Publ. RIMS, Kyoto Univ.
16 (1980), 393-415

Théorèmes d'Existence et d'Approximation pour les Équations aux Dérivées Partielles Linéaires d'Ordre Infini

Par

Ryuichi ISHIMURA

§1. Introduction

Dans le mémoire précédent [5], on a caractérisé l'homomorphisme continu du faisceau des germes de fonctions holomorphes dans lui-même comme un opérateur différentiel. Rappelons-nous ses résultats. Soient $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$ espace de n variables complexes et $P: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ un homomorphisme de faisceaux. Pour chaque ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$, l'espace $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ des sections de $\mathcal{O}$ au-dessus de Ω muni de la topologie de la convergence compacte sur Ω est un espace de Fréchet. On dira que l'homomorphisme $P: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ est *continu* si pour chaque ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$, l'application induite $P_\Omega: \Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \to \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ est continue. On a démontré d'abord que l'homomorphisme continu $P: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ est un opérateur différentiel $p(z, \partial_z)$ dont l'ordre n'est pas nécessairement fini. Au symbole

$$p(z, \zeta) = \sum_\alpha a_\alpha(z) \zeta^\alpha$$

de l'opérateur différentiel $p(z, \partial_z)$, on associe la forme

$$\tilde{p}(z, \zeta) = \sum_\alpha a_\alpha(z) \zeta^\alpha \alpha!.$$

On a établi les résultats suivants: *Pour que l'homomorphisme P de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ soit continu, il faut et il suffit que P soit un opérateur différentiel sur $\mathbf{C}^n$ dont la forme $\tilde{p}(z, \zeta)$ est holomorphe dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.*

Soient $p(\partial_z)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbf{C}^n$ représenté par un homomorphisme continu P de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ et Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$. On dit que l'ouvert Ω est *pseudo $p(\partial_z)$-convexe* si la condition suivante est

---

Communiqué par S. Matsuura, le 6 juillet, 1978.
* Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Kyushu.

vérifiée: si T est une fonctionnelle analytique sur $\mathbf{C}^n$ telle que la fonctionnelle analytique ${}^tPT$ soit appuyée par Ω, T est appuyée par Ω où ${}^tP$ désigné la transposée de l'opérateur $P: \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \to \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ induite par l'homomorphisme $P: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$.

Dans ce mèmoire, on se propose de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Soient* $p(\partial_z) = \sum_\alpha a_\alpha \partial_z^\alpha$ *un opérateur différentiel non nul à coefficients constants sur* $\mathbf{C}^n$ *représenté par un homomorphisme continu* P *de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathcal{O}$ *et* Ω *un ouvert de type de Runge dans* $\mathbf{C}^n$. *Alors pour que les énoncés suivants* (i) *et* (ii) *soient valables, il faut et il suffit que l'ouvert* Ω *soit pseudo* $p(\partial_z)$*-convexe*:

(i) *Pour toute fonction holomorphe* f *sur* Ω, *il existe* u *fonction holomorphe sur* Ω *tel que l'on ait*:

$$p(\partial_z)u = f$$

dans Ω.

(ii) *Toute solution* u *dans* $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ *de l'équation homogène*

$$p(\partial_z)u = 0$$

est approchée dans $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ *par des exponentielle-polynômes satisfaisant à l'équation homogène.*

On se propose de démontrer que tout ouvert convexe Ω est pseudo $p(\partial_z)$-convexe. C'est une généralisation du théorème 9.4 de Trèves [7] qui traite du cas où $p(\zeta)$ est un polynôme:

Théorème. *Soient* $p(\partial_z) = \sum_\alpha a_\alpha \partial_z^\alpha$ *un opérateur différentiel non nul à coefficients constants sur* $\mathbf{C}^n$ *représenté par un homomorphisme continu* P *de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathcal{O}$ *et* Ω *un ouvert convexe de* $\mathbf{C}^n$. *Alors l'ouvert* Ω *est pseudo* $p(\partial_z)$*-convexe et l'on a donc les énoncés suivants* (i) *et* (ii):

(i) *Pour toute fonction holomorphe* f *sur* Ω, *il existe* u *fonction holomorphe sur* Ω *tel que l'on ait*:

$$p(\partial_z)u = f$$

dans Ω.

(ii) *Toute solution* u *dans* $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ *de l'équation homogène*

$$p(\partial_z)u = 0$$

est approchée dans $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ par des exponentielle-polynômes satisfaisant à l'équation homogène.

§2. Notations et Rappels des Résultats Précédents

Dans ce mémoire on désignera par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$, par $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ l'espace de Fréchet des sections de $\mathcal{O}$ au-dessus d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ muni de la topologie de la convergence compacte sur Ω et par N l'ensemble des entiers positifs. On utilisera les notations suivantes: pour tout $\alpha=(\alpha_j)_{1\leqq j\leqq n}\in N^n$,

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,$$

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!,$$

$$\partial_z^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{z_1}^{\alpha_1}\partial_{z_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{z_n}^{\alpha_n}}$$

et pour tout $\beta=(\beta_j)_{1\leqq j\leqq n}\in N^n$ tel que $\beta\leqq\alpha$,

$$\binom{\alpha}{\beta}=\binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Pour tout $z\in\mathbf{C}^n$ et tout nombre positif r, on désignera par $\Delta_r(z)$, le polydisque de $\mathbf{C}^n$ à centre z et de rayon r. Pour tout compact K de $\mathbf{C}^n$ et toute fonction f sur K, on pose:

$$\|f\|_K=\sup_{z\in K}|f(z)|.$$

Soient E un espace vectoriel topologique et E' son dual topologique. Pour tout sous-espace M de E, on définit M^0 sous-espace de E' par

$$M^0=\{x'\in E' \mid x'(x)=\langle x, x'\rangle=0, \text{ pour tout } x\in M\}.$$

Définition 1. Soit T: $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})\to\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ une application linéaire. On dira que T est un *opérateur différentiel* sur $\mathbf{C}^n$ dont l'ordre n'est pas nécessairement fini si T satisfait la condition suivante: il existe un unique $(a_\alpha)_{\alpha\in N^n}$ famille de fonctions holomorphes a_α sur $\mathbf{C}^n$ tel que pour tout ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et toute fonction holomorphe f sur Ω, on ait:

$$Tf=\sum_\alpha a_\alpha\partial_z^\alpha f$$

dans Ω.

Au *symbole*

$$t(z, \zeta)=\sum_{\alpha} a_{\alpha}(z)\zeta^{\alpha}$$

de l'opérateur différentiel T, on associe la forme

$$\tilde{t}(z, \zeta)=\sum_{\alpha} a_{\alpha}(z)\zeta^{\alpha}\alpha!.$$

Pour touts α et β de N^n, on utilisera la notation suivante:

$$t_{(\beta)}^{(\alpha)}(z, \zeta)=\partial_z^{\beta}\partial_{\zeta}^{\alpha}t(z, \zeta).$$

Soit $P: \mathcal{O}\rightarrow\mathcal{O}$ un homomorphisme de faisceaux. On dit que l'homomorphisme P est *continu* si pour tout ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$, l'application linéaire induite $P_{\Omega}: \Gamma(\Omega, \mathcal{O})\rightarrow\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ est continue. Dans le mémoire précédent [5], on a établi le critère suivant:

Critère 1. *Soit P un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$. Alors P est un opérateur différentiel sur $\mathbf{C}^n$ et la série $\tilde{p}(z, \zeta)$ associée à P est holomorphe dans $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n$. Réciproquement, soit $P=\sum_{\alpha} a_{\alpha}(z)\partial_z^{\alpha}$ un opérateur différentiel sur $\mathbf{C}^n$ tel que la serie $\tilde{p}(z, \zeta)=\sum_{\alpha} a_{\alpha}(z)\zeta^{\alpha}\alpha!$ associée à P soit holomorphe dans $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n$. Alors P définit un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$.*

