Publ. RIMS, Kyoto Univ.
19 (1983), 263-273

L'Existence d'une Fonction Analytique sur une Variété Analytique Complexe à Dimension Quelconque

par

Toshio NISHINO*

Introduction

Dans le mémoire précédent [3], on a vu, pour une variété analytique complexe compacte ou bien pseudoconvexe à deux dimensions, que *l'existence d'une surface générique nous permet de former une fonction analytique sur toute la variété.* Cet énoncé peut être généralisé sans difficulté au cas de dimension quelconque. Le but de cette note est de l'indiquer dans les grandes lignes. Comme on peut le facilement voir, quelques énoncés établits pour le cas de deux dimensions dans [3] sont valables pour le cas général au prix de quelques modifications de leurs démonstrations. Ils seront donc utilisés dans cette note sans faire l'objet de démonstration. Quelques notions et quelques notations imposées seront aussi utilisées sans répéter leurs définitions.

§ 1. Lemme Fondamental

Dans l'espace de $n+1$ variables complexes $(x)=(x_1, \cdots, x_n)$ et y, on considère un polycylindre fermé $\varDelta=(C, D)=(C_1, \cdots, C_n; D)$ dont les composantes C_j $(j=1, \cdots, n)$ et D sont données respectivement par $|x_j|\leqq 1$ $(j=1, \cdots, n)$ et $|y|\leqq R$, R étant un nombre positif plus grand que l'unité. $\varGamma_j$ $(j=1, \cdots, n)$ et $\varGamma$ sont les circonférences de C_j $(j=1, \cdots, n)$ et celui de D. On désigne, en général, par $\varDelta'$ un polycylindre fermé dans $\varDelta$ de la forme $(C', D')=(C'_1, \cdots, C'_n; D)$, où C'_j: $|x_j|\leqq r$ $(j=1, \cdots, n; r<1)$ et D': $|y|\leqq R'$ $(R'<R)$. Pour un point $(a)=(a_1, \cdots, a_n)$ de $(C)=(C_1, \cdots, C_n)$, on désigne par $L(a)$ la droite analytique donnée par $x_j=a_j$ $(j=1, \cdots, n)$ dans $\varDelta$. Soit F une famille de surfaces analytiques dans $\varDelta$; à proprement parler, toute surface S de F est la partie dans $\varDelta$ de celle définie dans un voisinage convenable de $\varDelta$. On suppose que toute surface S de F ne contient aucun point $(a, b)=(a_1, \cdots, a_n; b)$ tel qu'on ait $|b|\leqq 1$. Pour une paire formée d'un point (a) de (C) et d'une surface S de F, on considère le nombre, des points communs $S\cap L(a)$ qu'on désigne par $n(a, S)$, et l'on pose

---

Communiqué par S. Nakano, le 19 avril, 1982.
* Faculté de Technologie, Université de Kyushu, Fukuoka 812, JAPON.

$$N(a, F)=\sup_{S\in F} n(a, S).$$

Pour un polycylindre fermé Δ' dans Δ, le nombre de points communs $S\frown L(a)$ situés dans Δ' sera désigné par $n'(a, S)$. On aura alors le

Lemme fondamental. *Supposons que le nombre $N(\xi, F)$ est fini pour tout point (ξ) de (Γ) en dehors d'un certain ensemble de mesure nulle. Alors, à un polycylindre fermé quelconque Δ' dans Δ correspond un entier positif N tel qu'on ait $n'(a, S)<N$ pour toute paire de (a) de (C) et de S de F.*

On le verra dans la suite. Prenons d'abord une suite des ensembles fermés e_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ de points sur (Γ) tels que, pour tout point (ξ) de e_ν, on ait $N(\xi, F)\leqq\nu$ et que l'on ait

$$\lim_{\nu\to\infty}\mu(e_\nu)=(2\pi)^n,$$

$\mu(e_\nu)$ étant la mesure de e_ν. De l'hypothèse, ils existent certainement. En posant $\xi_j=e^{i\theta_j}$ $(j=1, \cdots, n)$, soient $E_\nu(\theta)=E_\nu(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ les fonctions réelles définies par

$$E_\nu(\theta)=\begin{cases}\log R & (\xi)\in e_\nu\\ 0 & (\xi)\notin e_\nu\end{cases}$$

sur (Γ), et posons

$$\Phi_\nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\prod_{j=1}^{n}P_j(x_j, \theta_j)E_\nu(\theta)d\theta_1\cdots d\theta_n$$

où

$$P_j(x_j, \theta_j)=\frac{1-r_j^2}{1+r_j^2-2r_j\cos(\varphi_j-\theta_j)}\qquad(x_j=r_je^{i\varphi_j}).$$

