*Publ. RIMS, Kyoto Univ.*
17 (1981), 95-111

# Quelques Propriétés Géométriques du Domaine de $F_1$ et le Groupe de Tresses Colorées

Par

Toshiaki TERADA*

## Introduction

Il s'agit actuellement du domaine $\mathcal{D}_n$ dans l'espace numérique des variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ défini par

$$\mathcal{D}_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,;\; x_i \neq 0, 1 \quad (1 \leqq i \leqq n),\; x_j \neq x_k \quad (1 \leqq j < k \leqq n)\},$$

sur l'espace de revêtement universel duquel reposent les fonctions hypergéométriques $F_D(\alpha, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, \gamma; x_1, x_2, \cdots, x_n)$ d'Appell-Lauricella [1], [12] que Lauricella a définies en imitant la méthode d'Appell. On est en trein de travailler à les étudier depuis l'article dernier [18], surtout le problème de Riemann et les fonctions automorphes en provenant. Or en rencontrant en chemin à la nécessité des recherches détaillées de $\mathcal{D}_n$, on va ici exposer les résultats concernant le groupe d'automorphismes et les propriétés topologiques. Ils sont non seulement indispensables pour nos recherches, mais eux-mêmes sont intéressants. Par exemple, son groupe fondamental est, grossièrement dire, le groupe de tresses colorées.

Dans Section 1, on définit $\mathcal{D}_n$ comme un domaine sur l'espace projectif muni du système des coordonnées homogènes aux déplacements qui consiste, en peu de mots, en $n+2$ nombres complexes avec l'équivalence par les transformations linéaires simultannées. En outre on y montre que le groupe d'automorphismes de $\mathcal{D}_n$ est, si $n \geqq 2$, isomorphe au groupe symétrique de permutations de degré $n+3$; il est bien connu si $n=1$. On va établir dans Section 2 que l'espace de revêtement universel $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ de $\mathcal{D}_n$ est homéomorphe à l'espace $\mathcal{E}$ qui consiste en courbes simples,

Communiqué par S. Hitotumatu, le 4 décemdre, 1978. Revu le 26 avril, 1980.

* Département des Mathématiques, Université de la Science Médicale de Shiga, Ōtsu 520-21, Japan.

fermées, rectilignes avec certaine équivalence, à l'aide duquel on peut réaliser $\widetilde{\mathscr{D}}_n$ sur le plan. Et dans Section 3, on détermine les générateurs et les relations du groupe fondamental de $\mathscr{D}_n$. C'était déjà achevé par Burau [6] avec la méthode algébrique. Mais nous le faisons de nouveau à la manière qui a les relations intimes avec $\mathscr{D}_n$.(*)

## § 1. Groupe d'Automorphismes du Domaine $\mathscr{D}_n$

Nous introduisons d'abord les coordonnées homogènes aux déplacements de l'espace projectif et, en les utilisant, définissons le domaine $\mathscr{D}_n$. Soit $x=(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ un assortiment des nombres complexes dont tous ne sont pas égaux. Quand on s'en donne deux $(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1})$ et $(x_0', x_1', \cdots, x_{n+1}')$, on dit qu'ils sont équivaux si et seulement s'il existe une constante complexe non nulle $c_1$ et une autre $c_2$ (peut être nulle) telles qu'on ait $x_i=c_1x_i'+c_2$ pour tout $0\leqq i\leqq n+1$. L'ensemble des classes de facteurs par cette équivalence n'est pas autre chose que l'espace projectif à $n$ dimensions $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{C})$. Dans cette circonstance, on désigne

$$\mathscr{D}_n=\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{C})\setminus\bigcup_{0\leqq i<j\leqq n+1} S_{ij};$$

$S_{ij}$ sont des hypersurfaces linéaires de $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{C})$ définies par $x_i=x_j$.

Pour étudier le groupe d'automorphismes de ce domaine $\mathscr{D}_n$, on préparera le

**Lemme 1.** *Soient $f_1, f_2, f_3$ des polynomes des $n+2$ variables $x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}$ de la forme*

$$f_i=c_i\prod_{0\leqq\alpha<\beta\leqq n+1}(x_\alpha-x_\beta)^{\lambda_{i\alpha\beta}}\quad(i=1, 2, 3);$$

*$c_i$ sont des constantes complexes et $\lambda_{i\alpha\beta}$ sont des entiers non négatifs. Alors, si $f_i$ sont reliés par $f_1+f_2+f_3=0$, il arrive l'un des trois cas suivants;*

1. $f_i=c_if$ *pour tout* $i=1, 2, 3$,
2. $f_i=c(x_{q_i}-x_{q_{i+1}})f$ *pour tout* $i$,
3. $f_i=c(x_{q_i}-x_{q_{i+1}})(x_{q_{i+2}}-x_r)f$ *pour tout* $i$,

(*) L'auteur, ayant ignoré qu'il existait déjà beaucoup de travaux sur ce sujet, est obligé au référant de l'avior indiqué.

*où $f$ est le produit des facteurs communs, où $c$ et $c_i$ $(1\leqq i\leqq 3)$ sont des constantes complexes et où $r$ et $q_i$ sont des entiers avec $q_i=q_j$ si $i\equiv j$* (mod 3).

En effet, c'est évident si $n=0$. Supposons que ce soit vrai lorsque le nombre des variables est moindre que $n+2$, et posons

$$f_i=g_ih_if \quad (i=1, 2, 3);$$

avec $g_i=\prod_{0\leqq\alpha\leqq n}(x_{n+1}-x_\alpha)^{m_{i\alpha}}$, $h_i=c_i\prod_{0\leqq\alpha<\beta\leqq n}(x_\alpha-x_\beta)^{m_{i\alpha\beta}}$, dont $g_ih_i$ sont premiers entre eux, dont $c_i$ sont constants et dont $m_{i\alpha}$ et $m_{i\alpha\beta}$ sont des entiers non négatifs. Désignons par $d_i$ le degré de $g_i$ en tant qu'un polynome en $x_{n+1}$.

Si $d_1=d_2=d_3=d$, $h_i$ admettent les hypothèses de ce lemme vu les coefficients de $x_{n+1}^d$. Donc $h_i$ sont dans l'un de ces trois cas. Au premier cas, si, pour un $p$ et $i$, $m_{ip}$ n'était pas nul, $g_ih_i$ ne seraient pas premiers entre eux, ce qu'on voit en posant $x_{n+1}=x_p$. Cela signifie que $g_i=1$ et que $f_i$ sont constants à facteur commun près. Si on a $h_i=c(x_{q_i}-x_{q_{i+1}})$, chaque $g_i$ ne dépend d'aucunes autres variables que $x_{n+1}$ et l'un des $x_{q_1}, x_{q_2}, x_{q_3}$ selon le raisonnement comme plus haut. Par suite les coefficients de $x_{n+1}^{d-1}$ montre que $g_i=1$ ou bien $g_i=x_{n+1}-x_{q_{i+2}}$; c'est-à-dire il arrive le deuxième ou respectivement le troisième cas. Supposons ensuite qu'on ait $h_i=c(x_{q_i}-x_{q_{i+1}})(x_{q_{i+2}}-x_r)$. En posant $x_{q_3}=x_r$ et respectivement $x_{q_1}=x_{q_2}$, on voit que $g_2$ et $g_3$ ne dépendent d'aucunes autres variables que l'un de $x_r$ et $x_{q_3}$ et respectivement l'un de $x_{q_1}$ et $x_{q_2}$ puisqu'en posant ainsi on a $f_2+f_3=0$. Conséquemment tous les $g_i$ sont constants; on est arrivé au troisième cas.