§3. Rappels des Résultats de Trèves

D'après Trèves [8], on résumera les criterès des epimorphismes. Soient E_0, F_0, E et F quatre espaces localement convexes séparés et $u_0: E_0\rightarrow F_0$, ρ: $E_0\rightarrow E$ et $\sigma: F_0\rightarrow F$ trois applications linéaires continues. On considérera le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{\rho} & E \\ {\scriptstyle u_0}\downarrow & & \\ F_0 & \xrightarrow{\sigma} & F. \end{array} \tag{1}$$

Définition 2. On dira que l'application $u_0: E_0\rightarrow F_0$ est *essentiellement univalente* par rapport au couple (ρ, σ) si u_0 satisfait à la condition suivante: pour tout filtre $\mathfrak{F}$ dans E_0 tel que l'image $\rho(\mathfrak{F})$ converge dans E à 0 et que l'image $\sigma\circ u_0(\mathfrak{F})$ converge dans F à y point de F, on a: $y=0$.

On définit G_0 sous-espace de l'espace vectoriel produit $E\times F$ comme suite:

$$G_0 = \{(\rho(x_0),\ \sigma\circ u_0(x_0)) \mid x_0 \in E_0\}.$$

Soient G l'adhérence de G_0 dans $E\times F$ et $\pi_1: E\times F\to E$ et $\pi_2: E\times F\to F$ les projections. On a le lemme suivant:

Lemme. *Pour que l'application $u_0: E_0\to F_0$ soit essentiellement univalente, il faut et il suffit que la restriction $\pi_{1|G}$ de π_1 à G soit injective.*

D'après le lemme précédent, si l'application $u_0: E_0\to F_0$ est essentiellement univalente, la restriction $\pi_{1|G}: G\to\tilde{E}_0$ est bijective où $\tilde{E}_0$ est l'image de $\pi_{1|G}$ munie de la topologie induite par l'espace E. Soit $\tilde{u}_0: \tilde{E}_0\to F$ le composé de l'application réciproque $(\pi_{1|G})^{-1}$ et la projection π_2. On appellera l'application $\tilde{u}_0$ *l'extension canonique* de u_0 par rapport au couple (ρ, σ).

Définition 3. Soient l'application $u_0: E_0\to F_0$ essentiellement univalente et $\tilde{u}_0: \tilde{E}_0\to F$ son extension canonique. On dit que $\tilde{u}_0$ a *la properiété d'approximation homogène* si l'espace $\rho(\operatorname{Ker} u_0)$ est dense dans $\operatorname{Ker}\tilde{u}_0$ sous-espace de E.

Dans la situation précédente, on a deux critères suivants:

Critère 2 (*le corollaire* 1 *du théorème* 17.2 *de Trèves* [8]). *Soit l'application $u_0: E_0\to F_0$ essentiellement univalente. Supposons que E et F sont espaces de Fréchet, que la transposée ${}^tu_0: F_0'\to E_0'$ de u_0 est injective et que l'on a: $\operatorname{Im}{}^tu_0 = (\operatorname{Ker} u_0)^0$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *L'extension canonique $\tilde{u}_0$ de u_0 est un epimorphisme de $\tilde{E}_0$ sur F, ayant la propriété d'approximation homogène.*

(b) *L'espace $\operatorname{Im}\sigma$ est dense dans F et pour tout $y_0'\in F_0'$ tel que ${}^tu_0(y_0')\in \operatorname{Im}{}^t\rho$, on a: $y_0'\in\operatorname{Im}{}^t\sigma$.*

Critère 3 (*le corollaire* 3 *du théorème* 17.2 *de Trèves* [8]). *Soit l'application $u_0: E_0\to F_0$ essentiellement univalente. Supposons que E_0, F_0, E et F sont espaces de Fréchet et que $u_0: E_0\to F_0$ est surjective. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *L'extension canonique $\tilde{u}_0$ de u_0 est un epimorphisme de $\tilde{E}_0$ sur F, ayant la propriété d'approximation homogène.*

(b) *L'espace $\operatorname{Im}\sigma$ est dense dans F et pour tout $y_0'\in F_0'$ tel que ${}^tu_0(y_0')\in \operatorname{Im}{}^t\rho$, on a: $y_0'\in\operatorname{Im}{}^t\sigma$.*

§4. Homomorphisme Continu du Faisceau $\mathcal{O}$ dans Lui-même

Proposition 1. *Soit* $P=p(z,\partial_z)=\sum_\alpha a_\alpha(z)\partial_z^\alpha$ *un homomorphisme continu de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathcal{O}$. *Pour tout* $\alpha\in N^n$, *l'opérateur* $p^{(\alpha)}(z,\partial_z)$, *ou l'on écrit aussi* $P^{(\alpha)}$, *est un homomorphisme continu, bien-défini, de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathcal{O}$ *au symbole* $p^{(\alpha)}(z,\zeta)$ *qui est par définition* $\partial_\zeta^\alpha p(z,\zeta)$.

Démonstration. En effet, on a:

$$\widetilde{p^{(\alpha)}}(z,\zeta)=\sum_{\beta\geqq\alpha}a_\beta(z)\zeta^{\beta-\alpha}\binom{\beta}{\alpha}\alpha!(\beta-\alpha)!,$$
$$\tilde{p}^{(\alpha)}(z,\zeta)=\sum_{\beta\geqq\alpha}a_\beta(z)\zeta^{\beta-\alpha}\binom{\beta}{\alpha}\alpha!\beta!.$$

Comme le symbole $\tilde{p}(z,\zeta)$ est holomorphe dans $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n$, d'où la conclusion.

Proposition 2 (*Formule de Leibniz*). *Soit* $p(z,\partial_z)=\sum_\alpha a_\alpha(z)\partial_z^\alpha$ *un homomorphisme continu de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathcal{O}$. *Soient* f *et* g *deux fonctions holomorphes dans* $\mathbf{C}^n$ *telles que l'une d'elles soit un polynôme de degré au plus* d. *Alors on a la formule suivante*:

$$p(z,\partial_z)[f\cdot g]=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(z,\partial_z)f\cdot\partial_z^\alpha g. \tag{2}$$

Démonstration. Soit g (resp. f) un polynôme de degré au plus d. D'après l'inégalité de Cauchy, il existe C_d nombre positif qui ne depend que de d tel que pour tout $z\in\mathbf{C}^n$, on ait:

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\leqq\beta}\binom{\beta}{\alpha}|\partial_z^{\beta-\alpha}f(z)|\cdot|\partial_z^\alpha g(z)|\\&\leqq\sum_{|\alpha|\leqq d(\text{resp.}\,|\beta-\alpha|\leqq d)}\binom{\beta}{\alpha}\|f\|_{\Delta_1(z)}\|g\|_{\Delta_1(z)}(\beta-\alpha)!\alpha!\\&=C_d\|f\|_{\Delta_1(z)}\|g\|_{\Delta_1(z)}\beta!.\end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\leqq\beta,\beta}|a_\beta(z)|\binom{\beta}{\alpha}|\partial_z^{\beta-\alpha}f(z)|\cdot|\partial_z^\alpha g(z)|\\&\leqq C_d\|f\|_{\Delta_1(z)}\|g\|_{\Delta_1(z)}\sum_\beta|a_\beta(z)|\beta!.\end{aligned}$$

