

# L'Existence d'une Fonction Analytique sur une Variété Analytique Complexe à Deux Dimensions

Par

Toshio NISHINO\*

## Introduction

La notion de variété analytique complexe ayant été introduite comme analogie de surface de Riemann, il y a entre elles quelques différences essentielles; en particulier, au contraire du cas d'une variable, il existe une variété analytique à dimension élevée qui n'admet aucune fonction analytique sur toute la variété. Les diverses conditions pour son existence ont donc été proposées par *K. Kodaira* [5], *H. Grauert* [4] et les autres. Le but de ce mémoire est de proposer une nouvelle condition par laquelle on peut former aussi une fonction analytique pour le cas de deux dimensions. Comme on le verra plus tard, ceci est essentiellement de la catégorie de la théorie des fonctions et applicable non seulement aux variétés compactes mais aussi à une sorte de variétés ouvertes.

Comme on le sait déjà, étant donnée une surface analytique compacte  $S$  satisfaisant aux conditions convenables, qu'on appellera dans ce mémoire *surface générique*, sur une variété analytique  $\mathfrak{M}$  à deux dimensions, on peut toujours former une fonction holomorphe  $f$ , qui représente globalement  $S$ , dans un voisinage  $V$  de  $S$ . La fonction  $f$  ne peut pas, en général, se prolonger analytiquement en dehors de  $V$ . Mais la famille holomorphe de surfaces analytiques compactes donnée par la fonction  $f$  peut être prolongée analytiquement sans aucune restriction dans l'intérieur complet de  $\mathfrak{M}$ . Par suite, la famille s'étend sur tout  $\mathfrak{M}$  lorsque  $\mathfrak{M}$  sera supposé être compacte ou bien ouverte et pseudoconvexe. La famille étant paramétrisée analytiquement par une surface de Riemann  $R$ , grâce à la théorie des fonctions d'une variable complexe, on obtient une fonction méromorphe ou bien holomorphe sur toute variété  $\mathfrak{M}$

---

Communiqué par S. Nakano, le 28 mai, 1981.

\* Faculté de Technologie, Université de Kyushu, Fukuoka 812, JAPON.

suivant que  $R$  est compacte ou non.

Le présent mémoire consiste en trois parties. Après quelques explications élémentaires sur les suites et les familles de surfaces analytiques, dans la partie préliminaire, on considérera, dans la deuxième, une famille holomorphe  $\mathfrak{F}$  de surfaces analytiques compactes sur  $\mathfrak{M}$  paramétrisée par le disque-unité  $\mathbb{C}$  sur le plan d'une variable complexe  $z$ .  $l_\theta$  étant le rayon de  $\mathbb{C}$  de la direction  $\theta$ ,  $\mathfrak{F}_\theta$  étant la famille partielle de  $\mathfrak{F}$  paramétrisée par  $l_\theta$ , on peut établir l'énoncé que  *$\mathfrak{F}_\theta$  sont toutes normales dans  $\mathfrak{M}$  sauf pour les directions  $\theta$  de l'ensemble de mesure nulle.* C'est la partie essentielle de ce mémoire. Ceci sera déformé en peu pour faciliter l'application ultérieure. Dans la dernière partie, on rappellera d'abord la condition pour qu'une surface analytique compacte  $S$  sur  $\mathfrak{M}$  admette une fonction holomorphe qui représente  $S$  dans un voisinage de  $S$ . C'est la condition que satisfait une surface générique. Ensuite, on indiquera le fait que, si  $\mathfrak{M}$  admet une infinité non dénombrable de surfaces analytiques compactes ne se rencontrant jamais l'une l'autre, il existe au moins une surface générique parmi elles. Ceci nous permettra d'établir aisément notre énoncé principal indiqué plus haut. Dans tout la suite, nous nous bornons au cas où la variété considérée est à deux dimensions, même s'il n'y a aucune instruction.

## I. Préliminaire

### 1. Les Familles de Surfaces Analytiques

Soit  $D$  un domaine quelconque dans l'espace de deux variables complexes  $x$  et  $y$ . On considère d'abord une surface analytique  $S$  dans  $D$ . Prenons un point  $p_0 = (x_0, y_0)$  dans  $D$  et traçons autour de  $p_0$  un dicylindre  $\Delta$ :  $|x - x_0| < r$ ,  $|y - y_0| < r'$ , où  $r$  et  $r'$  sont des nombres positifs convenables, situé dans  $D$ . Grâce à Cousin, la partie de  $S$  dans  $\Delta$  se représente par le zéro d'ordre un d'une fonction holomorphe  $f$  dans  $\Delta$ . La fonction  $f$  sera appelée *fonction adjointe* de  $S$  dans  $\Delta$ . Etant donnée dans  $D$  une suite  $\{S_\nu\}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) de surfaces analytiques, elle sera dite *convergente en un point  $p_0$  de  $D$*  si l'on peut prendre pour chaque surface  $S_\nu$ , une fonction adjointe  $f_\nu$  dans le dicylindre  $\Delta$  de manière que la suite  $\{f_\nu\}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) tende vers la fonction holomorphe  $f_0$  identiquement non nulle dans  $\Delta$ . La surface analytique donnée par le zéro d'ordre un de  $f_0$  dans  $\Delta$  sera appelée *limite de la suite dans  $\Delta$* . Lorsque la limite est le zéro d'ordre un de  $f_0$ , la convergence sera dite *d'ordre un*. La suite  $\{S_\nu\}$  sera dite *convergente dans  $D$*  si elle est convergente en tout point  $p$  de  $D$ . A ce moment, la suite détermine

une seule surface analytique dans  $D$  comme sa limite. Considérons ensuite une famille  $F$  de surfaces analytiques dans  $D$ . Elle sera dite *normale dans  $D$*  si, de toute suite infinie de surfaces de  $F$ , on peut extraire une suite partielle convergente dans  $D$ . Elle sera dite *normale en un point  $p$*  de  $D$  s'il en est ainsi dans un voisinage convenable de  $p$ .

Grâce à Oka [8], [7], on a l'énoncé que:

*Pour que la famille  $F$  soit normale en un point  $p$  de  $D$ , il faut et il suffit qu'on puisse prendre un dicylindre  $\Delta$  autour de  $p$  tel que les aires de surfaces de  $F$  dans  $\Delta$  soient bornées uniformément.*

Cette fois-ci, on décrit, pour un point  $p_0 = (x_0, y_0)$  de  $D$ , une hypersphère  $\Gamma: |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < r^2$ , où  $r$  est un nombre positif convenable, située dans  $D$ . Grâce à Rutishauser [9], on a l'énoncé que:

*Si la surface analytique  $S$  passe par le point  $p_0$ , l'aire de la partie de  $S$  dans  $\Gamma$  est supérieure à  $\pi r^2$ .*

La plus petite aire  $\pi r^2$  est atteinte par la droite analytique passant par  $p_0$ . Pour la suite  $\{S_v\}$  ( $v=1, 2, \dots$ ) de surfaces analytiques tendant vers une surface analytique  $S_0$  dans  $D$ , on désigne par  $a_v$  ( $v=0, 1, 2, \dots$ ) les aires des parties de  $S_v$  dans  $\Gamma$ . Grâce à Stoll [10], on a l'énoncé que

*Si la convergence dans  $\Gamma$  est d'ordre un, la suite  $\{a_v\}$  tend vers  $a_0$ .*

Ce n'est pas exact dans un dicylindre pour une raison évidente.

## 2. Les Familles Parallèles de Surfaces Analytiques

Une famille  $F$  de surfaces analytiques dans un domaine  $D$  sera dite *parallèle* si les surfaces de  $F$  ne se rencontrent jamais l'une l'autre. Dans la suite, on suppose que  $F$  soit parallèle et de plus que toute surface de  $F$  soit connexe en tant qu'ensemble de points. Soit  $S_0$  une surface de  $F$  et soit  $\{S_v\}$  ( $v=1, 2, \dots$ ) une suite de surfaces de  $F$ . Comme on peut le voir aisément, si la suite converge à la surface analytique connexe  $S^*$  dans  $D$  et que  $S^*$  et  $S_0$  ont au moins un point commun,  $S_0$  est contenue en entier dans  $S^*$ . Supposons maintenant que l'on ait  $S^* = S_0$  et que la convergence soit d'ordre un. Prenons un point quelconque  $p_0 = (x_0, y_0)$  de  $S_0$ . Grâce à Weierstrass, en faisant une transformation linéaire de coordonnées, si nécessaire, on peut tracer un dicylindre  $\Delta = (\delta_1, \delta_2): |x - x_0| < r, |y - y_0| < r'$ , où  $r$  et  $r'$  sont des nombres positifs convenables, dans lequel la partie  $s_0 = S_0 \cap \Delta$  se représente par l'équation de la forme

$$F_0(x, y) = (y - y_0)^n + a_1(x)(y - y_0)^{n-1} + \dots + a_n(x) = 0,$$

où  $n$  est un entier convenable et  $a_j(x)$  ( $j=1, \dots, n$ ) sont des fonctions holomorphes, telles que l'on ait  $a_j(x_0) = 0$  ( $j=1, \dots, n$ ), dans  $\delta_1$ . Alors, de l'hypothèse, pour tout  $v$  plus grand qu'un certain rang  $v_0$ , la partie  $s_v = S_v \cap \Delta$  se représente aussi par l'équation de la forme

$$F_v(x, y) = b_{0v}(x)(y - y_0)^n + b_{1v}(x)(y - y_0)^{n-1} + \dots + b_{nv}(x) = 0,$$

où  $b_{jv}(x)$  ( $j=0, 1, \dots, n; v \geq v_0$ ) sont des fonctions holomorphes dans  $\delta_1$ . La suite des fonctions  $\{F_v\}$  ( $v \geq v_0$ ) tend uniformément vers  $F_0$  dans  $\Delta$ . On en conclut que  $s_v$  sont toutes irréductibles dans  $\Delta$  à partir d'un certain rang  $v^*$ , puisque  $s_0$  est connexe. De plus, on aura la

**Proposition 1.** *Si  $s_0$  et  $s_v$  ( $v \geq v^*$ ) sont irréductibles et simplement connexes en tant qu'ensemble de points,  $s_0$  n'admet aucun point singulier.*

En effet, on suppose, pour le réduire à l'absurd, que le point  $p_0$  soit un seul point singulier de  $s_0$ . Pour tout point  $a$  de  $\delta_1$ , on désigne par  $L_a$  la droite analytique, donnée par l'équation  $x=a$ , dans  $\Delta$ . Soit  $\gamma$  un cercle de la forme  $|x - x_0| = r_0$  ( $0 < r_0 < r$ ) dans  $\delta_1$  et soit  $\Gamma$  l'ensemble produit  $\gamma \times \delta_2$ . Alors, l'intersection  $C_0 = s_0 \cap \Gamma$  est une courbe simple fermée et, pour tout point  $a$  de  $\gamma$ , celle  $s_0 \cap L_a$  consiste justement en  $n$  points. Soit  $\mathfrak{A}$  un voisinage de  $C_0$  sur  $\Gamma$  situé dans l'intérieur de  $\Delta$  tel que, pour tout  $a$  de  $\gamma$ , l'intersection  $\mathfrak{A}_a = \mathfrak{A} \cap L_a$  consiste aussi en  $n$  composantes connexes qui sont toutes simplement connexes et qui contiennent respectivement un et un seul point de  $s_0 \cap L_a$ . Maintenant, en prenant un nombre positif suffisamment petit  $\varepsilon$ , on considère le disque pointé  $\mathfrak{C}'$ :  $0 < |w| < \varepsilon$  sur le plan de  $w$  et l'ensemble  $V'$  donné par  $0 < |F_0(x, y)| < \varepsilon$  dans  $\Delta$  de manière que, par l'application  $F_0$  de  $V'$  sur  $\mathfrak{C}'$ , on peut regarder  $V'$  comme un espace fibré topologique localement trivial; c'est-à-dire, pour tout  $w$  de  $\mathfrak{C}'$ , la surface analytique  $\sigma_w$  donnée par  $F_0 = w$  dans  $\Delta$  est irréductible, non singulière et de même type topologique. A ce moment,  $\sigma_w$  n'est pas simplement connexe puisque  $s_0$  admet un point singulier. De plus, on peut supposer que l'intersection  $V' \cap \Gamma$  se trouve dans  $\mathfrak{A}$ ; par suite, celle  $C_w = \sigma_w \cap \Gamma$  est homotope à  $C_0$  dans  $\mathfrak{A}$ . Ici, on considère une surface analytique  $s_v$  ( $v > v^*$ ) telle que l'on ait l'inégalité

$$|F_0(x, y)/F_v(x, y) - 1| < 1/2$$

dans  $\Delta - (V' \cup s_0)$ . De l'hypothèse, elle existe certainement. Soit  $\tau_t$  la surface analytique donnée par l'équation  $F_0 - tF_v = 0$  dans  $\Delta$ , où  $t$  est une variable réelle

non positive ou  $-\infty$ . A ce moment, pour toute  $t$ ,  $\tau_t$  se trouve dans  $V'$  et l'intersection  $C_t = \sigma_t \cap \Gamma$  dans  $\mathfrak{M}$ . Par suite,  $C_t$  est aussi homotope à  $C_0$  dans  $\mathfrak{M}$ . Evidemment, on a  $\tau_0 = s_0$  et  $\tau_{-\infty} = s_v$ . Ceci est en contradiction avec le fait que  $V'$  est l'espace fibré comme ci-dessus, puisque, de l'hypothèse, la courbe simple fermée  $C_v$  se réduit continûment à un point sur  $s_v$ . La proposition est donc démontré.

