

Analyse Microlocale sur les Variétés de Cauchy- Riemann et Problème du Prolongement des Solutions Holomorphes des Équations aux Dérivées Partielles

par

Shinichi TAJIMA*

Table des Matières.

Introduction	911
§0. Préliminaires	913
§1. Système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles	918
§2. Analyse microlocale de la variété de Cauchy-Riemann	925
§3. Problème de prolongement et système tangentiel	930
§4. Théorèmes de prolongement	936
Bibliographie	943

Introduction

Nous allons nous intéresser au problème suivant: Etant donné une famille finie (P_j) d'opérateurs différentiels à coefficients holomorphes, les solutions holomorphes du système $P_j \mu = 0$ définies dans un ouvert Ω se prolongent-elles en solutions holomorphes au voisinage d'un point frontière de Ω ?

M. Zerner [45] (dans le cas d'un seul opérateur) et J. M. Bony-P. Schapira [6] ont montré que si le bord de l'ouvert est non caractéristique par rapport à (P_j) , toutes les solutions holomorphes se prolongent. Récemment ce résultat a été généralisé par M. Kashiwara [17], M. Kashiwara-T. Kawai [21] et par M. Kashiwara-P. Schapira [22].

C. O. Kiselman [26] a résolu ce problème dans le cas d'un seul opérateur à coefficients constants. P. Pallu de la Barrière [34] et Y. Tsuno [40]—[43] ont

Communiqué par S. Matsuura, le 25 Mars, 1981.

* Ancienne adresse: Département de Mathématiques, Université de Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113 Japon. Nouvelle adresse: Département de Mathématiques, Université de Niigata, Ninomachi 8050, Ikarashi, Niigata, 950-21, Japon.

très sérieusement étudié le cas d'un seul opérateur P à coefficients holomorphes.

En utilisant la théorie des hyperfonctions et des microfonctions, P. Pallu de la Barrière a montré que si P n'est pas dégénéré au bord, la structure d'obstructions du prolongement est isomorphe à la structure du faisceau des solutions microfonctions d'un système tangentiel.

J. Persson [35] et Y. Tsuno [42], [43] ont abordé l'étude du cas où le bord n'est pas simplement caractéristique pour P .

Dans cet article, on interprète le problème du prolongement des solutions holomorphes du point de vue microlocal, en généralisant ce problème pour l'étude systématique.

En ce qui concerne la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles, on utilisera la théorie des hyperfonctions et des microfonctions de Sato-Kawai-Kashiwara [37]. En ce qui concerne la théorie des variétés de Cauchy-Riemann, on aura besoin des résultats de I. Naruki [32], [33] et de A. Andreotti-G. A. Fredricks [1]. On en donnera brièvement un résumé dans le paragraphe 0.

Le paragraphe 1 est consacré à l'étude du système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles. En particulier nous montrerons que le problème du prolongement (du type "edge of the wedge theorem") des fonctions holomorphes pour la sous variété analytique réelle, générique est équivalent au problème de l'hypo-ellipticité analytique du système de Cauchy-Riemann tangentiel (Th. 1.2.2).

Le paragraphe 2 est consacré à l'étude de la structure microlocale de la sous-variété générique dans la variété analytique complexe. En utilisant les résultats de S-K-K, nous étudierons la structure des solutions microfonctions du système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles. En particulier nous retrouverons un résultat de I. Naruki [33] du point de vue microlocal (Th. 2.2.2).

Dans le paragraphe 3, nous traiterons le problème du prolongement (du type "edge of the wedge theorem") des solutions holomorphes du système d'équations aux dérivées partielles. Nous montrerons que la structure d'obstructions du prolongement (pour la sous-variété analytique réelle, générique, de codimension quelconque) est quasi-isomorphe à la structure du faisceau des solutions microfonctions du système tangentiel (Th. 3.1.4). En traitant le problème du prolongement dans le domaine complexe, nous obtiendrons ce résultat de façon naturelle.

Remarquons ici que notre l'étude a été inspirée par l'article [34] de P. Pallu de la Barrière et aussi par les articles [18] [19] de M. Kashiwara-T. Kawai. En effet, M. Kashiwara-T. Kawai ont traité le problème du prolongement des solutions du système elliptique dans le domaine réel.

Dans le paragraphe 4, on donnera comme applications du théorème 3.1.4 des nouveaux résultats, en mettant à exécution les principes et les procédés dûs à M. Kashiwara-T. Kawai [20] dans certaines cas concrets. On retrouvera le résultat de J. M. Bony-P. Schapira [6]. On pourra aussi généraliser certains résultats de Y. Tsuno [40], [41] et de P. Pallu de la Barrière [34] au système d'équations.

On étudiera la non-hypo-ellipticité analytique et aussi donnera une methode pour déterminer la structure du faisceau des solutions microfonctions du système tangentiel (Th. 4.2.4 et Th. 4.2.6).

On utilisera le langage des cathégories dérivées. On renvoie à [9] pour les définitions.

§ 0. Préliminaires.

A) Soit X une variété analytique complexe, munie du faisceau \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes. On note T^*X le fibré vectoriel cotangent à X , P^*X le fibré projectif complexe associé.

Le faisceau d'anneau \mathcal{D}_X des opérateurs différentiels sur X est défini par :

$$\mathcal{D}_X = \mathcal{H}_X^{\dim X}(\mathcal{O}_{X \times X}^{(0, \dim X)})^f,$$

où on identifie X à la diagonale de $X \times X$.

On note ν la projection $T^*X - T_X^*X \rightarrow P^*X$, $\pi_{X|X \times X}$ la projection

$$(X \times X - X) \sqcup T_X^*(X \times X) \rightarrow X$$

le premier espace étant muni de la topologie de co-éclaté ([37], [17]).

On définit le faisceau \mathcal{E}_X des opérateurs microdifférentiels sur T^*X par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_X &= \nu^{-1} \nu_* (\mathcal{H}_{T_X^*(X \times X)}^{\dim X} (\pi_{X|X \times X}^{-1} (\mathcal{O}_{X \times X}^{(0, \dim X)})))^f && \text{sur } T^*X - T_X^*X, \\ \mathcal{E}_X &= \mathcal{D}_X && \text{sur } T_X^*X. \end{aligned}$$

Remarquons qu'ils sont des faisceaux d'anneaux cohérents. Pour les définitions précises nous renvoyons à [17], [37].

Définition 0.1.1. Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent à gauche. La variété caractéristique de \mathcal{M} , notée $SS(\mathcal{M})$, est l'ensemble

$$\text{Supp}(\mathcal{E}_{\mathbf{X}} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} \pi^{-1}\mathcal{M}) \subseteq T^*\mathbf{X},$$

où π désigne la projection $T^*\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$.

On désignera encore par \mathcal{M} le module $\mathcal{E}_{\mathbf{X}} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} \pi^{-1}\mathcal{M}$.

Soit ϕ une application holomorphe d'une variété \mathbf{Y} dans la variété \mathbf{X} . On pose :

$$\rho: T^*\mathbf{X} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \longrightarrow T^*\mathbf{Y}, \quad \omega: T^*\mathbf{X} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \longrightarrow T^*\mathbf{X}.$$

Définition 0.1.2. Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$ -module cohérent. On dit que l'application ϕ est non caractéristique par rapport à \mathcal{M} si l'application ρ est propre sur $\omega^{-1}(SS(\mathcal{M}))$.

Remarquons que si \mathbf{Y} est une sous-variété analytique complexe de \mathbf{X} , cette définition est équivalents à la condition usuelle :

$$SS(\mathcal{M}) \cap T_{\mathbf{Y}}^*\mathbf{X} \subseteq T_{\mathbf{X}}^*\mathbf{X}.$$

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}$ (resp. $\mathcal{E}_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}$) est construit dans [15] (resp. dans [37]). $\mathcal{E}_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}}$ est un $\rho^{-1}\mathcal{E}_{\mathbf{Y}}$ -module à gauche et un $\omega^{-1}\mathcal{E}_{\mathbf{X}}$ -module à droite. On définit un $\mathcal{E}_{\mathbf{Y}}$ -module, noté $\phi^*(\mathcal{M})$ ou bien $\mathcal{D}_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} \mathcal{M}$, par :

$$\rho_*(\mathcal{E}_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}} \otimes_{\omega^{-1}\mathcal{E}_{\mathbf{X}}} \omega^{-1}\mathcal{M}).$$

Théorème 0.1.3 (M. Kashiwara [15], [17]). Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$ -module cohérent. Supposons que ϕ soit non caractéristique par rapport à \mathcal{M} . Alors

- (1) $\phi^*(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}$ -module cohérent,
- (2) $SS(\phi^*(\mathcal{M})) = \rho(\omega^{-1}(SS(\mathcal{M})))$.

Dans le cas où \mathbf{Y} est une sous-variété de \mathbf{X} , on désignera par $\mathcal{M}_{\mathbf{Y}}$ le module $\phi^*(\mathcal{M})$.

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$ -module cohérent à gauche, \mathcal{F} un $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$ -module à gauche. Le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ est le faisceau des solutions du système \mathcal{M} à valeurs dans le faisceau \mathcal{F} . On note $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}}$ le foncteur dérivé du foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}}$.

Théorème 0.1.4 (Cauchy-Kowalewski, M. Kashiwara [15], [17]). Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$ -module cohérent. Soit ϕ une application holomorphe de \mathbf{Y} dans \mathbf{X} . Si ϕ est non caractéristique par rapport à \mathcal{M} , on a alors un isomorphisme naturel :

$$\phi^{-1}(\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}}(\mathcal{M}_{\mathbf{Y}}, \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}).$$

Soit \mathbf{M} une variété analytique réelle de complexifiée \mathbf{X} . Le faisceau $\mathcal{B}_{\mathbf{M}}$

des hyperfonctions de Sato est défini par :

$$\mathcal{B}_M = \mathcal{H}_M^{\dim M}(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M|X} = \mathbb{R} \Gamma_M(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M|X}[\dim M],$$

où $\mathbb{R} \Gamma_M$ désigne le foncteur dérivé du foncteur Γ_M et $\omega_{M|X}$ désigne le faisceau de l'orientation relative de M à X .

Théorème 0.1.5 (H. Komatsu-T. Kawai [29], M. Kashiwara [15]). *Soit N une sous-variété analytique réelle de M , Y un complexifié de N dans X . Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. Si Y est non caractéristique par rapport à \mathcal{M} , on a alors :*

$$\mathbb{R} \Gamma_N \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M) \otimes \omega_{N|M} = \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{B}_N) [-\text{codim}_M N].$$

Soit M une variété analytique réelle de complexifiée X . Le faisceau \mathcal{C}_M des microfonctions sur $S_M^* X$ est défini grâce à la transformation comonoïdale par :

$$\mathcal{C}_M = \mathcal{H}_{S_M^* X}^{\dim M}(\pi^{-1} \mathcal{O}_X)^a \otimes \omega_{M|X} = \mathbb{R} \Gamma_{S_M^* X}(\pi^{-1} \mathcal{O}_X)^a \otimes \omega_{M|X}[\dim M],$$

où a désigne l'application antipodale et π la projection

$$(X - M) \sqcup S_M^* X \longrightarrow X.$$

Remarquons que le faisceau \mathcal{C}_M a une structure de \mathcal{C}_X -module à gauche.

Définition 0.1.6. Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. On dit que \mathcal{M} est un système elliptique sur M si :

$$SS(\mathcal{M}) \cap T_M^* X \subseteq T_M^* M.$$

Théorème 0.1.7 (S-K-K [37]). *Soit M une variété analytique réelle de complexifiée X . Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. Si \mathcal{M} est elliptique sur M , on a alors :*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{C}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M) &= 0, \\ \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M) &= \mathbb{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_M), \end{aligned}$$

où \mathcal{A}_M désigne le faisceau des fonctions analytiques réelles sur M .

B) Dans le paragraphe prochain, on verra que la théorie de la variété de Cauchy-Riemann sera importante pour résoudre le problème du prolongement. En particulier nous utiliserons le résultat de I. Naruki [32], celui de G. Tomassini [39] et de A. Andreotti-G.I. Fredricks [1].

Soit N une variété analytique réelle, $TN \otimes \mathbb{C}$ son fibré vectoriel tangent complexifié.