Comme la série $\sum_\beta|a_\beta(z)|\beta!$ est convergente, on a:

$$\begin{aligned}p(z,\partial_z)[f\cdot g]&=\sum_\beta a_\beta\partial_z^\beta[f\cdot g]\\&=\sum_\beta a_\beta\Big(\sum_{\alpha\leqq\beta}\binom{\beta}{\alpha}\partial_z^{\beta-\alpha}f\cdot\partial_z^\alpha g\Big)\end{aligned}$$

$$=\sum_{\alpha}\partial_z^{\alpha}g\Big(\sum_{\alpha\leqq\beta}a_{\beta}\binom{\beta}{\alpha}\partial_z^{\beta-\alpha}f\Big)$$
$$=\sum_{\alpha}\partial_z^{\alpha}g\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(z,\partial_z)f.$$

Proposition 3. *Soit $p(z,\partial_z)=\sum_{\alpha}a_{\alpha}(z)\partial_z^{\alpha}$ un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$. Pour tout $\eta\in\mathbf{C}^n$, l'opérateur $p(z,\partial_z+\eta)$ est un homomorphisme continu, bien-défini, de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ au symbole $p(z,\zeta+\eta)$.*

Démonstration. Pour touts $z\in\mathbf{C}^n$ et $\zeta\in\mathbf{C}^n$, on a:

$$p(z,\zeta+\eta)=\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(z,\eta)\zeta^{\alpha},$$
$$p^{(\alpha)}(z,\eta)=\sum_{\alpha\leqq\beta}a_{\beta}(z)\eta^{\beta-\alpha}\binom{\beta}{\alpha}\alpha!\,.$$

Pour tout compact K de $\mathbf{C}^n$, on a donc:

$$\sum_{\alpha}\|p^{(\alpha)}(\cdot,\eta)\|_K\cdot|\zeta^{\alpha}|$$
$$\leqq\sum_{\alpha}\Big(\sum_{\alpha\leqq\beta}\|a_{\beta}\|_K|\eta^{\beta-\alpha}|\binom{\beta}{\alpha}\alpha!\,|\zeta^{\alpha}|\Big).$$

D'après la démonstration du théorème 1 de [5], la série

$$\sum_{\beta}\|a_{\beta}\|_K(|\zeta|+|\eta|)^{|\beta|}\beta!$$

est convergente. Par suite, on a:

$$\sum_{\alpha}\Big(\sum_{\alpha\leqq\beta}a_{\beta}(z)\eta^{\beta-\alpha}\binom{\beta}{\alpha}\beta!\,\zeta^{\alpha}\Big)$$
$$=\sum_{\beta}a_{\beta}(z)\Big(\sum_{\alpha\leqq\beta}\binom{\beta}{\alpha}\zeta^{\alpha}\eta^{\beta-\alpha}\beta!\Big)$$
$$=\sum_{\beta}a_{\beta}(z)(\zeta+\eta)^{\beta}\beta!$$
$$=\tilde{p}(z,\zeta+\eta)$$

et les séries sont normalement convergentes. La série

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(z,\eta)\zeta^{\alpha}\alpha!=\sum_{\alpha}p^{(\alpha)}(z,\eta)\zeta^{\alpha}$$

est donc normalement convergente, d'où la conclusion.

§5. La Fonction Entière $p(\zeta)$

Lemme 1. *Soit $p(\zeta)=\sum_{\alpha}a_{\alpha}\zeta^{\alpha}$ une fonction entière sur $\mathbb{C}^n$. Pour que $\tilde{p}(\zeta)=\sum_{\alpha}a_{\alpha}\zeta^{\alpha}\alpha!$ soit une fonction entière, il faut et il suffit que pour tout nombre* *positif non nul ε, il existe C_ε nombre positif non nul tel que pour tout $\zeta \in \mathbf{C}^n$, on ait:*

$$|p(\zeta)| \leqq C_\varepsilon \exp(\varepsilon|\zeta|). \tag{3}$$

Démonstration. Soit $\tilde{p}(\zeta)$ une fonction entière sur $\mathbf{C}^n$. D'après l'inégalité de Cauchy, pour tout nombre positif non nul ε et tout $\alpha \in N^n$, on a:

$$|a_\alpha \cdot \alpha!| = |\frac{1}{\alpha!}\tilde{p}^{(\alpha)}(0)| \leqq \|\tilde{p}\|_{\Delta_{n/\varepsilon}(0)}(\varepsilon/n)^{|\alpha|}.$$

On a donc:

$$\begin{aligned} |p(\zeta)| &= |\sum_\alpha a_\alpha \zeta^\alpha| \\ &\leqq \|\tilde{p}\|_{\Delta_{n/\varepsilon}(0)} \sum_\alpha (\frac{\varepsilon}{n}|\zeta|)^{|\alpha|}/\alpha! \\ &= \|\tilde{p}\|_{\Delta_{n/\varepsilon}(0)}\, e^{\varepsilon|\zeta|}. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit l'inégalité (3) vérifiée pour tout nombre positit non nul ε. D'après l'inégalité de Cauchy, pour tout nombre positif non nul R et tout $\alpha \in N^n$, on a:

$$|a_\alpha \cdot \alpha!| = |\partial_\zeta^\alpha p(0)| \leqq \|p\|_{\Delta_R(0)} R^{-|\alpha|}\alpha!.$$

Par l'hypothèse, il existe C_ε nombre positif non nul indépendant de R et α tel que l'on ait:

$$\|p\|_{\Delta_R(0)} \leqq C_\varepsilon\, e^{\varepsilon\sqrt{n}R}.$$

En prenant

$$R = |\alpha|/\varepsilon\sqrt{n},$$

on a:

$$\begin{aligned} |a_\alpha \cdot \alpha!| &\leqq C_\varepsilon\, e^{|\alpha|}|\alpha|^{-|\alpha|}(\varepsilon\sqrt{n})^{|\alpha|}\alpha! \\ &\leqq C_\varepsilon\, e^{|\alpha|}\alpha_1^{-\alpha_1}\alpha_2^{-\alpha_2}\cdots\alpha_n^{-\alpha_n}(\varepsilon\sqrt{n})^{|\alpha|}\alpha!. \end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling, pour tout $\zeta \in \mathbf{C}^n$ tel que $|\zeta| < (\varepsilon\sqrt{n})^{-1}$, on a:

$$\begin{aligned} &\sup_\alpha |a_\alpha \alpha! \zeta^\alpha| \\ &\leqq C_\varepsilon \sup_\alpha \frac{e^{|\alpha|}\alpha!}{\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\cdots\alpha_n^{\alpha_n}}(|\zeta|\varepsilon\sqrt{n})^{|\alpha|} < +\infty. \end{aligned}$$

Comme le nombre positif non nul ε est arbitraire, d'après le lemme d'Abel, la fonction $\tilde{p}(\zeta) = \sum_\alpha a_\alpha \alpha! \zeta^\alpha$ est holomorphe dans $\mathbf{C}^n$.

Une fonction entière qui vérifie l'inégalité (3) pour tout nombre positif non nul ε est dite *de type infra-exponentiel.* Donc pour que la fonction $p(\zeta)=\sum_\alpha a_\alpha \zeta^\alpha$ représente un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ comme le symbole d'un opérateur différentiel à coefficients constants, il faut et il suffit que $p(\zeta)$ soit de type infra-exponentiel.