### 3. Les Familles de Surfaces Analytiques Compactes

Soit  $\mathfrak{M}$  une variété analytique complexe à deux dimensions. Elle sera supposée, dans toute la suite, être connexe et la réunion dénombrable des ensembles compacts, mais par ailleurs quelconque. Une partie ouverte et connexe de  $\mathfrak{M}$  est appelée un domaine sur  $\mathfrak{M}$ . Pour un ensemble quelconque  $E$  de points sur  $\mathfrak{M}$ ,  $\bar{E}$  est désigné l'adhérence de  $E$  sur  $\mathfrak{M}$ . Soit  $D$  un domaine sur  $\mathfrak{M}$ . On suppose que  $D$  se trouve dans l'intérieur complet de  $\mathfrak{M}$ . Pour un point  $p$  de  $\bar{D}$ ,  $(x_p, y_p)$  étant un système de coordonnées locales en  $p$ , nous traçons deux hypersphères concentriques  $\gamma_p$  et  $\gamma_p^0$  données respectivement par  $|x_p|^2 + |y_p|^2 < 1$  et  $|x_p|^2 + |y_p|^2 < 1/2$ . D'après le théorème de *Borel-Lebesgue*, on peut choisir un nombre fini de points  $p_v$  ( $v=1, \dots, l$ ) de  $\bar{D}$  de manière que, en désignant par  $\gamma_v$  et  $\gamma_v^0$  les deux hypersphères correspondant à  $p_v$ ,  $\bar{D}$  se recouvre par la réunion de  $\gamma_v^0$ . Etant donnée une surface analytique compacte  $S$  dans  $D$ , la somme de toutes les aires de  $S \cap \gamma_v$  ( $v=1, \dots, l$ ) sera appelée *norme* de  $S$  par rapport au recouvrement  $\{\gamma_v\}$  et sera désignée par  $|S|$ . Grâce à *Rutishauser*, il existe un nombre positif  $\rho_0$  tel que, pour toute surface analytique compacte  $S$  dans  $D$ , on ait toujours l'inégalité  $|S| > \rho_0$ . On peut dire ensuite, grâce à *Oka*, qu'une famille  $F$  de surfaces analytiques compactes dans  $D$  est normale si et seulement s'il y a un nombre positif  $\rho^*$  tel que, pour toute surface  $S$  de  $F$ , on ait l'inégalité  $|S| < \rho^*$ . En général, pour une famille  $F$  de surfaces analytiques sur  $\mathfrak{M}$ , l'ensemble de tous les points contenus dans l'une des surfaces de  $F$  sera appelé *support* de  $F$ .  $F$  sera dite *fermée* si le support l'est aussi. Pour une famille  $F$  avec le support  $E$ , la famille  $F^*$  contenant  $F$  et ayant  $\bar{E}$  comme support, s'il existe, sera appelée *fermeture* de  $F$ . On aura alors la

**Proposition 2.** *Soit  $F$  une famille de surfaces analytiques compactes dans le domaine  $D$  sur  $M$ . Si  $F$  est parallèle et normale elle admet toujours sa fermeture  $F^*$  qui est aussi parallèle et normale.*

En effet, soit  $q$  un point quelconque de  $\bar{E}$ , soit  $\{q_\mu\}$  ( $\mu=1, 2, \dots$ ) une suite

de points de  $E$  tendant vers  $q$  et soit  $\{S_\mu\}$  ( $\mu=1, 2, \dots$ ) une suite de surfaces de  $F$  passant respectivement par  $q_\mu$ . D'après l'hypothèse, on peut extraire de la suite  $\{S_\mu\}$  une nouvelle suite convergente dans  $\mathfrak{M}$ . Soit  $S_q$  la surface de limite de cette suite-ci et soit  $\bar{F}$  la totalité des surfaces ainsi obtenues. Alors, le support de  $\bar{F}$  est évidemment  $\bar{E}$ .  $\bar{F}$  est normale puisque la norme d'une surface de  $\bar{F}$  ne peut jamais dépasser la borne supérieure de celles de surfaces de  $F$ . Mais,  $\bar{F}$  n'est pas toujours parallèle, car elle peut contenir deux surfaces distinctes  $S$  et  $S'$  telles qu'on ait  $S \subset S'$ . Une surface  $S$  de  $\bar{F}$  sera dite maximale si, pour toute surface  $S'$  de  $\bar{F}$ ,  $S \subset S'$  entraîne  $S = S'$ . Alors, pour toute surface  $S$  de  $\bar{F}$ , il existe une surface maximale  $S'$  telle qu'on ait  $S \subset S'$  puisque  $\bar{F}$  est normale. Soit  $F^*$  la famille partielle de  $\bar{F}$  qui consiste en toutes les surfaces maximales. Ceci est la famille demandée. La proposition est donc démontrée.

#### 4. Famille Holomorphe de Surfaces Analytiques Compactes

Soit  $V$  un domaine sur une variété analytique  $\mathfrak{M}$  et soit  $\Phi$  une application analytique propre de  $V$  sur une surface de Riemann  $R$ . On suppose que, pour tout point  $p$  de  $R$ , la surface analytique compacte  $S_p$  donnée par  $\Phi^{-1}(p)$  est connexe. La totalité  $\mathfrak{F}$  de toutes les surfaces  $S_p$  ( $p \in R$ ) sera appelée *famille holomorphe donnée par  $\Phi: V \rightarrow R$* .  $S_p$  s'appelle *surface de  $\mathfrak{F}$  à valeur  $p$* . Toute surface  $S_p$  de  $\mathfrak{F}$  est irréductible, non singulière, d'ordre un et de même genre à l'exception d'une infinité dénombrable de celles qui ne s'accroissent pas dans  $V$ . La surface qui n'est pas ainsi est dite *critique*. De la définition, une famille holomorphe est tout parallèle. De plus, quand on prend une partie  $R_0$  dans l'intérieur complet de  $R$ , la restriction de  $\mathfrak{F}$  dans  $V_0 = \Phi^{-1}(R_0)$  est toujours normale. Deux familles holomorphes  $\mathfrak{F}_i$  ( $i=1, 2$ ) données respectivement par  $\Phi_i: V \rightarrow R_i$  dans le même domaine  $V$  seront dites *identiques l'une à l'autre* si elles sont identiques comme les familles simples de surfaces analytiques. Considérons ensuite deux familles holomorphes  $\mathfrak{F}_i$  ( $i=1, 2$ ) données respectivement par  $\Phi_i: V_i \rightarrow R_i$ . Si  $V_1 \cap V_2$  n'est pas vide et que  $\mathfrak{F}_i$  sont identiques l'une à l'autre dans  $V_1 \cap V_2$  l'une sera appelée *prolongement analytique de l'autre*. A ce moment, nous pouvons former une surface de Riemann  $R$  et une application analytique propre  $\Phi$  de  $V_1 \cup V_2$  sur  $R$  telles que la famille holomorphe  $\mathfrak{F}$  donnée par  $\Phi: V_1 \cup V_2 \rightarrow R$  soit identique respectivement à  $\mathfrak{F}_i$  dans  $V_i$ . On aura alors la

**Proposition 3.** *Soient  $\mathfrak{F}_i$  ( $i=1, 2$ ) deux familles holomorphes données par  $\Phi_i: V_i \rightarrow R_i$ . Si  $V_1 \cap V_2$  n'est pas vide et s'il existe une surface  $S^*$*

appartenant à la fois aux  $\mathfrak{F}_i$ , l'une est le prolongement analytique de l'autre, même si  $V_1 \cap V_2$  n'est pas connexe.

En effet, supposons d'abord que  $V_1 \cap V_2$  soit connexe. Posons  $p_2^* = \Phi_2(S^*)$  et  $R_2^0 = \Phi_2(V_1 \cap V_2)$ . Puisque  $S^*$  se trouve dans l'intérieur de  $V_1 \cap V_2$ ,  $\delta$  étant un voisinage suffisamment petit de  $p_2^*$  dans  $R_2^0$ , la partie  $\mathfrak{A}$  donnée par  $\Phi_2^{-1}(\delta)$  se trouve dans  $V_1 \cap V_2$ . Alors, toute surface  $S_p^2$  de  $\mathfrak{F}_2$  à valeur  $p$  de  $\delta$  appartient à  $\mathfrak{F}_1$  puisque l'image de  $S_p^2$  par  $\Phi_1$  doit être un point. D'autre part, soit  $\{S_i\}$  une suite de surfaces appartenant à la fois aux  $\mathfrak{F}_i$  ( $i=1, 2$ ) qui converge à une surface  $S^0$  dans  $V_1 \cap V_2$ . Alors,  $S^0$  appartient aussi aux  $\mathfrak{F}_i$  ( $i=1, 2$ ) à la fois. Il résulte que  $\mathfrak{F}_1$  et  $\mathfrak{F}_2$  sont identiques dans tout  $V_1 \cap V_2$ . On suppose ensuite que  $V_1 \cap V_2$  ne soit pas connexe. D'après ce qui précède,  $\mathfrak{F}_1$  et  $\mathfrak{F}_2$  sont identiques dans la composante connexe  $\mathfrak{B}_1$  de  $V_1 \cap V_2$  qui contient  $S^*$ . Soit  $\mathfrak{B}_2$  une autre composante connexe de  $V_1 \cap V_2$ , soit  $S^1$  une surface de  $\mathfrak{F}_1$  passant par un point  $p^1$  de  $\mathfrak{B}_2$ , et posons  $p_2^* = \Phi_2(S^*)$ ,  $p_2^1 = \Phi_2(p^1)$  et  $S_2^0 = \Phi_2^{-1}(p_2^1)$ . On trace maintenant une courbe linéaire  $L$  qui lie deux points  $p_2$  et  $p_2^1$  sur  $R_2$ . Lorsqu'on fait varier un point  $p$  de  $p_2^*$  à  $p_2^1$  le long de  $L$ , la surface  $S_p^2$  de  $\mathfrak{F}_2$  à valeur  $p$  varie de  $S^*$  à  $S_2^0$ . Par suite, il existe un point  $q$  sur  $L$  en lequel  $S_q^2$  rencontre  $S^1$  pour la première fois. Alors,  $S_q^2$  coïncide avec  $S^1$ .  $F_1$  et  $F_2$  sont donc identiques aussi dans  $\mathfrak{B}_2$ , ce qui démontre la proposition.

On remarque ici que, étant donnée une famille holomorphe  $\mathfrak{F}$  donnée par  $\Phi: V \rightarrow R$  sur  $\mathfrak{M}$ , la famille holomorphe obtenue par le prolongement analytique de  $\mathfrak{F}$  est toujours d'un feuillet.

## II. Normalité des Familles Holomorphes

Soit  $\mathfrak{M}$  une variété analytique complexe à deux dimensions. On considère sur  $\mathfrak{M}$  une famille holomorphe  $\mathfrak{F}$  donnée par  $\Phi: V \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}$  étant le disque-unité:  $|z| < 1$  sur le plan d'une variable  $z$ ,  $V$  étant un domaine dans l'intérieur complet de  $\mathfrak{M}$  et  $\Phi$  étant une application analytique propre de  $V$  sur  $\mathbb{C}$ . Désignons par  $l_\theta$  le rayon de la direction  $\theta$  de  $\mathbb{C}$ :  $z = re^{i\theta}$  ( $0 \leq r < 1$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ) et par  $\mathfrak{F}_\theta$  la famille partielle de  $\mathfrak{F}$  qui consiste en toutes les surfaces de  $\mathfrak{F}$  à valeur  $z$  de  $l_\theta$ . Le but de la partie actuelle est d'indiquer le fait que  $\mathfrak{F}_\theta$  est normale dans  $\mathfrak{M}$  sauf pour les directions  $\theta$  de l'ensemble de mesure nulle.

### 1. Les Voisins Speciaux des Points Frontières de $V$

Pour rechercher en détail des allures de surfaces appartenant à  $\mathfrak{F}$  tout près de la frontière de  $V$ , nous préparerons d'abord un système fini de dicylindres, qui couvrent la frontière de  $V$  comme suit. Nous prenons un point frontière quelconque  $p$  de  $V$ . Soit  $(X_p, Y_p)$  un système de coordonnées locales en  $p$  et soit  $U_p$  un voisinage de ce système. On décrit dans  $U_p$  trois dicylindres concentriques  $\Delta_p, \Delta_p^*$  et  $\Delta_p^0$  par rapport à un autre système de coordonnées locales  $x, y$  qui satisfait aux conditions suivantes.

1) Le dicylindre  $\Delta_p = (A_p, B_p)$  de la forme  $|x| < 1, |y| < 1$  se trouve dans l'intérieur complet de  $U_p$  et n'a aucun point de  $S_0$ .

2) Le dicylindre  $\Delta_p^* = (A_p^*, B_p)$  de la forme  $|x| < \varepsilon_0, |y| < 1$  se trouve dans l'intérieur de  $V$ ,  $\varepsilon_0$  étant un nombre positif inférieur à un

3) Le dicylindre  $\Delta_p^0 = (A_p^0, B_p^0)$  de la forme  $|x| < \rho_0, |y| < \rho_0$  contient le point initial  $p$ ,  $\rho_0$  étant un nombre positif tel que l'on ait  $\varepsilon_0 < \rho_0 < 1$ .

Comme on peut aisément le voir, ceci existe certainement. Lorsqu'on considère, pour chaque point frontière de  $V$ , les trois dicylindres ainsi décrits, d'après le théorème de *Borel-Lebesgue*, on peut prendre un nombre fini de points  $p_j$  ( $j=1, \dots, N$ ) de façon que,  $\Delta_j, \Delta_j^*$  et  $\Delta_j^0$  étant les dicylindres considérés pour les points  $p_j$ , la frontière de  $V$  puisse être couverte par la réunion de tous les  $\Delta_j^0$  ( $j=1, \dots, N$ ). On les fixera dans toute la suite. Ceci posé, on peut trouver un nombre positif  $r_0^*$  inférieur à un, tel que toute surface  $S_z$  de  $\mathfrak{F}$  dont  $z$  remplit les inégalités  $r_0^* < |z| < 1$  ne passe par aucun point de  $\Delta_j^*$  ( $j=1, \dots, N$ ). On fixera aussi le nombre  $r_0^*$ .

Enfin, pour le besoin ultérieur, on pose l'autre hypothèse suivante:  $U_j$  étant le voisinage initial de coordonnées locales  $(X_p, Y_p)$  en  $p_j$ , le dicylindre  $\Delta_j$  décrit dans  $U_j$  et l'autre dicylindre  $\Delta_k$  ne contiennent aucun point commun pourvu que  $\Delta_k$  contienne au moins un point frontière de  $U_j$ . Cette condition sera toujours remplie si l'on trace chaque  $\Delta_j$  ( $j=1, \dots, N$ ) suffisamment petit.

