons $f_i(z) = (z, w_i)$, $0 < |z| < 1$. Alors $f_i(0; S')$ contient tous les b_j; par suite, d'après la Proposition 3, on a $\varphi_{ess}(\Sigma_i) \subset f_i(0; S')$. L'inclusion de sens opposée étant évidente, on a donc $\varphi_{ess}(\Sigma_i) = f_i(0; S')$. C.Q.F.D.

Ce lemme nous permet d'appliquer le Corollaire 1 du Théorème 5 à $\varphi_{ess}(\Sigma)$. Nous obtenons ainsi le

Théorème 6. *Soient S, S' deux surfaces complexes non-singulières; E, E' deux courbes analytiques compactes et connexes sur S, S' respectivement, n'ayant, toues les deux, que des points doubles ordinaires comme points singuliers et minimales au sens dit au début de* n° 7, *et soit φ: $S - E \to S' - E'$ une application holomorphe non-dégénérée de $S - E$ dans $S' - E'$ vérifiant: $\varphi(E; S') \subset E'$ et Σ (= l'ensemble des points singuliers essentiels de φ sur E par rapport à S') $\neq$ vide. Alors,* (i) *$\Sigma' = \varphi_{ess}(\Sigma)$ est de l'un des types* (α) *à* (ε) *du Tableau* 1 *du* n° 7 *(poser $C = \Sigma'$);* (ii) *si $E' \neq \Sigma'$, Σ' est alors de type* (γ), (γ') *ou* (ε), *les lieux d'intersection de $\overline{E' - \Sigma'}$ avec Σ' sont comme dans le Tableau* 2 (n° 7, *poser $C = \Sigma'$, $E_* = E' - \Sigma'$*). (iii) *Si de plus φ est un isomorphisme analytique de $S - E$ sur $S' - E'$, on a les mêmes assertions que* (i) *et* (ii) *ci-dessus pour (Σ, E) à la place de (Σ', E').* (Remarque: si ψ est l'application inverse de φ, on a $\Sigma = \psi_{ess}(\Sigma')$).

9. Rapport avec la dimension de Kodaira logarithmique. Considérons le complément $V = S - C$ d'une courbe analytique compacte C dans une surface complexe non-singulière et compacte S. S. Iitaka [8] a introduit un invariant $\bar{\kappa}(V)$ (logarithmic Kodaira dimension) de V comme suit(21): Après un nombre fini d'éclatements successifs de points singuliers de C, on peut supposer que les points singuliers de C sont des points doubles ordinaires (F. Hirzebruch [6]). Soient K_S le fibré canonique en droites complexes de S et $[C]$ le fibré en droites complexes défini par le diviseur C. On prend, pour chaque entiers $m > 0$, une base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ $(N = N(m))$ de l'espace vectoriel complexe $H^0(S, \mathcal{O}(mK_S + m[C]))$

---

(21) Voir aussi F. Sakai [24].

des sections holomorphes du fibré $m(K_S+[C])$. Considérant l'application méromorphe

$$\Phi_m:\ S\ni P\longmapsto(\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\dots,\ \varphi_N(P))\in \boldsymbol{P}^{N-1},$$

on définit $\bar{\kappa}(V)$ par

$$\bar{\kappa}(V)=\begin{cases}\max\{\dim \Phi_m(S)\mid N(m)>0\}, & \text{s'il existe } m>0 \text{ tel que } N(m)>0;\\ -\infty, & \text{si } N(m)=0 \text{ pour tout } m>0.\end{cases}$$

Avec S. Iitaka [8], on dira que V est *de type hyperbolique* (ou *de type général*), si $\bar{\kappa}(V)=2$. (Remarque: La condition $\bar{\kappa}(V)=2$ ne dépend que de V ([8]).)

Dans ce qui suit, on supposera que les points singuliers de C sont seulement des points doubles ordinaires et que C soit minimale dans cette catégorie (cf. le début du n° 7). Considérons une application holomorphe f: $\Delta^*\to V$ du disque pointé Δ^*: $0<|z|<1$ dans V telle que $f(0;\ V)=\emptyset$, c'est-à-dire

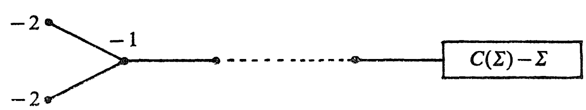
$$f(0;\ S)\subset C,$$

et *supposons que* $\Sigma=f(0;\ S)$ *contienne au moins deux points.* Σ est alors une courbe analytique compacte et connexe composée de composantes irréductibles de C, et d'après le Théorème 5, appartient au Tableau 1 ou bien au Tableau 2 suivant que $\Sigma=C(\Sigma)$ ou non, où $C(\Sigma)$ est la composante connexe de C contenant Σ.