La structure de Cauchy-Riemann de type l sur N est un sous-espace fibré analytique \mathcal{A} de $TN \otimes \mathbb{C}$ tel que

- (0) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_p = l \quad p \in N$
- (1) $\bar{\mathcal{A}} \cap \mathcal{A} = T_N N \otimes \mathbb{C}$,
- (2) \mathcal{A}_p est involutif $\rho \in N$.

On dit que (N, \mathcal{A}) est la variété de Cauchy-Riemann munie de la structure \mathcal{A} (S. J. Greenfield [8]).

Exemple 0.2.1. Soit N une variété analytique réelle. Alors $(N, T_N N)$ est une variété de Cauchy-Riemann de type 0. On l'appelle structure totalement réelle.

Exemple 0.2.2. Soit X une variété analytique complexe. On désigne par $\mathcal{A}\mathcal{H}(X) = T^{0,1}(X)$ l'espace fibré vectoriel tangent antiholomorphe. Il est clair que $(X, (\mathcal{A}\mathcal{H}(X)))$ est une variété de Cauchy-Riemann de type $\dim_{\mathbb{C}} X$.

Exemple 0.2.3. Soient N une variété analytique réelle et X une variété analytique complexe. Soit ϕ un plongement analytique de N dans X . L'application ϕ induit un morphisme ϕ_* de façon naturelle:

$$\phi_*: TN \otimes \mathbb{C} \longrightarrow TX \otimes \mathbb{C}.$$

On pose

$$\mathcal{A}T_{\phi}(N) = \phi_*^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{H}(X)), \quad h(p) = \dim_{\mathbb{C}} (\phi_*^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{H}(X)))_p \quad \text{pour } p \in N.$$

Si $h(p)$ est égal à une constante h pour tout $p \in N$, alors $(N, \mathcal{A}T_{\phi}(N))$ est une variété de Cauchy-Riemann de type h .

La proposition suivante est bien connue.

Proposition 0.2.4 (cf. [1]). Soient X une variété analytique complexe et N une sous-variété analytique réelle de X . Supposons que N soit munie de la structure de Cauchy-Riemann de type h induite par $\mathcal{A}\mathcal{H}(X)$ comme dans l'exemple 0.2.3. On a alors

$$\dim_{\mathbb{R}} N - \dim_{\mathbb{C}} X \leq h \leq \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} N.$$

Définition 0.2.5 (S. J. Greenfield [8]). Dans la situation précédente, on dit que N est générique si on a $h = \dim_{\mathbb{R}} N - \dim_{\mathbb{C}} X$.

Soit N une sous-variété analytique réelle de X définie localement par les équations à valeurs réelles:

$$f_1 = f_2 = \dots = f_{2m-n} = 0, \\ df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_{2m-n} \neq 0 \quad \text{sur } N,$$

où $m = \dim_{\mathbb{C}} X$ et $n = \dim_{\mathbb{R}} N$. Soit (z_1, z_2, \dots, z_m) un système de coordonnées holomorphes locales autour de $p \in N$.

Proposition 0.2.6 (cf. [1]). *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (1) N est générique au point $p \in N$.
- (2) $\text{rank} \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_{2m-n})}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_m)} \right\}_p = 2m - n$.
- (3) $\text{rank} \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_{2m-n})}{\partial(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m)} \right\}_p = 2m - n$.

Remarquons que l'hypersurface analytique réelle de X est générique. La sous-variété analytique complexe n'est pas générique.

Définition 0.2.7. Soit (N, \mathcal{A}) une variété de Cauchy-Riemann. On dit que (X, ϕ) est un complexifié de (N, \mathcal{A}) si:

- (1) X est une variété analytique complexe.
- (2) $\phi: N \rightarrow X$ est un plongement analytique fermée.
- (3) La sous-variété $\phi(N)$ est générique.
- (4) $\phi_* \mathcal{A} = \mathcal{AT}_\phi(N)$.

On dit aussi que X est un complexifié de M s'il existe un plongement ϕ telle que (X, ϕ) est un complexifié de $(M, \mathcal{T}_M M)$.

Théorème 0.2.8 (I. Naruki [32]. cf. [1]). *Soit (N, \mathcal{A}) une variété de Cauchy-Riemann, analytique réelle. Alors*

- (1) *Il existe un complexifié de (N, \mathcal{A}) ,*
- (2) *Supposons que (X, ϕ) et (Y, ψ) soient deux complexifiés de (N, \mathcal{A}) , alors il existe un voisinage U de $\phi(N)$ dans X , un voisinage V de $\psi(N)$ dans Y et une application biholomorphe*

$$h: U \longrightarrow V \quad \text{tels que } h \circ \phi = \psi.$$

De plus, si U est suffisamment petit et connexe à N , alors h est uniquement déterminé.

Définition 0.2.9 (A. Andreotti-G. A. Fredricks [1]). Soit N une variété analytique réelle. Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux structures de Cauchy-Riemann sur N . On dit que \mathcal{B} domine \mathcal{A} si:

$$\mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{B}_p \quad \text{quel que soit } p \in N.$$

Théorème 0.2.10 (A. Andreotti-G. A. Fredricks [1], cf. G. Tommassini [39]). *Dans les conditions précédentes, (\mathbf{X}, ϕ) et (\mathbf{Z}, ψ) sont des complexifiés de (N, \mathcal{A}) et de (N, \mathcal{B}) respectivement. On a les résultats suivants:*

(1) *Il existe un voisinage U de $\phi(N)$ dans \mathbf{X} , un voisinage V de $\psi(N)$ et une submersion h holomorphe*

$$h: U \longrightarrow V \quad \text{tels que } h \circ \phi = \psi.$$

(2) *Si U est suffisamment petit et connexe à $\phi(N)$, alors l'application h se détermine uniquement.*

§ 1. Système des Équations de Cauchy-Riemann Tangentielles

A) Etant donnée une variété de Cauchy-Riemann (N, \mathcal{A}) nous allons interpréter la structure de Cauchy-Riemann comme un système d'équations linéaires aux dérivées partielles.

Nous montrerons grâce à l'existence d'un complexifié (\mathbf{X}, ϕ) que le système d'équations aux dérivées partielles associé à \mathcal{A} est isomorphe au système tangentiel pour le système des équations de Cauchy-Riemann sur \mathbf{X} .

Soit \mathbf{X} une variété analytique complexe, munie du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ des fonctions holomorphes. Soit \mathbf{X}_R la variété analytique réelle sous-jacente à \mathbf{X} , \mathbf{X}_C un complexifié de \mathbf{X}_R .

On désigne par \mathcal{D}_{C-R} le système des équations de Cauchy-Riemann sur \mathbf{X}_R . C'est un $\mathcal{D}_{\mathbf{X}_C}$ -module cohérent.

Nous montrons ici un résultat essentiels.

Théorème 1.1.1. *Soit N une sous-variété analytique réelle de \mathbf{X} . Soit Y un complexifié de N dans \mathbf{X} .*

Pour que Y soit non caractéristique par rapport à \mathcal{D}_{C-R} au voisinage de N , il faut et il suffit que N soit générique dans \mathbf{X} .

Démonstration. La question étant locale, prenons un point $p \in N$. Soit $(z) = (x + iy)$ un système de coordonnées holomorphes au voisinage de p dans \mathbf{X} . Soient $f_1(x, y) = f_2(x, y) = \dots = f_{2m-n}(x, y) = 0$ les équations analytique réelles de N au voisinage de p dans \mathbf{X} , i.e.

$$N = \{(x + iy) \in \mathbf{X} \mid f_1(x, y) = f_2(x, y) = \dots = f_{2m-n}(x, y) = 0\}$$

$$\text{où } df_1(x, y) \wedge df_2(x, y) \wedge \dots \wedge df_{2m-n}(x, y) \neq 0 \quad \text{sur } N.$$

Soit $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x + i\hat{x}, y + i\hat{y})$ le complexifié de (x, y) . Désignons par $\tilde{f}_j(\tilde{x}, \tilde{y})$ les complexifiés de $f_j(x, y)$ dans \mathbb{X}_C . On obtient que

$$Y = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{X}_C \mid \tilde{f}_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{f}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \dots = \tilde{f}_{2m-n}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0\}$$

au voisinage de p dans \mathbb{X}_C .

Rappelons la définition 0.1.2: Y est non caractéristique par rapport à \mathcal{D}_{C-R} si $SS(\mathcal{D}_{C-R}) \cap T_Y^*(\mathbb{X}_C) \subseteq T_{\mathbb{X}_C}^*(\mathbb{X}_C)$.

Soit $(\tilde{x}, \tilde{y}; \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ le système de coordonnées symplectiques de $T^*(\mathbb{X}_C)$ au voisinage de p . Il est facile de voir que $(\tilde{x}, \tilde{y}; \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ appartient à $SS(\mathcal{D}_{C-R}) \cap T_Y^*(\mathbb{X}_C)$ si et seulement si:

- i) $f_j(x, y) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 2m - n,$
 - ii) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m-n} \in C$ tels que
- $$\tilde{\xi}_j + i\tilde{\eta}_j = \tilde{\partial}_{\tilde{z}_j} \{ \alpha_1 \tilde{f}_1(\tilde{x}, \tilde{y}) + \dots + \alpha_{2m-n} \tilde{f}_{2m-n}(\tilde{x}, \tilde{y}) \} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, 2m - n,$$
- où $\tilde{\partial}_{\tilde{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + i \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right).$

On en déduit que Y est non caractéristique par rapport à \mathcal{D}_{C-R} si et seulement si:

$$rank \left\{ \frac{\tilde{\partial}(f_1, f_2, \dots, f_{2m-n})}{\tilde{\partial}(z_1, z_2, \dots, z_m)} \right\} = 2m - n \quad \text{sur } Y.$$

D'autre part on a $\tilde{\partial}_{\tilde{z}_j} \tilde{f}_k = \partial_{z_j} f_k \quad (j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, 2m - n)$ sur \mathbb{X} .

Il est clair d'après ce qui précède que la proposition 0.2.6 entraîne le théorème 1.1.1. c. q. f. d.

Soit N une variété analytique réelle de complexifiée Y . Supposons que N se munisse d'une structure de Cauchy-Riemann \mathcal{A} . On désigne par \mathcal{I} l'idéal de l'anneau $\mathcal{D}_Y \mid N$ engendré par $\Gamma^\omega(\mathcal{A})$. Le complexifié de $(\mathcal{D}_Y \mid N) / \mathcal{I}$, noté $\mathcal{S}_{C-R, \mathcal{A}}$, est un \mathcal{D}_Y -module cohérent.

Exemple 1.1.2. Munissons une variété analytique réelle M de la structure totalement réelle. Soit X un complexifié de M . On a alors $\mathcal{S}_{C-R, T_M M} = \mathcal{D}_X$.

Exemple 1.1.3. Soit X une variété analytique complexe. $(X, \mathcal{A}\mathcal{H}(X))$ est une variété de Cauchy-Riemann. On a alors

$$\mathcal{S}_{C-R, \mathcal{A}\mathcal{H}(X)} = \mathcal{D}_{C-R}.$$

Le résultat suivant est une conséquence du théorème 1.1.1 et du résultat de I. Naruki (le théorème 0.2.8). Grâce à ce résultat, on peut étudier la variété de Cauchy-Riemann du point de vue de S-K-K.

Théorème 1.1.4. Soit N une variété analytique réelle de complexifiée \mathbb{Y} . Soit \mathcal{A} une structure de Cauchy-Riemann sur N , (\mathbb{X}, ϕ) un complexifié de (N, \mathcal{A}) . On note ϕ_C le complexifié de ϕ , i.e. $\phi_C: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}_C$.