### 2. Les Directions Singulières

Nous prenons l'un des triples  $\Delta_j, \Delta_j^0$  et  $\Delta_j^*$  ( $j=1, \dots, N$ ) expliqués dans la section précédente, et les désignons à nouveau, par  $\Delta = (A, B)$ ,  $\Delta^0 = (A^0, B^0)$  et  $\Delta^* = (A^*, B)$  pour simplifier l'écriture. Dans la section présente et dans la suivante, nous nous bornons à faire des investigations sur ces dicylindres. Soit  $L_c$  la droite analytique donnée par l'équation  $y=c$  dans  $\Delta$ ,  $c$  étant un point de



$B$ , et posons  $L_c^0 = \Delta^0 \cap L_c$ . Pour une surface  $S_z$  de  $\mathfrak{F}$  et une droite  $L_c$ , le nombre de points de  $S_z \cap L_c$  sera désigné par  $n(z, c)$ . Il est toujours fini, car, par l'hypothèse,  $S_z$  est compacte sur  $\mathfrak{M}$ . Nous poserons ensuite

$$N(\theta, c) = \limsup_{z \in l_\theta} n(z, c).$$

Ceci peut être infini. Lorsque  $N(\theta, c)$  devient infini,  $\theta$  sera appelé *direction singulière* à  $L_c$ , et l'ensemble de toutes les directions singulières à  $L_c$  sera désigné par  $E_c$ . On aura alors le

**Lemme 1.** *Pour une droite  $L_c$  fixée, la mesure de  $E_c$  est nulle dans l'intervalle  $I = [0, 2\pi]$ .*

En effet, soit  $f$  l'application analytique de  $L_c \cap V$  dans  $\mathbb{C}$  entraînée de  $\Phi$  et soit  $R$  la surface de Riemann de la fonction inverse  $g$  de  $f$  étalée au-dessus de  $\mathbb{C}$ . Evidemment, pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$ , il n'y a qu'un nombre fini au plus de points de  $R$  situés au-dessus de  $z$ , car les points de  $R$  au-dessus de  $z$  correspondent exactement aux points de  $S_z \cap L_c$  par  $g$ . Mais,  $\theta$  étant une direction singulière à  $L_c$ , il existe une suite infinie de points  $z_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ) de  $l_\theta$  tendant vers le point  $\zeta_\theta = e^{i\theta}$  tels que les nombres de points de  $R$  au-dessus de  $z_j$  augmentent indéfiniment. On considérera seulement les directions  $\theta$  telles qu'il n'y a aucun point critique de  $R$  au-dessus de  $l_\theta$ . Alors, l'ensemble de tous les points de  $R$  au-dessus de  $l_\theta$  consiste en une infinité de segments. Désignons-les par  $s_\nu$  ( $\nu=1, 2, \dots$ ) et par  $|s_\nu|$  les longueurs de  $s_\nu$ . La suite  $|s_\nu|$  ( $\nu=1, 2, \dots$ ) tend évidemment vers zéro. Or, si  $s_\nu$  contient un point qui correspond à un point  $q_\nu$  de  $L_c^0$  par  $g$ , l'image  $\mathfrak{S}_\nu$  de  $s_\nu$  par  $g$  contient une courbe qui lie un point frontière de  $L_c$  à  $q_\nu$ . D'où, pour telle  $s_\nu$ , on a l'inégalité

$$1 - \rho_0 \leq \int_{s_\nu} |g'| dr \quad (z = re^{i\phi})$$

L'inégalité de Schwarz en entraîne l'inégalité

$$(1 - \rho_0)^2 \leq |s_\nu| \int_{s_\nu} |g'|^2 dr,$$

et par suite,

$$\sum_\nu \int_{s_\nu} |g'|^2 dr = \infty.$$

Si la mesure de  $E_c$  n'est pas nulle, d'après la raisonnement habituel, l'aire de  $L_c \cap V$  devient infinie. Ceci est évidemment absurde. Le lemme est donc démontré.

Nous remarquons ici que, si la circonférence de  $L_c$  se trouve dans  $V$  ou bien  $L_c \cap V$  consiste en nombre fini de composantes connexes et simplement connexes sans aucun point frontière non accessible, il n'y a aucune direction singulière à  $L_c$ . Même pour le cas général, ceci ne signifie pas que le lemme expose l'existence de la direction singulière à  $L_c$ .

### 3. L'Ensemble de $L_c$ Admettant une Même Direction Singulière

Soit  $\theta_0$  une direction singulière à  $L_0: y=0$ . On peut alors dire que l'ensemble de tous les points  $c$ , tels que  $L_c$  admette  $\theta_0$  comme une direction singulière, dans  $B$  doit être de mesure positive. Nous allons l'indiquer dans la suite. Supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il en ne soit pas ainsi. Pour un entier  $n$ , on désigne par  $e_n$  l'ensemble de tous les points  $c$ , tels qu'on ait  $N(\theta_0, c) \leq n$ , dans  $B$ . Evidemment, on a  $e_n \subset e_{n+1}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) et

$$\lim \mu(e_n) = \pi,$$

$\mu(e_n)$  étant la mesure de  $e_n$ . On prend dans chaque  $e_n$ , un ensemble fermé  $e_n^0$  de façon que tout point de  $e_n^0$  soit régulier par rapport au problème de *Dirichlet* et que l'on ait aussi  $\lim \mu(e_n) = \pi$ . C'est toujours possible puisque, quant à la première condition, l'ensemble de points non réguliers par rapport au problème de *Dirichlet* est de capacité logarithmique nulle. On pose  $\mathfrak{A}_n = B - e_n^0$ . Ils sont ouverts et peuvent être partagés en plusieurs composantes connexes. Tout  $\mathfrak{A}_n$  contient, par hypothèse, le centre  $O: y=0$  de  $B$ . On forme dans chaque  $\mathfrak{A}_n$  une fonction harmonique  $h_n(y)$  donnée par la solution du problème de *Dirichlet* pour les valeurs frontières suivantes:

$$h_n(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in \partial\mathfrak{A}_n \text{ dans l'intérieur de } B \\ 0 & \text{si } p \in \partial\mathfrak{A}_n \text{ sur la circonférence de } B \end{cases}$$

où  $\partial\mathfrak{A}_n$  désigne la frontière de  $\mathfrak{A}_n$ . Cela posé, on aura l'énoncé que:

*Pour tout nombre positif  $\eta_0$  inférieur à un, on peut trouver un entier  $n_0$  tel que l'on ait  $h_n(0) \geq \eta_0$  pour  $n \geq n_0$ .*

En effet,  $r$  étant un nombre positif inférieur à un, on désigne par  $B_r$  le disque donné par  $|y| < r$  et par  $C_r$  la circonférence de  $B_r$ . Alors, lorsque  $n$  augmente indéfiniment, la mesure linéaire de  $C_r \cap \mathfrak{A}_n$  tend vers zéro, sauf l'ensemble de mesure nulle de  $r$ . Soient  $u_n(y)$  les autres fonctions harmoniques dans  $B_r$  qui prend la valeur frontière zéro en  $C_r \cap \mathfrak{A}_n$  et la valeur frontière un en l'autre.

Quand on prend  $r$  comme ci-dessus,  $u_n(0)$  tend vers un. D'autre part, on a l'inégalité  $h_n(y) \geq u_n(y)$  dans  $B_r \cap \mathfrak{A}_n$ . Car, par hypothèse, il en est ainsi pour tout point frontière de  $B_r \cap \mathfrak{A}_n$ ; et en particulier,  $h_n(0) \geq u_n(0)$ . L'énoncé est donc démontré.

On remarque ici que,  $r_0$  étant un nombre positif inférieur à un, l'inégalité  $h_n(y) \geq \eta_0$  pour  $n \geq n_0$  reste valable pour tout  $y$  dans  $B_{r_0} \cap \mathfrak{A}_n$ .

Ensuite, soient  $z_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ) des points de  $l_{\theta_0}$  qui tendent vers le point  $\zeta_0 = e^{i\theta_0}$  et admettons que  $n(z_j, \theta_0)$  augmentent indéfiniment. On suppose que l'on ait  $|z_j| > r_0^*$ , c'est-à-dire que toute  $S_{z_j}$  ne passe par aucun point de  $\Delta_0^*$ . Désignons par  $S_j^0$  la partie de  $S_{z_j}$  dans  $\Delta$  et par  $\mathfrak{S}_j$  la projection de  $S_j^0$  sur  $B$  regardée comme une surface de Riemann étalée au-dessus de  $B$ . A ce moment, au-dessus d'un point  $c$  de  $e_n^0$ , il n'y a que  $n$  points au plus de  $\mathfrak{S}_j$ . Nous formons de nouveau, sur chaque  $\mathfrak{S}_j$ , une fonction harmonique  $H_j(p)$  donnée par la solution du problème de *Dirichlet* pour les valeurs frontières suivantes :

$$H_j(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in \partial\mathfrak{S}_j \text{ au-dessus de points dans l'intérieur de } B \\ 0 & \text{si } p \in \partial\mathfrak{S}_j \text{ au-dessus de points sur la circonférence de } B \end{cases}$$

où  $\partial\mathfrak{S}_j$  désigne la frontière de  $\mathfrak{S}_j$ . On aura alors l'énoncé que :

*Pour tout nombre positif  $\eta^*$  inférieur à un, on peut trouver un entier  $m$  indépendant de  $j$  tel qu'on ait  $H_j(p) > \eta^*$  en tout points de  $\mathfrak{S}_j$  situés au-dessus de  $O$ , sauf  $m$  points au plus.*

En effet, on prend, d'abord, un nombre positif  $\eta_0$  tel qu'on ait  $\eta^* < \eta_0 < 1$ , et l'on fixe un entier  $n_0$  obtenu pour le nombre  $\eta_0$  dans l'énoncé précédent. Comme on peut aisément le voir, il existe, pour chaque  $\mathfrak{S}_j$ , une surface de Riemann  $\Sigma_j$  d'un nombre fini  $m_j$  de feuillettes, étalée au-dessus de  $B$  sans aucun point frontière relatif par rapport à  $B$  et contenant  $\mathfrak{S}_j$ . Soit  $\Sigma_j^0$  la partie de  $\Sigma_j$  donnée par l'exception de tous les points situés au-dessus de  $e_{n_0}^0$  et soit  $K_j(p)$  une fonction harmonique sur  $\Sigma_j^0$  qui prend la valeur frontière un en  $\partial\Sigma_j^0 \cap \mathfrak{S}_j$  et la valeur frontière zéro en l'autre, où  $\mathfrak{S}_j$  désigne l'adhérence relative de  $\mathfrak{S}_j$  dans  $\Sigma_j$ . Ceci existe certainement. On a alors l'inégalité

$$H_j(p) + K_j(p) \geq h_{n_0}(p)$$

dans chaque  $\mathfrak{S}_j \cap \Sigma_j^0$ , où  $h_{n_0}(p)$  est considérée comme une fonction sur  $\Sigma_j^0$ . Je dis ici que :

*Etant donnée un nombre positif  $\varepsilon$  plus petit que  $\eta_0 - \eta^*$ , on peut lui faire*

correspondre un entier  $m$  tel que, pour tout point  $p$  de  $\mathfrak{S}_j$  situé au-dessus de  $O$ , on ait  $K_j(p) < \varepsilon$  sauf  $m$  points au plus.

Car,  $n_j$  étant le nombre de points  $p$  sur  $\mathfrak{S}_j$  qui se trouvent au-dessus de  $O$  et tels qu'on ait  $K_j(p) \geq \varepsilon$ , on suppose, pour le réduire à l'absurde, que  $n_j$  augmentent indéfiniment. En désignant par  $p_{j\mu}(y)$  ( $\mu=1, \dots, m_j$ ) les points de  $\Sigma_j$  situés au-dessus de  $y$ , on pose

$$k_j(p) = \frac{1}{n_j} \sum_{\mu=1}^{n_j} K_j(p_{j\mu}(y)).$$

Alors, on aura

$$\lim k_j(p) = 0,$$

puisque'il en est ainsi pour la valeur frontière de  $k_j(p)$ . C'est en contradiction avec le fait que  $k_j(0) \geq \varepsilon$ , ce qui démontre l'énoncé.

Il s'agit d'indiquer l'énoncé initial. Chaque surface  $S_j$  se représente par une fonction holomorphe  $\xi_j(p)$  sur  $\mathfrak{S}_j$  comme

$$x = \xi_j(p).$$

Posons

$$\phi_j(p) = \log |\xi_j(p)|.$$

La fonction  $\phi_j$  est, par hypothèse, harmonique sur  $\mathfrak{S}_j$ . De plus, elle remplit l'inégalité  $\phi_j(p) \geq \log \varepsilon_0$  sur tout  $\mathfrak{S}_j$  et l'égalité  $\phi_j(p) = 0$  en tout point frontière relatif de  $\mathfrak{S}_j$  par rapport à  $B$  puisque  $S_j$  ne passe par aucun point de  $\Delta^*$  et que sa frontière se trouve sur la frontière de  $\Delta$ . D'où, on a l'inégalité

$$\phi_j(p) \geq (1 - H_j(p)) \cdot \log \varepsilon_0.$$

D'autre part, si l'on prend  $\eta^*$  comme

$$\log \rho_0 \geq (1 - \eta^*) \cdot \log \varepsilon_0,$$

on entend qu'il n'y a que  $m$  points au plus sur  $\mathfrak{S}_j$  qui se trouvent au-dessus de  $O$  et qui correspondent aux points dans  $\Delta^0$  par  $\xi_j$ . C'est la contradiction que nous voulions obtenir.

D'après ce qu'on a vu jusqu'ici, on conclut le

**Lemme 2.** Si  $\theta_0$  est une direction singulière à  $L_0$ , l'ensemble de tous les points  $c$  de  $B$  tels que  $L_c$  admette  $\theta_0$  comme une direction singulière est de mesure positive.

Rappelons encore une fois le raisonnement ci-dessus. Ceci indique de plus le

**Lemme 3.** *Si une direction  $\theta$  n'est pas singulière à  $L_c$  pour tout point  $c$  de  $B$ , on peut faire lui correspondre un entier  $m$  tel que l'on ait  $N(c, \theta) \leq m$  pour tout point  $c$  de  $B^0$ .*

#### 4. L'Ensemble $\Theta$

Dans l'ensemble produit  $\Omega = B \times I$ , on considère l'ensemble  $E$  de tous les points  $(c, \theta)$  tels que  $\theta$  soit une direction singulière à  $L_c$ . On peut d'abord dire que

*$E$  est mesurable.*

En effet, soit  $T$  la surface analytique donnée par  $z = \Phi(x, y)$  dans le polycylindre  $(A^0, B, \mathbb{C})$ ,  $\Phi(x, y)$  étant la restriction de  $\Phi$  dans  $\Delta \cap V$ , et soit  $\nu(c, c')$  le nombre de points de  $T \cap L(c, c')$ ,  $L(c, c')$  étant la droite analytique donnée par  $y = c$  et  $z = c'$  dans le polycylindre. Pour un entier quelconque  $n$ , l'ensemble de tous les points  $(c, c')$  dans le dicylindre  $(B, \mathbb{C})$  donnés par  $\nu(c, c') \geq n$  est toujours ouvert. D'où, en désignant par  $E_n$  l'ensemble de tous les points  $(c, \theta)$  de  $\Omega$  tels qu'il y a un point  $c'$  de  $l_\theta$  pour lequel on ait  $\nu(c, c') \geq n$ ,  $E_n$  est aussi ouvert dans  $\Omega$ . Or, on a évidemment  $E = \bigcap_n E_n$ .  $E$  est donc mesurable.