Si $d_1=d_2=d>d_3$, l'investigation de coefficients de $x_{n+1}^d$ établit $h_1=-h_2=c$ (constante). Parce que les coefficients de $x_{n+1}^{d-1}$ de $g_1$ et $g_2$ sont $-\sum_{0\leqq\alpha\leqq n}m_{1\alpha}x_\alpha$ et $-\sum_{0\leqq\alpha\leqq n}m_{2\alpha}x_\alpha$ et que $g_1h_1$ et $g_2h_2$ sont premiers entre eux, on a $d_3=d-1$, par suite il existe une constante $c_3$ et deux variables $x_r, x_q$ telles qu'on ait $h_3=c_3(x_q-x_r)$. Donc on a $d=1$ et en conséquence $g_1=x_{n+1}-x_q$ et $g_2=x_{n+1}-x_r$; c'est-à-dire il arrive le troisième cas. Quant aux autres cas, les démonstrations sont tout à fait parallèles. C.Q.F.D.

Nous allons ensuite étudier les transformations de $\mathcal{D}_n$ sur lui-même.

Etant donnée une permutation $P=\begin{pmatrix} 0\ 1 \cdots n+1\ \infty \\ p_0 p_1 \cdots p_{n+1}\ p_\infty \end{pmatrix}$ de degré $n+3$, définissons une transformation $T_P$: $T_P(x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}) = (x_0', x_1', \cdots, x_{n+1}')$ par la formule

$$\frac{x_i'-x_0'}{x_{n+1}'-x_0'}=\lim_{x_\infty\to\infty}\frac{x_{p_i}-x_{p_0}}{x_{p_i}-x_{p_\infty}}\Big/\frac{x_{p_{n+1}}-x_{p_0}}{x_{p_{n+1}}-x_{p_\infty}}.$$

Comme on le voit facilement, pour chaque $P$, $T_P$ est un automorphisme de $\mathcal{D}_n$ et cette correspondance entre $P$ et $T_P$ est un homomorphisme en tant que groupe; et de plus, lorsque $n\geqq 2$, on a $T_P=$unité si et seulement si $P$ est l'unité, et, losque $n=1$, on a $T_P=$unité si et seulement si $P$ est contenu dans $\{1, (10)(2\infty), (02)(1\infty), (0\infty)(12)\}$ où $(01)$, par exemple, est la transposition entre 1 et 0. Comme le théorème suivant le montre, il n'existe plus d'autres transformations de $\mathcal{D}_n$ sur lui-même qui ne dégénère pas en un point.

**Théorème 1.** *Soit $T$ une application analytique de $\mathcal{D}_n$ à lui-même dont l'image ne réduit pas à un point. Alors il existe une permutation $P=\begin{pmatrix} 0\ 1 \cdots n+1\ \infty \\ p_0 p_1 \cdots p_{n+1}\ p_\infty \end{pmatrix}$ de degré $n+3$ telle qu'on ait $T=T_P$. En conséquence, si $n\geqq 2$, le groupe d'automorphismes de $\mathcal{D}_n$ est isomorphe au groupe symétrique de degré $n+3$, et, si $n=1$, il est isomorphe à celle de degré 3.*

**Corollaire.** *Une transformation de $\mathcal{D}_n$ sur lui-même est un automorphisme ou bien son image consiste seulement en un point.*

En effet supposons que $T$ soit défini par

$$\frac{x_i'-x_0'}{x_{n+1}'-x_0}=g_i\left(\frac{x_1-x_0}{x_{n+1}-x_0}, \frac{x_2-x_0}{x_{n+1}-x_0}, \cdots, \frac{x_n-x_0}{x_{n+1}-x_0}\right),$$

où $\dfrac{x_i'-x_0'}{x_{n+1}'-x_0'}, \dfrac{x_i-x_0}{x_{n+1}-x_0}$ $(1\leqq i\leqq n)$ sont des coordonnées inhomigènes de $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{C})$. Comme l'image de $T$ est contenue dans $\mathcal{D}_n$, les $g_i$ ne prennent aucune des valeurs 0, 1, $\infty$; donc $g_i$ sont des fonctions rationnelles. Puisque $g_i$ ne prennent les valeurs 0, 1, $\infty$ que sur $\bigcup_{0\leqq i<j\leqq n+1} S_{ij}$, $g_i$ sont exprimés par $g_i=f_i/f_{n+1}$ où $f_i$ $(1\leqq i\leqq n)$ et $f_{n+1}$ sont des polynomes admettant les conditions du Lemme 1; ce qu'on voit en remplaçant $f_i$ et

respectivement $-f_{n+1}$ par $f_1$ et respectivement $f_2$. Donc, si tous les $g_i$ ne sont pas des constantes, on a, pour chaque $i$ fixé,

$$g_i=(x_{r_i}-x_{s_i})/(x_{r_i}-x_{t_i})$$

ou

$$g_i=(x_{a_i}-x_{c_i})(x_{b_i}-x_{d_i})/(x_{a_i}-x_{d_i})(x_{b_i}-x_{c_i});$$

$r_i$, $s_i$, $t_i$ et respectivement $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$ sont des entiers non négatifs, moindre que $n+2$, différents entre eux. Car, il est évident si aucuns des $g_i$ ne sont pas constants; si, pour un $i$, $g_i$ est égal à une constante $c_i$, il en est de même de tous les $g_i$; s'il existait un $g_j$ non constant, $g_j$ et $g_i/g_j=f_i/f_j$ admetteraient respectivement l'une des équations ci-dessus, et en conséquence on aurait $c_i=1$, ce qui est absurde.

Si deux fonctions $g_i$ et $g_j$ sont des fractions linéaires, on a l'un des trois cas suivants: (a) $r_i=r_j$, $s_i=s_j$ (b) $s_i=s_j$, $t_i=t_j$ (c) $t_i=t_j$, $r_i=r_j$, puisque $g_i/g_j=f_i/f_j$ est aussi une fraction linéaire ou quadratique. Or, dans cette circonstance, s'il existait une fraction quadratique $g_k$, on aurait, en changeant des notations en cas de nécessité, $b_k=r_i$, $c_k=t_i$, $d_k=s_i$, puisque $g_k/g_i$ est une fraction comme plus haut; c'est absurde puisque dans tous les cas (a), (b), (c) on a $r_i=r_j$ ou bien $t_i=t_j$. Donc tous les $g_i$ ou bien l'un au plus des $g_i$ sont des fractions linéaires. Au cas où tous le sont, on a pour toute paire $i$, $j$, une même paire des équations (a), (b) ou (c); conséquemment on a respectivement (a) $r_1=r_2=\cdots=r_n=r$, $s_1=s_2=\cdots=s_n=s$, (b) $s_1=s_2=\cdots=s_n=s$, $t_1=t_2=\cdots=t_n=t$, ou (c) $t_1=t_2=\cdots=t_n=t$, $r_1=r_2=\cdots=r_n=r$. Donc en posant respectivement (a) $p_0=\infty$, $p_i=t_i$ $(1\leqq i\leqq n)$, $p_{n+1}=s$, $p_\infty=r$, respectivement (b) $p_0=s$, $p_i=r_i$ $(1\leqq i\leqq n)$, $p_{n+1}=\infty$, $p_\infty=t$ ou respectivement (c) $p_0=r$, $p_i=s_i$ $(1\leqq i\leqq n)$, $p_{n+1}=t$, $p_\infty=\infty$, et $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots n+1 & \infty \\ p_0 & p_1 & \cdots p_{n+1} & p_\infty\end{pmatrix}$, on voit que $T$ coïncide avec $T_P$.