Proposition 7. *Si* $\Sigma\neq C(\Sigma)$, *il existe alors une application holomorphe* π: $V\to R$ *de* V *sur une courbe algébrique non-singulière et non-compacte* R *vérifiant les deux conditions suivantes*: 1° π *se prolonge en une application méromorphe* $\bar{\pi}$: $S\to\bar{R}$ *de* S *sur le compactifié* $\bar{R}$ *de* R $(\bar{\pi}_{|V}=\pi)$; 2° *les fibres régulières de* π *sont isomorphes à* $\boldsymbol{C}$ *ou bien à* $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}-\{0\}$. (*En particulier, on a* $\bar{\kappa}(V)\leqq 1$, *cf.* [8]).

En effet, Σ appartenant au Tableau 2, considérons d'abord le cas où Σ est de type $\varepsilon(n_1,\ n_2,\dots,\ n_b)$. Comme $\max\{n_1,\ n_2,\dots,\ n_b\}\geqq 0$, on a une composante irréductible Σ_i (non-singulière et rationnelle) de Σ telle que $(\Sigma_i^2)=n_i\geqq 0$. Comme $C(\Sigma)\neq\Sigma$, il existe au moins un point singulier de C sur Σ_i. En éclatant n_i fois successivement ce point P, on peut supposer $(\Sigma_i^2)=0$. S est donc, en vertu du théorème de Kodaira-Spencer [13] et du Théorème 5.1 de Kodaira [11], une surface algébrique et il existe une application holomorphe π: $S\to\bar{R}$ de S sur une courbe compacte $\bar{R}$ telle que Σ_i soit une fibre régulière de $\bar{\pi}$. Comme il n'y a qu'un ou deux points singuliers de C sur Σ_i qui sont des points doubles ordinaires, $F_t = \bar{\pi}^{-1}(t) \cap V$ sont isomorphes à $\boldsymbol{C}$ ou à $\boldsymbol{C}^*$ pour $t \in R$ voisin de $t_0 = \bar{\pi}(\Sigma_i)$. En posant $R = \bar{\pi}(V)$, $\pi = \bar{\pi}_{|V}$: $V \to R$, on obtient l'application voulue.

Il en est de même pour le cas où Σ est de type $\gamma'(n_1, n_2, \dots, n_b)$, si max $\{n_2, n_3, \dots, n_b\} \geqq 0$. Considérons donc le cas où $(\Sigma_1^2) = n_1 \geqq -1$. En éclatant $n_1 + 1$ fois succesivement un point singulier de C sur Σ_1, on peut faire $n_1 = -1$, de sorte que le diagramme associé à Σ soit:



Puis, en contractant deux composantes correspondant à la partie 

de ce diagramme, on obtient 

; c'est-à-dire que, après la modification de (S, C) de cette manière, on a une composante irréductible (non-singulière et rationnelle) Σ_0 de Σ telle que $(\Sigma_0^2) = 0$ qui intersecte $C' = \overline{C - \Sigma_0}$ en un seul point tangentiellement avec le nombre d'intersection $(\Sigma_0 \cdot C') = 2$. De même qu'au cas précédent, S (ainsi modifiée) admet une structure de surface réglée $\bar{\pi}$: $S \to \bar{R}$ sur une courbe compacte $\bar{R}$ contenant Σ_0 comme une fibre régulière. Puisque $(\Sigma_0 \cdot C') = 2$, les fibres régulières de $\pi = \bar{\pi}_{|V}$ sont isomorphes à $\boldsymbol{C}^*$; π est donc l'application voulue, ce qui achève la démonstration de la Proposition 7.

Proposition 8 (22). *Si* $\Sigma = C(\Sigma)$, *on a* $\bar{\kappa}(V) \leqq 1$.