Ensuite, désignons par  $\Theta$  l'ensemble de tous les points  $\theta$  de  $I$  tels qu'il y ait un point  $c$  de  $B$  pour lequel on a  $(c, \theta) \in E$ . On aura alors le

**Lemme 4.** *L'ensemble  $\Theta$  est de mesure nulle.*

En effet, d'après le lemme 1, la mesure de  $E$  dans  $\Omega$  est nulle puisque, pour tout point  $c$  dans  $B$ , l'ensemble de tous les points  $\theta$  tels qu'on ait  $(c, \theta) \in E$  est de mesure nulle. D'autre part, d'après le lemme 2, si l'ensemble  $\Theta$  est de mesure positive, la mesure de  $E$  devient positive puisque, pour tout point  $\theta$  de  $\Theta$ , l'ensemble de tous les points  $c$  tels qu'on ait  $(c, \theta) \in E$  est de mesure positive. Le lemme est donc démontré.

Nous appellerons  $\Theta$  ensemble de directions singulières en  $\Delta$ . Maintenant, pour chaque dicylindre  $\Delta_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) qu'on a posé au début de la section 1, on désigne par  $N_j(c, \theta)$  la même signification que  $N(c, \theta)$  pour  $\Delta$ , et on considère l'ensemble de directions singulière  $\Theta_j$  en chaque  $\Delta_j$ . La réunion  $\Theta_{\mathfrak{F}}$  de tous les ensembles  $\Theta_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) s'appellera ensembles de directions singulières pour  $\mathfrak{F}$ . Il est aussi de mesure nulle.

En résumé.

**Proposition 4.** *Pour une famille holomorphe de surfaces analytiques compactes  $\mathfrak{F}$  donnée par  $\Phi: V \rightarrow C$ , l'ensemble de directions singulières  $\Theta_{\mathfrak{F}}$  est de mesure nulle.*

**Proposition 5.** *Si une direction  $\theta$  n'appartient pas à  $\Theta_{\mathfrak{F}}$ , on peut lui faire correspondre un entier  $m_{\theta}$  tel que, pour tout  $j$  et pour tout  $c$ , on ait  $N_j(c, \theta) \leq m_{\theta}$ .*

### 5. Normalité d'une Famille de Surfaces Analytiques

Dans la présente section, on verra un critère de la normalité des familles de surfaces analytiques. Considérons, dans l'espace de deux variables complexes  $x$  et  $y$ , le dicylindre fermé  $\Delta = (A, B): |x| \leq 1, |y| \leq 1$  et celui  $\Delta^* = (A^*, B): |x| \leq \varepsilon, |y| \leq 1$ ,  $\varepsilon$  étant un nombre positif inférieur à un. Pour le point  $c$  de  $B$ ,  $L_c$  désigne la droite analytique donnée par  $y=c$  dans  $\Delta$ . Soit  $F$  une famille de surfaces analytiques irréductibles ou non dans  $\Delta$  qui satisfait aux conditions suivantes.

- 1) Toute surface de  $F$  ne passe par aucun point de  $\Delta^*$ .
- 2) Il existe un entier  $n$  tel que, pour toute surface  $S$  de  $F$  et pour tout point  $c$  de  $B$ ,  $S \cap L_c$  consiste en  $n$  au plus de points.
- 3) Il existe deux entiers  $g_0$  et  $n_0$  tels que, pour toute surface  $S$  de  $F$ , chaque composante irréductible de  $S$  soit de genre inférieur à  $g_0$  et n'admette que  $n_0$  composantes frontières.

Nous allons indiquer par la suite que  $F$  est normale dans l'intérieur de  $\Delta$ . Pour une surface  $S$  de  $F$ , on désigne par  $\mathfrak{S}$  la projection de  $S$  sur le plan de  $y$  comme une surface de Riemann étalée au-dessus de  $B$ . Elle consiste en une ou plusieurs composantes connexes. Soit  $p$  un point de  $\mathfrak{S}$  et soit  $c$  la projection de  $p$  dans  $B$ . Pour un nombre positif suffisamment petit  $\eta$ , on peut toujours trouver une partie connexe qui contient  $p$  et qui se trouve justement au-dessus du disque fermé  $\delta: |y-c| < \eta$ , sans aucun point frontière relatif par rapport à  $\delta$ . La limite supérieure de tels nombres  $\eta$ , qu'on désigne par  $d(p)$ , s'appellera distance frontière de  $p$  par rapport à  $\mathfrak{S}$ .  $\rho$  étant un nombre positif inférieur à un, on considère un dicylindre fermé  $\Delta_{\rho} = (A_{\rho}, B_{\rho})$  de la forme  $|x| \leq \rho, |y| \leq \rho$ . Soit  $S^{\rho}$  la partie de  $S$  dans  $\Delta_{\rho}$  et soit  $\mathfrak{S}^{\rho}$  la partie de  $\mathfrak{S}$  correspondant à  $S^{\rho}$ , et posons

$$D(S^{\rho}) = \inf_{p \in S^{\rho}} d(p).$$

On l'appellera aussi distance frontière de  $\mathfrak{S}^\rho$  par rapport à  $\mathfrak{S}$ . L'inégalité  $\rho < \rho'$  entraîne évidemment celle  $D(\mathfrak{S}^\rho) \leq D(\mathfrak{S}^{\rho'})$ .

Nous supposons, maintenant que, pour tout nombre positif  $\rho$  ( $\rho < 1$ ) il existe un nombre positif  $D_\rho$ , indépendant de surfaces de  $F$ , tel que l'on ait  $D(\mathfrak{S}^\rho) \geq D_\rho$ . On aura alors l'énoncé que

*F est normale dans l'intérieur de  $\Delta$ .*

En effet, on prend un point quelconque  $c$  dans  $B$  et l'on pose  $\rho = (1 + |c|)/2$ . Soit  $\delta$  le disque fermé de la forme

$$|y - c| \leq \min(D_\rho/2, \rho - |c|)$$

et soit  $S^*$  la partie d'une surface  $S$  ( $S \in F$ ) dans le dicylindre  $(A, \delta)$ . Elle peut consister en plusieurs composantes irréductibles qu'on désigne par  $s_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, \nu_0$ ). A ce moment, si  $s_\nu$  passe par un point de  $\Delta_\rho$ , la partie  $\mathfrak{S}_\nu$  de  $\mathfrak{S}$  qui correspond à  $s_\nu$  n'a aucun point frontière relatif par rapport à  $\delta$ . Par suite, la totalité de telles composantes  $s_\nu$  est représentée dans  $(A, \delta)$  par l'équation de la forme

$$f(x, y) = x^\lambda + a_1(y)x^{\lambda-1} + \dots + a_\lambda(y) = 0,$$

où  $a_i(y)$  ( $i = 1, \dots, \lambda$ ) sont des fonctions holomorphes dans  $\delta$  et  $\lambda$  un entier plus petit que  $n$ . Par suite, la famille de fonctions  $f$  ainsi obtenues pour toutes les surfaces de  $F$  est normale dans  $(A, \delta)$  et n'admet aucune fonction limite identiquement nulle.  $F$  est donc normale dans l'intérieur à  $\Delta$ .

Il s'agit maintenant de prouver l'existence de nombre positif  $D_\rho$  pour la famille  $F$ . Supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il y ait un nombre positif  $\rho$  inférieur à un, tel qu'on ait  $D_\rho = 0$ ; autrement dit, on peut extraire de  $F$  une suite de surfaces  $S_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) de manière que,  $\mathfrak{S}_j$  étant la projection de  $S_j$  sur le plan de  $y$  et  $\mathfrak{S}_j^0$  étant la partie de  $\mathfrak{S}_j$  qui correspond à  $S_j^0 = S_j \cap \Delta_\rho$ , on puisse prendre un point  $p_j$  dans  $\mathfrak{S}_j^0$  pour lequel  $d(p_j)$  tend vers zéro. On suppose ici que la projection de  $p_j$  dans  $B$  soit l'origine de  $B$ . Ceci ne restreint pas la généralité. Soit  $\hat{\mathfrak{S}}_j$  la composante connexe de  $\mathfrak{S}_j$  contenant le point  $p_j$  et soit  $\hat{S}_j$  celle irréductible de  $S_j$  correspondant à  $\hat{\mathfrak{S}}_j$ .  $g_j$  est le genre de  $\hat{\mathfrak{S}}_j$  et  $n_j$  est le nombre de composantes frontières de  $\hat{\mathfrak{S}}_j$ .

Grâce à Ahlfors [1], on peut trouver une surface de Riemann  $R_j$  qui s'étale au-dessus du disque-unité  $\mathfrak{C}_j: |t| < 1$  sur le plan de  $t$  sans aucun point frontière relatif par rapport à  $\mathfrak{C}_j$ , et que l'on peut faire correspondre à  $\hat{\mathfrak{S}}_j$  de façon

analytique et biunivoque. Le nombre  $N_j$  de feuillet de  $R_j$  remplit les inégalités  $n_j \leq N_j \leq n_j + 2g_j$ . Par suite, d'après l'hypothèse, le nombre de feuillet et celui de points critiques de  $R_j$  sont inférieurs à un entier indépendant de  $j$  tous les deux. On suppose ici que le point  $P_j$  de  $R_j$  correspondant à  $p_j$  se trouve au-dessus de l'origine de  $\mathbb{C}_j$ . C'est toujours possible. Soient

$$x = \phi_j(p) \quad \text{et} \quad y = \psi_j(p)$$

les fonctions holomorphes sur  $R_j$  qui représentent la surface  $S_j$  dans  $\Delta$ .  $\hat{\mathbb{C}}_j$  est alors l'image de  $R_j$  par la fonction  $\psi_j(p)$ .

Maintenant, on suppose que la suite  $\hat{S}_j (j=1, 2, \dots)$  satisfasse aux conditions suivantes.

1) Toute surface de Riemann  $R_j$  a le même nombre de feuillet et le même nombre de points critiques.

2) La suite  $R_j (j=1, 2, \dots)$  tend vers une surface de Riemann qu'on désigne par  $R_0$ .

3) Deux suites des fonctions  $\phi_j (j=1, 2, \dots)$  et  $\psi_j (j=1, 2, \dots)$  tendent respectivement vers les fonctions  $\phi_0$  et  $\psi_0$  sur  $R_0$ .

En extrayant de la suite  $\hat{S}_j$  une nouvelle suite, si nécessaire, on peut toujours poser les hypothèses sans perdre la généralité.

On remarque ici que la surface de Riemann  $R_0$  peut se séparer de plusieurs composantes connexes, de plus, il y a un cas où la suite de points  $P_j$  n'admet pas une seule limite sur  $R_0$ .

Soient  $a_{j\mu} (\mu=1, \dots, l; j=1, 2, \dots)$  les projections de points critiques de  $R_j$  dans  $\mathbb{C}_j$ . Lorsqu'on prend convenablement le deuxième indice  $\mu$  de  $a_{j\mu}$ , chaque suite  $a_{j\mu} (j=1, 2, \dots)$  tend vers un point de  $\mathbb{C}_j$ . On désigne par  $a_\mu (\mu=1, \dots, l')$  les limites distinctes et l'origine de  $\mathbb{C}_j$ , s'il n'est pas une limite, et on décrit, pour chaque  $a_\mu$ , un disque  $\gamma_\mu: |y - a_\mu| < r$ ,  $r$  étant un nombre positif suffisamment petit, de manière que les disques ne se rencontrent jamais l'un l'autre. Soient  $R_j^* (j=0, 1, 2, \dots)$  les parties de  $R_j$  données par l'exception de tous les points au-dessus de  $\gamma_\mu (\mu=1, \dots, l')$ . Lorsque  $R_0$  consiste en  $m$  composantes connexes  $R_{0v} (v=1, \dots, m)$ ,  $R_j^* (j=1, 2, \dots)$  se séparent aussi en  $m$  composantes connexes  $R_{jv}^* (v=1, \dots, m)$  dès que  $j$  surpasse un certain rang  $j_0$ , puisque  $R_0^*$  consiste en  $m$  composantes connexes  $R_{0v}^* (v=1, \dots, m)$  et que  $R_j^* (j=1, 2, \dots)$  ont les mêmes formes que  $R_0^*$  à partir d'un certain rang. Soient  $\alpha_j (j_0 < j)$  les composantes connexes de  $R_j - R_j^*$  qui contient  $P_j$  et soient  $R_{j\lambda}^* (\lambda=1, \dots, m')$  toutes les composantes  $R_{jv}$  qui touchent à  $\alpha_j$ . Lorsque  $r$  tend vers zéro,  $\alpha_j$  tend vers un nombre



fini de points de  $R_{0\lambda}$  que l'on regarde comme la limite de  $P_j$ . On désigne par  $\phi_{jv}^*(p)$  et  $\psi_{jv}^*(p)$  ( $j_0 < j$ ,  $v=1, \dots, m$ ) la restriction de  $\phi_j(p)$  et de  $\psi_j(p)$  sur  $R_{jv}^*$  respectivement et par  $\phi_{0v}$  et  $\psi_{0v}$  ( $v=1, \dots, m$ ) la restriction de  $\phi_0(p)$  et de  $\psi_0(p)$  sur  $R_{0v}$  respectivement. Nous pouvons ici dire que :

*L'une des  $\psi_{0\lambda}$  ( $\lambda=1, \dots, m'$ ) doit être identiquement nulle.*

En effet, sinon, l'image de  $R_j$  par  $\psi_j$ , c'est-à-dire  $\hat{\mathcal{C}}_j$ , contient une partie qui se trouve au-dessus du disque indépendant de  $j$  autour de l'origine de  $B$ , qui n'admet aucun point frontière relatif par rapport à ce disque et qui contient le point  $p_j$ . C'est en contradiction avec l'hypothèse que  $d(p_j)$  tend vers zéro.