Alors le système $\mathcal{S}_{C-R, \mathcal{A}}$ est isomorphe à un système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles. Plus précisément on a

$$\mathcal{S}_{C-R, \mathcal{A}} = \phi_C^*(\mathcal{D}_{C-R}) = \mathcal{D}_{\mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}_C} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbb{X}_C}} \mathcal{D}_{C-R} \quad \text{en tant que } \mathcal{D}_{\mathbb{Y}}\text{-modules.}$$

Démonstration. Par abus de langage nous désignerons encore par ϕ le complexifié de ϕ , i.e. $\phi: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$. L'application ϕ étant un plongement on a alors:

$$\mathcal{S}_{C-R, \mathcal{A}} = \phi^*(\mathcal{S}_{C-R, \phi_*(\mathcal{A})}).$$

La structure $\phi_*(\mathcal{A})$ coïncide avec la structure induite par $\mathcal{A}\mathcal{H}(\mathbb{X})$ ce qui entraîne que

$$\mathcal{S}_{C-R, \phi_*(\mathcal{A})} = \mathcal{D}_{C-R|_{\phi(\mathbb{Y})}} \quad (\text{cf. le lemme 2.1.5}).$$

On obtient donc

$$\mathcal{S}_{C-R, \mathcal{A}} = \phi^*(\mathcal{D}_{C-R|_{\phi(\mathbb{Y})}}) = \phi_C^*(\mathcal{D}_{C-R}). \quad \text{c. q. f. d.}$$

Soit \mathbb{X} une variété analytique complexe, $\bar{\mathbb{X}}$ le conjugué complexe de \mathbb{X} . Si on identifie \mathbb{X}_R avec la diagonale de $\mathbb{X} \times \bar{\mathbb{X}}$, $\mathbb{X} \times \bar{\mathbb{X}}$ est un complexifié de \mathbb{X}_R . On désigne par τ la projection de $\mathbb{X} \times \bar{\mathbb{X}}$ sur \mathbb{X} .

Par définition le système des équations de Cauchy-Riemann sur \mathbb{X}_R coïncide avec le $\mathcal{D}_{\mathbb{X} \times \bar{\mathbb{X}}}$ -module suivant:

$$\tau^* \mathcal{D}_{\mathbb{X}} = \mathcal{D}_{\mathbb{X} \times \bar{\mathbb{X}} \rightarrow \mathbb{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbb{X}}} \mathcal{D}_{\mathbb{X}}.$$

Lemme 1.1.5. Soit N une variété analytique réelle, générique de \mathbb{X} . Soit \mathbb{Y} un complexifié de N dans $\mathbb{X} \times \bar{\mathbb{X}}$. On désigne par ϕ l'inclusion $\phi: N \rightarrow \mathbb{X}$, et par $\phi_C: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X} \times \bar{\mathbb{X}}$ le complexifié de ϕ . On a alors

- (1) $\tau \circ \phi_C|_N: N \rightarrow \mathbb{X}$ coïncide avec $\phi: N \rightarrow \mathbb{X}$.
- (2) $\tau \circ \phi_C: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ est une submersion.

Démonstration. Choisissons un système de coordonnées locales $(s+it)$ holomorphes sur \mathbb{Y} , réelles sur N . Il est facile de voir que

$$\phi_C(s+it) = (\phi(s+it), \bar{\phi}(s+it)).$$

Cela achève la démonstration de (1). On déduit de (1) et du théorème 0.2.10 le résultat (2) immédiatement.

c. q. f. d.

Par abus de langage nous désignerons encore par ϕ le composé $\tau \circ \phi_C: Y \rightarrow X$.

Lemme 1.1.6. *Soit N une sous-variété analytique réelle, générique de X . Soit Y un complexifié de N dans $X \times \bar{X}$. On désigne par \mathcal{D}_{C-R} le système des équations de Cauchy-Riemann. On a alors*

$$\mathcal{D}_{C-R|Y} = \phi^*(\mathcal{D}_X) = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X.$$

Démonstration. Par définition on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{C-R|Y} &= \phi_C^*(\mathcal{D}_{C-R}) = \phi_C^*(\tau^*(\mathcal{D}_X)) \\ &= \mathcal{D}_{Y \rightarrow X \times \bar{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}} \mathcal{D}_{X \times \bar{X} \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X. \end{aligned}$$

Un résultat de S-K-K (Chap. 2, Lemme 3.5.1) entraîne que

$$\phi_C^*(\tau^*(\mathcal{D}_X)) = (\tau \circ \phi_C)^* \mathcal{D}_X = \phi^* \mathcal{D}_X. \quad \text{c. q. f. d.}$$

L'application $\phi: Y \rightarrow X$ étant une submersion, le résultat suivant est une conséquence immédiate du lemme 1.1.6.

Proposition 1.1.7. *Soit N une sous-variété analytique réelle et que générique dans X . Soit Y un complexifié de N dans $X \times \bar{X}$. On obtient alors*

$$SS(\mathcal{D}_{C-R|Y}) = \phi^{-1}(T^*X) = (T^*X) \times_X Y.$$

B) Soit N une sous-variété analytique réelle, générique de X . Nous traiterons le problème du prolongement des fonctions holomorphes à la sous-variété N .

Nous montrerons que la structure d'obstructions du prolongement est isomorphe au faisceau des solutions microfonctions du système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur N .

On obtient d'abord la

Proposition 1.2.1. *Soit N une sous-variété analytique réelle, générique de X . Soit Y un complexifié de N dans $X \times \bar{X}$. On note ϕ la submersion de Y sur X . On a alors*

$$SS(\mathcal{D}_{C-R|Y}) \cap T_N^*Y = \phi^*(T_N^*X).$$

Démonstration. On obtient que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & T^*N & \longleftarrow & T^*Y \times_Y N & \longleftarrow & T_N^*Y \longleftarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longleftarrow & T^*N & \longleftarrow & T^*X \times_X N & \longleftarrow & T_N^*X \longleftarrow 0. \end{array}$$

D'après la proposition 1.1.7, on a $SS(\mathcal{D}_{C-R|Y}) = \phi^*(T^*X)$. On en déduit le résultat immédiatement. c. q. f. d.

Nous allons identifier la variété T_N^*X avec une sous-variété de T_N^*Y . Nous obtenons enfin le

Théorème 1.2.2. *Soient X une variété analytique complexe et N une sous-variété analytique réelle, générique de X . On désigne par Y un complexifié de N dans $X \times \bar{X}$. On a alors les quasi-isomorphismes suivantes:*

- (1) $R \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{A}_N) = \mathcal{O}_X|N$.
- (2) $R \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{B}_N)[-codim_X N] = R \Gamma_N(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{N|X}$.
- (3) $R \mathcal{H}om_{\mathcal{S}_Y}(\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N)[-codim_X N] = R \Gamma_{S_N^*X}(\pi_N^{-1}|_X(\mathcal{O}_X))^a \otimes \omega_{N|X}$.

Ici on a posé:

- \mathcal{O}_X : le faisceau des fonctions holomorphes sur X .
- \mathcal{A}_N : le faisceau des fonctions analytiques réelles sur N .
- \mathcal{B}_N : le faisceau des hyperfonctions sur N .
- \mathcal{C}_N : le faisceau des microfonctions sur S_N^*Y .
- a : l'application antipodale $S_N^*Y \rightarrow S_N^*Y$.
- $\pi_{N|X}$: la projection $(X - N) \sqcup S_N^*X \rightarrow X$.

Remarquons que le théorème 1.2.2 est un prototype du théorème 3.1.4.

Démonstration. Puisque l'application $\phi: Y \rightarrow X$ est une submersion, on a l'isomorphisme suivant:

$$R \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X) = \phi^{-1} R \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{O}_X).$$

Le lemme 1.1.6 entraîne que

$$R \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{O}_Y) = \phi^{-1} \mathcal{O}_X.$$

On déduit du lemme 1.1.5 le résultat immédiatement.

(2) D'après le théorème 0.1.5, on a

$$R \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{B}_N)[-codim_X N] = R \Gamma_N R \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}}(\mathcal{D}_{C-R}, \mathcal{B}_{X_R}) \otimes \omega_{N|X}.$$

Il est facile de voir que

$$R \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}}(\mathcal{D}_{C-R}, \mathcal{B}_{X_R}) = \mathcal{O}_X.$$

On en déduit le résultat tout de suite.

(3) (cf. S-K-K. Chap. 3, Th. 2.2.5).

On désigne par π la projection $\pi: (\mathbb{Y}-N)\sqcup S_N^*\mathbb{Y}\rightarrow\mathbb{Y}$. En utilisant un résultat de S-K-K (Chap. 1, Lemme 2.2.3) on obtient que

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{X}}(\pi_{N|\mathbb{X}}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}))^a\otimes\omega_{N|\mathbb{X}}[\text{codim}_{\mathbb{X}}N] \\ &= \mathbf{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{Y}}(\pi^{-1}\phi^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}))^a\otimes\omega_{N|\mathbb{Y}}[\text{codim}_{\mathbb{Y}}N] \\ &= \mathbf{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{Y}}(\pi^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbb{Y}}}(\mathcal{D}_{C-R|\mathbb{Y}},\mathcal{O}_{\mathbb{Y}}))^a\otimes\omega_{N|\mathbb{Y}}[\text{codim}_{\mathbb{Y}}N] \\ &= \mathbf{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{Y}}(\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_{\mathbb{Y}}}(\pi^{-1}\mathcal{D}_{C-R|\mathbb{Y}},\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{Y}}))^a\otimes\omega_{N|\mathbb{Y}}[\text{codim}_{\mathbb{Y}}N] \\ &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_{\mathbb{Y}}}(\mathcal{D}_{C-R|\mathbb{Y}},\mathbf{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{Y}}(\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{Y}}))^a\otimes\omega_{N|\mathbb{Y}}[\text{codim}_{\mathbb{Y}}N] \\ &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_{\mathbb{Y}}}(\mathcal{D}_{C-R|\mathbb{Y}},\mathcal{C}_N) \\ &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbb{Y}}}(\mathcal{D}_{C-R|\mathbb{Y}},\mathcal{C}_N). \end{aligned} \tag{c. q. f. d.}$$

Dans le cas particulier (i.e. l'exemple 1.2.3 et l'exemple 1.2.4), M. Kashiwara-T. Kawai [18] ont obtenu cette relation microlocale en utilisant la théorie du système elliptique.

Remarquons que le point essentiel pour la démonstration du théorème 1.2.2 est la condition “ $\phi: \mathbb{Y}\rightarrow\mathbb{X}$ est une submersion”. En utilisant cette condition, on peut aussi déduire du résultat de M. Kashiwara-T. Kawai [18] notre résultat.

Exemple 1.2.3. Soit M une variété analytique réelle de complexifiée \mathbb{X} . D'après le lemme 1.1.6, on a alors

$$\mathcal{D}_{C-R|\mathbb{X}} = \mathcal{D}_{\mathbb{X}\rightarrow\mathbb{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbb{X}}} \mathcal{D}_{\mathbb{X}} = \mathcal{D}_{\mathbb{X}}.$$

En utilisant le théorème précédent, on retrouve la définition du faisceau des fonctions analytiques réelles, celle des hyperfonctions et celle des microfonctions.