Au cas où tous les $g_i$, à l'exception possible de $g_k$, sont des fractions quadratiques, on a, en changeant des notations si nécessaire, que tous les $a_i$ sauf $a_k$ sont égaux et il en est de même de $c_i$ et de $d_i$ et qu'aucuns deux des $b_i$ $(1\leqq i\leqq n, i\neq k)$ ne se confondrent; car chaque $g_i/g_j$ est une fraction linéaire ou quadratique. Or, comme le nombre des variables est seulement $n+2$, il existe certainement une fraction linéaire $g_k$. Encore par le raisonnement souvant utilisé, on a $r_k=a_i$, $s_k=c_i$, $t_k=d_i$ $(1\leqq i$

$\leqq n,\ i\neq k)$. Donc, en posant $p_0=t_k,\ p_i=b_i\ (1\leqq i\leqq n,\ i\neq k),\ p_k=\infty,\ p_{n+1}=r_k,\ p_\infty=s_k$, on a $T=T_P$. C.Q.F.D.

## § 2. Espace $\mathcal{E}$

Nous nous occuperons maintenant à l'espace $\mathcal{E}$ qui est l'espace de quotient de toutes les courbes simples, fermées, rectilignes sur la sphère de Riemann par une certaine équivalence, et par lequel on réalise l'espace de revêtement universel $\tilde{\mathcal{D}}_n$ sur le plan. Il y aura beaucoup de ses réalisations (par exemple [10]) mais nous avons pour but d'examiner la représentation intégrale de fonctions hypergéométriques.

Etant donné un point $a=(a_0, a_1, \cdots, a_{n+1})$ de $\mathcal{D}_n$, on marque sur la sphère de Riemann $U$ avec la coordonnée $u$ les $n+3$ points $a_0, a_1, \cdots, a_{n+1}, a_\infty(=\infty)$, aucuns deux desquels ne sont évidemment égaux; on y trace une courbe $C_a$ simple, fermée, rectiligne qui passe tous ces points $a_0, a_1, \cdots, a_\infty$ par cet ordre et on désigne par $U(C_a)$ le domaine dont le contour est la courbe $C_a$ et qui s'en situe à gauche. Et puis désignons par $\Phi(C_a)$ l'ensemble des applications $\varphi$ de $C_a$ sur $U$ admettant que l'image $\varphi(C_a)$ est une courbe simple, fermée, rectiligne, que $\varphi(\infty)=\infty$ et que $\varphi$ donne un isomorphisme topologique entre $C_a$ et $\varphi(C_a)$. Etant donnés deux éléments $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ de $\Phi(C_a)$, on dit que $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$ sont équivalents ou $\varphi^{(1)}\sim\varphi^{(2)}$ si et seulement s'il existe deux constantes complexes $c_1(\neq 0)$, $c_2$ et une famille $\{\varphi_s\}_{0\leqq s\leqq 1}$ d'applications continues de $\Phi(C_a)$ telles qu'on ait $\varphi_1=c_1\varphi^{(2)}+c_2,\ \varphi_0=\varphi^{(1)}$ et $\varphi_s(a_i)=\varphi_0(a_i)$ pour tout $0\leqq s\leqq 1$ et $i=0, 1, \cdots, n+1, \infty$. Cela posé, désignons par $\mathcal{E}$ l'espace de quotient de $\Phi(C_a)$ par cette équivalence; on peut le regarder évidemment comme un espace topologique. Exactement dire, l'espace $\mathcal{E}$ dépend de $a$ et $C_a$, cependant, parce que tous les espaces ainsi obtenus sont isomorphes, il n'arrivera pas aucunes confusions même si on utilise cette notation qui n'en dépend pas.

D'ailleurs l'espace de revêtement universel $\tilde{\mathcal{D}}_n$ de $\mathcal{D}_n$ se détermine comme d'habitude. On se donne d'abord un point fixé $a=(a_0, a_1, \cdots, a_{n+1})$ de $\mathcal{D}_n$ et considère toutes les courbes dont le point de départ est $a$. Etant donnée une telle courbe $l$ définie par $x=x(t)$ (où $x_i=x_i(t)$ avec $0\leqq t\leqq 1,\ 0\leqq i\leqq n+1)$, la classe d'homotopie qui fixe les point $a=x(0)$

et $x(1)$ détermine un point de $\widetilde{\mathscr{D}}_n$ dont les coordonnées homogènes aux déplacements sont $x_0(1), x_1(1), \cdots, x_{n+1}(1)$.

Nous nous travaillons maintenant à montrer que $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\widetilde{\mathscr{D}}_n$. Etant donnés $a=(a_0, a_1, \cdots, a_{n+1}), C_a$ et $l$: $x=x(t)$ comme plus haut, on fait correspondre à chaque $l$ un élément de $\Phi(C_a)$ qui peut se regarder comme un point de $\mathcal{E}$. Ensuite on montre successivement que cette correspondance induit une application de $\widetilde{\mathscr{D}}_n$ sur $\mathcal{E}$, qu'elle est un monomorphisme et qu'elle et un épimorphisme.

Pour la courbe $l$, on peut construire une famille $\{\varphi_{l,t}\}_{0\leqq t\leqq 1}$ continue des applications de $\Phi(C_a)$ telle qu'on ait $\varphi_{l,t}(a_i)=x_i(t)$ et que $\varphi_{l,0}$ est l'application unité. Nous appelons cette famille $\{\varphi_{l,t}\}$ une déformation continue de $C_a$ le long de la courbe $l$. Evidemment, pour chaque $l$, la détermination de $\varphi_{l,t}$ n'est pas unique. Cependant l'élément de $\mathcal{E}$ représenté par ce $\varphi_{l,t}$ se détermine de la manière unique. En effet, $\varphi_{l,t}$ etant donné, on peut construire, une famille $\{\tilde{\varphi}_{l,t}\}_{0\leqq t\leqq 1}$ d'automorphismes topologiques de la sphère de Riemann $U$ telle qu'on ait $\tilde{\varphi}_{l,t}(u)=\varphi_{l,t}(u)$ sur $C_a$ et que $\tilde{\varphi}_{l,t}(U(C_a))$ soit le domaine situé à gauche de la contour $\varphi_{l,t}(C_a)$. Pour le voir, il ne faut que considérer d'abord les transformations conformes et puis que les modifier. Etant données deux déformations $\varphi^{(0)}_{l,t}, \varphi^{(1)}_{l,t}$ de $C_a$ le long de $l$, définissons la famille $\{\varphi_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ continue d'applications de $C_a$ sur $U$ par la formule

$$\varphi_t=\tilde{\varphi}^{(0)}_{l,1}\circ\tilde{\varphi}^{(0)^{-1}}_{l,t}\circ\varphi^{(1)}_{l,t}\,.$$

Puisqu'on a $\varphi^{(0)}_{l,1}=\varphi_0, \varphi^{(1)}_{l,1}=\varphi_1, \varphi_t(a_i)=\varphi_0(a_i)=x_i(1)$ $(0\leqq i\leqq n+1)$, on voit facilement que $\varphi^{(1)}_{l,1}$ et $\varphi^{(0)}_{l,1}$ sont équivalents et par suite que $\varphi_{l,t}$ se détermine de la manière unique à cette équivalence près.