Supposons donc que la fonction  $\psi_{01}(p)$  soit identiquement nulle et désignons par  $\omega_j$  les parties du contour de  $R_{j1}$  ( $j_0 < j$ ) qui correspondent par  $\psi_{j1}^*(p)$  à celles de  $\hat{\mathcal{C}}_j$  situées au-dessus de la circonférence de  $B$ . Alors, on peut dire que :

*Les mesures de  $\omega_j$  ( $j_0 < j$ ) tendent vers zéro.*

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, que ce ne soit pas vrai. On prend un nombre  $\eta$  tel qu'on ait  $1/2 < \eta < 1$  et on décrit le cercle  $B_\eta: |y| = \eta$  dans  $B$ . Alors, on peut déterminer la partie  $\tilde{B}_{j\eta}$  de la courbe sur  $\hat{\mathcal{C}}_j$  qui se trouve au-dessus de  $B_\eta$  et qui correspond par  $\psi_{j1}^*$  à la courbe  $L_{j\eta}$  tracée sur  $R_{j1}^*$ . D'après l'hypothèse, la longueur de  $\tilde{B}_{j\eta}$  est bornée supérieurement par un nombre indépendant de  $j$  et  $\eta$ , et celle de  $L_{j\eta}$  est bornée inférieurement par un nombre positif indépendant aussi de  $j$  et  $\eta$ . D'où, d'après le raisonnement habituel utilisant l'inégalité de Schwarz, il résulte que l'aire de la partie de  $R_{j1}^*$  qui correspond par  $\psi_{j1}^*$  à celle de  $\hat{\mathcal{C}}_j$  située au-dessus de la couronne  $1/2 < |y| < 1$  ne peut jamais tendre vers zéro. Ceci est en contradiction avec le fait que la fonction  $\psi_{01}$  est identiquement zéro. L'énoncé est donc démontré.

Il s'agit maintenant de la fonction  $\phi_{01}(p)$  sur  $R_{01}$ . En général, sur le contour de  $R_j$ , l'inégalité  $|\psi_j(p)| < 1$  entraîne l'égalité  $|\phi_j(p)| = 1$  puisque la frontière de  $S_j$  se trouve sur la frontière de  $\Delta$ . D'autre part,  $\phi_j(p)$  ne prend pas la valeur nulle dans  $R_j$ . Il en résulte que la fonction  $\phi_{01}(p)$  se réduit à une constante  $b$  de module un. D'où, chaque fonction  $\phi_{0\lambda}(p)$  ( $\lambda=1, \dots, m'$ ) prend la même valeur  $b$  en tout point de  $R_{0\lambda}$  situé au-dessus de l'origine de  $C_t$  et regardé comme la limite de  $P_j$ . Ceci est en contradiction avec le fait qu'on a pris les points  $p_j$  dans  $\mathcal{C}_j^0$ .

On en conclut le

**Proposition 6.** *La famille de surfaces analytiques satisfaisant aux conditions qu'on a posée au début de cette section est normale dans l'intérieur de  $\Delta$ .*

On remarque ici que, pour la famille  $F$  comme ci-dessus, le nombre de composantes irréductibles de surface  $S$  de  $F$  qui contient au moins un point de  $\Delta_\rho$  est borné supérieurement par un nombre entier dépendant seulement de  $\rho$ .

## 6. Théorème Fondamental

Nous nous rappelons encore la famille holomorphe  $\mathfrak{F}$  donnée par  $\Phi: V \rightarrow \mathbb{C}$  et le système de dicylindres  $\Delta_j, \Delta_j^0$  et  $\Delta_j^*$ . Nous pouvons maintenant démontrer le fait que, si une direction  $\theta$  n'appartient pas à l'ensemble  $\Theta$  de directions singulières pour  $\mathfrak{F}$ , la famille  $\mathfrak{F}_\theta$  est normale dans  $\mathfrak{M}$ . Pour cela, on appliquera la proposition 6 à la famille  $\mathfrak{F}_\theta$  dans chaque dicylindre  $\Delta_j^0$ . De la façon de former le système de dicylindres  $\Delta_j$  etc. et de la proposition 5, la partie de  $\mathfrak{F}_\theta$  dans chaque dicylindre  $\Delta_j^0$  remplit déjà les conditions 1) et 2) de la proposition 6. Il s'agit donc ici de la condition 3).

Considérons l'un quelconque des  $\Delta_j$  et soit  $\Delta_1$ . On prend une suite de points  $z_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ) de  $l_\theta$  tendant vers le point  $\zeta_\theta = e^{i\theta}$ . Soient  $S_j$  les surfaces de  $\mathfrak{F}_\theta$  à valeur  $z_j$ . Les parties  $\hat{S}_j$  de  $S_j$  dans  $\Delta_1$  consistent en composantes irréductibles  $\hat{S}_{j\nu}$  ( $\nu=1, \dots, \nu_j$ ).  $g_{j\nu}$  est le genre de  $\hat{S}_{j\nu}$  et  $n_{j\nu}$  est le nombre de composantes frontières de  $\hat{S}_{j\nu}$ . Alors,  $g_{j\nu}$  sont tous inférieurs au genre  $g$  de surface générale de  $\mathfrak{F}$ . Pour la condition 3), il suffit donc d'indiquer que  $n_{j\nu}$  sont aussi bornés. Supposons, pour le réduire à l'absurde, que  $n_{j1}$  augment indéfiniment.

Soient  $\gamma_{j\mu}$  ( $\mu=1, \dots, n_{j1}$ ) les contours de  $\hat{S}_{j1}$  qui limitent respectivement une aire simplement connexe  $\delta_{j\mu}$  de  $S_j - \hat{S}_{j1}$ . Par hypothèse  $n_{j1}$  augment aussi indéfiniment puisque le nombre de composantes non simplement connexes de  $S_j - \hat{S}_{j1}$  ne peut pas dépasser  $2g$ . Envisageons la partie  $\delta_{j\mu}$ . D'après le moyen de former les dicylindres  $\Delta_j$  qu'on a remarqué à la fin de la section 1, la partie  $\delta_{j\mu}$  passe par un point dans l'autre dicylindre  $\Delta_j^0$  tel que  $\Delta_j$  n'ait aucun point commun avec  $\Delta_1$ . Soit  $\Delta_{j1}$  l'un de ces  $\Delta_j$ . Si  $\delta_{j\mu} \cap \Delta_{j1}$  est simplement connexe, on fait correspondre le dicylindre  $\Delta_{j1}$  au contour  $\gamma_{j\mu}$ . S'il n'en est pas ainsi, le contour de  $\delta_{j\mu} \cap \Delta_{j1}$  consiste en deux courbes au moins et parmi elles il y a une courbe qui limite dans  $\delta_{j\mu}$  une aire simplement connexe  $\delta'_{j\mu}$  de  $\delta_{j\mu} - (\delta_{j\mu} \cap \Delta_{j1})$ . Alors, pour la même raison que ci-dessus,  $\delta'_{j\mu}$  passe par un point dans l'autre dicylindre  $\Delta_j^0$  tel que  $\Delta_j$  n'ait aucun point commun avec  $\Delta_{j1}$ . Soit  $\Delta_{j2}$  l'un de

ces dicylindres et si  $\delta'_{j\mu} \cap \Delta_{j2}$  est simplement connexe, on fait correspondre le dicylindre  $\Delta_{j2}$  au contour  $\gamma_{j\mu}$ . S'il n'en est pas ainsi, on continue de la sorte. Comme on peut facilement la voir, ce procédé ne peut pas se continuer indéfiniment. Donc, il correspondre à chacun des contours  $\gamma_{j\mu}$  un dicylindre, à nouveau désigné par  $\Delta_{j\mu}$ , tel que  $\delta_{j\mu} \cap \Delta_{j\mu}$  soit simplement connexe.

Or, il n'y a qu'un nombre fini de dicylindre  $\Delta_j$  dans  $\mathfrak{M}$ . D'où on peut trouver un dicylindre, désigné par  $\Delta_2$ , tel que le nombre de composantes irréductibles de  $S_j \cap \Delta_2$  passant par un point de  $\Delta_2^0$  et simplement connexes augmente indéfiniment. Ceci est un contradiction avec la proposition 6 puisque les surfaces analytiques  $S_{j2}^*$  dans  $\Delta_2$ , qui consistent respectivement en toutes les composantes irréductibles et simplement connexes de  $S_j \cap \Delta_2$ , forment une suite remplissant les conditions de la proposition 6. La famille  $\mathfrak{F}_0$  est donc normale dans l'intérieur de  $\Delta_1$ .

En résumé

**Théorème I.** *Soit  $\mathfrak{M}$  une variété analytique à deux dimensions et soit  $\mathfrak{F}$  une famille holomorphe de surfaces analytiques compactes données par  $\Phi: V \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $V$  étant un domaine dans l'intérieur complet de  $\mathfrak{M}$  et  $\mathbb{C}$  étant le disque-unité sur le plan de  $z$ . Alors, toute famille  $\mathfrak{F}_\theta$  est normale dans  $\mathfrak{M}$  sauf pour les directions  $\theta$  de l'ensemble  $\Theta$  de mesure nulle dans l'intervalle  $I = [0, 2\pi]$ .*

## 7. La Frontière d'une Famille Holomorphe

D'après le théorème I, on peut entendre que presque toute la frontière de la famille holomorphe consiste en surfaces analytiques compates. On le verra plus précisément dans la suite. En conservant les mêmes significations des notations que précédemment, pour une direction  $\theta$  de l'intervalle  $I = [0, 2\pi]$  n'appartenant pas à  $\Theta$ , on considère la fermeture  $\mathfrak{F}_\theta^*$  de  $\mathfrak{F}_\theta$  dans  $\mathfrak{M}$ . D'après la proposition 2, celle-ci existe certainement et elle est normale et parallèle. On pose  $H_\theta = \mathfrak{F}_\theta^* - \mathfrak{F}_\theta$  et on l'appelle limite de  $\mathfrak{F}_\theta$ . A ce moment, pour deux directions  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , les limites  $H_{\theta_1}$  et  $H_{\theta_2}$  peuvent coïncider. Pour un ensemble quelconque  $\varepsilon$  de  $I - \Theta$ , on pose  $H_\varepsilon = \bigcup_{\theta \in \varepsilon} H_\theta$ . Alors, on aura la

**Théorème 1.** *Si l'ensemble  $\varepsilon$  est de mesure positive,  $H_\varepsilon$  contient une infinité non dénombrable de surfaces analytiques distinctes.*

En effet, comme on peut le facilement voir, s'il y a une direction  $\theta$  de  $\varepsilon$  tel que  $H_\theta$  contienne au moins deux surfaces analytiques distinctes,  $H_\theta$  contient un continuum à trois dimensions réelles qui consiste en une infinité non dénombrable

de celles-ci. Par suite, on suppose que, pour toute  $\theta$  de  $\varepsilon$ ,  $H_\theta$  consiste en une seule surface analytique et, pour le réduire à l'absurde, que  $H_\varepsilon$  ne contient qu'une infinité dénombrable au plus de celles distinctes, qu'on désigne par  $S_\mu$  ( $\mu=1, 2, \dots$ ). Soient  $\varepsilon_\mu$  ( $\mu=1, 2, \dots$ ) les ensembles de toutes les directions  $\theta$  de  $\varepsilon$  telles que  $H_\theta$  coïncident avec  $S_\mu$ . Alors, l'un des ensembles  $\varepsilon_\mu$  est de mesure positive. On le désigne à nouveau par  $\varepsilon_0$  et par  $S_0$  la surface analytique qui constitue  $H_{\varepsilon_0}$ .  $P$  étant un point régulier quelconque de  $S_0$ , on prend un système de coordonnées locales  $x, y$  en  $P$  de manière que la droite analytique  $L$  donnée par  $y=0$  dans le voisinage de coordonnées croise transversalement la surface  $S_0$  en un seul point  $P$ . Soit  $\delta$  un disque sur  $L$  donnée par  $|x| < \eta_0$ , où  $\eta_0$  est un nombre positif suffisamment petit, tel que l'image de  $\delta^0 = \delta \cap V$  par  $\Phi$  se trouve dans la couronne  $\Gamma: 1/2 < |z| < 1$ . Désignons par  $\phi(x)$  la restriction de  $\Phi$  sur  $\delta$ , par  $g(z)$  la fonction inverse de  $\phi$  et par  $R$  la surface de Riemann de  $g$  étalé au-dessus de  $\Gamma$ . On peut alors trouver un sous-ensemble  $\varepsilon_0^*$  de  $\varepsilon_0$  satisfaisant aux conditions suivantes.

1)  $\varepsilon_0^*$  est fermé et de mesure positive.

2) Pour toute  $\theta$  de  $\varepsilon_0^*$  et pour tout  $z$  de  $l_\theta$ , le nombre de points de  $R$  situés au-dessus de  $z$  est inférieur uniformément à un entier positif  $n_0$ .

Soit  $\mathfrak{A}_\theta$  l'ensemble de tous les points de  $R$  qui se trouvent au-dessus de  $l_\theta$  dont  $\theta$  est de  $\varepsilon_0^*$  et posons  $W = \bigcup_{\theta \in \varepsilon} \mathfrak{A}_\theta$ . La mesure de  $W$  sur  $R$  est évidemment finie. Soit  $W^*$  l'ensemble de points dans  $\delta^0$  qui correspond à  $W$  par  $\phi$ . La mesure de  $W$  est donnée par

$$\int_{W^*} |\phi'(x)|^2 \eta \cdot d\eta d\psi \quad x = \eta e^{i\psi}.$$

D'autre part, soit  $\gamma_\eta$  le cercle sur  $L: |x| = \eta$ ,  $\eta$  étant un nombre positif inférieur à  $\eta_0$  et posons  $\gamma_\eta^0 = \gamma_\eta \cap \delta^0$  et  $W_\eta^* = W^* \cap \gamma_\eta$ . Par hypothèse, le nombre donné par

$$\int_{W_\eta^*} |\phi'(x)| d\psi$$

est uniformément supérieur à un nombre positif puisque, pour chaque  $\theta$  de  $\varepsilon_0^*$ , l'image de  $\mathfrak{A}_\theta$  par  $g$  coupe  $W_\eta^*$  au moins en un point. D'où, d'après le raisonnement habituel, la mesure de  $W$  devient infinie. Ceci est en contradiction avec le fait qu'elle est finie. Le théorème est donc démontrée.

Pour simplifier le raisonnement, on a traité jusqu'ici seulement une famille holomorphe  $\mathfrak{F}$  paramétrisée par le disque-unité. Mais, pour établir le théorème

de la normalité, ceci n'est toujours indispensable. Maintenant nous allons proposer, pour faciliter l'application ultérieure, l'autre forme du théorème comme ce qui suit.