Exemple 1.2.4. Soit Ω un ouvert de \mathbb{X} dont la frontière $N = \partial\Omega$ est une hypersurface analytique réelle. On note F le complément de Ω dans \mathbb{X} . On note \jmath l'inclusion de Ω dans \mathbb{X} . On a alors les suites exactes des faisceau sur N (cf. §3):

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \longrightarrow \jmath_*(\jmath^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow \mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathbf{R}^k\jmath_*(\jmath^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow \mathcal{H}_F^{k+1}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow 0 \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

On désignera par N_+ le fibré conormal extérieur au bord $N = \partial\Omega$ en sphères. On a les isomorphismes suivants:

$$\mathcal{H}_F^k(\mathcal{O}_{\mathbb{X}})|N = \pi_{N|\mathbb{X}*}(\mathcal{H}_{S_N^*\mathbb{X}}^k(\pi_{N|\mathbb{X}}^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}))^a|N_+).$$

En appliquant le résultat précédent à cette situation, on retrouve les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} ((\jmath_* \jmath^{-1} \mathcal{O}_X) / \mathcal{O}_X) | N &= \pi_{N|X^*} (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N) | N_+), \\ \mathbb{R}^k \jmath_* (\jmath^{-1} \mathcal{O}_X) | N &= \pi_{N|X^*} (\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^k (\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N) | N_+) \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Exemple 1.2.5 (H. Lewy [30], cf. [4] et S-K-K. Chap. 1, Ex. 3.2.4). Plaçons-nous dans $X = C^2$ munie des coordonnées $(z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$, et posons :

$$\Omega = \{(z_1, z_2) \mid x_2 + x_1^2 + y_1^2 < 0\}, \quad \jmath : \Omega \longrightarrow X, \quad N = \partial\Omega.$$

Soit W l'espace complexe C^3 muni des coordonnées $(w_1, w_2, w_3) = (u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_3 + iv_3)$. On note $(u; \eta)$ le système des coordonnées symplectique sur $T_{\mathbb{R}^3}^* W$. On définit l'application $\phi : W \rightarrow X$ par :

$$\phi(w_1, w_2, w_3) = (w_1 + iw_2, -w_1^2 - w_2^2 + iw_3).$$

Il est facile de voir que $\phi(R^3) = N$ et que

$$\phi^*(\mathcal{D}_{C-R}) = \phi^*(\mathcal{D}_{C-R|Y}) = \mathcal{D}_W / \mathcal{D}_W P, \quad \phi^*(T_N^* X) = SS(\mathcal{D}_W / \mathcal{D}_W P) \cap T_{\mathbb{R}^3}^* W,$$

où

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w_1} + i \frac{\partial}{\partial w_2} \right) - i(w_1 + iw_2) \frac{\partial}{\partial w_3}.$$

De plus par cette identification ϕ^* , le fibré conormal extétieur au bord N correspond à l'ensemble suivant :

$$\{(u; \eta) \mid \eta_1 + u_1 \eta_3 = 0, \eta_2 - u_2 \eta_3 = 0, \eta_3 > 0\}.$$

On désigne par R_+^3 l'ensemble précédent (i.e. $R_+^3 = \phi^*(N_+)$). On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_W} (\mathcal{D}_W / \mathcal{D}_W P, \mathcal{C}_{R_+^3}) | R_+^3 &= \phi^* ((\jmath_* (\jmath^{-1} \mathcal{O}_X) / \mathcal{O}_X) | N), \\ \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_W}^1 (\mathcal{D}_W / \mathcal{D}_W P, \mathcal{C}_{R_+^3}) | R_+^3 &= \phi^* (\mathbb{R}^1 \jmath_* (\jmath^{-1} \mathcal{O}_X)) = 0 \end{aligned}$$

(voir le théorème 2.2.3).

Corollaire 1.2.6 (cf. T. Kawai [25]). Soit X une variété analytique complexe. Soit N une sous-variété analytique réelle de X . Si N est générique, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N^k(\mathcal{O}_X) = 0, \quad \mathcal{H}_{S_N^* X}^k(\pi_{N|X}^{-1} \mathcal{O}_X) = 0 \\ \text{pour } k < \text{codim}_X N, \text{ dim } X - \text{codim}_X N < k. \end{aligned}$$

Démonstration. On a $\dim \text{proj}(\mathcal{D}_{C-R|Y}) = \dim X - \text{codim}_X N$. On en déduit le résultat facilement.

§2. Analyse Microlocale de la Variété de Cauchy-Riemann.

A) Nous allons étudier la structure microlocale de la variété générique dans la variété complexe, en utilisant la forme de Levi généralisée de I. Naruki [33]. Nous démontrerons aussi que la forme de Levi généralisée de I. Naruki coïncide avec celle de S-K-K pour le système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles.

Dans tout ce paragraphe, X désignera une variété analytique complexe de dimension m . On identifiera souvent TX_R (resp. T^*X_R) à TX (resp. T^*X). Si f est une fonction de classe C^1 sur X_R , $df(p) \in T_p^*X_R$ correspondant à $\partial f(p) \in T_p^*X$ (où $d = \partial + \bar{\partial}$) par cette identification.

Soit N une sous-variete analytique réelle de dimension n . Supposons que N soit définie localement par les équations à valeurs réelles :

$$f_1(z, \bar{z}) = f_2(z, \bar{z}) = \dots = f_{2m-n}(z, \bar{z}) = 0$$

avec

$$df_1(z, \bar{z}) \wedge df_2(z, \bar{z}) \wedge \dots \wedge df_{2m-n}(z, \bar{z}) \neq 0 \text{ au voisinage de } p \in N.$$

On désigne par $HT(N)_p$ l'espace vectoriel complexe tangent à N en p , i.e.

$$HT(N)_p = \left\{ w \frac{\partial}{\partial z} \in T_p X \mid \left\langle w \frac{\partial}{\partial z}, \alpha_1 \partial f_1 + \dots + \alpha_{2m-n} \partial f_{2m-n} \right\rangle (p) = 0 \right. \\ \left. \forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m-n}) \in C^{2m-n} \right\}.$$

Si N est générique dans X , on a $\dim_C HT(N)_p = n - m$.

Rappelons d'abord la

Définition 2.1.1 (I. Naruki [33]). Dans la situation précédente, supposons que N soit générique dans X . Fixons maintenant $p \in N$ et $q \in (T_N^*X)_p$ avec $q = (k_1 df_1 + k_2 df_2 + \dots + k_{2m-n} df_{2m-n})(p)$ où $k_j \in C$. On pose

$$\{\mathcal{L}_N(f, q)\}(w, \bar{w}) = \{\partial \bar{\partial}(k_1 f_1 + k_2 f_2 + \dots + k_{2m-n} f_{2m-n})(p)\}(w, \bar{w}) \text{ où } w \in HT(N)_p.$$

On l'appelle la forme de Levi généralisée de $(f_1, f_2, \dots, f_{2m-n})$ au point $q \in (T_N^*X)_p$. Il est facile de voir que la signature de la forme de Levi généralisée de $(f_1, f_2, \dots, f_{2m-n})$ ne depend que de N et de $q \in (T_N^*X)_p$.

Remarquons que si N est une hypersurface définie par une équation réelle $f(z, \bar{z}) = 0$ au voisinage de $p \in N$, on a

$$\mathcal{L}_N(f, kdf(p)) = k\partial\bar{\partial}f(p).$$

Remarquons aussi que si X est un complexifié de M , on a $HT(M) = T_M M$ et que $\mathcal{L}_M = 0$.

On pose ω la 1-forme canonique et σ la 2-forme symplectique sur X :

$$\omega = \sum_{j=1}^m \zeta_j dz_j, \quad \sigma = d\omega = \sum_{j=1}^m d\zeta_j \wedge dz_j.$$

Rappelons ensuite la

Définition 2.1.2 (P. Schapira [38]). Soit A une partie de T^*X .

- (1) On dit que A est une variété R -lagrangienne si A est une variété analytique réelle, conique, lagrangienne dans $T^*(X_R)$.
- (2) Soit A une variété R -lagrangienne. On dit qu'elle est I -symplectique si la restriction de $\text{Im}\sigma$ (la partie imaginaire de σ) à A est non dégénérée.

P. Schapira [38] a remarqué le

Lemme 2.1.3. Soit A une variété R -lagrangienne. Pour que A soit I -symplectique, il faut et il suffit que T^*X s'identifie à un complexifié de A .

En utilisant le résultat précédent, nous obtenons la

Proposition 2.1.4. Soit N une sous-variété analytique réelle de X . T_N^*X est I -symplectique au voisinage de $q \in (T_N^*X)_p$ si et seulement si:

- i) N est générique dans X et que
- ii) La forme de Levi généralisée de N au point q est non dégénérée.

Dans la suite, N désignera une sous-variété analytique réelle, générique de X . Nous supposons aussi que N soit définie localement par les équations $f_1 = f_2 = \dots = f_{2m-n} = 0$, où f_j désignent des fonctions analytiques réelles aux valeurs réelles.

Soit (z, w) un système de coordonnées locales de $X \times \bar{X}$. On note $f_j(z, w)$ les complexifiés des f_j dans $X \times \bar{X}$. Le complexifié de N dans $X \times \bar{X}$, noté Y , est défini par:

$$f_1(z, w) = f_2(z, w) = \dots = f_{2m-n}(z, w) = 0.$$

N étant générique, on peut supposer que la condition suivante soit satisfaite:

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_{2m-n})}{\partial(w_{n-m+1}, w_{n-m+2}, \dots, w_m)} \right) \neq 0 \quad \text{sur } Y.$$

Introduisons les opérateurs différentiels

$$X_j = \frac{\partial}{\partial w_j} - \sum_{h=n-m+1}^m a_j^h(z, w) \frac{\partial}{\partial w_h} \quad j=1, 2, \dots, n-m.$$

de sorte à satisfaire les conditions $X_j(f_k) = 0, k=1, 2, \dots, 2m-n;$

X_j sont uniquement déterminés par ces conditions. Il est facile de voir que X_j sont des opérateurs différentiels sur Y (cf. B. Malgrange, Analytic spaces, L'Enseignement mathém., t. XIV, fasc. I pp. 1-28). Et que l'on obtient tout de suite le

Lemme 2.1.5. *On pose $\mathcal{D}_Y = \mathcal{D}_Y X_1 + \mathcal{D}_Y X_2 + \dots + \mathcal{D}_Y X_{n-m}$. La suite de \mathcal{D}_Y -modules suivante est exacte:*

$$0 \longleftarrow \mathcal{D}_{C-R|Y} \longleftarrow \mathcal{D}_Y \longleftarrow \mathcal{D}_Y \longleftarrow 0.$$

Rappelons la définition de la forme de Levi au sens du S-K-K.

Définition 2.1.6 (S-K-K. Chap. 3, Def. 2.3.1). Soit V un sous ensemble analytique involutif de P^*Y, Y désignant un complexifié de N . Supposons que V soit défini localement par les équations $p_1 = p_2 = \dots = p_d = 0$ au voisinage de $q \in S_N^*Y$. Alors la forme de Levi généralisée de V est par définition la forme hermitienne dont les coefficients sont les crochets de Poisson

$$\{p_j, p_k^C\}(q)_{\substack{1 \leq j \leq d, \\ 1 \leq k \leq d}} \quad \text{où on a posé } p_k^C = \bar{p}_k.$$

Nous obtenons alors la

Proposition 2.1.7. *Soit N une sous-variété analytique réelle de dimension n dans une variété complexe X de dimension m . Si N est générique dans X , alors la signature de la forme de Levi-Naruki de N est égale à celle de S-K-K pour le système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur N .*

Démonstration. Choisissons les équations locales de N de façon à satisfaire les conditions suivantes:

$$\partial_{z_h} f(p) = 0, \quad h=1, 2, \dots, n-m, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_{2m-n}).$$

On pose:

$$D = \det(\partial_{z_{n-m+1}} f, \partial_{z_{n-m+2}} f, \dots, \partial_{z_m} f), \quad \bar{D} = \det(\partial_{\bar{z}_{n-m+1}} f, \partial_{\bar{z}_{n-m+2}} f, \dots, \partial_{\bar{z}_m} f),$$

et

$$E_{\alpha, j} = \det(\partial_{z_{n-m+1}} f, \dots, \overset{\alpha}{\partial_{z_j}} f, \dots, \partial_{z_m} f), \quad n-m+1 \leq \alpha \leq m$$

$$\bar{E}_{\alpha, j} = \det(\partial_{\bar{z}_{n-m+1}} f, \dots, \overset{\alpha}{\partial_{\bar{z}_j}} f, \dots, \partial_{\bar{z}_m} f) \quad 1 \leq j \leq n-m.$$

On a alors

$$X_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \sum_{\alpha=n-m+1}^m \frac{E_{\alpha,j}}{D} \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \quad X_{\bar{k}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - \sum_{\beta=n-m+1}^m \frac{\bar{E}_{\beta,\bar{k}}}{\bar{D}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta},$$

$$1 \leq j, k \leq n-m.$$

X_j désigne le conjugué complexe de X_j sur N . On obtient que

$$[X_j, X_{\bar{k}}] = \sum_{\alpha=n-m+1}^m \left\{ \partial_{\bar{z}_k} \left(\frac{E_{\alpha,j}}{D} \right) \partial_{z_\alpha} - \partial_{z_j} \left(\frac{\bar{E}_{\alpha,\bar{k}}}{\bar{D}} \right) \partial_{\bar{z}_\alpha} \right\}$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=n-m+1}^m \left\{ \frac{E_{\alpha,j}}{D} \partial_{z_\alpha} \left(\frac{\bar{E}_{\beta,\bar{k}}}{\bar{D}} \right) \partial_{\bar{z}_\beta} - \frac{\bar{E}_{\beta,\bar{k}}}{\bar{D}} \partial_{\bar{z}_\beta} \left(\frac{E_{\alpha,j}}{D} \right) \partial_{z_\alpha} \right\}.$$