Ensuite on va montrer que, lorsque $l$ est une courbe fermée homotope à zéro, $\varphi_{l,1}$ est équivalent à l'identité; c'est-à-dire on obtiendra une application de $\widetilde{\mathscr{D}}_n$ à $\mathcal{E}$. D'abord considérons le cas où $l$ vérifie

$$\sup\{|a_i-x_i(t)|;\ 0\leqq i\leqq n+1,\ 0\leqq t\leqq 1\}<\rho(a)\ ;$$

dont on pose en général $3\rho(x)=\inf\{|x_\alpha-x_\beta|;\ 0\leqq\alpha<\beta\leqq n+1\}$. Or, pour tout $i$, on peut balayer toutes les composantes connexes de $C_a\cap\{|u-a_i|\leqq\rho(a)\}$ sauf celle qui contient le point $a_i$; précisément dire, il existe une famille $\{\varphi_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ d'applications de $\Phi(C_a)$ telle qu'on ait

$\varphi_t(a_i)=a_i$ pour tout $0\leqq i\leqq n+1$ et $0\leqq t\leqq 1$, que $\varphi_0$ soit l'identité et que $\varphi_1(C_a)\cap\{|u-a_i|\leqq\rho(a)\}$ consiste d'une seule composante connexe. Pour la courbe $\varphi_1(C_a)$, on peut facilement construire une déformation $\varphi_{1,l,t}$ de $\varphi_1(C_a)$ le long de $l$ de façon que $\varphi_{1,l,t}$ soit l'identité sur $\bigcap_{0\leqq i\leqq n+1}\{|a_i-u|\geqq\rho(a)\}\cap\varphi_1(C_a)$ et que $\varphi_{1,l,1}=\varphi_{1,l,0}$. Ensuite considérons la courbe $l'$ définie par $x_i=a_i$ $(0\leqq t\leqq 1/2)$ et $x_i=x_i(2t-1)$ $(1/2\leqq t\leqq 1)$ et deux déformations $\varphi^{(1)}_{l',t}$, $\varphi^{(2)}_{l',t}$ le long de $l'$:

$$\varphi^{(1)}_{l',t}=\begin{cases}\varphi_{l,0} & (0\leqq t\leqq 1/2)\\ \varphi_{l,2t-1} & (1/2\leqq t\leqq 1)\end{cases}\quad \text{et}\quad \varphi^{(2)}_{l',t}=\begin{cases}\varphi_{2t} & (0\leqq t\leqq 1/2)\\ \varphi_{1,l,2t-1}\circ\varphi_1 & (1/2\leqq t\leqq 1)\end{cases}.$$

D'après ce qu'on vient d'établir, $\varphi^{(1)}_{l',1}$ et $\varphi^{(2)}_{l',1}$ sont équivalents et on peut voir, successivement, que $\varphi_{l,1}$ est équivalent à $\varphi_{1,l,1}\circ\varphi_1$, à $\varphi_{1,l,0}\circ\varphi_1$, à $\varphi_1$ et enfin à $\varphi_{l,0}$. Au cas où la courbe $l$ vérifie

$$x(t)=x(1-t)\qquad\qquad (0\leqq t\leqq 1/3)$$

et

$$|x_i(t)-x_i(1/3)|\leqq\rho(x(1/3))\qquad (1/3\leqq t\leqq 2/3),\ (0\leqq i\leqq n+1),$$

$\varphi_{l,0}$ est aussi équivalent à $\varphi_{l,1}$ par les deux résultats qui viennent d'être établis. Enfin, si $l$ est une courbe générale homotope à zéro, en utilisant cette homotopie, $l$ se décompose en produit des courbes admettant les conditions justement plus haut, et par suite $\varphi_{l,1}$ est équivalent à $\varphi_{l,0}$. Donc une application de $\mathscr{D}_n$ sur $\mathscr{E}$ est ainsi bien définie.

Il ne reste qu'à montrer que cette application est un isomorphisme. Pour une courbe fermée $l$ sur $\mathscr{D}_n$ et une déformation $\varphi_{l,s}$, supposons que $\varphi_{l,0}$ soit équivalent à $\varphi_{l,1}$. En ce cas, on peut supposer sans restreindre la généralité que $\varphi_{l,0}=\varphi_{l,1}$ et $\tilde{\varphi}_{l,0}=\tilde{\varphi}_{l,1}$. Considérons une famille $\{l_s\}_{0\leqq s\leqq 1}$ de courbes sur $\mathscr{D}_n$ définies par

$$x_i=\begin{cases}\tilde{\varphi}_{l,0}\circ\tilde{\varphi}^{-1}_{l,s}\circ\varphi_{l,t}(a_i) & (t\geqq s)\\ a_i & (t\leqq s)\end{cases}.$$

Il est évident que $l_0=l$ et que $l_1$ est la courbe dégénérée: $x_i=a_i$, ce qui signifie que $l$ est homotope à zéro et que l'application en problème est un monomorphisme. Nous nous donnons, par contre, un élément $\varphi$ de $\Phi(C_a)$ dont $U(C_a)\cap\tilde{\varphi}(U(C_a))$ contient un cercle fermé $\Delta$; cette condition ne restreint aucune généralité, puisque pour $\varphi$ arbitraire il existe un tel élément de $\Phi(C_a)$ équivalent à $\varphi$. Alors il existe deux familles continues $\{\varphi_s^{(1)}\}_{0\leqq s\leqq 1}$, $\{\varphi_s^{(2)}\}_{0\leqq s\leqq 1}$ d'automorphismes topologiques de la sphère de Riemann $U$ telles que $\varphi_0^{(1)}$ et $\varphi_0^{(2)}$ soient l'identité, que $\varphi_1^{(1)}(C_a)=\partial\varDelta$, $\varphi_1^{(2)}(\varphi(C_a))=\partial\varDelta$, et que $\varphi_1^{(1)}(u)=\varphi_1^{(2)}(\varphi(u))$ pour tout $u\in C_a$; pour cela, il ne faut que modifier des familles des applications conformes. Cela posé, définissons une famille $\{\varphi_t\}_{0\leqq t\leqq 1}$ d'éléments de $\varPhi(C_a)$ :

$$\varphi_t=\begin{cases}\varphi_{2t}^{(1)} & (0\leqq t\leqq 1/2)\\ \varphi_{2t-1}^{(2)-1}\circ\varphi_1^{(1)} & (1/2\leqq t\leqq 1)\end{cases}.$$

Il est évident que $\varphi_1=\varphi$ et que $\varphi_t$ est une déformation de $C_a$ le long de la courbe $l$ définie par $x_i=x_i(t)=\varphi_t(a_i)$ $(0\leqq i\leqq n+1)$.

En conséquence nous sommes arrivés au

**Théorème 2.**(*) *L'espace $\tilde{\mathcal{D}}_n$ de revêtement universel du domaine $\mathcal{D}_n$ est topologiquement isomorphe à l'espace $\mathcal{E}$ dont un point est représenté par une courbe simple, fermée, rectiligne, passant les $n+3$ points différents sur la sphère de Riemann. Et de plus il en est de même en sense analytique.*

En effect, on vient d'établir qu'il existe une correspondence biunivoque. Les autres parties de ce théorème est évident si on introduit la structure topologique ou analytique naturelle sur $\mathcal{E}$.

**Corollaire.** *L'espace $\tilde{\mathcal{D}}_n$ est contractile.*

En effet, c'est bien connu (voir par exemple [2], [10], [11]). Pour le voir à notre manière, il ne faut que considérer un monomorphisme continu de $\tilde{\mathcal{D}}_n$ à $\varPhi(C_a)$, dont la démonstration est tour à fait pareille.