Soit  $\mathbb{C}$  un disque-unité fermé  $|z| \leq 1$  sur le plan de  $z$ , soit  $e^*$  un ensemble fermé de points qui se trouve dans l'intérieur complet de  $\mathbb{C}$  et soit  $\mathbb{C}^*$  la partie de  $\mathbb{C}$  donnée par l'exception de tous les points de  $e^*$ . On suppose que l'origine de  $\mathbb{C}$  n'appartienne pas à  $e^*$ . Pour chaque direction  $\theta$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ), on désigne par  $l_\theta^*$  le segment, qui se trouve dans  $\mathbb{C}^*$ , de la forme  $z = re^{i\theta}$  ( $r_0 < r \leq 1$ ) dont le point initial  $z_\theta = r_0 e^{i\theta}$  appartient à  $e^*$  ou bien est l'origine de  $\mathbb{C}$ . On désigne par  $E$  l'ensemble de toutes les directions  $\theta$  telles qu'on ait  $z_\theta \in e^*$ . Nous considérons ici une famille holomorphe  $\mathfrak{F}^*$  de surfaces analytiques compactes donnée par  $\Phi^*: V^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ , sur une variété analytique  $\mathfrak{M}$ , où  $V^*$  est un domaine l'intérieur complet de  $\mathfrak{M}$  et  $\Phi^*$  une application analytique propre de  $V^*$  sur  $\mathbb{C}^*$ . Quant à la circonférence  $\partial\mathbb{C}$  de  $\mathbb{C}$ , on suppose que  $\mathfrak{F}^*$  soit donnée même dans un voisinage convenable de  $\Phi^{*-1}(\partial\mathbb{C})$ . On désigne par  $W$  l'ensemble de tous les points frontières  $p$  de  $V^*$  tels que, quand on prend une suite quelconque de points  $q_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) de  $V^*$  qui tend vers  $p$ ,  $\Phi^*(q_n)$  tend vers un point de  $e^*$ . Soit  $\mathfrak{F}_\theta^*$  la sous-famille de  $\mathfrak{F}^*$  qui consiste en toutes les surfaces de  $\mathfrak{F}^*$  à valeur  $z$  de  $l_\theta^*$ . Alors, d'après le même raisonnement que la démonstration du théorème I, toute famille  $\mathfrak{F}_\theta^*$  est normale dans  $\mathfrak{M}$  sauf pour les directions  $\theta$  de l'ensemble  $\Theta^*$  de mesure nulle. L'ensemble  $E - \Theta^*$  étant de mesure positive, d'après aussi le même raisonnement que la démonstration du théorème 1,  $W$  contient une infinité non dénombrable de surfaces analytiques compactes. On a donc le

**Théorème 2.** *Si l'ensemble  $E$  est de mesure positive, la frontière  $W$  contient une infinité non dénombrable de surfaces analytiques compactes.*

### III. L'Existence d'une Fonction Analytique

#### 1. Surface Générique

Considérons, sur une variété analytique à deux dimensions  $\mathfrak{M}$ , une surface analytique compacte  $S$ . On suppose que  $S$  soit irréductible et non singulière.  $S$  se recouvre alors d'un nombre fini de voisinages  $\{V_j\}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) comme suit.

1) Chaque voisinage  $V_j$  se trouve dans l'intérieur d'un voisinage de coordonnées locales  $x_j, y_j$  et se représente de la forme  $|x_j| < 1, |y_j| < 1$ .

2) Dans chaque voisinage  $V_j$ , la surface analytique  $v_j = S \cap V_j$  est donnée par l'équation  $y_j = 0$ .

Le système  $\{V_j\}$  s'appellera *revêtement canonique* de  $S$  et la réunion  $V = \cup V_j$  *voisinage canonique* de  $S$ . Le système  $\{v_j\}$  est un recouvrement fini sur  $S$ . Une fonction  $\phi$  sur  $v_j$  est regardée, sous le même lettre, comme une fonction dans  $V_j$  qui ne dépend pas de  $y_j$ . Au contraire, pour une fonction  $f$  dans une aire  $\delta$  sur  $\mathfrak{M}$ , la restriction de  $f$  sur  $\delta \cap S$  sera désignée par  $f|_S$ .

Considérons, dans un voisinage canonique  $V = \cup V_j$  de  $S$ , une donnée (p) du 1<sup>er</sup> problème de *Cousin* par rapport à  $\{V_j\}$ , c'est-à-dire, un système de fonctions méromorphes  $g_j$  dans  $V_j$  telles que toute fonction  $g_{jk} = g_j - g_k$  soit holomorphe dans  $V_j \cap V_k$ , s'il n'est pas vide. La donnée (p) =  $\{(g_j, V_j)\}$  sera dite *résoluble* sur  $S$  si l'on peut trouver dans chaque  $v_j$  une fonction holomorphe  $\phi_j$  telle qu'on ait  $g_{jk}|_S = \phi_j - \phi_k$  sur tout  $v_j \cap v_k$ . Le système  $\{(\phi_j, v_j)\}$  sera appelé *solution de (p) sur S*. Elle est déterminée uniquement à l'addition d'une constante près. Tout pareillement, considérons une donnée (3) du 2<sup>ème</sup> problème de *Cousin* par rapport à  $\{V_j\}$ , c'est-à-dire, un système de fonctions holomorphes  $f_j$  dans  $V_j$  telles que toute fonction  $f_{jk} = f_j/f_k$  soit holomorphe et non nulle dans  $V_j \cap V_k$ , s'il n'est pas vide. La donnée (3) =  $\{(f_j, V_j)\}$  sera dite *résoluble sur S* si l'on peut trouver dans chaque  $v_j$  une fonction holomorphe et non nulle  $\psi_j$  telle qu'on ait  $f_{jk}|_S = \psi_j/\psi_k$  sur tout  $v_j \cap v_k$ . Le système  $(\psi_j, v_j)$  sera appelé *solution de (3) sur S*. Elle est déterminée uniquement à la multiplication d'une constante près.

On prend, dans chaque  $v_j$ , une aire  $v_j^0$  donnée par  $|x_j| < r$ ,  $r$  étant un nombre positif inférieur à un, de manière que le système  $\{v_j^0\}$  soit aussi un recouvrement fini sur  $S$ . Pour une donnée (p) =  $\{(g_j, V_j)\}$  du 1<sup>er</sup> problème de *Cousin*, on pose

$$|(p)| = \text{Max}_{j, k} \{ \limsup_{p \in v_j^0 \cap v_k^0} |g_{jk}(p)|_S \}$$

et on l'appelle *norme* de (p) par rapport au recouvrement  $\{v_j^0\}$ .

On aura alors l'énoncé que:

*Il y a un nombre positif K tel que, pour toute donnée (p)  $\{(g_j, V_j)\}$  du 1<sup>er</sup> problème de Cousin résoluble sur S, on ait une solution  $(\phi_j, v_j)$  sur S remplissant les inégalités  $|\phi_j| < K|(p)|$ .*

D'après le raisonnement habituel, on peut le démontrer facilement.

Une surface analytique compacte  $S$  sur  $\mathfrak{M}$  sera dite *générique* si elle remplit

les conditions suivantes.

- 1)  $S$  est irréductible et non singulière.
  - 2) Toute donnée  $(p)$  du 1<sup>er</sup> problème de *Cousin* par rapport à  $\{V_j\}$  admettant un seul pôle  $S$  est résoluble sur  $S$ .
  - 3) Toute donnée  $(\beta)$  du 2<sup>ème</sup> problème de *Cousin* par rapport à  $\{V_j\}$  admettant un seul zéro  $S$  est résoluble sur  $S$ .
- Où  $\{V_j\}$  est un recouvrement canonique de  $S$ .

D'après la définition, lorsque  $S$  est générique, le système  $\{(y_j, V_j)\}$ , étant une donnée du 2<sup>ème</sup> problème de *Cousin*, a une solution  $\{(\psi_j, v_j)\}$  sur  $S$ . Par suite, on peut toujours prendre, pour une surface générique  $S$ , un recouvrement canonique  $\{V_j\}$  tel qu'on ait  $y_j/y_k|_S=1$  sur tout  $v_j \cap v_k$ . En général, étant donnée une donnée  $(\beta)=\{(f_j, V_j)\}$  du 2<sup>ème</sup> problème de *Cousin* admettant un seul zéro  $S$  d'ordre un, telle qu'on ait  $f_j/f_k|_S=1$  sur tout  $v_j \cap v_k$ , si, pour un entier positif  $v$ , on a les égalités

$$f_j - f_k = h_{jk} \cdot f_j^{v+1},$$

dont  $h_{jk}$  sont des fonctions holomorphes et non nulles dans  $V_j \cap V_k$ , le système  $\{(1/f_j, V_j)\}$  forme une donnée du 1<sup>er</sup> problème de *Cousin*. De plus, quand on pose  $g_{jk} = 1/f_j - 1/f_k$ , on a les égalités

$$v \cdot g_{jk}|_S = h_{jk}|_S$$

sur tout  $v_j \cap v_k$ . L'inverse est aussi vrai.

## 2. Propriété Principale des Surfaces Génériques

Par définition, si une surface analytique compacte, irréductible et non singulière  $S$  sur  $\mathfrak{M}$  est donnée par le zéro d'ordre un d'une fonction holomorphe dans un voisinage de  $S$ , elle est toujours générique. Grâce à *Kodaira* et *Spencer* [6], l'inverse est aussi vrai. Mais, on va le démontrer, pour compléter l'explication de ce mémoire, suivant une idée dûe à *M. Ueda* [11].

Soit  $S$  une surface générique sur  $\mathfrak{M}$ . On prend un recouvrement canonique  $\{V_j\}$  tel qu'on ait  $y_j/y_k=1$  sur tout  $v_j \cap v_k$ . Dans chaque  $v_j$ , on prend une aire  $v_j^0: |x_j| < r$ ,  $r$  étant un nombre positif, comme le système  $\{v_j^0\}$  forme aussi un recouvrement sur  $S$ .  $K$  désigne le nombre qui a été expliqué dans l'énoncé de la section précédente. Les relations entre  $x_j, y_j$  et  $x_k, y_k$  dans  $V_j \cap V_k$  sont dénotées par

$$x_k = \phi_{kj}(x_j, y_j)$$

$$y_k = \psi_{kj}(x_j, y_j) = y_j + a_{kj2}(x_j)y_j^2 + \dots$$

où  $a_{kjv}(x_j)$  ( $v=2, 3, \dots$ ) sont des fonctions holomorphes sur  $v_j \cap v_k$ . A ce moment, d'après le théorème de *Cauchy*, on peut prendre un nombre positif  $R$  tel qu'on ait  $|a_{kjv}| < R^v$  ( $v=2, 3, \dots$ ) dans  $v_j^0 \cap v_k^0$ . Supposons ici qu'on puisse obtenir une fonction holomorphe  $u$  admettant un seul zéro  $S$  d'ordre un dans un voisinage de  $S$ . Alors, la fonction  $y_j$  sera représentée de la forme

$$(1) \quad y_j = f_j(x_j, u) = u + c_{j2}(x_j)u^2 + c_{j3}(x_j)u^3 + \dots,$$

et deux fonctions  $f_j$  et  $f_k$  remplissent l'égalité

$$(2) \quad \psi_{kj}[x_j, f_j(x_j, u)] = f_k[\phi_{kj}(x_j, f_j(x_j, u)), u]:$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} f_j(x_j, u) + a_{kj2}(x_j)(f_j(x_j, u))^2 + a_{kj3}(x_j)(f_j(x_j, u))^3 + \dots \\ = u + c_{k2}[\phi_{kj}(x_j, f_j(x_j, u))]u^2 + c_{k3}[\phi_{kj}(x_j, f_j(x_j, u))]u^3 + \dots \end{aligned}$$

Pour obtenir une fonction demandée, il suffit évidemment que l'on forme les fonctions  $f_j$  remplissant cette égalité-ci. On pose ici

$$(3) \quad \sum_{v=2}^{\infty} h'_{kjv}(x_j)u^v = \sum_{v=2}^{\infty} a_{kjv}(x_j)(f_j(x_j, u))^v$$

et

$$(4) \quad \begin{cases} c_{kv}[\phi_{kj}(x_j, y_j)] = c_{jv}[\phi_{kj}(x_j, 0)] + \sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{kjv\mu}(x_j)y_j^\mu \\ \sum_{v=2}^{\infty} h''_{kjv}(x_j)u^v = \sum_{v=2}^{\infty} [\gamma_{kjv1}(x_j)f_j(x_j, u) + \gamma_{kjv2}(x_j)(f_j(x_j, u))^2 + \dots]u^v \end{cases}$$

et, de plus

$$h_{kjv}(x_j) = h''_{kjv}(x_j) - h'_{kjv}(x_j).$$

Alors, on a les égalités

$$(5) \quad c_{jv}(x_j) - c_{kv}(\phi_{kj}(x_j, 0)) = h_{kjv}(x_j),$$

où l'on a  $c_{kv}(x_k) = c_{kv}(\phi_{kj}(x_j, 0))$  sur  $v_j \cap v_k$ . D'autre part, quand on considère les fonctions  $u_{jv}$  ( $v=1, 2, \dots$ ) données implicitement par

$$y_j = u_{jv} + c_{j2}(x_j)u_{jv}^2 + \dots + c_{jv}(x_j)u_{jv}^v,$$

on peut avoir aisément les égalités

$$u_{jv} - u_{kv} = H_{kjv}u_{jv}^v \quad \text{et} \quad h_{kjv} = H_{kjv}|_S$$



où  $H_{kj}$ , sont des fonctions holomorphes dans un voisinage de  $S \cap V_j \cap V_k$ . D'où et par hypothèse, on peut trouver de proch en proch les fonctions  $c_{jv}(x_j)$  ( $v=2, 3, \dots$ ) remplissant les égalités (5). Il en résulte que l'on peut obtenir la série de formulaire (1). Nous allons indiquer que la série converge uniformément dans un certain voisinage de  $S \cap V_j$ . Supposons ici que toute série  $f_j$  soit majorée par la série

$$A(u) = u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + \dots$$

dont les coefficients sont des nombres positifs convenables, dans  $v_j$ . Alors, de l'égalité (3), on a, d'abord

$$(6) \quad \sum_{v=2}^{\infty} h'_{kjv}(x_j) u^v \ll \sum_{v=2}^{\infty} R^v (A(u))^v = \frac{R^2 (A(u))^2}{1 - RA(u)},$$

où  $\ll$  signifie que le membre gauche est majoré par le droit dans  $v_j^0 \cap v_k^0$ . D'autre part, d'après le théorème de *Cauchy*, l'inégalité  $|c_{kv}[\phi_{kf}(x_j, y_j)]| \leq A_v$  entraîne celles  $|\gamma_{kjv\mu}(x_j)| \leq A_v Q^\mu$  dans  $v_j^0 \cap v_k^0$ , où  $Q$  est un nombre positif convenable. D'où et de l'égalité (4), on a

$$(7) \quad \sum_{v=2}^{\infty} h''_{kjv}(x_j) u^v \ll \sum_{v=2}^{\infty} A_v [QA(u) + Q^2(A(u))^2 + \dots] u^v \\ = A(u) \frac{QA(u)}{1 - QA(u)}.$$

Par suite, on a

$$\sum_{v=2}^{\infty} h_{kjv}(x_j) u^v \ll \frac{2N(A(u))^2}{1 - NA(u)},$$

où  $N$  est un nombre positif plus grand que  $R$ ,  $R^2$  et  $Q$ . D'après l'énoncé de la section précédente, il suffit, pour que  $A(u)$  soit une majorante de  $f_j$ , que  $A(u)$  satisfait à l'égalité

$$A(u) - u = K \frac{2N(A(u))^2}{1 - NA(u)}.$$

La fonction  $A(u)$  existe certainement. On a donc la

**Proposition 7.** *Soit  $S$  une surface générique sur une variété analytique  $\mathfrak{M}$ . Alors, il y a une fonction holomorphe dans un voisinage de  $S$  qui admet le seul zéro  $S$  d'ordre un.*

### 3. Une Condition pour Surfaces Génériques

Soit  $S_0$  une surface analytique compacte sur une variété analytique  $\mathfrak{M}$ .