Introduisons une relation \equiv entre les opérateurs d'ordre inférieur ou égale à 1 au point $p \in N$ comme ci-dessous :

$$P \equiv Q \iff \{\sigma_1(P-Q)\}(\pi^{-1}(p)) = 0$$

où $\sigma_1(P-Q)$ désigne la partie principale de $P-Q$. Alors

$$[X_j, X_{\bar{k}}] \equiv \sum_{\alpha=n-m+1}^m \left\{ \partial_{\bar{z}_k} \left(\frac{E_{\alpha,j}}{D} \right) \partial_{z_\alpha} - \partial_{z_j} \left(\frac{\bar{E}_{\alpha,\bar{k}}}{\bar{D}} \right) \partial_{\bar{z}_\alpha} \right\}$$

$$\equiv \frac{1}{D\bar{D}} \sum_{\alpha=n-m+1}^m \{ \bar{D} \partial_{\bar{z}_k} (E_{\alpha,j}) \partial_{z_\alpha} - D \partial_{z_j} (\bar{E}_{\alpha,\bar{k}}) \partial_{\bar{z}_\alpha} \}$$

$$\equiv \frac{1}{D\bar{D}} \sum_{\alpha=n-m+1}^m \{ \bar{D} E_{\alpha,j,\bar{k}} \partial_{z_\alpha} - D \bar{E}_{\alpha,\bar{k},j} \partial_{\bar{z}_\alpha} \}$$

où on a pose

$$E_{\alpha,j,\bar{k}} = \det (\partial_{z_{n-m+1}} f, \dots, \partial_{z_j} \overset{\alpha}{\partial_{\bar{z}_k}} f, \dots, \partial_{z_m} f)$$

$$\bar{E}_{\alpha,\bar{k},j} = \det (\partial_{\bar{z}_{n-m+1}} f, \dots, \partial_{\bar{z}_k} \overset{\alpha}{\partial_{z_j}} f, \dots, \partial_{\bar{z}_m} f) \quad 1 \leq j, k \leq n-m.$$

D'autre part on a

$$\{\sigma_1(X_j), \sigma_1(X_{\bar{k}})\} = \sigma_1([X_j, X_{\bar{k}}]).$$

On en déduit le résultat facilement.

c. q. f. d.

B) On étudie ici le faisceau des solutions microfonctions du système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur la sous-variété générique de codimension quelconque.

I. Naruki [33] a sérieusement étudié ce problème dans le cadre C^∞ . En utilisant les théorèmes de structure de S-K-K, on retrouve le résultat de I. Naruki du point de vue microlocal.

Remarquon que R. O. Wells, Jr [44] a traité la variété de Cauchy-Riemann pour l'étude de la transformation de Penrose.

Rappelons d'abord le

Théorème 2.2.1 (S-K-K. Chap. 3, Th. 2.3.10). *Soit \mathcal{M} un système d'opérateurs pseudo-différentiels défini sur un ouvert U de $\mathbb{P}^* \mathbb{X}$. Supposons que le support $V (=SS(\mathcal{M}))$ du système soit défini localement par les équations*

$$p_1(z, \zeta) = p_2(z, \zeta) = \dots = p_d(z, \zeta) = 0.$$

(1) *Supposons que la forme de Levi de V ait au moins q valeurs propres strictement négatives au voisinage ω de $v^{-1}(z, \zeta)$. On a*

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_{\mathbb{X}}}^j(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\mathbb{M}})_{\omega} = 0 \quad \text{pour } j < q.$$

v désigne l'application naturelle $v: \mathbb{S}_{\mathbb{M}}^* \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{P}^* \mathbb{X}$.

(2) *Supposons que la forme de Levi de V ait au moins p valeurs propres strictement positives au voisinage ω de $v^{-1}(z, \zeta)$. On a*

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_{\mathbb{X}, Z}}^j(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\mathbb{M}}) = 0 \quad \text{pour } j > \sup_{(x, \zeta) \in \omega} \dim \text{proj}_{(x, \zeta)} \mathcal{M} - p,$$

pour tout ensemble fermé Z de ω .

Nous obtenons enfin le

Théorème 2.2.2 (I. Naruki [33]). *Soit N une sous-variété analytique réelle, générique de \mathbb{X} . Soit Y un complexifié de N dans $\mathbb{X} \times \overline{\mathbb{X}}$. On désigne par $\mathcal{D}_{C-R|Y}$ le système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur N .*

(1) *Si la forme de Levi-Naruki de N a au moins q valeurs propres strictement négatives au voisinage de $q^0 \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}^* \mathbb{X}$, on a*

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_{\mathbb{Y}}}^j(\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_{\mathbb{N}})_{q^0} = 0 \quad \text{pour } j < q.$$

(2) *Si la forme de Levi-Naruki de N a au moins p valeurs propres strictement positives au voisinage de $q^0 \in \mathbb{S}_{\mathbb{N}}^* \mathbb{X}$, on a*

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_{\mathbb{Y}}}^j(\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_{\mathbb{N}})_{q^0} = 0 \quad \text{pour } j > \dim_{\mathbb{R}} N - \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{X} - p.$$

Démonstration. La proposition 2.1.7 montre que la signature de la forme de Levi-Naruki de N coïncide avec celle de $\mathcal{D}_{C-R|Y}$. En appliquant le théorème 2.2.1 à notre situation, nous obtenons le résultat tout de suite.

(2) Il est facile de vérifier que la dimension projective de $\mathcal{D}_{C-R|Y}$ est égale à $\dim_{\mathbb{R}} N - \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{X}$. On en déduit le résultat. c. q. f. d.

D'après le théorème 1.2.2, on peut interpréter le théorème 2.2.2 comme une

généralisation d'un résultat de A. Andreotti - H. Grauert [2] à la sous-variété générique de codimension quelconque.

Supposons maintenant que $T_N^*X - T_N^*N$ soit une variété I-symplectique au voisinage de q^0 . D'après la proposition 2.1.4, la forme de Levi-Naruki de N est non dégénérée en q^0 . On déduit du théorème 2.2.2 que $\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N)$ est concentré dans un degré. Plus précisément on a le

Théorème 2.2.3. *Soit $T_N^*X - T_N^*X$ une variété I-symplectique au voisinage ω de q^0 . Supposons que la signature de la forme de Levi-Naruki de N soit $(\dim_R N - \dim_C X - p, p)$ sur ω . On a alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^j(\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N) &= 0 \quad \text{pour } j \neq p, \\ \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^p(\mathcal{D}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N) &\cong \mathcal{C}_{\mathbf{R}^m} \end{aligned}$$

Démonstration. Le système $\mathcal{D}_{C-R|Y}$ coïncide microlocalement avec le système de Lewy-Mizohata de la signature $(\dim_R N - \dim_C X - p, p)$. Le résultat de S-K-K (Chap. 3, Th. 2.3.6) entraîne ce résultat. c. q. f. d.

§ 3. Problème de Prolongement et Système Tangentiel.

Nous envisagerons le problème du prolongement des solutions holomorphes du système d'équations aux dérivées partielles.

Soit X une variété analytique complexe. Soit Ω un ouvert de X dont la frontière $N = \partial\Omega$ est de classe C^1 . On notera j l'inclusion naturelle $\Omega \rightarrow X$. On désigne par F le complément de Ω dans X .

Etant donné un \mathcal{D}_X -module cohérent \mathcal{M} sur X , le faisceau $\mathcal{F} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est le faisceau des solutions holomorphes du système \mathcal{M} . En désignant par $\mathbf{R}^q j_*$ le q -ième foncteur dérivé du foncteur j_* , on a alors la suite exacte des faisceaux :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{H}_F^0(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{F}) \longrightarrow j_*(j^{-1}\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}_F^1(\mathcal{F}) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{R}^1 j_*(j^{-1}\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}_F^2(\mathcal{F}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

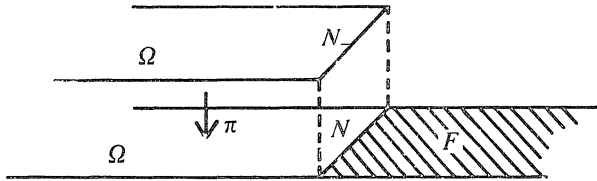
On obtient donc les suites exactes sur N :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow j_*(j^{-1}\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}_F^1(\mathcal{F}) \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow \mathbf{R}^k j_*(j^{-1}\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}_F^{k+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow 0, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

On en déduit facilement que tout germe de solutions holomorphes du

système \mathcal{M} au voisinage du bord sur Ω (i.e. $j_*(j^{-1}\mathcal{F})$) se prolonge à travers le bord si et seulement si $\mathcal{H}_F^1(\mathcal{F})=0$.

Considérons ensuite la transformation comonoïdale $(\mathbb{X}-N)\sqcup S_N^*\mathbb{X}$ munie de la topologie de co-éclaté. On note N_+ (resp. N_-) le fibré conormal extérieur (resp. intérieur) au bord N en sphères. Nous pouvons identifier $S_N^*\mathbb{X}$ avec $N_+\sqcup N_-$. Choisissons une demiespace $\Omega\sqcup N_-$ de $(\mathbb{X}-N)\sqcup N_+\sqcup N_-$. On désigne encore par j l'inclusion $j:\Omega\rightarrow\Omega\sqcup N_-$ et par π la projection naturelle $\Omega\sqcup N_-\rightarrow\mathbb{X}$.



On a les suites exactes des faisceaux sur N_- :

$$0 \longrightarrow \pi^{-1}\mathcal{F} \longrightarrow j_*(j^{-1}\pi^{-1}\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}_{N_-}^1(\pi^{-1}\mathcal{F}) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^k j_*(j^{-1}\pi^{-1}\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}_{N_-}^{k+1}(\pi^{-1}\mathcal{F}) \longrightarrow 0, \quad k \geq 1.$$

On obtient les isomorphismes naturels suivants :

$$\mathcal{H}_F^k(\mathcal{F})|N = \pi_{N|\mathbb{X}*}(\mathcal{H}_{S_N^*\mathbb{X}}^k(\pi_{N|\mathbb{X}}^{-1}\mathcal{F})|N_-) \quad \text{quel que soit } k.$$

Il est claire d'après ce qui précède que le problème du prolongement s'interprète par le langage microlocal. Dans le cas où N est une sous-variété d'une variété \mathbb{X} , nous renvoyons à S-K-K (Chap. 1, Prop. 1.2.3) pour la signification de $\mathbb{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{X}}(\pi_{N|\mathbb{X}}^{-1}\mathcal{F})$.

Puisque nous avons l'intention de traiter le problème du prolongement des faisceaux $\mathcal{E}\omega_{\mathcal{D}_X}^k(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$, nous allons considérer

$$\mathbb{R}\Gamma_N \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{X}}(\pi_{N|\mathbb{X}}^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))$$

dans les catégories dérivées.

Soit \mathbb{X} une variété analytique complexe de complexifiée $\mathbb{X} \times \bar{\mathbb{X}}$. On note τ la projection naturelle de $\mathbb{X} \times \bar{\mathbb{X}}$ sur \mathbb{X} . Etant donné un \mathcal{D}_X -module cohérent \mathcal{M} , on définit un $\mathcal{D}_{\mathbb{X} \times \bar{\mathbb{X}}}$ -module cohérent \mathcal{M}_{C-R} par :

$$\mathcal{M}_{C-R} = \tau^*\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{X} \times \bar{\mathbb{X}}} \longrightarrow \mathbb{X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}.$$

Ce système coïncide avec le système qui a été introduit par M. Kashiwara

[16]. Remarquons aussi que T. Kawai [24] et A. Andreotti - M. Nacinovich [5] ont utilisé ce système.