## § 3. Groupe Fondamental de $\mathcal{D}_n$

Maintenant nous nous metton à déterminer les générateurs et les relations du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{D}_n, a)$ qui fixe le point $a$. Il est isomorphe à $H_{n+2}/Z_{n+2}$ et on a la suite exacte

(*) C'était déjà énoncé dans [3], cependant MM. Takeuchi et Yoshioka ont indiqué l'insuffisance de démonstrations.

$$1 \to H_n \to B_n \to \Sigma_n \to 1$$

où $H_n$, $Z_n$, $B_n$, $\Sigma_n$ sont respectivement le groupe de tresses colorées, son centre, le groupe de tresses, le groupe symétrique. $B_n$ est introduit par Artin [3] et beaucoup d'auteurs ont depuis examiné $B_n$ et $H_n$. En outre, il existe déjà plusieur présentations des générateurs et des relations de $H_n$ [4], [6], [14], [17]. Mais elles ne sont pas tellement commodes à étudier le domaine $\mathcal{D}_n$ parce que les significations géométriques (en notre sens) ne sont pas claires. Donc nous en exposerons une nouvelle. D'ailleurs nous renvoyons aux bibliographies les autres propriétés de ces groupes.

Nous commençons par préparer quelques définitions et notations. Désignons $\boldsymbol{N}_n = \{0, 1, \cdots, n+1\}$, $n$ étant un entier non négatif. Etant donnés $a$, $C_a$ sur la sphère de Riemann $U$ et deux entiers différents $i, j \in \boldsymbol{N}_n$, on considère une courbe simple: $u = u_{ij}(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ telle que $u_{ij}(0) = a_i$, $u_{ij}(1) = a_j$, $u_{ij}(\mathrm{t}) = u_{ji}(1-t)$ et que $u_{ij}(t)$ soit contenu dans le domaine $U(C_a)$ pourvu que $0 < t < 1$ et une familles de fonctions $h_{C_a, ij, s}(t)$ dont la courbe: $u = h_{C_a, ij, s}(t)$ est un lacet par rapport à $u_{ij}(s)$ partant de $a_i$. Pour $I = \{i_\alpha\} \subset \boldsymbol{N}_n$, on suppose toujours $i_\alpha < i_\beta$ si $\alpha < \beta$. Pour chaque paire $i, j \in \boldsymbol{N}_n$, on désigne par $A_{ij}$ l'élément de $\pi_1(\mathcal{D}_n, a)$ représenté par la courbe: $x_\alpha = a_\alpha \, (i \neq \alpha)$, $x_i = h_{C_a, ij, 1}(t)$.

*Remarque* 1. Deux assortiment $(x)$, $(x')$ de $n+2$ nombres complexes dont aucuns deux ne sont égaux étant donnés, disons, de nouveau, que $(x)$ est équivalent à $(x')$ si et seulement si on a $x_0 - x'_0 = \cdots = x_{n+1} - x'_{n+1}$, et définissons $A_{ij}$ par la courbe donnée par la même formule plus haut dans ce nouvel sepace. Alors $A_{ij}$ peut se regarder comme étant un élément du groupe de tresses colorées. Lorsque $i < j$, en utilisant les éléments $\sigma_\alpha$ $(\alpha = 0, \cdots, n)$ du groupe de tresses $B_{n+2}$, on peut écrire $A_{ij} = \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-2} \cdots \sigma_i$ et $A_{ji} = \sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}$. Par suite, beaucoup de problèmes sur $\pi_1(\mathcal{D}_n, a)$ se réduisent à ceux de $B_{n+2}$.

Etant donné un groupe $G_n$ engendré par $\{A_{ij};\, i, j \in \boldsymbol{N}_n,\, i \neq j\}$, on pose, pour $I = \{i_\alpha;\, \alpha \in \boldsymbol{N}_p\}$,

$$A_{i_0 i_1 \cdots i_p; i_{p+1}} = A_{i_0 i_{p+1}} A_{i_1 i_{p+1}} \cdots A_{i_p i_{p+1}},$$

$$A_I = A_{i_0 i_1 \cdots i_{p+1}} = A_{i_0; i_1} A_{i_0 i_1; i_2} \cdots A_{i_0 i_1 \cdots i_p; i_{p+1}},$$

dont les significations géométriques sont évidentes. Et on dit que $G_n$ admet les relations $\boldsymbol{R}_0^n$ si on a $A_{ij} = A_{ji}$ pour tout $i, j \in \boldsymbol{N}_n$, que $G_n$ admet $\boldsymbol{R}_q^n(I)$ si on a, pour tout $J = \{j_\beta; \beta \in \boldsymbol{N}_q\}$ avec $q \leqq p$ et $J \subset I$, $A_J \leftrightarrow A_{j_\alpha j_\beta}$ où $\leftrightarrow$ signifie la commutativité, et que $G_n$ admet $\boldsymbol{R}_n^n$ si on a $A_{01 \cdots n+1} = 1$ (unité de $G_n$). Etant donnés $I \subset \boldsymbol{N}_n$ et un $\eta$ positif, on écrit

$$S_I(\eta) = \bigcap_{\alpha \in \boldsymbol{N}_p} \{x = (x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}) ; x \in \mathcal{D}_n,$$
$$|x_{i_\alpha} - x_{i_0}| < \eta \sup \{|x_i - x_{i_0}|; i \in \boldsymbol{N}_n \setminus I\}\}$$

et $\mathring{S}_I(\eta)$ est l'ensemble des points de l'intérieur.

**Théorème 3.** *Le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{D}_n, a)$ est engendré par $\{A_{ij}; i, j \in \boldsymbol{N}_n, i \neq j\}$, et les relations entre ces éléments se reduisent à l'ensemble des relations $\boldsymbol{R}_0^n$, $\boldsymbol{R}_1^n(\boldsymbol{N}_n)$, $\boldsymbol{R}_2^n(\boldsymbol{N}_n)$, $\boldsymbol{R}_n^n$. Donc on peut choisir les $(n+1)(n+2)/2-1$ éléments comme ses générateurs.*

En utilisant les notations dans Remarque 1, et en répétant les démonstrations de ce théorème, on a le

**Corollaire.** *Le groupe de tresses colorées est engendré par $\{A_{ij}; i, j \in \boldsymbol{N}_n, i \neq j\}$ et les relations entre ces éléments se reduisent à l'ensemble des relations $\boldsymbol{R}_0^n$, $\boldsymbol{R}_1^n(\boldsymbol{N}_n)$, $\boldsymbol{R}_2^n(\boldsymbol{N}_n)$.*

Le reste de cette article est consacré à la démonstration de ce théorème. D'abord, quant aux $\boldsymbol{R}_0^n$, il ne faut que considérer la famille des courbes:

$$x_i = h_{C_a, ij, s}(t), \quad x_j = h_{C_a, ji, 1-s}(t), \quad x_\alpha = a_\alpha \quad (\alpha \neq i, j) \quad (0 \leqq s, t \leqq 1).$$

Pour poursuivre la preuve, il faudra quelques lemmes.

**Lemme 2.** *Soit $G_n$ un groupe engendré par $\{A_{ij}; i, j \in \boldsymbol{N}_n, i \neq j\}$ qui admet les relations $\boldsymbol{R}_0^n$, $\boldsymbol{R}_1^n(\boldsymbol{N}_n)$, $\boldsymbol{R}_2^n(\boldsymbol{N}_n)$. Alor on voit que*

(1) *un sous-ensemble $I = \{i_0, i_1, i_2, i_3\}$ de $\boldsymbol{N}_n$ étant donné, on a*

(1. 1) $A_{i_0i_1} \leftrightarrow A_{i_2i_3}$, (1. 2) $A_{i_0i_3} \leftrightarrow A_{i_1i_2}$,

(1. 3) $A_{i_0i_2} \leftrightarrow A_{i_0i_1}^{-1} A_{i_1i_3} A_{i_0i_1}$, (1. 4) $A_{i_1i_3} \leftrightarrow A_{i_0i_3}^{-1} A_{i_0i_2} A_{i_0i_3}$;

(2) *étant donné* $I = \{i_\alpha \cdot \alpha \in N_p\}$, *on a*

(2. 1) $A_{i_\alpha i_\beta} \leftrightarrow A_{i_1i_2\cdots i_{p+1}; i_0}$ $(0 < \alpha < \beta \leqq p+1)$

(2. 2) $A_{i_\alpha i_\beta} \leftrightarrow A_{i_0i_1\cdots i_p; i_{p+1}}$ $(0 \leqq \alpha < \beta < p+1)$

(2. 3) $A_I = A_{i_1i_2\cdots i_{p+1}; i_0} A_{i_1i_2\cdots i_{p+1}} = A_{i_1i_2\cdots i_{p+1}} A_{i_1i_2\cdots i_{p+1}; i_0}$,

(3) $G_n$ *admet les relations* $\boldsymbol{R}_p^n(N_n)$ *pour* $3 \leqq p \leqq n$.