On suppose que  $S_0$  soit irréductible et non singulière. De plus, supposons qu'elle soit une limite d'ordre un d'une suite  $\{S_v\}$  ( $v=1, 2, \dots$ ) de surfaces analytiques compactes qui ne rencontrent pas  $S_0$ . Alors, on peut dire que la surface  $S_0$  est générique. Ceci ayant été remarqué par *M. Suzuki*, on le démontrera ici puisqu'il n'est écrit nulle part.

Prenons un recouvrement canonique  $\{V_j\}$  de  $S_0$ . Alors, à partir d'un certain rang, la partie de  $S_v$  dans  $V_j$  se représente de la forme

$$y_j = \xi_{jv}(x_j)$$

$\xi_{jv}$  étant une fonction holomorphe sur  $v_j$ . On suppose donc qu'il en soit ainsi pour toute surface  $S_v$ , si nécessaire, à l'exception de  $S_v$  jusqu'à un certain rang.

Considérons d'abord une donnée  $(p) = \{(g_j, V_j)\}$  du 1<sup>er</sup> problème du *Cousin* par rapport à  $\{V_j\}$  qui admet un seul pôle  $S_0$ . Pour chaque surface  $S_v$ , en prenant un nombre complexe  $\alpha_v$  et en posant  $\phi_{jv}(x_j) = g_j[\xi_{jv}(x_j)] + \alpha_v$ , on considère un système  $(\phi_{jv}, v_j)$  sur  $S_0$ . Posons

$$A(\alpha_v) = \text{Max}_j \{ \sup_{x_j \in v_j} |\phi_{jv}(x_j)| \}$$

et

$$A_v = \liminf_{\alpha_v \in \mathbb{C}} A(\alpha_v).$$

Il existe évidemment un nombre complexe  $\alpha_v^0$  tel qu'on ait  $A_v = A(\alpha_v^0)$ . Soit  $(\phi_{jv}^0, v_j)$  le système donné par le nombre  $\alpha_v^0$ . Les fonctions  $\phi_{jv}^0$  étant bornées uniformément en module, on peut extraire de la suite des systèmes  $\{(\phi_{jv}^0, v_j)\}$  ( $v=1, 2, \dots$ ) une suite partielle  $\{(\phi_{j\mu}^0, v_j)\}$  ( $\mu=v_1, v_2, \dots$ ) de manière que toute fonction  $\phi_{j\mu}^0$  tend vers une fonction holomorphe  $\phi_{j0}$  dans chaque  $v_j$ . Le système  $\{(\phi_{j0}, v_j)\}$  est évidemment une solution de  $(p)$  sur  $S_0$ , puisque toute fonction  $\phi_{j\mu}^0 - \phi_{k\mu}^0$  tend vers  $(g_j - g_k)|_{S_0}$  sur  $v_j \cap v_k$ . La surface  $S_0$  satisfait donc à la deuxième condition pour être générique.

Soit ensuite  $(\mathfrak{z}) = \{(f_j, V_j)\}$  une donnée du 2<sup>ème</sup> problème de *Cousin* par rapport à  $\{V_j\}$  qui admet un seul zéro  $S_0$ . Pour chaque  $S_v$ , on prend un nombre complexe  $\beta_v$  tel que, en posant  $\psi_{jv}(x_j) = \beta_v f_j[\xi_{jv}(x_j)]$ , on ait l'égalité

$$\text{Max}_j \{ \sup_{x_j \in v_j} |\psi_{jv}(x_j)| \} = 1.$$

Alors, de la suite des systèmes  $\{(\psi_{jv}, v_j)\}$  ( $v=1, 2, \dots$ ), on peut extraire une suite partielle  $\{(\psi_{j\mu}, v_j)\}$  ( $\mu=v_1, v_2, \dots$ ) de manière que toute fonction  $\psi_{j\mu}$  tend vers une fonction holomorphe  $\psi_{j0}$  dans chaque  $v_j$ . Le système  $\{(\psi_{j0}, v_j)\}$  est évidemment une solution de  $(\mathfrak{z})$  sur  $S_0$ , puisque toute fonction  $\psi_{j\mu}/\psi_{k\mu}$  tend vers  $f_j/f_k|_{S_0}$ .

sur  $v_j \cap v_k$ . La surface  $S_0$  satisfait donc à la troisième condition pour être générique. La première condition ayant été supposée, on a la

**Proposition 8.** *Soit  $S$  une surface analytique compacte sur une variété analytique  $\mathfrak{M}$ . Si elle est une limite d'ordre un d'une suite de surfaces analytiques compactes ne rencontrant pas  $S$ , la surface  $S$  est générique.*

#### 4. L'Existence des Surfaces Génériques

Considérons, dans un domaine  $V$  dans l'intérieur complet de  $\mathfrak{M}$ , une famille  $F$  de surfaces analytiques compactes et connexes. On suppose que  $F$  soit parallèle et contienne une infinité non dénombrable de surfaces. Nous allons voir le fait que la famille  $F$  contient au moins une surface générique. On rappellera ce qu'on a dit dans la section 3 de la partie I. Les notations  $\gamma_v$ ,  $\gamma_v^0$ ,  $\rho_0$  et  $|S|$  ont les mêmes significations que précédemment. Soit  $F_n$  la famille partielle de  $F$  qui consiste en toutes les surfaces  $S$  de  $F$  telles qu'on ait  $|S| < n$ ,  $n$  étant un entier positif quelconque. On peut alors trouver un entier  $n_0$  tel que  $F_{n_0}$  contienne une infinité non dénombrable de surfaces. Grâce à Oka, la famille  $F_{n_0}$  est normale sur  $\mathfrak{M}$ . De plus, d'après la proposition 2, on peut former la fermeture de  $F_{n_0}$ . Donc, on suppose dès le début que  $F$  soit normale, fermée et parallèle dans  $V$ .

On peut d'abord dire que:

*On peut extraire de  $F$  une suite  $\{S_v\}$  ( $v=1, 2, \dots$ ) de surfaces qui est convergente et dont la convergence est d'ordre un.*

En effet,  $\alpha$  étant un nombre rationnel, on considère la famille partielle  $F_\alpha$  de  $F$  qui consiste en toutes les surfaces  $S$  telles qu'on ait  $\alpha \leq |S| \leq \alpha + \rho_0/3$ . Alors, il y a entre elles au moins une famille contenant une infinité non dénombrable de surfaces. Soit  $F_0$  l'une de ces familles. Elle n'est pas toujours fermée. Mais, on peut aisément en extraire une suite  $\{S_v\}$  de surfaces qui tend vers une surface  $S_0$  appartenant aussi à  $F_0$ . La convergence est d'ordre un puisque sinon on a l'inégalité  $|S_v| > |S_0| + 2 \cdot \rho_0/3$  à partir d'un certain rang, ce qui démontre l'énoncé.

On peut ensuite dire que:

*Toute surface de  $F$  est irréductible et non singulière sauf une infinité dénombrable au plus de celles-ci.*

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il existe une infinité non

dénombrable de surfaces n'étant pas ainsi. Soit  $F(g_1, \dots, g_n; m)$  la famille partielle de  $F$  qui consiste en toutes les surfaces constituées par  $n$  composantes irréductibles de genre  $g_v$  ( $v=1, \dots, n$ ) et admettant  $m$  points singuliers,  $n$  et  $m$  étant des entiers non négatifs, l'un des deux positif. Alors, parmi elles, il existe au moins une famille qui contient une infinité non dénombrable de surfaces. Soit  $F^*$  l'une de ces familles. D'après l'énoncé ci-dessus, on peut en extraire une suite  $\{S_v\}$  ( $v=1, 2, \dots$ ) de surfaces qui tend vers une surface  $S_0$  appartenant aussi à  $F^*$  et dont la convergence est d'ordre un. Soient  $p_\mu$  ( $\mu=1, \dots, m$ ) les points singuliers de  $S_0$ . En prenant, pour chaque point  $p_\mu$ , un système de coordonnées locales  $x_\mu, y_\mu$  en  $p_\mu$ , on décrit une hypersphère  $\delta_\mu: |x_\mu|^2 + |y_\mu|^2 < \eta^2$ ,  $\eta$  étant un nombre positif suffisamment petit, de manière que  $S_{0\mu} = S_0 \cap \delta_\mu$  admette un seul point singulier  $p_\mu$  et que toute composante irréductible de  $S_{0\mu}$  soit simplement connexe. Soient  $S_v^*$  ( $v=0, 1, 2, \dots$ ) les parties de  $S_v$  données par l'exception de tous les points dans  $\delta_\mu$  ( $\mu=1, \dots, m$ ). Alors,  $S_v^*$  est toute homéomorphe à  $S_0^*$ , dès que  $v$  surpasse à un entier convenable  $v_0$ . Il en résulte que, pour tout  $v$  ( $v > v_0$ ) et pour tout  $\mu$  ( $\mu=1, \dots, m$ ),  $S_v \cap \delta_\mu$  admet un seul point singulier et consistent en même nombre que  $S_{0\mu}$  de composantes irréductibles simplement connexes. Grâce à *Weierstrass*,  $S_v \cap \delta_\mu$  est irréductible. De plus, d'après la proposition 1, elle n'admet aucun point singulier. L'énoncé est donc démontré.

D'après deux énoncés ci-dessus et la proposition 8, on a la

**Proposition 9.** *Si une variété analytique  $\mathfrak{M}$  admet une famille parallèle  $F$  d'une infinité non dénombrable de surfaces analytiques compactes et connexes,  $F$  contient au moins une surface générique.*

## 5. L'Existence des Fonctions Analytiques

Il s'agit maintenant de montrer le fait que toute variété analytique compacte ou bien ouverte et pseudoconvexe admet toujours une fonction analytique uniforme pourvu qu'elle contienne une surface générique.

### A. Cas d'une Variété Analytique Compacte

Soit  $\mathfrak{M}$  une variété analytique compacte admettant une surface générique  $S_0$ . D'après la proposition 7, on a une famille holomorphe  $\mathfrak{F}_0$  de surfaces analytiques compactes et connexes contenant  $S_0$  dans un voisinage convenable  $V_0$  de  $S_0$ . Nous allons prolonger  $\mathfrak{F}_0$  analytiquement, au dehors de  $V_0$ , autant que possible sur  $\mathfrak{M}$ . Soit  $\mathfrak{F}$  celle ainsi obtenue, qu'on dira *maximale*. Elle

est donnée par  $\Phi: V \rightarrow R$ ,  $V$  étant un domaine sur  $\mathfrak{M}$  et  $R$  étant une surface de Riemann abstraite. Lorsque  $R$  est compacte,  $V$  coïncide évidemment avec  $\mathfrak{M}$ . Soit  $G$  une fonction méromorphe sur toute  $R$ . D'après la théorie classique, elle existe certainement. Posons  $f=G(\Phi)$ . C'est une fonction méromorphe sur toute variété  $\mathfrak{M}$ . On suppose donc que  $R$  soit ouverte.

On peut d'abord dire que :

*Le genre de  $R$  est fini.*

En effet, soit  $H_1(\mathfrak{M})$  le groupe d'homologie de dimension un de  $\mathfrak{M}$ . Le rang  $d$  de  $H_1(\mathfrak{M})$  est fini puisque  $\mathfrak{M}$  est compacte. Supposons, pour le réduire à l'absurde que  $R$  soit de genre infini. Soit  $R'$  une partie ouverte dans l'intérieur complet de  $R$  qui est bordée par un nombre fini de courbes simples fermées  $\gamma_j$  ( $j=1, \dots, l$ ) et de genre supérieur à  $d+1$ , soit  $\mathfrak{M}^0$  la partie de  $\mathfrak{M}$  donnée par  $\Phi^{-1}(R')$  et soit  $R''$  la surface compacte donnée par le fait de compactifier  $R'$ , pour chaque composante frontière, en ajoutant respectivement un point  $p_j$  au lieu de  $\gamma_j$ .  $H_1(R'')$  désigne le groupe d'homologie de dimension un de  $R''$ . Décrivons, sur  $R''$ ,  $d+1$  1-cycles  $C_v$  ( $v=1, \dots, d+1$ ) ne passant par aucun point ajouté  $p_j$ , de manière qu'ils soient indépendants dans  $H_1(R'')$ . Alors, on peut tracer, pour chaque  $C_v$ , un 1-cycle dans  $\mathfrak{M}$  qui corresponde de façon homéomorphe à  $C_v$  par  $\Phi$ . On le désigne par  $\tilde{C}_v$ . Par hypothèse, il y a  $d+1$  entiers  $a_v$  ( $v=1, \dots, d+1$ ) tels qu'on ait  $\sum a_v C_v = 0$  dans  $H_1(\mathfrak{M})$ ; c'est-à-dire, il y a une 2-chaîne  $\tilde{B}$  telle qu'on ait  $\partial \tilde{B} = \sum a_v \tilde{C}_v$ . Soit  $B$  la fermeture de l'image de  $\tilde{B} \cap \mathfrak{M}^0$  par  $\Phi$  dans  $R''$ . Evidemment  $\partial B = \sum a_v C_v$ . Ceci contredit l'hypothèse; ce que démontre l'énoncé.