§6. L'Espace P_n des Polynômes

Pour tout entier positif d, on désigne par P_n^d l'espace des polynômes de degré au plus d à n indéterminées et à coefficients complexes. Comme P_n^d est un espace vectoriel de dimension finie, il munit canoniquement de la structure d'un espace de Banach. Soient j_d l'injection naturelle de P_n^d dans P_n^{d+1} et π_d la projection canonique de P_n^{d+1} sur P_n^d. Soient P_n l'espace (DFS) de la limite inductive de la suite $(P_n^d, j_d)_{d\in N}$ et Q_n l'espace (FS) de la limite projective de la suite $(P_n^d, \pi_d)_{d\in N}$. L'espace localement convexe P_n s'identifie avec l'espace des polynômes à n indéterminées ou à n variables complexes $z=(z_1, z_2,\dots, z_n)$ et à coefficients complexes et l'espace localement convexe Q_n s'identifie avec l'espace des séries formelles à n indéterminées et à coefficients complexes. Les espaces P_n et Q_n sont en dualité relativement à la forme bilinéaire suivante: pour touts $f=\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(0)\, X^\alpha \in P_n$ et $u=\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(0)\, X^\alpha \in Q_n$,

$$\langle f, u\rangle=\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(0)\partial^\alpha u(0). \tag{4}$$

En outre, les espaces P_n et Q_n sont même algébriquement en dualité relativement à la forme (4).

Soit $T=\sum_\alpha b_\alpha \partial^\alpha$ un opérateur différentiel formel à coefficients constants sur P_n, c'est-à-dire que pour tout $f\in P_n$, on pose:

$$Tf(X)=\sum_\alpha b_\alpha \partial^\alpha f(X). \tag{5}$$

Calculons la transposee ${}^tT$: $Q_n\to Q_n$ de l'opérateur T: $P_n\to P_n$: pour touts $u\in Q_n$ et $f\in P_n$, on a:

$$\begin{aligned}\langle {}^tTu, f\rangle &= \langle u, Tf\rangle\\ &=\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(0)\partial^\alpha(Tf)(0)\\ &=\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(0)\sum_\beta b_\beta \partial^{\beta+\alpha} f(0)\\ &=\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(0)\sum_{\alpha\leqq\gamma} b_{\gamma-\alpha}\partial^\gamma f(0)\end{aligned}$$

$$=\sum_{\gamma}\Big(\sum_{\alpha\leqq\gamma} b_{\gamma-\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}u(0)\Big)\partial^{\gamma}f(0)$$
$$=\langle T(X)\cdot u(X), f(X)\rangle .$$

On a donc:

$$(6)\qquad {}^{t}Tu(X)=T(X)\cdot u(X).$$

Proposition 4. *Soit* $T=\sum_{\alpha} b_{\alpha}\partial_z^{\alpha}$ *un opérateur différentiel formel non nul à coefficients constants sur* P_n. *Alors on a*: $TP_n=P_n$.

Démonstration. Comme Q_n est un anneau d'intégrité, d'après la formule (6), la transposée ${}^{t}T$: $Q_n\to Q_n$ est injective. Puisque ${}^{t}T$: $Q_n\to Q_n$ est la transposée algébrique de l'opérateur T: $P_n\to P_n$, l'opérateur T: $P_n\to P_n$ est surjectif.

§7. L'Espace *EP* des Exponentielle-Polynômes

Pour tout $\eta\in\mathbf{C}^n$, on désigne par $e_{\eta}P_n$ l'espace des fonctions de la forme

$$e^{\langle\eta,\cdot\rangle}f(\cdot)$$

avec $f\in P_n$ muni de la topologie induite par la topologie de P_n. Soit EP la somme directe topologique de la famille $(e_{\eta}P_n)_{\eta\in\mathbf{C}^n}$ des espaces localement convexes $e_{\eta}P_n$. Tout élément de EP est dit un *exponentielle-polynôme.*

Lemme 2. *Le dual* $(EP)'$ *de* EP *est canoniquement isomorphe à l'espace produit* $\prod_{\eta\in\mathbf{C}^n} Q_n$ *relativement à la forme suivante*: *pour touts* $f=\sum_{\eta} e^{\langle\eta,\cdot\rangle}f_{\eta}\in EP$ *avec* $f_{\eta}\in P_n$ *et* $u=(u_{\eta})_{\eta\in\mathbf{C}^n}\in\prod_{\eta\in\mathbf{C}^n} Q_n$,

$$(7)\qquad \langle f, u\rangle=\sum_{\eta}\langle f_{\eta}, u_{\eta}\rangle .$$

Démonstration. On a canoniquement les isomorphismes suivants:

$$(EP)'=(\bigoplus_{\eta} e_{\eta}P_n)'\simeq\prod_{\eta}(e_{\eta}P_n)'\simeq\prod_{\eta}P_n'=\prod_{\eta}Q_n ,$$

d'où la conclusion.

Proposition 5. *Soit* $p(\partial_z)$ *un opérateur différentiel non nul à coefficients constants représenté par un homomorphisme continu* $\bar{P}$ *de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathcal{O}$. *Alors on a*: $p(\partial_z)EP=EP$.

Démonstration. Pour tout $f\in EP$, il existe $(f_j)_{1\leqq j\leqq l}$ suite finie de P_n tel que l'on ait:

$$f=\sum_{j=1}^{l} e^{\langle \eta_j, \cdot \rangle} f_j .$$

D'après la proposition 4, il existe $g_j \in P_n$ tel que l'on ait:

$$p(\partial_z+\eta_j)g_j=f_j$$

pour tout j. On pose:

$$g=\sum_{j=1}^{l} e^{\langle \eta_j, \cdot \rangle} g_j \in EP .$$

D'après la proposition 2 et la proposition 3, on a:

$$\begin{aligned}
p(\partial_z)g &= \sum_j p(\partial_z)(e^{\langle \eta_j, \cdot \rangle} g_j) \\
&= \sum_j e^{\langle \eta_j, \cdot \rangle} \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)}(\eta_j)\partial_z^\alpha g_j \\
&= \sum_j e^{\langle \eta_j, \cdot \rangle} p(\partial_z+\eta_j)g_j \\
&= \sum_j e^{\langle \eta_j, \cdot \rangle} f_j \\
&= f .
\end{aligned}$$

§8. Existence et Approximation dans l'Espace des Fonctions Entières

Dans cette section, on désignera par $p(\partial_z)$ un opérateur différentiel non nul à coefficients constants représenté par un homomorphisme continu P de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$. D'après la démonstration de la proposition 5, on a la formule suivante: pour tout $f=\sum_\eta e^{\langle \eta, \cdot \rangle} f_\eta \in EP$ avec $f_\eta \in P_n$,

$$p(\partial_z)f=\sum_\eta e^{\langle \eta, \cdot \rangle} p(\partial_z+\eta)f_\eta . \tag{8}$$

Calculons la transposée ${}^t p(\partial_z)\colon (EP)' \to (EP)'$ de $p(\partial_z)\colon EP \to EP$: pour touts $f=\sum_\eta e^{\langle \eta, \cdot \rangle} f_\eta \in EP$ avec $f_\eta \in P_n$ et $u=(u_\eta)_{\eta \in \mathbf{C}^n} \in \prod_{\eta \in \mathbf{C}^n} Q_n = (EP)'$, on a:

$$\begin{aligned}
\langle {}^t p(\partial_z)u, f \rangle &= \langle u, p(\partial_z)f \rangle \\
&= \langle u, \sum_\eta e^{\langle \eta, \cdot \rangle} p(\partial_z+\eta)f_\eta \rangle \\
&= \sum_\eta \langle u_\eta, p(\partial_z+\eta)f_\eta \rangle \\
&= \sum_\eta \langle p(\zeta+\eta)u_\eta(\zeta), f_\eta(\zeta) \rangle_\zeta .
\end{aligned}$$

En posant

$$(\tau_{-\eta}h)(\zeta)=h(\zeta+\eta),$$

d'après le lemme 2, on a:

(9) $$ {}^t p(\partial_z)u = ((\tau_{-\eta}p)u_\eta)_{\eta\in\mathbf{C}^n}. $$

Maintenant, considérons le diagramme commutatif suivant:

(10) $$ \begin{array}{ccc} EP & \xrightarrow{i} & \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \\ {\scriptstyle p(\partial_z)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P} \\ EP & \xrightarrow{i} & \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \end{array} $$

où i est l'injection naturelle continue.