En effet, on peut supposer $i_\alpha = \alpha$. On a $A_I = A_{20}A_{21}A_{30}A_{31}A_{32}A_{10}$ par $A_I \leftrightarrow A_{10}$; d'après $A_{10} \leftrightarrow A_{012}$ et $A_{10} \leftrightarrow A_{013}$, on a $A_I = A_{20}A_{21}A_{30}A_{31}A_{10}A_{32}$ ce qui montre (1. 1). Selon $A_{21} \leftrightarrow A_{012}$, $A_I \leftrightarrow A_{12}$ et $A_{123} \leftrightarrow A_{12}$, on voit (1. 2). En utilisant successivement $A_{32} \leftrightarrow A_I$, (1. 1), $A_I \leftrightarrow A_{10}$, (1. 2), on a $A_I = A_{32}A_{20}A_{30}A_{12}A_{10}A_{10}^{-1}A_{31}A_{10}$. En combinaisant la formule qu'on en obtient en utilisant $A_{32} \leftrightarrow A_{023}$ et $A_I \leftrightarrow A_{20}$ avec celle obtenue en usant de $A_{023} \leftrightarrow A_{30}$ et $A_{20} \leftrightarrow A_{012}$, on a (1. 3). Par $A_{012} \leftrightarrow A_{21}$ et $A_I \leftrightarrow A_{32}$, on a $A_I = A_{32}A_{21}A_{10}A_{30}A_{30}^{-1}A_{20}A_{30}A_{31}$. En le transformant par $A_I \leftrightarrow A_{31}$, $A_{13} \leftrightarrow A_{123}$ et $A_{13} \leftrightarrow A_{013}$, on a (1. 4). Pour montrer (2. 1), il ne faut que montrer $A_{\alpha\beta} \leftrightarrow A$ où $A = A_{\alpha\ \alpha+1 \cdots \beta; 0}$ vu (1. 1), (1. 2). Puisqu'on a

$$A_{\alpha\beta}A = A_{0\alpha}A_{0\alpha}^{-1}A_{\alpha\beta}A_{0\alpha}A_{0\ \alpha+1}\cdots A_{0\beta},$$

en appliquant les relations $A_{0\alpha}^{-1}A_{\alpha\beta}A_{0\alpha} \leftrightarrow A_{0\gamma}$ $(\gamma = \alpha+1, \cdots, \beta-1)$ et $A_{\alpha\beta} \leftrightarrow A_{0\alpha\beta}$, on voit (2. 1). (2. 2) se démontre parallèlement à (2. 1). D'ailleurs on a, par la définition et (1. 2),

$$A_I = A_{01}A_{02}A_{1;2}\cdots A_{0\ p+1}A_{12\cdots p; p+1} = A_{12\cdots p-1; 0}A_{12\cdots p+1},$$

ce qui signifie la première égalité de (2. 3). La deuxième est obtenue en appliquant (2. 1). Quant à (3), on voit $A_I \leftrightarrow A_{\alpha\beta}$ si $\{\alpha, \beta\} \neq \{0, p+1\}$, en appliquant (2), par la récurrence par rapport à $p$. Lorsqu'il s'agit $A_{0\ p+1} \leftrightarrow A_I$, en tenant compte la formule

$$A_I = A_{12\cdots p}A \quad (\text{avec } A = A_{12\cdots p; p+1}A_{12\cdots p+1; 0}),$$

et (1. 2), nous n'avons qu'à montrer $A_{0\ p+1} \leftrightarrow A$. Or, comme on a, par (1. 2),

$$A = A_{1\ p+1}A_{01}A_{2\ p+1}A_{20}\cdots A_{p\ p+1}A_{0\ p+1},$$

en appliquant successivement les relations $A_{0\,p+1} \leftrightarrow A_{0\,\alpha\,p+1}$ $(1 \leqq \alpha \leqq p)$, on a $A \leftrightarrow A_{0\,p+1}$. C.Q.F.D.

**Lemme 3.** *Soient $f(t): x_i = f_i(t)$ une application continue d'un carré $T = \{t = (t_1, t_2); 0 \leqq t_1, t_2 \leqq 1\}$ sur $\mathfrak{D}_n$. $\eta$ une constante avec $0 < \eta \leqq 1$, $T_0$ un sous-ensemble fermé de $T$ et $I = \{i_\alpha; \alpha \in N_{n-3}\}$* un sous-ensemble de $N_n$. Alors, si $f(T_0) \subset \mathring{S}_I(\eta)$, il existe une famille continue $\{F_s(t)\}$ $(0 \leqq s \leqq 1)$ d'applications continues de $T$ sur $\mathfrak{D}_n$ dont on a $F_0(t) \equiv f(t)$, $F_1(T) \subset S_I(\eta)$ *et* $F_s(t) = f(t)$ si $t \in T_0$.

En effect, on peut choisir une constante $\eta_1$ positive, moindre que $\eta$ et un voisinage $T_1$ de $T_0$ de façon qu'on ait $f(T_1) \subset S_I(\eta_1)$. Ensuite posons

$$E_t = \bigcup_{0 \leqq \alpha \leqq p+1} \{u; 0 \leqq (u - f_{i_0}(t))/(f_{i_\alpha}(t) - f_{i_0}(t)) \leqq 1\}$$

et

$$E_t(\varepsilon) = \{u; \text{(distance entre } u \text{ et } E_t) \leqq \varepsilon\}.$$

En posant $\{j_1, j_2, j_3\} = N_n \backslash I$, considérons d'abord le cas où $\bigcap_{\beta=1,2,3} L_\beta = \phi$ avec $L_\beta = \{t; f_{j_\beta}(t) \in E_t\}$, et choisissons $\varepsilon$ suffisamment petit tel qu'on ait $\bigcap_{\beta=1,2,3} = \{t; f_{j_\beta}(t) \in E_t(\varepsilon)\} = \phi$. Cela posé, on définit une famille $\{F_s(t)\}$ $(0 \leqq s \leqq 1)$ d'applications de $T$ sur $\mathfrak{D}_n$ comme ce qui suit.

$$x_i = f_i(t) \quad (i \in I)$$

$$x_{j_\beta} = f_{i_0}(t) + (f_{j_\beta}(t) - f_{i_0}(t))$$

$$\times \left(1 + \frac{sg(t) d_t(f_{j_\beta}(t)) \sup\{|f_{i_\alpha}(t) - f_{i_0}(t)|; t \in T, \alpha \in N_{n-3}\}}{\varepsilon \eta \inf\{|f_{j_\beta}(t) - f_{i_0}(t); t \in T, \beta = 1, 2, 3\}}\right),$$

où $g(t)$ est une fonction continue sur $T$ dont $0 \leqq g(t) \leqq 1$, $g(t) = 1$ $(t \notin T_1)$ et $g(t) = 0$ $(t \in T_0)$. Il est évident que $F_s(t)$ admet toutes les conditions données.