Comme on le sait, toute surface de Riemann de genre fini peut être regardée comme une partie d'une surface de Riemann compacte bien qu'elle ne soit pas toujours déterminée uniquement. On suppose donc que la surface de Riemann  $R$  soit la partie de celle compacte  $R^*$ . On pose  $e=R^*-R$ . On peut alors dire que :

*L'ensemble  $e$  est un ensemble négligeable de la classe  $N_D$  au sens de la théorie des fonctions.*

En effet, décrivons dans  $R$  une courbe simple fermée de Jordan  $\Gamma$  qui limite une aire simplement connexe  $\mathfrak{A}$  contenant tous les points de  $e$  de  $R^*$ . On fait correspondre  $\mathfrak{A}$  de façon analytique et biunivoque au disque-unité  $\mathfrak{C}$ :  $|z| < 1$  sur le plan de  $z$ . Soit  $z=\zeta(p)$  cette application et poson  $e^*=\zeta(e)$  et

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - e^*$ . A ce moment, on suppose que l'origine de  $\mathbb{C}$  n'appartienne pas à  $e^*$ . En posant  $\Phi^* = \zeta(\Phi)$  et  $V^* = \Phi^{*-1}(\mathbb{C}^*)$ , on considère la famille holomorphe  $\mathfrak{F}^*$  donnée par  $\Phi^*: V^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Les notations  $z_\theta, l_\theta^*$  et  $\mathfrak{F}_\theta^*$  ont les mêmes significations qu'on a dit dans la section 7 de la partie II. On peut alors dire que l'ensemble  $E$  de toutes les directions  $\theta$  telles qu'on ait  $z_\theta \in e^*$  est de mesure nulle. Car, s'il en n'est pas ainsi, d'après le théorème 2, il y a une infinité non dénombrable de surfaces analytiques compactes et connexes sur la frontière de  $V$ . La famille  $\mathfrak{F}$  étant maximale, ceci contredit la proposition 9. Il en résulte que la mesure de  $e^*$  dans  $\mathbb{C}$  est aussi nulle. D'après le théorème de Ahlfors et Beurling [2], ceci signifie que  $e$  est un ensemble négligeable de la classe  $N_D$  puisque ce résultat-ci est valable sans dépendre de la façon de former la compactifié  $R^*$  de  $R$ . L'énoncé est donc démontré.

On verra ensuite le fait que:

*L'application  $\Phi$  se prolonge analytiquement sur toute  $\mathfrak{M}$  en tant qu'une application sur  $R^*$ .*

En effet, soit  $p$  un point frontière de  $V$ . En prenant un système de coordonnées locales  $x, y$ , on trace le dicylindre  $\Delta: |x| < 1, |y| < 1$  de manière que, pour tout nombre complexe  $c$  ( $|c| < 1$ ) la droite analytique  $L_c: y=c$  dans  $\Delta$  contienne au moins un point de  $V$ . La restriction de  $\Phi$  sur  $L_c \cap V$  est regardée comme une fonction d'une variable  $x$ . Désignons la par  $\phi_c(x)$ . Je dis ici que la fonction peut être prolongée analytiquement sur toute  $L_c$ . Décrivons dans  $L_c \cap V$  une courbe simple fermée de Jordan  $\gamma$ . On suppose que  $\gamma$  soit analytique. On désigne par  $\gamma^*$  l'image de  $\gamma$  par  $\phi_c$ . Ceci est une courbe analytique de Jordan tracée dans  $R$  et limite un nombre fini de parties qui ne se superposent pas l'une l'autre dans  $R^*$ . On les désigne par  $B_\nu$  ( $\nu=1, \dots, m$ ) et on pose  $B_\nu^0 = B_\nu \cap R$ . En désignant par  $\mathfrak{A}$  la partie de  $L_c$  qui est limitée par  $\gamma$ , on pose  $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A} \cap V$  et  $\alpha = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^0$ . Considérons ici la fonction inverse  $\xi_c(p)$  de la restriction de  $\phi_c(x)$  dans  $\mathfrak{A}^0$ . La surface de Riemann  $R_c$  de  $\xi_c$  étalée au-dessus de  $R$ , c'est-à-dire, l'image de  $\mathfrak{A}^0$  par  $\phi_c$ , n'admet aucun point frontière relatif par rapport à  $R$  que celui au-dessus de  $\gamma^*$ . Par suite, chaque partie connexe  $R_{c\nu}$  de  $R_c$  située justement au-dessus de  $B_\nu^0$  a le même nombre  $n_\nu$  de feuillettes au-dessus de tout point de  $B_\nu^0$  aux projections de points critiques de  $R_{c\nu}$  près. Envisageons la forme de  $R_{c\nu}$ . On prend, dans  $B_\nu$ , nombre fini de parties connexes et simplement connexes  $\delta_\mu$  ( $\mu=1, \dots, n$ ) qui sont limitées respectivement par une courbe simple fermée dans  $B_\nu^0$ , qui ne rencontrent pas l'une et l'autre et qui recouvrent

tous les points de  $e$ . Alors, d'après la formule de *Hurwitz*, quelque grand que  $n$  soit, la partie de  $R_{c_v}$  située justement au-dessus de  $\delta_v$  se sépare en  $n_v$  composantes connexes sauf  $2n_v - 2$  au plus de  $\delta_v$ , puisque  $R_v$  est genre zéro. Par suite, en ajoutant les points au-dessus de  $e$ , on peut avoir une surface de Riemann  $\tilde{R}_{c_v}$  qui contient  $R_{c_v}$  et qui n'admet aucun point frontière relatif par rapport à  $B_v$ . Ceci posé, la fonction  $\zeta_c(p)$  se prolonge analytiquement sur toute  $\tilde{R}_{c_v}$  puisque l'intégrale de *Dirichlet* de  $\zeta_c$  est fini et que  $e$  est un ensemble négligeable de la classe  $N_D$ . Ceci signifie que la fonction  $\phi_c$  se prolonge analytiquement dans toute  $\mathfrak{M}$ . Soit  $\mathfrak{B}$  une composante connexe de  $L_c \cap V$  et soit  $\tilde{\mathfrak{B}}$  une partie simplement connexe de  $L_c$  donnée en ajoutant tous les points de  $\alpha$ , qui sont entourés par une courbe simple fermée de Jordan tracée dans  $L_c \cap V$ , à  $\mathfrak{B}$ . La fonction  $\phi_c$  devient holomorphe dans toute  $\tilde{\mathfrak{B}}$  par le prolongement analytique. On peut ici dire que  $\tilde{\mathfrak{B}}$  coïncide avec  $L_c$ . Car, s'il y a un point  $q$  situé dans  $L_c$  de la frontière de  $\tilde{\mathfrak{B}}$ , elle contient un continuum qui lie  $q$  à un point de la circonférence de  $L_c$ . Ceci contredit le théorème de *Riesz* puisque  $\phi_c$  y prend une seule valeur frontière. Il s'agit maintenant de la analyticité de  $\Phi$  dans  $\Delta$ . D'après le théorème de *Hartogs*, la fonction dans  $\Delta$  qui est holomorphe par rapport à une variable  $x$  sur chaque  $L_c$  et holomorphe par rapport aux deux variables  $x$  et  $y$  en un point de chaque  $L_c$  est holomorphe dans  $\Delta$ .  $\Phi$  est donc holomorphe dans  $\Delta$ . Le point  $p$  étant pris arbitrairement sur la frontière de  $V$ ,  $\Phi$  se prolonge analytiquement sur toute variété  $\mathfrak{M}$  en tant que l'application sur  $R^*$ .

Tout pareillement ce qu'on a dit au cas où  $R$  est compacte, on peut former une fonction méromorphe sur toute variété  $\mathfrak{M}$ .

### B. Cas d'une Variété Analytique Ouverte et Pseudoconvexe

Un domaine  $D$  dans l'intérieur complet d'une variété analytique  $\mathfrak{M}$  est dit pseudoconvexe s'il existe, dans un voisinage  $U$  de la frontière de  $D$ , une fonction plurisousharmonique  $\phi$  telle que la partie  $D \cap U$  soit donnée par l'inégalité  $\phi < 0$ . Une variété analytique  $\mathfrak{M}$  sera dite pseudoconvexe s'il existe une suite de domaines  $D_v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) tels qu'on ait  $D_v \subset D_{v+1}$  et  $\lim D_v = \mathfrak{M}$ . Dans la suite, on suppose que  $\mathfrak{M}$  soit pseudoconvexe et admette une surface générique  $S_0$ . De la même façon qu'on a indiquée pour  $A$ , on forme une famille holomorphe  $\mathfrak{F}_0$  contenant  $S_0$  dans un voisinage  $V_0$  de  $S_0$ , on la prolonge analytiquement au dehors de  $V_0$  autant que possible dans un domaine pseudoconvexe  $D_v$  ( $S_0 \subset D_v$ ) et on obtient une famille holomorphe  $\mathfrak{F}_v$  qu'on dira *maximale dans  $D_v$* . Elle est donnée par  $\Phi_v: V_v \rightarrow R_v$ , où  $V_v$  est un domaine dans  $D_v$  et  $R_v$  est une surface

de Riemann ouverte. On peut alors dire que:

*Le domaine  $V_\nu$  coïncide avec  $D_\nu$ .*

En effet, la surface de Riemann  $R_\nu$  est aussi de genre fini, puisque  $D_\nu$  se trouve dans un domaine sur  $\mathfrak{M}$  dont le groupe d'homologie de dimension un est de rang fini. On considère donc  $R_\nu$  comme une partie d'une surface de Riemann compacte  $R_\nu^*$  et l'on pose  $e_\nu = R_\nu^* - R_\nu$ . Soit  $e'_\nu$  l'ensemble de tous les points de  $e_\nu$  tels qu'il y ait un voisinage  $\delta$  de ce point pour lequel  $\Phi_\nu^{-1}(\delta \cap R_\nu)$  se trouve dans l'intérieur complet de  $D_\nu$  et posons  $e''_\nu = e_\nu - e'_\nu$ . Je dis ici que  $e'_\nu$  est vide. Prenons un point  $q$  de  $e'_\nu$  et décrivons une courbe simple fermée de Jordan  $\Gamma$  qui limite une aire  $\mathfrak{A}$  contenant  $q$  sans aucun point de  $e''_\nu$ . Supposons d'abord que  $\Gamma$  se trouve dans  $R_\nu$ . En posant  $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A} \cap R_\nu$ , on considère une famille holomorphe donnée par  $\Phi^0: V^0 \rightarrow \mathfrak{A}^0$ , où  $V^0 = \Phi_\nu^{-1}(\mathfrak{A}^0)$  et  $\Phi^0$  est la restriction de  $\Phi_\nu$  dans  $V^0$ .  $V^0$  se trouvant dans l'intérieur de  $D_\nu$ , d'après le même raison que précédemment, l'application  $\Phi^0$  se prolonge analytiquement à tout point frontière de  $V^0$ . Cela veut dire qu'il n'y a aucun point de cette sorte de  $e'_\nu$ . Soit  $\mathfrak{A}^*$  une composante connexe de  $\mathfrak{A} \cap R_\nu$ . Ceci est simplement connexe. De plus, quand on fait correspondre à  $\mathfrak{A}^*$  un disque-unité  $\mathfrak{C}: |z| < 1$  sur le plan de  $z$  de façon analytique et biunivoque, l'ensemble de tous les points, qui correspondent aux ceux de  $e'_\nu$ , de la circonférence de  $\mathfrak{C}$  est de mesure positive. Ceci contredit, d'après le théorème 1, le fait que  $\mathfrak{F}_\nu$  est maximale dans  $D_\nu$ .  $e'_\nu$  est donc vide. Supposons qu'il y ait un point frontière  $p$  de  $V_\nu$  qui se trouve dans  $D_\nu$ . En prenant convenablement un système de coordonnées locales  $x, y$ , on considère un dicylindre  $\Delta: |x| < 1, |y| < 1$  dans l'intérieur complet de  $D_\nu$  et une droite analytique  $L_0: y=0$  dans  $\Delta$ . On suppose que  $L_0 \cap V_\nu$  ne soit pas vide. Alors, l'image de  $L_0 \cap V_\nu$  par  $\Phi_\nu$  se trouve dans l'intérieur complet de  $R_\nu^* - e''_\nu$ , puisque, d'après l'hypothèse que  $D_\nu$  est pseudoconvexe, toute surface de  $F_\nu$  qui passe par un point de  $L_0 \cap V_\nu$  se trouve uniformément dans l'intérieur complet de  $D_\nu$ . Ceci est absurde. L'énoncé est donc démontré.

Il en résulte que la famille holomorphe initial  $\mathfrak{F}_0$  peut être prolongée analytiquement sur toute variété analytique  $\mathfrak{M}$ . La famille  $\mathfrak{F}$  ainsi obtenue est donnée par  $\Phi: \mathfrak{M} \rightarrow R$ ,  $R$  étant une surface de Riemann ouvert abstraite. D'après le théorème de *Behnke* et *Stein* [3], on peut former une fonction holomorphe non constante sur toute  $R$ . Désignons-la par  $H$  et posons  $f = H(\Phi)$ . Elle est fonction holomorphe sur toute  $\mathfrak{M}$ . En conclusion, on a le



**Théorème II.** *Soit  $\mathfrak{M}$  une variété analytique à deux dimensions. Supposons que  $\mathfrak{M}$  soit compacte, ou bien ouverte et pseudoconvexe. Alors, on peut toujours former une fonction analytique sur toute  $\mathfrak{M}$ , pourvu qu'elle admette une surface générique.*

### Bibliographie

- [1] Ahlfors, L., Open Riemann Surfaces and Extremal Problems on Compact Subregion, *Comment. Math. Helv.*, **24** (1950), 100–134.
- [2] Ahlfors, L. and Beurling, A., Conformal invariants and Function-theoretic Null-set, *Acta Math.*, **83** (1950), 101–129.
- [3] Behnke, H. und Stein, K., Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen, *Math. Ann.*, **120** (1948), 430–461.
- [4] Grauert, H., Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, *Math. Ann.*, **146** (1962), 331–368.
- [5] Kodaira, K., On kähler varieties of the restricted type, *Ann. Math.*, **60** (1954), 28–48.
- [6] Kodaira, K. and Spencer, D. C., A theorem of completeness of characteristic systems of complete continuous systems, *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 477–500.
- [7] Nishino, T., Sur les familles de surfaces analytiques, *J. Math. Kyoto Univ.*, **1** (1962), 375–377.
- [8] Oka, K., Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc., *J. Sci. Hiroshima Univ.*, **A4** (1934), 94–98.
- [9] Rutishauser, H., Über die Folgen und Scharen von analytischen und meromorphen Funktionen mehrerer Variablen, sowie von analytischen Abbildungen, *Acta Math.*, **83** (1954), 287–304.
- [10] Stoll, W., Normal families of non-negative divisors, *Math. Z.*, **84** (1964), 154–218.
- [11] Ueda, T., On the Neighborhood of a Compact Complex Curve with Topologically Trivial Normal Bundle, *A paraitre*.