Proposition 6. *Dans le diagramme* (10), *la surjection* $p(\partial_z): EP \to EP$ *est continue.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\eta \in \mathbf{C}^n$ et tout entier positif d, l'opérateur $p(\partial_z): e_\eta P_n^d \to EP$ est continu. Soit $(f_\nu)_{\nu\geqq 1}$ une suite convergeant dans P_n^d à 0. Alors $(f_\nu)_{\nu\geqq 1}$ converge dans l'espace $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ à 0. D'après l'égalité (8), on a:

$$ p(\partial_z)(e^{\langle \eta, \cdot \rangle} f_\nu) = e^{\langle \eta, \cdot \rangle} p(\partial_z + \eta) f_\nu \in e_\eta P_n^d. $$

Puisque l'opérateur $p(\partial_z + \eta): \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \to \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ est continu, la suite $(p(\partial_z + \eta) f_\nu)_{\nu\geqq 1}$ converge dans $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ à 0. Comme l'injection naturelle: $P_n^d \to \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ est monomorphisme, la suite $(p(\partial_z + \eta) f_\nu)_{\nu\geqq 1}$ converge dans P_n^d à 0, donc dans P_n à 0.

Corollaire. *Dans la situation précédente, la surjection* $p(\partial_z): P_n \to P_n$ *est un epimorphisme.*

Démonstration. D'après la démonstration de la proposition précédente, la surjection $p(\partial_z): P_n \to P_n$ est continue. D'après le corollaire de la proposition 10 de la section 4 du chapitre II de Bourbaki [2], d'où la conclusion.

Lemme 3. *Dans la situation précédente, l'idéal* $p(X)\cdot Q_n$ *est fermé dans l'espace* Q_n.

Démonstration. La surjection $p(\partial_z): P_n \to P_n$ est un epimorphisme. En posant

$$ N = \operatorname{Ker} p(\partial_z), $$

l'application canonique

$$ \bar{p}: P_n/N \longrightarrow P_n $$

induite par $p(\partial_z)$: $P_n \to P_n$ est donc un isomorphisme. Par suite, on a la bijection

$$ {}^t\bar{p} : Q_n \longrightarrow N^0 \subset Q_n $$

et ${}^t\bar{p}Q_n = N^0$ est fermé dans Q_n. Puisque l'on a:

$$ p(X) \cdot Q_n = {}^t\bar{p}Q_n , $$

l'idéal $p(X) \cdot Q_n$ est fermé dans Q_n.

Lemme 4. *Dans la situation précédente, l'ensemble ${}^t p(\partial_z)(EP)'$ est fermé dans $(EP)'$, où $(EP)'$ munit de la topologie induite par l'espace $\prod_{\eta \in \mathbf{C}^n} Q_n$.*

Démonstration. Pour tout $u = (u_\eta)_{\eta \in \mathbf{C}^n} \in \prod_{\eta \in \mathbf{C}^n} Q_n = (EP)'$, d'après l'égalité (9), on a:

$$ {}^t p(\partial_z) u = ((\tau_{-\eta} p) u_\eta)_{\eta \in \mathbf{C}^n} . $$

On a donc:

$$ {}^t p(\partial_z)(EP)' = \prod_{\eta \in \mathbf{C}^n} \tau_{-\eta} p(X) \cdot Q_n . $$

D'après le lemme 3, pour tout $\eta \in \mathbf{C}^n$, l'ensemble $\tau_{-\eta} p(x) \cdot Q_n$ est fermé dans Q_n. D'où la conclusion.

Lemme 5. *Dans la situation précédente, on a:*

$$ {}^t p(\partial_z)(EP)' = (\mathrm{Ker}\ p(\partial_z))^0 . $$

Démonstration. On a algébriquement les isomorphismes canoniques suivants:

$$ \Big(\prod_{\eta \in \mathbf{C}^n} Q_n\Big)' \simeq \bigoplus_{\eta \in \mathbf{C}^n} Q'_n = \bigoplus_{\eta \in \mathbf{C}^n} P_n \simeq \bigoplus_{\eta \in \mathbf{C}^n} e_\eta P_n = EP . $$

Par suite, la topologie de $(EP)' = \prod_{\eta \in \mathbf{C}^n} Q_n$ est compatible avec la dualité entre $(EP)'$ et EP. On a donc:

$$ \overline{\mathrm{Im}\ {}^t p(\partial_z)} = (\mathrm{Ker}\ p(\partial_z))^0 $$

dans $\prod_{\eta \in \mathbf{C}^n} Q_n = (EP)'$. D'après le lemme 4, d'où la conclusion.

Dans le diagramme (10), la surjection $p(\partial_z)$: $EP \to EP$ est essentiellement univalente. On va démontrer que l'opérateur $P: \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \to \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ est l'extension canonique de $p(\partial_z)$: $EP \to EP$: Comme l'opérateur $P: \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \to \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ est continu, son graphe G est fermé dans l'espace produit $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \times \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$. Soit G_0 le graphe de $p(\partial_z)$: $EP \to EP$ dans l'espace $EP \times EP \subset \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \times \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$. Comme l'espace EP est dense dans l'espace $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$, pour tout couple $(f, Pf)\in G$, il existe $(f_\nu)_{\nu\geqq 1}$ suite de EP qui converge dans $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ à f. Puisque l'opérateur $P: \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})\to\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ est continu, la suite $((f_\nu, Pf_\nu))_{\nu\geqq 1}$ de G_0 converge dans $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})\times\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ à (f, Pf). On a donc: $G=\overline{G_0}$.

Comme l'espace EP est dense dans l'espace $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$, d'après le critère 2, les énoncés suivants sont équivalents:

(a) L'opérateur $P: \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})\to\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ est un epimorphisme ayant la propriété d'approximation homogène.

(b) Pour tout $u\in(EP)'$ tel que ${}^tp(\partial_z)u\in{}^ti(\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})')$, on a: $u\in{}^ti(\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})')$.