En cas général, on peut supposer que la frontière de $T_1$ est une réunion finie de courbes rectilignes, simples. En triangulisant $T \backslash T_1$ assez finement, on peut supposer que $f(t)$ soit linéaire sur chaque triangle et que $L_\beta$ $(\beta = 1, 2, 3)$ soient des réunions finies de courbes rectilignes, ce qui est achevé en déformant $f(t)$ continûment. Encore par une déformation continue de $f(t)$, on peut supposer $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \phi$. Donc le cas général se réduit au celui particulier. C.Q.F.D.

**Corollaire.** *Soient $\eta$ et $I$ comme plus haut. Alors, si $a \in S_I(\eta)$, l'application naturelle de $\pi_1(S_I(\eta), a)$ sur $\pi_1(\mathcal{D}_n, a)$ est un isomorphisme.*

En effect, par ce lemme on peut transporter toute courbe et toute homotopie sur $\mathcal{D}_n$ à celles sur $S_I(\eta)$.

Maintenant, étant donnés un sous-ensemble $I=\{i_\alpha; \alpha \in \boldsymbol{N}_{n-1}\}$ de $\boldsymbol{N}_n$, une constante $\eta$ avec $0<\eta \leqq 1$, et un point réel $b=(b_i)$ de $S_I(\eta)$ avec $b_0<b_1<\cdots<b_{n+1}<1$ et $b_{n+1}-b_0<\eta$, posons $\{j\}=\boldsymbol{N}_n \backslash I$ et $a_{i_\alpha}=b_{i_\alpha}$ ($\alpha \in \boldsymbol{N}_{n-1}$), $a_j=b_j-\sqrt{-1}\sqrt{1-b_j^2}$, et considérons la courbe fermé $C_a$ dont $U(C_a)$ est la réunion du demi-plan supérieur et d'un voisinage suffisamment petit de $\{u; \operatorname{Re} u=b_j, -\sqrt{1-b_j^2}<\operatorname{Im} u \leqq 0\}$.

Avec ce $C_a$, définissons les fonctions $h_{C_a, ik, s}(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ avec $|h_{C_a \cdot i_\alpha i_\beta, 1}(t)-a_{i_0}|<\eta$ et par suite les éléments $A_{ik}$ de $\pi_1(\mathcal{D}_n, a)$, qui est un élément de $\pi_1(S_I(\eta), a)$ si $i, k \neq j$. En cette circonstance on aura le

**Lemme 4.** *Les notations étant comme plus haut, si le théorème 3 est vrai pour $\mathcal{D}_{n-1}$, on peut montrer que $\pi_1(S_I(\eta), a)$ est engendré par $\{A_{i_\alpha i_\beta}; \alpha, \beta \in \boldsymbol{N}_{n-1}, \alpha \neq \beta\}$ et les relations se réduisent à $\boldsymbol{R}_0^n(I)$, $\boldsymbol{R}_1^n(I)$, $\boldsymbol{R}_2^n(I)$.*

En effect, practiquons d'abord le $\sigma$-processus de Hopf en posant

$$(**)\qquad \frac{(x_{i_1}-x_{i_0})/(x_j-x_{i_0})}{\xi_1-\xi_0}=\frac{(x_{i_2}-x_{i_0})/(x_j-x_{i_0})}{\xi_2-\xi_0}$$

$$=\cdots=\frac{(x_{i_n}-x_{i_0})/(x_j-x_{i_0})}{\xi_n-\xi_0},$$

où $\xi=(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ sont les coordonnées homogènes aux déplacements de $\boldsymbol{P}_{n-1}(\boldsymbol{C})$. Alors on voit

$$S_I(\eta)=\bigcap_{\alpha \in \boldsymbol{N}_{n-1}}\{(\xi, v); \xi \in \mathcal{D}_{n-1}, |v| \leqq \eta|\xi_n-\xi_0|/|\xi_\alpha-\xi_0|\},$$

où $v=(x_{i_n}-x_{i_0})/(x_j-x_{i_0})$. Par une application $f$ de $S_I(\eta)$ sur $\mathcal{D}_{n-1} \times \{0<|v| \leqq \eta\}$ qui fixe le point $a$, qui est un homéomorphisme topologique et qui est de la forme $f:(\xi, v) \mapsto (\xi, g(\xi, v) v)$ où $g(\xi, v)$ est une fonction continue à valeur positive, on voit que $S_I(\eta)$ est topologiquement isomorphe à $\mathcal{D}_{n-1}\times\{0<|v|\leqq\eta\}$.

Sur la sphère de Riemann $U$, prenons une collection des points $b'_0$, $b'_1, \cdots, b'_n$ et un autre $v_0$ qui admet (**) avec $a_{i_\alpha}=x_{i_\alpha}$, $\xi_\alpha=b'_\alpha$ et $v_0=(a_{i_n}-a_{i_0})/(a_j-a_{i_0})$, et traçons la courbe $C'_{b'}$ qui est l'axe réelle. Avec les points $b'_\alpha$, la courbe $C'_{b'}$ et les entiers $k, l\in \boldsymbol{N}_{n-1}$, considérons les fonctions $h_{C'_{b'},kl,1}(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ et, en les utilisant, les éléments $A'_{kl}$ de $\pi_1(\mathcal{D}_{n-1}\times\{0<|v|\leqq\eta\},\ (b', v_0))$ représentés par la courbe: $v=v_0$, $\xi_\alpha=b'_\alpha\ (\alpha\neq k)$, $\xi_k=h_{C'_{b'},kl,1}(t)$. D'ailleurs désignons $A'_I$ la classe représentée par la courbe: $\xi_i=b'_i$ $(0\leqq i\leqq n)$, $v=v_0\exp(2\pi\sqrt{-1}t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$.

Par l'hypothèse de récurrence, $\pi_1(\mathcal{D}_{n-1}\times\{0<|v|\leqq\eta\},\ (b', v_0))$ est bien déterminé en utilisant ces éléments et il en est de même de $\pi_1(S_I(\eta), a)$; $\pi_1(S_I(\eta), a)$ est engendré par les $A'_{kl}\,(k, l\in\boldsymbol{N}_{n-1}, k\neq l)$ et $A'_I$, et les relations se réduisent à $\boldsymbol{R}_0^{n-1}(\boldsymbol{N}_{n-1})$, $\boldsymbol{R}_1^{n-1}(\boldsymbol{N}_{n-1})$, $\boldsymbol{R}_2^{n-1}(\boldsymbol{N}_{n-1})$, $\boldsymbol{R}_{n-1}^{n-1}$ pour les $A'_{kl}$ et à $A'_I\leftrightarrow A'_{kl}$; où $A'_{kl}$ signifie aussi l'élément de $\pi_1(S_I(\eta), a)$ qui provient de l'élément $A'_{kl}$ de $\mathcal{D}_{n-1}\times\{0<|v|\leqq\eta\}$ par l'application inverse $f^{-1}$, et il en est de même de $A'_I$; il en n'arrivera pas de confusions.