Si on substitue \mathcal{D}_X à \mathcal{M} , on obtient le système des équations de Cauchy-Riemann \mathcal{D}_{C-R} . Nous allons considérer le système \mathcal{M}_{C-R} dans le cas général. Choisissons d'abord une résolution projective locale de \mathcal{M} :

$$0 \longleftarrow \mathcal{M} \longleftarrow \mathcal{D}_X^{r_0} \xleftarrow{P_0} \mathcal{D}_X^{r_1} \xleftarrow{P_1} \dots \xleftarrow{P_q} \mathcal{D}_X^{r_{q+1}} \longleftarrow 0.$$

On désignera par \tilde{P}_j les complexifiés de P_j dans $X \times \bar{X}$. Il est facile de voir que le complexe suivant est bien défini.

$$0 \longleftarrow \mathcal{D}_{C-R}^{r_0} \xleftarrow{\tilde{P}_0} \mathcal{D}_{C-R}^{r_1} \xleftarrow{\tilde{P}_1} \dots \xleftarrow{\tilde{P}_q} \mathcal{D}_{C-R}^{r_{q+1}} \longleftarrow 0.$$

En effet il est facile de voir que

$$\text{End}_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}}(\mathcal{D}_{C-R}) = \tilde{\mathcal{D}}_X,$$

où $\tilde{\mathcal{D}}_X$ désigne le complexifié de \mathcal{D}_X dans $X \times \bar{X}$. Il en résulte que le complexe précédent, noté $\mathcal{D}_{C-R}(\mathcal{M})$, est bien défini.

Lemme 3.1.1. *Dans la situation précédente, la suite suivante est exacte :*

$$0 \longleftarrow \mathcal{M}_{C-R} \longleftarrow \mathcal{D}_{C-R}(\mathcal{M}).$$

Démonstration. Par définition on a

$$\mathcal{D}_{C-R} = \tau^* \mathcal{D}_X \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{C-R} = \tau^* \mathcal{M}.$$

Rappelons que $\mathcal{D}_{X \times \bar{X} \rightarrow X}$ est plat sur \mathcal{D}_X (S-K-K. Chap. 2, Lemme 3.5.1). On en déduit le résultat immédiatement. c. q. f. d.

M. Kashiwara [16] a montré le résultat suivant pour appliquer le résultat de T. Kawai [23] à l'étude du système holonome.

Proposition 3.1.2. *Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. On a alors*

$$\mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = \mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}}(\mathcal{M}_{C-R}, \mathcal{B}_{X_R}),$$

où X_R désigne la variété analytique réelle sous-jacente à X et \mathcal{B}_{X_R} désigne le faisceau des hyperfonctions sur X_R .

Démonstration. La proposition se déduit du lemme 3.1.1. c. q. f. d.

Ensuite nous allons étudier le module $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ en supposant que N soit générique dans X . Nous obtenons la

Proposition 3.1.3. *Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. Soient N une sous-variété analytique réelle de X et Y un complexifié de N dans $X \times \bar{X}$. On*

désigne par ϕ_C l'inclusion de Y dans $X \times \bar{X}$ et par ϕ la composée $\tau \circ \phi_C: Y \rightarrow X$. Si N est générique dans X , on obtient alors

- (1) Y est non caractéristique par rapport à \mathcal{M}_{C-R} ,
- (2) $SS(\mathcal{M}_{C-R|Y}) = \phi^*(SS(\mathcal{M})) = SS(\mathcal{M}) \times^X Y$,
- (3) $SS(\mathcal{M}_{C-R|Y}) \cap T_N^*Y = \phi^*(SS(\mathcal{M}) \cap T_N^*X)$.

Démonstration (1). Le théorème 1.1.1 implique que Y est non caractéristique par rapport à \mathcal{D}_{C-R} . En outre on a $SS(\mathcal{M}_{C-R}) \subseteq SS(\mathcal{D}_{C-R})$. On en déduit que Y est non caractéristique par rapport à \mathcal{M}_{C-R} .

(2). Par définitions on a

$$\mathcal{M}_{C-R|Y} = \phi_C^*(\mathcal{M}_{C-R}) = \phi_C^*(\tau^*(\mathcal{M})).$$

Le résultat de S-K-K (Chap. 2, Lemme 3.5.1) entraîne que

$$\mathcal{M}_{C-R|Y} = (\tau \circ \phi_C)^* \mathcal{M} = \phi^* \mathcal{M}.$$

Rappelons aussi que ϕ est une submersion. Cela termine la démonstration.

(3). On déduit de la proposition 1.2.1 le résultat immédiatement.

c. q. f. d.

L'application ϕ étant une submersion, nous allons identifier $\phi^*(SS(\mathcal{M}) \cap T_N^*X)$ avec $SS(\mathcal{M}) \cap T_N^*X$.

Nous obtenons le résultat suivant en utilisant le langage de la théorie des catégories dérivées:

Théorème 3.1.4. *Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. Soient N une sous-variété analytique réelle de X et Y un complexifié de N dans $X \times \bar{X}$. Si N est générique, on a alors les isomorphismes suivants:*

- (1) $\mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{A}_N) = \mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_N,$
- (2) $\mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{B}_N) [-\text{codim}_X N] = \mathbf{R} \Gamma_N \mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \otimes \omega_{N|X},$
- (3) $\mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{S}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N) [-\text{codim}_X N]$
 $= \mathbf{R} \Gamma_{S_N^*X}(\pi_N^{-1}|_X(\mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))^a \otimes \omega_{N|X},$

où $\pi_N|_X$ désigne la projection naturelle $(X - N) \sqcup S_N^*X \rightarrow X$. Le premier espace étant muni de la topologie de co-éclaté.

En particulier, le problème du prolongement généralisé pour le système \mathcal{M} est équivalent au problème de l'annulation du faisceau des solutions microfonctions du système tangentiel $\mathcal{M}_{C-R|Y}$.

Démonstration (1). N étant générique, l'application $\phi: Y \rightarrow X$ est une submersion. D'après le théorème 0.1.4, on obtient l'isomorphisme suivant :

$$\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\phi^* \mathcal{M}, \mathcal{O}_Y) = \phi^{-1}(\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)),$$

i.e.

$$\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{O}_Y) = \phi^{-1}(\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)).$$

Ceci entraîne le résultat tout de suite.

(2). Par le théorème 0.1.5 on a

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{B}_N) [-\text{codim}_X N] \\ = \mathbf{R} \Gamma_N \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times \bar{X}}}(\mathcal{M}_{C-R}, \mathcal{B}_{\bar{X}_R}) \otimes \omega_{N|X}. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3.1.2 on obtient que

$$\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{B}_N) [-\text{codim}_X N] = \mathbf{R} \Gamma_N \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \otimes \omega_{N|X}.$$

(3) (cf. S-K-K. Chap. 3, Th. 2.2.5).

En utilisant le théorème 1.2.2, on peut démontrer notre résultat. Mais nous donnerons une démonstration directe. On pose $d = \text{codim}_X N$ et $\mathcal{F} = \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$. On désigne par π la projection $(Y-N) \sqcup S_N^* Y \rightarrow Y$.

Nous envisageons les triangles suivants avant de démontrer le résultat.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{A}_N) & \\ & \swarrow & \nwarrow +1 \\ \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{B}_N) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{R} \pi_* (\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N)) \\ \parallel & & \parallel \\ & \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_N & \\ & \swarrow & \nwarrow +1 \\ \mathbf{R} \Gamma_N(\mathcal{F}) \otimes \omega_{N|X}[d] & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{R} \pi_{N|X^*}(\mathbf{R} \Gamma_{S_N^* X}(\pi_{N|X}^{-1}(\mathcal{F}))) \otimes \omega_{N|X}[d] \end{array}$$

Il résulte alors des résultats précédents qu'il existe un quasi-isomorphisme suivant :

$$\mathbf{R} \pi_* (\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N)) = \mathbf{R} \pi_{N|X^*}(\mathbf{R} \Gamma_{S_N^* X}(\pi_{N|X}^{-1}(\mathcal{F}))^d) \otimes \omega_{N|X}[d].$$

Revenons maintenant à la démonstration. En appliquant un résultat de S-K-K (Chap. 1, Lemme 2.2.3) à cette situation, on obtient l'isomorphisme suivant :

$$\mathbf{R} \Gamma_{S_N^* X}(\pi_{N|X}^{-1}(\mathcal{F})) \otimes \omega_{N|X}[d] = \mathbf{R} \Gamma_{S_N^* Y}(\pi^{-1} \phi^{-1}(\mathcal{F})) \otimes \omega_{N|X}[\text{codim}_Y N].$$

D'autre part on a

$$\phi^{-1}(\mathcal{F}) = \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{O}_Y).$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} & \mathbf{R} \Gamma_{S_N^* X}(\pi_N^{-1}(\mathcal{F}))^a \otimes \omega_{N|X}[d] \\ &= \mathbf{R} \Gamma_{S_N^* Y}(\pi^{-1}(\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{O}_Y)))^a \otimes \omega_{N|Y}[\text{codim}_Y N] \\ &= \mathbf{R} \Gamma_{S_N^* Y}(\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{O}_Y}(\pi^{-1}\mathcal{M}_{C-R|Y}, \pi^{-1}\mathcal{O}_Y))^a \otimes \omega_{N|Y}[\text{codim}_Y N] \\ &= \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathbf{R} \Gamma_{S_N^* Y}(\pi^{-1}\mathcal{O}_Y)^a) \otimes \omega_{N|Y}[\text{codim}_Y N] \\ &= \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N) \\ &= \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N). \end{aligned} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire 3.1.5.

- (1) $\mathcal{H}^k(\mathbf{R} \Gamma_N \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) = 0$
- (2) $\mathcal{H}^k(\mathbf{R} \Gamma_{S_N^* X}(\pi_N^{-1}(\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)))) = 0$

pour $k < \text{codim}_X N, \text{proj-dim}(\mathcal{M}) + \dim_R N - \dim_C X < k$.

Exemple 3.1.6. (Lewy-Mizohata., cf. S-K-K. Chap. 3, §2.3). On pose :

$$\begin{aligned} X &= C^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in C\}, \\ \Omega &= \{(z_1, z_2) \mid x_2 + x_1^2 + cy_1^2 < 0\}, N = \partial\Omega, \mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \frac{\partial}{\partial z_1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W &= C^3 = \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_j \in C, j = 1, 2, 3\}, \\ \phi(w_1, w_2, w_3) &= (w_1 + iw_2, -w_1^2 - cw_2^2 + iw_3), \\ P_1 &= \frac{\partial}{\partial w_1} - 2iw_1 \frac{\partial}{\partial w_3}, \quad P_2 = \frac{\partial}{\partial w_2} - 2icw_2 \frac{\partial}{\partial w_3}, \quad \mathcal{N} = \mathcal{D}_w / \mathcal{D}_w P_1 + \mathcal{D}_w P_2. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que le système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ est isomorphe au système $\phi^*(\mathcal{M}) = \mathcal{N}$ et que

- i) Si $c > 0$, le système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ coïncide avec le système de Lewy-Mizohata de la signature (2, 0) sur $SS(\mathcal{M}) \cap N_+$.
- ii) Si $c = 0$, le système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ est un mélange du système de de Rham et du système de Lewy-Mizohata de la signature (1, 0) sur $SS(\mathcal{M}) \cap N_+$, N_+ désignant le fibré conormal extérieur au bold.
- iii) Si $c < 0$, le système coïncide avec le système de Lewy-Mizohata de la signature (1, 1) sur $SS(\mathcal{M}) \cap N_+$.

Remarquons que l'hypersurface $x_2 + x_1^2 - y_1^2 = 0$ est Levi plat cependant

que le système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ n'est pas pseudo-convexe au sens de S-K-K (cf. le théorème 4.1.6 et le théorème 4.2.1).

On peut aussi obtenir (comme dans l'exemple 3.1.6) le mélange du système de de Rham, du système de Lewy-Mizohata et du système de Cauchy-Riemann partiel de façon naturelle.

§ 4. Théorèmes de Prolongement.

A) Dans ce paragraphe nous donnerons quelques résultats comme applications du théorème 3.1.4 au problème du prolongement des solutions holomorphes d'équations aux dérivées partielles.

On désigne par N une sous-variété analytique réelle, générique dans une variété analytique complexe X . On désigne par Y un complexifié de N dans $X \times \bar{X}$. Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent.

Définition 4.1.1. Nous dirons que N est non caractéristique par rapport à \mathcal{M} si :

$$SS(\mathcal{M}) \cap T_N^*X \subseteq T_N^*N.$$

Remarquons que si N est totalement réelle, la définition précédente coïncide avec la définition 0.1.6. Nous obtenons le

Théorème 4.1.2. Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. Supposons que N soit générique dans X et que non caractéristique par rapport à \mathcal{M} . On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{S}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N) &= 0, \\ \mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{A}_N) &= \mathbf{R} \text{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{B}_N). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que N soit totalement réelle. On a alors $\mathcal{M}_{C-R|Y} = \mathcal{M}$. Donc dans cette situation le théorème 4.1.2 coïncide avec le résultat de M. Sato (le théorème 0.1.7).