Par la transformation de Fourier-Borel $\mathscr{F}$, l'espace $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})'$ s'identifie avec Exp espace des fonctions entières de type exponentiel. Calculons la transposée ${}^ti: Exp\to\prod_{\eta\in\mathbf{C}^n} Q_n$ de $i: EP\to\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$: pour tout $h\in Exp$ et tout $f=\sum_\eta e^{\langle\eta,\cdot\rangle}f_\eta$ $\in EP$ avec $f_\eta\in P_n$, en prenant une fonctionnelle analytique $T\in\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})'$ telle que l'on ait: $h=\mathscr{F}T$, on a:

$$\begin{aligned}
\langle{}^tih, f\rangle &= \langle{}^tiT, f\rangle=\langle T, f\rangle\\
&=\sum_\eta\langle T, e^{\langle\eta,\cdot\rangle}f_\eta\rangle\\
&=\sum_\eta\sum_\alpha\partial_z^\alpha(\mathscr{F}T)(0)\partial_z^\alpha(e^{\langle\eta,\cdot\rangle}f_\eta)(0)/\alpha!\\
&=\sum_\eta\sum_\alpha\partial_z^\alpha h(0)\Big(\sum_{\beta\leqq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\eta^\beta\partial_z^{\alpha-\beta}f_\eta(0)\Big)/\alpha!\\
&=\sum_\eta\sum_\beta\Big(\sum_{\beta\leqq\alpha}\partial_z^\alpha h(0)\binom{\alpha}{\beta}\partial_z^{\alpha-\beta}f_\eta(0)/\alpha!\Big)\eta^\beta\\
&=\sum_\eta\sum_\beta\Big(\sum_{\alpha\geqq 0}\partial_z^{\alpha+\beta}h(0)\binom{\alpha+\beta}{\beta}\partial_z^\alpha f_\eta(0)/(\alpha+\beta)!\Big)\eta^\beta\\
&=\sum_\eta\sum_\beta\Big(\sum_\alpha\partial_z^\alpha(\partial_z^\beta h)(0)\partial_z^\alpha f(0)/\alpha!\Big)\eta^\beta/\beta!\\
&=\sum_\eta\sum_\beta\langle\partial_z^\beta h, f_\eta\rangle\eta^\beta/\beta!\\
&=\sum_\eta\langle\tau_{-\eta}h, f_\eta\rangle.
\end{aligned}$$

On a donc:

$$ {}^tih=(\tau_{-\eta}h)_{\eta\in\mathbf{C}^n}. \tag{11}$$

Par suite, d'après la formule (9), l'énoncé (b) est équivalent à l'énoncé suivant:

(b)$'$ Pour touts $u=(u_\eta)_{\eta\in\mathbf{C}^n}\in\prod_{\eta\in\mathbf{C}^n} Q_n$ et $h\in Exp$ tel que l'on ait:

$$(\tau_{-\eta}p)\cdot u_\eta=\tau_{-\eta}h$$

pour tout $\eta\in\mathbf{C}^n$, il existe $g\in Exp$ tel que l'on ait:

$$u_\eta = \tau_{-\eta} g$$

pour tout $\eta \in \mathbf{C}^n$.

Théorème 1. *Soit* $p(\partial_z) = \sum_\alpha a_\alpha \partial_z^\alpha$ *un opérateur différentiel non nul à coefficients constants sur* $\mathbf{C}^n$ *représenté par un homomorphisme continu* P *de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathcal{O}$. *Alors on a les énoncés suivants* (i) *et* (ii):

(i) *Pour toute fonction entière* f *sur* $\mathbf{C}^n$, *il existe* u *fonction entière sur* $\mathbf{C}^n$ *tel que l'on ait*:

$$p(\partial_z) u = f \tag{12}$$

dans $\mathbf{C}^n$.

(ii) *Toute solution* u *dans* $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ *de l'équation homogène*

$$p(\partial_z) u = 0 \tag{13}$$

est approchée dans $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ *par des exponentielle-polynômes satisfaisant à l'équation* (13).

Démonstration. On va démontrer que l'énoncé (b)' est valable. Soient $u = (u_\eta)_{\eta \in \mathbf{C}^n}$ un élément de $\prod_{\eta \in \mathbf{C}^n} Q_n$ et h un élément de Exp tels que l'on ait:

$$(\tau_{-\eta} p) u_\eta = \tau_{-\eta} h$$

pour tout $\eta \in \mathbf{C}^n$. D'après le Vorbereitungsatz donné, par exemple, dans Trèves [7], pour tout $\eta \in \mathbf{C}^n$, u_η est holomorphe dans un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^n$. On pose:

$$g_\eta(\zeta) = u_\eta(\zeta - \eta)$$

pour touts $\eta \in \mathbf{C}^n$ et $\zeta \in \mathbf{C}^n$. Pour tout $\eta \in \mathbf{C}^n$, il existe U_η voisinage de η tel que l'on ait: $g_\eta \in \Gamma(U_\eta, \mathcal{O})$. Pour tout point ζ de U_η, on a:

$$p(\zeta) g_\eta(\zeta) = p(\zeta) u_\eta(\zeta - \eta) = h(\zeta).$$

Puisque la fonction entière $p(\zeta)$ n'est pas nulle, pour touts points η et η' de $\mathbf{C}^n$, on a donc:

$$g_\eta = g_{\eta'}$$

dans $U_\eta \cap U_{\eta'}$. Il existe donc g fonction entière tel que pour tout $\eta \in \mathbf{C}^n$, on ait:

$$g_{|U_\eta} = g_\eta = \tau_\eta u_\eta$$

dans U_η. On a par suite:

$$\tau_{-\eta}g=u_\eta$$

pour tout $\eta\in\mathbf{C}^n$ et l'on a:

$$p(\zeta)g(\zeta)=h(\zeta).$$

Comme les fonctions entières $p(\zeta)$ et $h(\zeta)$ sont de type exponentiel, d'après le théorème 1 du chapitre II de Malgrange [6], la fonction g l'est aussi, d'où la conclusion.

§9. Existence et Approximation dans un Ouvert de $\mathbf{C}^n$

Dans cette section, on désigne par $p(\partial_z)$ un opérateur différentiel non nul a coefficients constants représenté par un homomorphisme continu P de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ et par Ω un ouvert de type de Runge dans $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire que Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et la restriction

$$r_\Omega\colon \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$$

a l'image dense dans $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) & \xrightarrow{r_\Omega} & \Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \\ {\scriptstyle P}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle P_\Omega} \\ \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) & \xrightarrow{r_\Omega} & \Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \end{array} \tag{14}$$

D'après le théorème 1, l'opérateur

$$P\colon \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$$

est surjectif et essentiellement univalent. On va démontrer que l'opérateur

$$P_\Omega\colon \Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$$

est l'extension canonique de P: Comme l'opérateur P_Ω est continu, son graphe G_Ω est fermé dans l'espace produit $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})\times\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$. Soit G_1 le graphe de P dans l'espace $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})\times\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ et l'on pose:

$$G=(r_\Omega\times r_\Omega)(G_1).$$

Puisque l'espace $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ est dense dans l'espace $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$, pour tout couple $(f, P_\Omega f)\in G_\Omega$, il existe $(f_\nu)_{\nu\geq 1}$ suite de $\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ qui converge dans $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ à f. Comme l'opérateur $P_\Omega\colon \Gamma(\Omega, \mathcal{O})\to\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ est continu, la suite $((f_\nu, P_\Omega f_\nu))_{\nu\geq 1}$ de G converge dans $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})\times\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ à $(f, P_\Omega f)$. On a donc: $G_\Omega=\bar{G}$.

On dira qu'une fonctionnelle analytique $T\in\Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})'$ *est appuyée par* *l'ouvert* Ω si T appartient à l'image de la transposée

$$ {}^t r_\Omega : \Gamma(\Omega, \mathcal{O})' \longrightarrow \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})' $$

de la restriction $r_\Omega : \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \to \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$.

Définition 4. Soient $p(\partial_z)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbf{C}^n$ représenté par un homomorphisme continu P de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ et Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$. On dit que Ω est *pseudo* $p(\partial_z)$-*convexe* si l'énoncé suivant est vérifié: si T est une fonctionnelle analytique sur $\mathbf{C}^n$ telle que la fonctionnelle analytique ${}^tPT$ soit appuyée par Ω, T est appuyée par Ω où ${}^tP$ désigné la transposée de l'opérateur $P : \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \to \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O})$ induite par l'homomorphisme $P : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$.