Ensuite examinons les relations entre $A_{i_ki_l}$ et $A'_{kl}$, $A'_I$. D'abord on a $A'_{kl}=A_{i_ki_l}$ pourvu $\{k, l\}\neq\{0, n\}$, en considérant $x_j$ et $x_{i_0}$ toujours fixés. Car, si $k\neq 0, n$ on le voit facilement en comparant deux courbes qui représentent $A_{i_ki_l}$ et $A'_{kl}$, et en autres cas on l'a par la relation $A'_{kl}=A'_{lk}=A_{i_li_k}=A_{i_ki_l}$. Quant à $A'_{n0}$, considérons $A'_{01\cdots n-1;n}$ qui est évidemment représenté par la courbe:

$$\xi_n=b_0+(b_n-b_0)\exp(2\pi\sqrt{-1}t)\quad(0\leqq t\leqq 1),\ \xi_\alpha=b_\alpha\quad(\alpha\in\boldsymbol{N}_{n-2}),\ v=v_0.$$

La même classe de cette courbe est aussi représentée par

$$x_i=a_i,\ (i=i_n, j, i_0),\ x_{i_\alpha}=a_{i_0}+(a_{i_\alpha}-a_{i_0})\exp(-2\pi\sqrt{-1}t),$$
$$(0<\alpha<n),\ (0\leqq t\leqq 1).$$

A l'aide du Lemme 2 et par une déformation homotope, on voit

$$A'_{01\cdots n-1;n}=A^{-1}_{i_0i_1\cdots i_{n-1}}.$$

Donc on a $A'_{n0}=A^{-1}_{i_0i_1\cdots i_{n-1}}A^{-1}_{i_1i_2\cdots i_n}=A^{-1}_{i_0i_1\cdots i_n}A_{i_0i_n}$. D'ailleurs par le raisonnement parallèle, on a $A'_I=A_I$.

Donc, en traduisant les relations entre $A'_{kl}$ en celles entre $A_{i_ki_l}$, on obtient les relations données; où on utilise le Lemme 2. C.Q.F.D.

**Corollaire.** *On se donne deux sous-ensembles* $I=\{i_\alpha; \alpha\in \boldsymbol{N}_p\}$, $J=\{j_\beta; 1\leqq\beta\leqq q\}$ *de* $\boldsymbol{N}_n$ *avec* $I\cup J=\boldsymbol{N}_n$, $p+q=n$, *une collection de nombres* $b_0, b_1, \cdots, b_{n+1}$ *tels que* $b_0<b_1<\cdots<b_{n+1}$, $b_{n+1}-b_0<1$, $b_0=0$ *et on pose* $a_{i_\alpha}=b_{i_\alpha}(\alpha\in\boldsymbol{N}_p)$, $a_{j_\beta}=b_{j_\beta}-\sqrt{-1}\sqrt{1-b_{j_\beta}^2}$ $(1\leqq\beta\leqq q)$. *Et soit*

$$D=\{x; x\in\mathcal{D}_n, |x_{j_\beta}|=1\ (1\leqq\beta\leqq q),\ x_{i_0}=0, |x_{i_\alpha}|<1\ (1\leqq\alpha\leqq p+1)\}$$

*un sous-ensemble de* $\mathcal{D}_n$. *Alors* $\pi_1(D,a)$ *est engendé par les* $A_{i_\alpha i_\beta}$ $(\alpha\neq\beta, \alpha, \beta\in\boldsymbol{N}_p)$ ; $A_{i_\alpha i_\beta}$ *est défini comme plus haut où* $U(C_a)$ *est la réunion du demi-plan supérieur et de* $\bigcup_{1\leqq\beta\leqq q}\{u; \operatorname{Re} u=b_{j_\beta}, 0\geqq\operatorname{Im} u>-\sqrt{1-b_{j_\beta}^2}\}$.

En effet, parce que les coordonnées homogènes aux déplacements admettent une transformation linéaire simultanée, on peut supposer $x_{j_1}$ toujours fixé, et par suite, il en est de même de tous les $x_{j_\beta}$ $(1\leqq\beta\leqq q)$. Ainsi on est arrivé aux situations parallèles à ce lemme.

Maintenant nous complétons la démonstration. Soient $I$, $J$ et $a$ comme étant dans le corollaire du Lemme 4 avec $p=n-3$ et $q=3$. D'après le corollaire du Lemme 3, il ne faut que considérer $\pi_1(S_I(1), a)$. Posons

$$K_\beta=\{x; x\in\mathcal{D}_n, x_{i_0}=0, |x_i|\leqq 1\ \ (i\neq j_\beta, i_0), |x_{j_\beta}|=1\}.$$

$K_\beta$ n'est autre chose que $S_{01\cdots\hat{j}_\beta\cdots n+1}(1)$. Parce que $a\in\bigcap_{\beta=1,2,3}K_\beta$, $\pi_1(K_\beta, a)$ sont déterminés par le corollaire du Lemme 3. Or les générateurs de $\pi_1(K_1\cap K_2, a)$ sont donnés par le corollaire du Lemme 4. Donc on peut savoir $\pi_1(K_1\cup K_2, a)$ par le théorème bien connu. En remarquant que la courbe: $x_i=a_i\exp 2\pi\sqrt{-1}t$, d'une part, dégénère en le point $a$, et, d'autre part, exprime $A_{01\cdots n+1}$, on voit que $\pi_1(K_1\cup K_2, a)$ est donné par les générateurs et les relations du Théorème 3. Ensuite par le même procédé, on peut savoir $\pi_1((K_1\cup K_2)\cup K_3, a)$. Comme $K_1\cup K_2\cup K_3$ $=S_I(1)$, la démonstration est finie.

*Remarque* 2. Comme on le voit facilement par les démonstrations, toutes les relations du Théorème 3 ne sont pas nécessaires pour déterminer $\pi_1(\mathcal{D}_n, a)$. Par exemple, au cas où $n=2$, on peut éliminer un de $\boldsymbol{R}_1^2(\boldsymbol{N}_2)$.

## Références


[1] Appell, P., Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables, *J. de Math.*, 8 (1882), 173-216.

[2] Arnol'd, V. I., The cohomology ring of the colored braid group, *Math. Notes Academy Sci. USSR*, **5** (1969), 138-140.

[3] Artin, E., Theorie der Zöpfe, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 4 (1926), 47-72.

[4] ———, Theory of Braids, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 101-126.

[5] Bohnenblust, F., The Algebraic Braid Groups, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 127-136.

[6] Burau, W., Über Zopfinvarianten, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **9** (1933), 117-124.

[7] ———, Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettung, *ibid.*, **11** (1936), 171-178.

[8] Brieskorn, E., Sur les groupes de tresses d'après V. I. Arnol'd, *Sém. Bourbaki* 24$^e$ *année* (1971/72), **401**, *Lecture Notes in Math.*, **317**, Springer.

[9] Chow, W. L., On the Algebraical Braid Group, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 654-658.

[10] Delingne, P., Les immeubles des groupes de tresses généralisées, *Invent. Math.*, **17** (1972), 273-302.

[11] Fox, R. H. and Neuwirth, L., The Braid Groups, *Math. Scand.*, **10** (1962), 119-126.

[12] Lauricella, G., Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili, *Randiconti di Palermo*, **7** (1893), 111-158.

[13] Magnus, W., Braid groups, a survey, *Proc. 2$^{nd}$ Intern. Conf. on theory of groups, Lecture Notes in Math.*, **372**, Springer.

[14] Magnus, W., Karras, A. and Solitar, D., *Combinatorial Group Theory, Presentation of Groups in Terms of Generators and Relations*, Pure and Appl. Math., Interscience.

[15] Markoff, A. A., *Foundations of the Algebraic Theory of Tresses, Trav. Inst. Math. Stekloff*, **16**, 1945.

[16] Seifert, H. and Threlfall, W., *Lehrbuch der Topologie*, 1934, Teubner, Leibzig.

[17] Shepperd, J. A. H., Braids which can be plaited with their threds tied together at each end, *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, **265** (1961/62), 229-244.

[18] Terada, T., Problème de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, *J. Math. Kyoto Univ.*, **13**, (1973), 557-578.