Démonstration. D'après la proposition 3.1.3, on a

$$SS(\mathcal{M}_{C-R|Y}) \cap T_N^*Y = \phi^*(SS(\mathcal{M}) \cap T_N^*X).$$

N étant non caractéristique par rapport à \mathcal{M} , on obtient que

$$SS(\mathcal{M}_{C-R|Y}) \cap T_N^*Y \subseteq T_N^*N.$$

Rappelons la définition 0.1.6. Il est évident que le système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ est un

système elliptique sur N . En utilisant le résultat de M. Sato (le théorème 0.1.7) on obtient les résultats tout de suite. c. q. f. d.

Corollaire 4.1.3. *Soit N une sous-variété analytique réelle, générique dans X . Si N est non caractéristique par rapport à \mathcal{M} , on a alors*

$$\mathbf{R} \Gamma_{S_N^* X}(\pi_N^{-1}|_X \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) = 0$$

et

$$\mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_N = \mathbf{R} \Gamma_N \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) [\text{codim}_X N] \otimes \omega_{N|X}.$$

Démonstration. Le corollaire se déduit du théorème 3.1.4 et du théorème 4.1.2. q. e. d.

Soit maintenant Ω un ouvert de X dont la frontière $N = \partial\Omega$ est une hypersurface analytique réelle. On désigne par F le complément de Ω dans X . On a alors le

Corollaire 4.1.4. *Dans la situation précédente, si N est non caractéristique par rapport à \mathcal{M} , on a alors*

$$\mathbf{R} \Gamma_F \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{sur } N.$$

Remarquons que ce résultat a été établi par M. Kashiwara [17] et M. Kashiwara-T. Kawai [21] sans l'hypothèse " N est analytique".

Soit N l'hypersurface analytique réelle de X constituée par le bord de Ω . On désignera par N_+ le fibré conormal extérieur de N en sphères et par \jmath l'inclusion naturelle de Ω dans X . On pose $\pi = (\pi_{N|X})|_{N_+}$. P. Pallu de la Barrière [34] a démontré le résultat suivant dans le cas d'une seul opérateur. Nous réussissons à obtenir le résultat suivant en utilisant le théorème 3.1.4.

Théorème 4.1.5. *Si le système \mathcal{M} satisfait les conditions suivantes:*

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^k(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{quel que soit } k > 0,$$

on a les isomorphismes suivants:

$$\begin{aligned} \pi_* (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{O}_N)|_{N_+}) &= \jmath_* (\jmath^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) / \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X), \\ \pi_* (\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_Y}^k(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{O}_N)|_{N_+}) &= \mathbf{R}^k \jmath_* (\jmath^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Autrement dit, la structure d'obstructions du prolongement des solutions holomorphes du système \mathcal{M} est isomorphe au faisceau des solutions micro-fonctions du système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ sur N_+ .

Démonstration. On déduit du théorème 3.1.4 le résultat immédiatement.
c. q. f. d.

Théorème 4.1.6. *Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. Soit p_+ appartenant à N_+ . On note $p = \pi(p_+)$ l'image de p_+ dans N . Si la forme de Levi généralisée du système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ a au moins une valeur propre strictement négative au point p_+ , on a alors*

$$j_*(j^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))|_{\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_p} = 0.$$

Autrement dit, tout germe de solutions holomorphes du système \mathcal{M} au voisinage de p sur Ω se prolonge en solution holomorphe à travers la frontière N dans un voisinage de p .

Démonstration. On désignera encore par π la projection $\pi: \Omega \sqcup N_- \rightarrow X$ et par j l'inclusion $j: \Omega \rightarrow \Omega \sqcup N_-$. On a alors la suite exacte des faisceaux sur N_- :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \pi^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) &\longrightarrow j_*(j^{-1} \pi^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbf{R} \Gamma_{N_-}(\pi^{-1} \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))) \longrightarrow \pi^{-1} \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Le théorème 2.2.1 entraîne que

$$\mathcal{H}^1(\mathbf{R} \Gamma_{N_-}(\pi^{-1} \mathbf{R} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)))^a_{p_+} = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N)_{p_+} = 0.$$

On en déduit le résultat immédiatement.
c. q. f. d.

Nous allons étudier le problème du prolongement au bord qui est feuilleté par des variétés complexes.

Soit p (resp. p_+) appartenant à N (resp. N_+). Soit L_p un germe d'une sous-variété complexe passant par p dans N . On désigne par L_{p_+} l'ensemble $\pi^{-1}(L_p)$. On désigne par $\mathcal{D}_{C-R|Y}$ le système des équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur N , en désignant Y un complexifié de N .

Théorème 4.1.7. *Supposons que les supports des solutions microfonctions du système $\mathcal{D}_{C-R|Y}$ se propagent le long de la sous-variété L_{p_+} . Supposons que le système \mathcal{M} satisfasse la condition suivante:*

p_+ appartient à l'adhérence de l'ensemble $L_{p_+} - SS(\mathcal{M}) \cap L_{p_+}$. On a alors

$$j_*(j^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))|_{\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_p} = 0.$$

Démonstration. Par l'hypothèse il y existe un ouvert U de L_p tel que

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N)_{\pi^{-1}(U)} = 0 \quad \text{et} \quad p_+ \in \text{l'adhérence de } \pi^{-1}(U).$$

Il suffit de vérifier que les singularités des solutions du système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ se propagent le long de la sous-variété L_{p_+} . Pour cela, considérons une résolution projective locale de \mathcal{M} :

$$0 \longleftarrow \mathcal{M} \longleftarrow \mathcal{D}_X^{r_0} \longleftarrow \mathcal{D}_X^{r_1} \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathcal{D}_X^{r_{q+1}} \longleftarrow 0.$$

On a alors la suite exacte des systèmes suivante de façon naturelle :

$$0 \longleftarrow \mathcal{M}_{C-R|Y} \longleftarrow \mathcal{D}_{C-R|Y}^{r_0} \longleftarrow \mathcal{D}_{C-R|Y}^{r_1} \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathcal{D}_{C-R|Y}^{r_{q+1}} \longleftarrow 0.$$

On en déduit le résultat facilement.

c. q. f. d.

Y. Tsuno [41] a déjà obtenu le résultat suivant dans le cas d'une seul opérateur en supposant que l'hypersurface soit Levi plat.

Théorème 4.1.8. *Supposons que le système des équations de Cauchy-Riemann tangentiels sur le bord soit isomorphe au mélange du système de Lewy-Mizohata de la signature $(\dim \mathbb{X} - d - 1, 0)$ et du système de Cauchy-Riemann partiel. On désigne par L_p un germe de la feuille analytique complexe passant par p , de dimension d . Si p_+ appartient à l'adhérence de l'ensemble $L_{p_+} - SS(\mathcal{M}) \cap L_{p_+}$, on a alors*

$$j_*(j^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))|_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_p} = 0.$$

Démonstration. Le théorème se déduit du théorème 4.1.7.

B) Nous allons étudier le problème de la non hypo-ellipticité analytique du système tangentiel.

Soit N_+ le fibré conormal extérieur au bord d'un ouvert Ω , ce bord N étant supposé analytique réel. Soit p_+ la conormal extérieur à N en $p \in N$. On note Y un complexifié de N et j l'inclusion de Ω dans \mathbb{X} . Nous obtenons d'abord le

Théorème 4.2.1. *Etant donné un \mathcal{D}_X -module cohérent \mathcal{M} , si Ω est un domaine d'holomorphic des solutions holomorphes du système \mathcal{M} en p , i.e.*

$$j_*(j^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))|_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_p} \neq 0,$$

on a les propriétés suivantes :

- (1) N est caractéristique par rapport à \mathcal{M} en $p \in N$.
- (2) N_+ est pseudoconvexe par rapport à \mathcal{M} en p_+ au sens de S-K-K.

Plus précisément, la forme de Levi du système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ n'a pas de valeurs propres strictement négatives en $p_+ \in N_+$.

Démonstration. Le première partie de l'énoncé résulte du corollaire 4.1.3. Quant à la deuxième partie, on déduit du théorème 4.1.6 le résultat immédiatement. c. q. f. d.

Soit maintenant \mathcal{M} un système d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants sur C^m . Rappelons d'abord le résultat suivant dû à H. Komatsu [28]:

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{C^m}}^k(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{C^m}) = 0 \quad \text{quel que soit } k > 0.$$

Choisissons un covecteur caractéristique ζ du système \mathcal{M} . On pose:

$$N_\zeta = \{z \in C^m | \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle = 0\} \text{ et } \Omega_\zeta = \{z \in C^m | \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle > 0\}.$$

On note \jmath l'inclusion naturelle de Ω_ζ dans C^m . On a alors la

Proposition 4.2.2. (C. O. Kiselman [26]). *Dans la situation précédent, supposons que \mathcal{M} soit de la forme suivante:*

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_{C^m}u = \mathcal{D}_{C^m} \mathcal{I} \quad \text{où } \mathcal{I} = \{P \in \mathcal{D}_{C^m} | Pu = 0\}.$$

Alors le système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ est non-hypo-elliptique analytique.

Démonstration. En utilisant une méthode due à C. O. Kiselman on peut construire concrètement une fonction holomorphe sur Ω_ζ de sorte qu'elle appartient à $\jmath_*(\jmath^{-1} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{C^m}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{C^m}))$, mais n'appartient pas à $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_{C^m}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{C^m})$. Ceci entraîne le résultat. q. e. d.

Conjecture 4.2.3. (Non hypo-ellipticité analytique microlocal). *Etant donné un système \mathcal{M} d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants sur C^m , supposons que un point $q \in T_{R^m}^*C^m - T_{R^m}^*R^m$ appartient à $SS(\mathcal{M})$. Alors il y existe une microfonction (non nulle) vérifiant le système.*

Soient $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ deux ouverts de X . On suppose que les bords N_1 et N_2 soient les hypersurfaces analytiques réelles. On suppose aussi que le bord N_2 soit tangent au bord N_1 en $p \in N_1 \cap N_2$. On désigne par N_{1+} (resp. N_{2+}) le fibré conormal extérieur à N_1 (resp. N_2) et par p_+ la conormale extérieur commune en p . On note Y_1 (resp. Y_2) un complexifié de N_1 (resp. N_2).

On est alors en mesure de obtenir le résultat suivant:

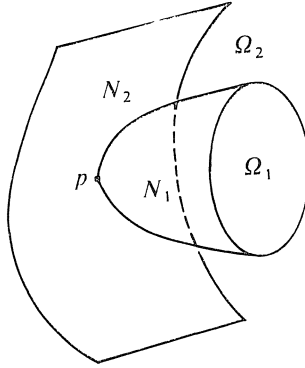
Théorème 4.2.4. *Soit \mathcal{M} le \mathcal{D}_X -module cohérent vérifiant la condition suivante:*

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\mathbb{X}}}^1(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathbb{X}}) = 0.$$

On a alors

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y_2}}(\mathcal{M}_{C-R|Y_2}, \mathcal{C}_{N_2})_{p_+} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y_1}}(\mathcal{M}_{C-R|Y_1}, \mathcal{C}_{N_1})_{p_+}.$$

En particulier, si le système $\mathcal{M}_{C-R|Y_2}$ est non-hypo-elliptique en p_+ , le système $\mathcal{M}_{C-R|Y_1}$ est aussi non-hypo-elliptique en p_+ .



Démonstration. On désigne par j_q ($q=1, 2$) l'inclusion $j_q: \Omega_q \rightarrow \mathbb{X}$. On a alors les isomorphismes suivants:

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y_q}}(\mathcal{M}_{C-R|Y_q}, \mathcal{C}_{N_q})|_{N_q^+} = j_{q*}(j_q^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{X}}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathbb{X}}))|_{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{X}}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathbb{X}})}.$$

On en déduit le résultat tout de suite.

c. q. f. d.