D'après le critère 3 et le théorème 1, (ii), on a le théorème suivant:

Théorème 2. *Soient* $p(\partial_z) = \sum_\alpha a_\alpha \partial_z^\alpha$ *un opérateur différentiel non nul à coefficients constants sur* $\mathbf{C}^n$ *représenté par un homomorphisme continu* P *de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathcal{O}$ *et* Ω *un ouvert de type de Runge dans* $\mathbf{C}^n$. *Alors pour que les énoncés suivants* (i) *et* (ii) *soient valables, il faut et il suffit que l'ouvert* Ω *soit pseudo* $p(\partial_z)$-*convexe*:

(i) *Pour toute fonction holomorphe* f *sur* Ω, *il existe* u *fonction holomorphe sur* Ω *tel que l'on ait*:

$$ p(\partial_z)u = f \tag{15} $$

dans Ω.

(ii) *Toute solution* u *dans* $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ *de l'équation homogène*

$$ p(\partial_z)u = 0 \tag{16} $$

est approchée dans $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ *par des exponentielle-polynômes satisfaisant à l'équation* (16).

Proposition 7. *Soient* $p(\partial_z)$ *un opérateur différentiel non nul à coefficients constants sur* $\mathbf{C}^n$ *représenté par un homomorphisme continu de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathcal{O}$ *et* Ω *un ouvert convexe de* $\mathbf{C}^n$. *Alors* Ω *est pseudo* $p(\partial_z)$-*convexe.*

Pour démontrer la proposition 7, d'après Avanissian [1], on va démontrer d'abord trois lemmes. Pour toute fonction Lebesgue-mesurable g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, tout $z_0 \in \mathbf{C}$ et tout nombre positif non nul r, on pose:

$$ M(g; z_0, r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|\zeta - z_0| < r} g \, d\mu_\zeta \tag{17} $$

où $d\mu_\zeta$ désigné la mesure de Lebesgue en ζ dans $\mathbf{C}$.

Lemme 6. *Soient A un nombre positif non nul et g une fonction entière sur $\mathbf{C}$ telle que $g(0)\neq 0$ et que avec un nombre positif K plus grand que 1, on ait*:

$$|g(\zeta)|\leqq K\, e^{A|\zeta|}$$

pour tout $\zeta\in\mathbf{C}$. Alors pour tout nombre positif non nul λ, tout nombre A' tel que $A'>A$ et tout $z\in\mathbf{C}$ tel que $|z|>(\log K)/(A'-A)$, on a:

$$\begin{aligned}(18)\qquad & M(\log|g|;\, z,\, \lambda|z|)\\ & \geqq\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\log|g(0)|+\left(1-\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\right)A'(1+\lambda)|z|\,.\end{aligned}$$

Démonstration. Supposons que l'on a:

$$\lambda>0\,,\ A'>A\,,$$
$$|z|>\frac{\log K}{A'-A}\,.$$

On pose:

$$R=(1+\lambda)\cdot|z|\,,$$
$$v(\zeta)=\log|g(\zeta)|-A'R\,.$$

Pour tout $\zeta\in\mathbf{C}$ tel que $|\zeta|\leqq R$, on a:

$$\begin{aligned}v(\zeta)&\leqq A|\zeta|+\log K-A'R\\ &\leqq(A-A')R+\log K\\ &=(A-A')(1+\lambda)|z|+\log K\\ &<-(1+\lambda)\log K+\log K\leqq 0\,.\end{aligned}$$

Par suite, on a:

$$v<0$$

dans $\{\zeta\in\mathbf{C}\mid|\zeta|\leqq R\}$. Puisque l'on a:

$$\{\zeta\in\mathbf{C}\mid|\zeta|\leqq R\}\supset\{\zeta\in\mathbf{C}\mid|\zeta-z|\leqq\lambda|z|\}\,,$$

on a:

$$\int_{|\zeta|\leqq R}v\,d\mu_\zeta\leqq\int_{|\zeta-z|\leqq\lambda|z|}v\,d\mu_\zeta\,,$$

c'est-à-dire que l'on a:

$$R^2M(v;\,0,\,R)\leqq\lambda^2|z|^2M(v;\,z,\,\lambda|z|)\,.$$

Comme la fonction v est sous-harmonique, on a:

$$R^2(\log|g(0)|-A'R)=R^2v(0)$$
$$\leqq R^2M(v;\,0,\,R).$$

On a donc:

$$\begin{aligned}(1+\lambda)^2|z|^2&(\log|g(0)|-A'R)\\&\leqq\lambda^2|z|^2M(v;\,z,\,\lambda|z|)\\&=\lambda^2|z|^2[M(\log|g|;\,z,\,\lambda|z|)-A'R].\end{aligned}$$

Puisque $|z|\neq 0$, on a donc:

$$\begin{aligned}M(\log&|g|;\,z,\,\lambda|z|)\\&\geqq\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\log|g(0)|+\left(1-\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\right)A'(1+\lambda)|z|.\end{aligned}$$

Lemme 7. *Soient A et B deux nombres positifs non nuls et f et g deux fonctions entières sur $\mathbf{C}$ telles que $g(0)\neq 0$, que le quotient f/g est une fonction entière et que avec deux nombres positifs K et L plus grands que* 1, *on ait*:

$$|f(\zeta)|\leqq K\,e^{A|\zeta|+J(\zeta)},$$
$$|g(\zeta)|\leqq L\,e^{B|\zeta|}$$

pour tout $\zeta\in\mathbf{C}$, où J est une fonction Lebesgue-mesurable de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{R}$. Alors pour tout nombre positif non nul λ, touts nombres A' et B' tels que $A'>A$, $B'>B$ et tout $z\in\mathbf{C}$ tel que

$$|z|>\sup\left[\frac{\log K}{A'-A},\,\frac{\log L}{B'-B}\right],$$

on a:

$$(19)\quad \begin{aligned}&|f/g(z)|\\&\leqq|g(0)|^{-\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2}\exp\left[J_\lambda(z)+\left\{A'(1+\lambda)+B'(1+\lambda)\left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2-1\right)\right\}|z|\right],\end{aligned}$$

où l'on se rappelle:

$$J_\lambda(z)=\sup_{|\zeta-z|<\lambda|z|}J(\zeta).$$

Démonstration. Supposons que l'on a:

$$\lambda>0,\ A'>A,\ B'>B,$$
$$|z|>\sup\left[\frac{\log K}{A'-A},\,\frac{\log L}{B'-B}\right].$$

Comme la fonction $\log|f/g|$ est sous-harmonique, on a:

$$\begin{aligned}&\log|f/g(z)|\\&\quad\leqq M(\log|f/g|;\,z,\,\lambda|z|)\\&\quad=M(\log|f|;\,z,\,\lambda|z|)-M(\log|g|;\,z,\,\lambda|z|).\end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned}M(\log|f|;\,z,\,\lambda|z|)&=\frac{1}{\lambda^2|z|^2}\int_{|\zeta-z|<\lambda|z|}\log|f|d\mu_\zeta\\&\leqq\frac{1}{\lambda^2|z|^2}\int_{|\zeta-z|<\lambda|z|}(J(\zeta)+A|\zeta|+\log K)d\mu_\zeta\\&\leqq\log K+A(1+\lambda)|z|+J_\lambda(z)\\&=\log K-(A'-A)(1+\lambda)|z|+A'(1+\lambda)|z|+J_\lambda(z)\\&<\log K-\log K+A'(1+\lambda)|z|+J_\lambda(z)\\&=A'(1+\lambda)|z|+J_\lambda(z).\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (18), on a donc:

$$\begin{aligned}&\log|f/g(z)|\\&\quad\leqq J_\lambda(z)+A'(1+\lambda)|z|-\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\log|g(0)|+\left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2-1\right)B'(1+\lambda)|z|.\end{aligned}$$