En effet, d'après le Théorème 5, Σ appartient au Tableau 1. D'abord, si Σ est de type (ε), (γ'), $\gamma(n_1, n_2, \dots, n_b)$ avec max $\{n_1 + 1, n_2, \dots, n_{b-1}, n_b + 1\} \geqq 0$ ou $\beta(n_1, n_2, \dots, n_b)$ avec $b \geqq 2$ et max $\{n_1, n_2, \dots, n_b\} \geqq 0$, il existe alors, de même qu'on l'a vu dans la Proposition 7, une application méromorphe π de S sur une courbe R telle que $\pi_{|V}$ soit holomorphe et que les fibres génériques de $\pi_{|V}$ soient isomorphes à $\boldsymbol{C}$ ou bien à $\boldsymbol{C}^*$, de sorte que $\bar{\kappa}(V) \leqq \dim R = 1$ (cf. [8]). Il nous reste donc qu'à examiner les cas où Σ est de types suivants:

(i) $\alpha(n)$, $\beta(n)$, $\beta(-2, -2, \dots, -2)$ $(b \geqq 2)$;

(ii) $\gamma(-2, -2, \dots, -2)$;

(iii) $\delta\left(n_0 \,\middle|\, \frac{q_1}{l_1}, \frac{q_2}{l_2}, \frac{q_3}{l_3}\right)$.

(22) Nous voudrions remercier ici le Referee et M. Ishida qui nous ont indiqué l'erreur que contenait la preuve de cette Proposition à la première rédaction du présent article.

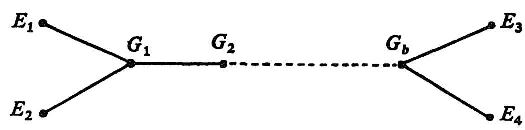
Supposons qu'il existe un entier $m>0$ tel que le système linéaire $|m(K_S+C)|$ soit de dimension $\geqq 1$. Ecrivons chaque $D_\lambda \in |m(K_S+[C])|$ comme suit:

$$D_\lambda = F_\lambda + \sum_i a_i \quad \text{(composante irréductible de } \Sigma\text{)}$$

où a_i sont des entiers $\geqq 0$ et F_λ (diviseur effectif) n'a pas de composantes communes avec Σ, et considérons le diviseur effectif $\tilde{\Sigma}$ défini comme suit:

— dans le cas (i), on pose $\tilde{\Sigma}=\Sigma$;

— dans le cas (ii), $\tilde{\Sigma}=\sum_{i=1}^{4} E_i + 2\sum_{j=1}^{b} G_j$, $\{E_i\}$, $\{G_j\}$ étant les composantes irréductibles de Σ indiquées dans le diagramme suivant de Σ:



;

— dans le cas (iii), $\{G_0, G_{ij};\ i=1, 2, 3;\ j=1, 2, \dots, r_i\}$ étant les composantes irréductibles de Σ qui correspondent, dans le diagramme de Σ donné dans le Tableau 1 (n° 7) pour le type (δ), aux points avec les poids n_0, $-n_{ij}$ respectivement (de sorte que $(G_0^2)=n_0$, $(G_{ij}^2)=-n_{ij}$), on pose $\tilde{\Sigma}=m_0G_0+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{r_i} k_i m_{ij}\cdot G_{ij}$, où m_0 est un multiple commun de l_1, l_2, l_3, $k_i=m_0/l_i$ et m_{ij} sont les entiers >0 définis par l'argorithme suivant:

$$(\text{☆})\begin{cases} m_{i,r_i}=1,\ m_{i,r_i-1}=n_{i,r_i}\cdot m_{i,r_i} \\ m_{i,r_i-2}=n_{i,r_i-1}\cdot m_{i,r_i-1}-m_{i,r_i} \\ \cdots \\ m_{i,0}=n_{i,1}\cdot m_{i,1}-m_{i,2} \quad (m_{i,0}=l_i,\ m_{i,1}=q_i). \end{cases}$$

$$\left(\text{Rappeler } \frac{l_i}{q_i}=n_{i,1}-\cfrac{1}{n_{i,2}-\cfrac{}{\ddots\, -\cfrac{1}{n_{i,r_i}}}}\right).$$