Exemple 4.2.5. Soit \mathcal{M} un système d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants sur C^m , satisfaisant la condition de la proposition 4.2.2. Choisissons un vecteur caractéristique ζ du système \mathcal{M} et le demi-espace $\Omega_2 = \Omega_\zeta = \{z \in C^m \mid \text{Re} \langle z, \zeta \rangle > 0\}$ de la frontière $N_2 = N_\zeta$. Soit Ω_1 un ouvert de Ω_2 , ce bord N_1 étant supposé analytique réel. Supposons que N_2 soit tangent à N_1 en p . Alors le système $\mathcal{M}_{C-R|Y_1}$ n'est pas hypo-elliptique analytique en p_+ .

Théorème 4.2.6. Plaçons-nous dans la situation du théorème 4.2.4.

(1) Supposons que tout germe de solutions holomorphes sur Ω_1 se prolonge à Ω_2 au voisinage de p , i.e.

$$j_{2*}(j_2^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{X}}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathbb{X}}))_p = j_{1*}(j_1^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{X}}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathbb{X}}))_p.$$

On a alors l'isomorphisme naturel suivant en p_+ :

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{S}_{Y_2}}(\mathcal{M}_{C-R|Y_2}, \mathcal{C}_{N_2})_{p_+} = \mathcal{H}om_{\mathcal{S}_{Y_1}}(\mathcal{M}_{C-R|Y_1}, \mathcal{C}_{N_1})_{p_+}.$$

(2) Supposons de plus que

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^k(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{quel que soit } k \geq 1,$$

$$\mathbf{R}^k j_{2*}(j_2^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))_p = \mathbf{R}^k j_{1*}(j_1^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))_p \quad k \leq q.$$

Alors

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{S}_{Y_2}}^k(\mathcal{M}_{C-R|Y_2}, \mathcal{C}_{N_2})_{p_+} = \mathcal{E}xt_{\mathcal{S}_{Y_1}}^k(\mathcal{M}_{C-R|Y_1}, \mathcal{C}_{N_1})_{p_+} \quad k \leq q.$$

Démonstration. On déduit de la démonstration du théorème 4.2.4 et du théorème 4.1.5 le résultat immédiatement. c. q. f. d.

On peut rapprocher ce résultat d'un résultat profond de S-K-K (Chap. 3, Lemme 2.3.7). En utilisant le théorème 4.2.6, on peut généraliser ce résultat de S-K-K de façon naturelle. Si le système \mathcal{M} est un système régulier au sens de S-K-K, on peut traiter concrètement le système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ sans l'hypothèse "la forme de Levi généralisée de $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ garde un rang constant". Nous voulons terminer en donnant quelques exemples. On pose :

$$X = C^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in C\},$$

$$\Omega = \{(z_1, z_2) \mid x_2 < 0\}, N = \partial\Omega, \mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \frac{\partial}{\partial z_1}.$$

Il est évident que le système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ coïncide avec le système de de Rham partiel :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u = \frac{\partial}{\partial y_1} u = 0.$$

Exemple 4.2.7. Plaçons-nous dans la situation précédente.

(1) On pose: $\Omega_1 = \{(z_1, z_2) \mid x_2 + x_1^{2l} + y_1^{2m} < 0\}$, où $l, m \geq 1$. $N_1 = \partial\Omega_1$. Il est facile de voir que

$$j_{1*}(j_1^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))|N \cap N_1 = j_{2*}(j_2^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))|N \cap N_1.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{S}_{Y_1}}(\mathcal{M}_{C-R|Y_1}, \mathcal{C}_{N_1})|N_+ \cap N_{1+} &= \mathcal{H}om_{\mathcal{S}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N)|N_+ \cap N_{1+} \\ &= \mathcal{C}_{N_+ \cap N_{1+}} \cong \mathcal{C}_{R^+}. \end{aligned}$$

(2) On pose: $\Omega_2 = \{(z_1, z_2) \mid x_2 - x_1^{2l} - y_1^{2m} < 0\}$ où $l, m \geq 1$, et $N_2 = \partial\Omega_2$. D'après le théorème 4.2.4, on a

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{S}_{Y_2}}(\mathcal{M}_{C-R|Y_2}, \mathcal{C}_{N_2})|N_{2+} \subseteq \mathcal{H}om_{\mathcal{S}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{C}_N)|N_+.$$

Il est évident que

$$j_{2*}(j_2^{-1} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) | \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) | \mathbb{N} - \mathbb{N} \cap \mathbb{N}_2 = 0.$$

D'autre part, les singularités des solutions du système $\mathcal{M}_{C-R|Y}$ se propagent au long de les variétés caractéristiques. On obtient donc

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_2}}(\mathcal{M}_{C-R|Y_2}, \mathcal{O}_{N_2}) | \mathbb{N}_{2+} = 0.$$

(3) On pose: $\Omega_3 = \{(z_1, z_2) | x_2 + x_1^{2l} + y_1^{2m-1} < 0\}$ où $l, m \geq 1$, et $\mathbb{N}_3 = \partial\Omega_3$. On désigne par \neq l'inclusion de $\Omega \cup \Omega_3$ dans X . Il est facile de voir que

$$j_{3*}(j_3^{-1} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) | \mathbb{N} \cap \mathbb{N}_3 = \neq_*(\neq^{-1} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) | \mathbb{N} \cap \mathbb{N}_3.$$

On a alors

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_3}}(\mathcal{M}_{C-R|Y_3}, \mathcal{O}_{N_3}) | \mathbb{N}_+ \cap \mathbb{N}_{3+} \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}_{C-R|Y}, \mathcal{O}_N) | \mathbb{N}_+.$$

On en déduit que

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{Y_3}}(\mathcal{M}_{C-R|Y_3}, \mathcal{O}_{N_3}) | \mathbb{N}_{3+} = 0.$$

Bibliographie

- [1] Andreotti, A. et Fredricks, G. A. Embeddability of real analytic Cauchy-Riemann manifold, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **6** (1979), 285–304.
- [2] Andreotti, A. et Grauert, H. Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 193–259.
- [3] Andreotti, A. et Hill, C. D. Complex characteristic coordinates and tangential Cauchy-Reimann equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **26** (1972), 299–324.
- [4] ———., E. E. Levi convexity and the E. Lewy problem I, II, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **26** (1972), 747–806.
- [5] Andreotti, A. et Nacinovich, M. Analytic convexity, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **7** (1980), 287–372.
- [6] Bony, J. M. et Schapira, P. Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, *Inventiones Math.*, **17** (1972), 95–105.
- [7] Freeman, M., Local complex foliation of real submanifold, *Math Ann.*, **209** (1974), 1–30.
- [8] Greenfield, S. J., Cauchy-Riemann equations in several variables, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **22** (1968), 275–314.
- [9] Hartshorne, R., *Residues and duality*, *Springer Lecture Notes in Math.*, **20** (1966).
- [10] Harvey, F. R., Hyperfunctions and linear partial differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **55** (1966), 1042–1046.
- [11] ———., The theory of hyperfunctions on totally real subsets of a complex manifold with applications to extension problems, *Amer. J. Math.*, **91** (1969), 853–873.
- [12] Kaneko, A., On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA*, **18** (1972), 415–433.
- [13] ———., On continuation of regular solutions of partial differential equations with constant coefficients, *J. Math. Soc. Japan*, **26** (1974), 92–123.

- [14] Kaneko, A., On linear exceptional sets of solutions of linear partial differential equations with constant coefficients, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **11** (1976), 441–460.
- [15] Kashiwara, M., Algebraic study of systems of partial differential equations, Master's thesis, Univ. of Tokyo, 1971 (Japanese).
- [16] ———., On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **10** (1975), 563–579.
- [17] ———., *Systèmes d'équations micro-différentielles*, Notes de Teresa Monteiro Fernandes, Univ. Paris-Nord, (1978).
- [18] Kashiwara, M. et Kawai, T. On the boundary value problem for elliptic systems of linear differential operators I, II, *Proc. Japan Acad.*, **48** (1972), 712–715, *ibid* **49** (1973), 164–168.
- [19] ———., *Theory of elliptic boundary value problems and its applications*, Sûrikaisei-Kenkyûsho Kôkyûroku, **238** Kyoto Univ. (1975), 1–59, (Japanese).
- [20] ———., Some applications of boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations, *Annales of Math. Studies*, Princeton Univ. Press, **93** (1979), 39–61.
- [21] ———., *On holonomic systems of microdifferential equations III*, RIMS Preprint, Kyoto Univ., **293** (1979).
- [22] Kashiwara, M. et Schapira, P. Micro-hyperbolic systems, *Acta. Math.*, **142** (1979), 1–55.
- [23] Kawai, T., Finite dimensionality of cohomology groups attached to systems of linear differential equations, *J. Math. Kyoto Univ.*, **13** (1973), 73–95.
- [24] ———., Vanishing of cohomology groups on completely k -convex sets, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **11** (1976), 775–784.
- [25] ———., Extension of solutions of systems of linear differential equations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **12** (1976), 215–227.
- [26] Kiselman, C. O., Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants, *Bull. Soc. Math. France* **97** (1969), 329–356.
- [27] Kohn, J. J., Subellipticity of the $\bar{\partial}$ -Neumann problem on pseudo-convex domains (sufficient conditions), *Acta. Math.*, **142** (1979), 79–122.
- [28] Komatsu, H., Resolutions by hyperfunctions of sheaves of solutions of differential equations with constant coefficients, *Math. Annalen*, **176** (1968), 77–86.
- [29] Komatsu, H. et Kawai, T. Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **7** (1971/72), 95–104.
- [30] Lewy, H., An example of a smooth linear partial differential equation without solution, *Annales of Math.*, **66** (1957), 155–158.
- [31] Martineau, A., *Le "edge of the wedge theorem" en théorie des hyperfonctions de Sato*, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo 1969, Univ. Tokyo Press (1970), 95–106.
- [32] Naruki, I., *An analytic study of a pseudo-complex structure*, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo 1969, 72–82.
 ———., Holomorphic extension problem for standard real submanifolds of second kind, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **6** (1970), 113–187.
- [33] ———., Localization principle for differential complexes and its applications, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **8** (1972), 43–110.
- [34] Pallu de la Barrière, P., Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, *J. Math. Pures et Appl.*, **55** (1976), 21–46.
- [35] Persson, J., Local analytic continuation of holomorphic solutions of partial differential equations, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **112** (1977), 193–204.

- [36] Polking, J. C. et Wells, R. O., Jr., Boundary values of Dolbeault cohomology classes and a generalised Bochner-Hartogs theorem, *Abhand Math. Sem. Univ. Hamburg*, **47** (1978), 1–24.
- [37] Sato, M., Kawai, T. et Kashiwara, M. (S-K-K), Microfunctions and pseudo-differential equations, *Springer Lecture Notes in Math.*, **287** (1973), 265–529.
- [38] Schapira, P., Conditions de positivité dans une variété symplectique complexe. Applications à l'étude des microfonctions, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **14** (1981), 121–139.
- [39] Tomassini, G., Tracce delle funzioni oloomorfe sulle sotto-varietà analitiche reali d'una varietà complessa, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **20** (1966), 31–43.
- [40] Tsuno, Y., On the continuations of holomorphic solutions of characteristic differential equations, *J. Math. Soc. Japan*, **26** (1974), 523–548.
- [41] ———., On the prolongation of local holomorphic solutions of partial differential equations II, prolongations across the pluri-harmonic hypersurface. *J. Math. Soc. Japan*, **28** (1976), 304–306.
- [42] ———., Holomorphic continuation of solutions of partial differential equations across the multiple characteristic surface, *J. Math. Soc. Japan*, **32** (1980), 285–299.
- [43] ———., Localization of differential operators and holomorphic continuation of the solutions, *Hiroshima Math. J.*, **10** (1980), 539–551.
- [44] Wells, R. O., Jr., Hyperfunction solutions of the zero-restmass field equations, *Commun. Math. Phys.*, **78** (1981), 567–600.
- [45] Zerner, M., Domaine d'holomorphic des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **272** (1971), 1646–1648.
- [46] Andreotti, A., Fredricks, G. et Nacinovich, M., On the absence of Poincaré lemma in tangential Cauchy-Riemann complexes, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **8** (1981), 365–404.
- [47] Henkin, G. M., Solution des équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur des variétés de Cauchy-Riemann q -concaves, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **292** (1981), 27–30.