Lemme 8. *Soient A et B deux nombres positifs non nuls et f et g deux fonctions entières sur $\mathbf{C}^n$ telles que $g(0)\neq 0$, que le quotient f/g est une fonction entière et que avec deux nombres positifs K et L plus grands que* 1, *on ait*:

$$|f(\zeta)|\leqq K\,e^{A|\zeta|+J(\zeta)},$$
$$|g(\zeta)|\leqq L\,e^{B|\zeta|}$$

pour tout $\zeta\in\mathbf{C}^n$, où J est une fonction Lebesgue-mesurable de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{R}$. Alors pour tout nombre positif non nul λ et touts nombres A' et B' tels que $A'>A$, $B'>B$, il existe C *nombre positif non nul tel que l'on ait*:

$$(20)\qquad |f/g(z)|\leqq C\exp\left[J_\lambda(z)+\left\{A'(1+\lambda)+B'(1+\lambda)\left(\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2-1\right)\right\}|z|\right]$$

pour tout $z\in\mathbf{C}^n$, où l'on se rappelle:

$$J_\lambda(z)=\sup_{|\zeta-z|<\lambda|z|}J(\zeta).$$

Démonstration. Pour tout $z\in\mathbf{C}^n$ tel que $|z|=1$, on pose:

$$\begin{aligned}&f_z\colon t\longmapsto f(tz_1,\,tz_2,\dots,\,tz_n),\\&g_z\colon t\longmapsto g(tz_1,\,tz_2,\dots,\,tz_n),\\&h_z=f_z/g_z,\\&J_z\colon t\longmapsto J(tz_1,\,tz_2,\dots,\,tz_n)\end{aligned}$$

et l'on pose:

$$h = f/g\,.$$

En prenant $(J_z)_\lambda$ comme dans le lemme 7, on a:

$$h_z(t) = h(tz_1, tz_2, \dots, tz_n)\,,$$
$$(J_z)_\lambda(t) \leqq J_\lambda(tz_1, tz_2, \dots, tz_n)\,.$$

D'après le lemme 7, il existe C nombre positif non nul indépendent de $z \in \mathbf{C}^n$ tel que $|z| = 1$ tel que l'on ait:

$$\begin{aligned}|h(tz_1, tz_2, \dots, tz_n)| &= |h_z(t)| \\ &\leqq C \exp\Big[J_\lambda(tz_1, tz_2, \dots, tz_n) \\ &+ \Big\{A'(1+\lambda) + B'(1+\lambda)\Big(\Big(\frac{1+\lambda}{\lambda}\Big)^2 - 1\Big)\Big\}|t|\Big]\,.\end{aligned}$$

Comme $|t| = |tz|$, on a l'inégalité (20) pour tout $z \in \mathbf{C}^n$.

Remarque. D'après le lemme 8, on peut obtenir le théorème 1 du chapitre II de Malgrange [6] que l'on a utilisé dans la démonstration du théorème 1.

Démonstration de la proposition 7. Soit T une fonctionnelle analytique sur $\mathbf{C}^n$ telle que ${}^tPT$ soit appuyée par Ω. Il existe K compact convexe de Ω tel que ${}^tPT$ soit appuyée par K. D'après le théorème de Pólya-Ehrenpreis-Martineau donné, par exemple, dans Hörmander [3], pour tout nombre positif non nul ε, il existe C_ε nombre positif non nul tel que pour tout $\zeta \in \mathbf{C}^n$, on ait:

$$|\mathscr{F}({}^tPT)(\zeta)| \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + J_K(\zeta)}\,,$$

où on se rappelle:

$$J_K(\zeta) = \sup_{z \in K} \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle$$

pour tout $\zeta \in \mathbf{C}^n$. D'après le lemme 1, pour tout nombre positif non nul δ, il existe C'_δ nombre positif non nul tel que pour tout $\zeta \in \mathbf{C}^n$, on ait:

$$|p(\zeta)| \leqq C'_\delta\, e^{\delta|\zeta|}.$$

En changeant les variables, on peut supposer que $p(0) \neq 0$. Dans la notation du lemme 8, pour tout $\zeta \in \mathbf{C}^n$, on a:

$$\begin{aligned}(J_K)_\lambda(\zeta) &= \sup_{|\eta-\zeta| < \lambda|\zeta|} J_K(\eta) \\ &\leqq J_K(\zeta) + \lambda|\zeta| M\end{aligned}$$

avec M nombre plus grand que la valeur $\sup_{\eta\in K}|\eta|$.

On peut supposer que $M>\varepsilon>0$. Remarquons que l'on a:

$$\mathscr{F}({}^tPT)(\zeta)=p(\zeta)\mathscr{F}T(\zeta).$$

Alors dans les notations du lemme 8, en prenant $\lambda=\varepsilon/M$ et δ plus petit que la valeur

$$\varepsilon/\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{M}\right)\left(\left(\frac{M+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2-1\right)\right],$$

pour tout ε nombre positif non nul, il existe donc C nombre positif non nul tel que l'on ait:

$$\begin{aligned}|\mathscr{F}T(\zeta)|&=|\mathscr{F}({}^tPT)(\zeta)/p(\zeta)|\\&\leqq C\,e^{5\varepsilon|\zeta|+J_K(\zeta)}.\end{aligned}$$

D'après le théorème de Pólya-Ehrenpreis-Martineau, d'où la conclusion.

Comme tout ouvert convexe de $\mathbf{C}^n$ est de type de Runge, d'après théorème 2 et proposition 7, on a le théorème suivant:

Théorème 3. *Soient* $p(\partial_z)=\sum_\alpha a_\alpha\partial_z^\alpha$ *un opérateur différentiel non nul à coefficients constants sur* $\mathbf{C}^n$ *représenté par un homomorphisme continu* P *de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathcal{O}$ *et* Ω *un ouvert convexe de* $\mathbf{C}^n$. *Alors on a les énoncés suivants* (i) *et* (ii):

(i) *Pour toute fonction holomorphe* f *sur* Ω, *il existe* u *fonction holomorphe sur* Ω *tel que l'on ait*:

$$p(\partial_z)u=f \tag{21}$$

dans Ω.

(ii) *Toute solution* u *dans* $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ *de l'équation homogène*

$$p(\partial_z)u=0 \tag{22}$$

est approchée dans $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ *par des exponentielle-polynômes satisfaisant à l'équation* (22).

Corollaire. *Tout homomorphisme continu non nul* P *de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathcal{O}$ *qui définit un opérateur différentiel à coefficients constants est surjectif.*

Remarque. Dans ce mémoire, on a employé la manière de Trèves [8].

Références

[1] Avanissian, V., Fonctions plurisousharmoniques, différences de deux fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel, *C. R. Acad. Sc., Paris*, **252** (1961), 499–500.

[2] Bourbaki, N., *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, Paris, 1966 et 64.

[3] Hörmander, L., L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, *Acta. Math.*, **113** (1965), 89–152.

[4] Ishimura, R., Faisceaux et équations aux dérivées dans des domaines complexes, *thèse de maîtrise de la Faculté des Sciences de l'Université de Kyushu*, 1978 (en japonais).

[5] Ishimura, R., Homomorphismes du faisceau des germes de fonctions holomorphes dans lui-même et opérateur différentiel, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, **32** (1978).

[6] Malgrange, B., Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **6** (1955–56), 271–355.

[7] Trèves, F., *Linear partial differential equations with constant coefficients*, Gordon and Breach, New York, 1966.

[8] ———, *Locally convex spaces and linear partial differential equations*, Springer, Berlin, 1967.