Nous allons montrer $F_\lambda\cdot\tilde{\Sigma}=0$. Voyons d'abord $(K_S+\Sigma)\cdot\tilde{\Sigma}\leqq 0$; ce qui peut être vérifié aisément pour le cas (i) et (ii) (cf. [11], I, p. 119); pour le cas (iii), on a

$$\begin{aligned}(K_S+\Sigma)\cdot\tilde{\Sigma} &= m_0(K_S+G_0)G_0+\sum_{i,j}k_im_{ij}(K_S+G_{ij})G_{ij} \\ &\quad + m_0\sum_{i,j}G_{ij}\cdot G_0+\sum_{i,j}k_im_{ij}\Big(G_0\cdot G_{ij}+\sum_{(\lambda,\mu)\neq(i,j)}G_{\lambda\mu}\cdot G_{ij}\Big) \\ &= m_0-\sum_{i=1}^{3}k_i = m_0\Big(1-\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{l_i}\Big)\leqq 0\,.\end{aligned}$$

On a donc $(K_S+C)\cdot\tilde{\Sigma}\leqq 0$, d'où

(a) $\quad D_\lambda\cdot\tilde{\Sigma}\leqq 0$.

Or, pour toute composante irréductible G_* de Σ, on a

(b) $\quad G_*\cdot\tilde{\Sigma}\geqq 0$.

En effet, il est évident pour les cas (i) et (ii); plaçons-nous donc au cas (iii): d'abord, $G_{i,j}\cdot\tilde{\Sigma}=0$ se résulte immédiatement de l'argorithme (☆) ci-dessus; d'autre part, comme Σ n'est pas exceptionnelle, le déterminant de la matrice $(-(\Sigma_\lambda\cdot\Sigma_\mu))$, $\{\Sigma_\lambda\}$ étant les composantes irréductibles de Σ, égale à

$$-a\cdot\left(n_0+\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{l_i}\right),\quad \text{avec}\quad a>0,$$

est $\leqq 0$; on a donc,

$$G_0\cdot\tilde{\Sigma}=m_0n_0+\sum_{i=j}^{3}k_iq_i=m_0\left(n_0+\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{l_i}\right)\geqq 0.$$

D'après (a) et (b), on obtient $F_\lambda\cdot\tilde{\Sigma}\leqq 0$ (de sorte que $F_\lambda\cdot\tilde{\Sigma}=0$).

Maintenant, d'après l'hypothèse $\dim|m(K_S+[C])|\geqq 1$, il existe au moins deux sections holomorphes φ_0, φ_1, linéairement indépendantes, de $m(K_S+[C])$ sur S, qui donnent une fonction méromorphe

$$\Phi:\quad S\ni P\longmapsto(\varphi_0(P),\ \varphi_1(P))\in\boldsymbol{P}^1$$

non-constante sur S. Alors, pour presque tout $t\in\boldsymbol{P}^1$, la fibre $\Phi^{-1}(t)$ est composée de composantes du diviseur F_λ associé à $D_\lambda\in|m(K_S+[C])|$ défini par $\lambda_1\varphi_0+\lambda_0\varphi_1=0$, $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1)$ étant les coordonnées homogènes de $t\in\boldsymbol{P}^1$. Par suite, d'après $F_\lambda\cdot\tilde{\Sigma}=0$, on a $\Phi^{-1}(t)\cap\Sigma=\emptyset$ pour presque tout $t\in\boldsymbol{P}^1$. Compte tenu du fait que Σ n'est pas exceptionnelle, Φ n'a pas de point d'indétermination et Σ coïncide avec une composante connexe d'une fibre de Φ. Par conséquent, la matrice $((\Sigma_i\cdot\Sigma_j))$ formée des nombres d'intersection des composantes irréductibles $\{\Sigma_i\}$ de Σ est negative semi-définie et son déterminant $|(\Sigma_i\cdot\Sigma_j)|$ est nulle. On en déduit, par un calcule facile, que Σ appartient au Tableau 3 du n° 7. Donc, les composantes connexes des fibres $\Phi^{-1}(t)$ voisines de Σ sont elliptiques; c'est-à-dire, S est une surface elliptique et Σ est l'une de ses fibres (cf. K. Kodaira [11], II); on a donc, $\bar{\kappa}(V)\leqq 1$ (cf. [8], Theorem 4). C.Q.F.D.

De ces deux Propositions 7 et 8, on obtient le

Théorème 7. *Soit S une surface complexe non-singulière et compacte, C une courbe analytique (compacte) sur S. Supposons que $V=S-C$ est de type général (c'est-à-dire, $\bar{\kappa}(V)=2$). Alors, toute application holomorphe*

f: $\Delta^* \to V$ du disque pointé Δ^*: $0<|z|<1$ dans V telle que $f(0; V)$ soit vide s'étand en une application holomorphe $\bar{f}$ du disque Δ: $|z|<1$ dans S.

Corollaire (Un cas spécial du théorème de F. Sakai [24]). *Soient S, V les mêmes que dans le Théorème 7 ci-dessus. Alors, tout automorphisme analytique de V est la restriction sur V d'une transformation biméromorphe de S.*

Bibliographie

[1] Brieskorn, E., Rationale Singularitäten komplexer Flächen, *Inventiones math.*, **4** (1968), 336–358.

[2] Brody, R., Compact manifolds and hyperbolicity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **235** (1978), 213–219.

[3] Forster O. und Ramspott, K. J., Analytische Modulgarben und Endromisbündel, *Inventiones math.*, **2** (1966), 145–170.

[4] Gunning R. C. and Narasimhan, R., Immersion of open Riemann surfaces, *Math. Ann.*, **174** (1967), 103–108.

[5] Grauert, H., Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, *Math. Ann.*, **146** (1962), 331–368.

[6] Hirzebruch, F., Über vierdimensionale Riemannsche Flächen meherdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, *Math. Ann.*, **126** (1953), 1–22.

[7] Hopf, H., Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten, *Rend. Mat. e Appl. Serie V*, **10** (1951), 161–182.

[8] Iitaka, S., On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties, *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, ed. by W. L. Baily and T. Shioda, Iwanami Shoten (1976), 175–189.

[9] Kizuka, T., Analytic automorphisms and algebraic automorphism of C^2, *Tôhoku Math. J.*, **31** (1979), 553–565.

[10] Kobayashi, S., *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Monographs in Pure and Applied Mathematics n° 2, Marcel Dekker, New York, 1970.

[11] Kodaira, K., On compact complex analytic surfaces I, II, *Ann. Math.*, **71** (1960), 111–152, **77** (1963), 563–626.

[12] ———, On the structure of compact complex analytic surfaces IV, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1048–1066.

[13] Kodaira K. and Spencer, D. C., A theorem of completeness of characteristic systems of complete continuous systems, *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 477–500.

[14] Nishino, T., Sur les ensembles pseudoconcaves, *J. Math. Kyoto Univ.*, **1** (1962), 225–245.

[15] ———, Prolongements analytiques au sens de Riemann, *Bull. Soc. Math. France*, **107** (1979), 97–112.

[16] Noshiro, K., *Cluster sets*, Ergebnisse der Mathematik und ihren Grenzgebiete (neue Folge) **28**, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.

[17] Ohtsuka, M., On the behavior of an analytic function about an isolated boundary point, *Nagoya Math. J.*, **4** (1952), 103–108.

[18] ———, A theorem on cluster sets of an analytic mapping into a Riemann surface, *Annales Acad. Sci. Fenicae Ser. A. I. Math.*, **2** (1976), 375–381.

[19] Oka, K., Note sur les familles de fonctions multiformes etc., *J. Sci. Hiroshima Univ.*, (1934), 93–98.

[20] ———, Sur les fonctions analytiques de plusieures variables complexes IX, Domaines finis sans point critique intérieur, *Japanese J. Math.*, **27** (1953), 97–155.

[21] Remmert R. und Stein, K., Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, *Math. Ann.*, **126** (1953), 263–306.

[22] Royden, H. L., Remarks on the Kobayashi metric, *Lecture Notes in Math.*, **185**, Springer-Verlag, 1971, 125–137.

[23] Šafarevič, R. I., *Algebraic surfaces,* Proceedings of the Steklov Inst. of Math., **75** 1965. (Translation, Amer. Math. Soc. 1967.)

[24] Sakai, F., Kodaira dimensions of complements of divisors, le même libre que l'article de S. Iitaka [8], (1976), 239–257.

[25] Sario L. and Noshiro, K., *Value distribution theory*, Chap. VI, The Univ. series in Higher Math. D. van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, etc., 1966.

[26] Siu, Y.-T., Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood, *Inventiones math.*, **38** (1976), 89–100.

[27] Suzuki, M., Sur les intégrales premières de certains feuilletages analytiques complexes, *Séminaire François Norguet* 1975–1976, *Lecture Notes in Math.*, **670**, Springer-Verlag, 1978, 53–88.

[28] Thullen, P., Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen in Raume von n komplexen veränderlichen, *Math. Ann.*, **111** (1934), 137–156.