Comme on le sait, les fonctions $\Phi_\nu(x)$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ sont continues par rapport aux n variables (x) dans (C) et harmoniques par rapport à chaque variable x_j $(j=1, \cdots, n)$ dans C_j. De plus, en posant pour l $(1\leqq l\leqq n-1)$

$$\begin{aligned}&\phi_\nu(\theta_1', \cdots, \theta_l', x_{l+1}, \cdots, x_n)\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{n-l}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\prod_{i=l+1}^{n}P_j(x_j, \theta_j)E_\nu(\theta_1', \cdots, \theta_l', \theta_{l+1}, \cdots, \theta_n)d\theta_{l+1}\cdots d\theta_n,\end{aligned}$$

le théorème de *Fubini* entraîne

$$\Phi_\nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^l}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\prod_{j=1}^{l}P_j(x_j, \theta_j)\phi_j(\theta_1, \cdots, \theta_l; x_{l+1}, \cdots, x_n)d\theta_1\cdots d\theta_l.$$

D'où et d'après le théorème de *Riesz*, on peut déterminer d'une façon successive, pour chaque point intérieur (x^0) de (C), une suite d'ensembles, qu'on désigne par $\mathfrak{A}_l(x^0)$ $(l=1, \cdots, n)$, de mesure nulle sur $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_l)$ comme suit;

1). Chaque $\mathfrak{A}_l(x^0)$ contient l'ensemble produit $(\mathfrak{A}_{l-1}(x^0), \Gamma_l)$ et, pour tout poinnt $(\xi_1, \cdots, \xi_{l-1})$ en dehors de $\mathfrak{A}_{l-1}(x^0)$ de $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_{l-1})$, l'ensemble de tous les points ξ_l, tels qu'on ait $(\xi_1, \cdots, \xi_{l-1}, \xi_l) \in \mathfrak{A}_l(x^0)$, de Γ_l est de mesure nulle.

2). Pour tout point $(\xi_1, \cdots, \xi_l)$ en dehors de $\mathfrak{A}_l(x^0)$ de $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_l)$, on a

$$\lim_{x_l \to \xi_l} \cdots \lim_{x_1 \to \xi_1} \Phi_\nu(x_1, \cdots, x_l; x_{l+1}^0, \cdots, x_n^0) = \psi_\nu(\xi_1, \cdots, \xi_l; x_{l+1}^0, \cdots, x_n^0)$$

où chaque variable x_j $(j=1, \cdots, l)$ varie le long du rayon terminé en ξ_j de C_j.

Donc, on pose, pour simplifier l'écriture

$$\Phi_\nu(\xi_1, \cdots, \xi_l; x_{l+1}^0, \cdots, x_n^0) = \psi_\nu(\xi_1, \cdots, \xi_l; x_{l+1}^0, \cdots, x_n^0).$$

Or, on prend un polycylindre fermé quelconque Δ' dans Δ comme ci-dessus et l'on pose $R''=(R+R')/2$. Alors, de l'hypothèse, on a l'inégalité

$$\Phi_\nu(x) \geqq \log R''$$

dans (C') pourvu qu'on prenne ν suffisamment grand. On fixera par la suite l'un ν_0 de tels entiers et l'on désignera simplement par $\Phi_0(x)$ la fonction correspondant au ν_0.

Soit donnée une surface analytique S de F. Elle se représente par la forme $y=f_S(p)$, $f_S(p)$ étant une fonction holomorphe sur une surface de Riemann $\mathfrak{R}_S$ (à n dimensions) étalée au-dessus de (C). On a $1 \leqq |f_S(p)| \leqq R$ sur tout $\mathfrak{R}_S$ et $|f_S(p)|=R$ en tout point frontière relatif de $\mathfrak{R}_S$ par rapport à (C). On pose ici

$$h_S(p) = \max\{\Phi_0(x) - \log|f_S(p)|, 0\}$$

où Φ_0 est considérée comme une fonction sur $\mathfrak{R}_S$. On pose de plus

$$H_S(x) = \sum h_S(p)$$

où la somme est prise pour tous les point qui se trouvent au-dessus d'un même point (x) de (C) sur $\mathfrak{R}_S$; s'il n'y a aucun point de la sorte, $H_S(x)=0$. Cela posé, on aura

$$H_S(x) \leqq \nu_0 \log R$$

dans (C). En effet, soit (x^0) un point intérieur quelconque de (C). D'abord, on prend un point quelconque $(\xi_1, \cdots \xi_{n-1})$ en dehors de $\mathfrak{A}_{n-1}(x^0)$ de $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n-1})$, et l'on considère la surface de Riemann $\mathfrak{R}_S(\xi)$ donnée par la section de $\mathfrak{R}_S$ par la droite analytique $x_j=\xi_j$ $(j=1, \cdots, n-1)$ dans (C) et étalée au-dessus de C_n. Elle peut être regardée évidemment comme la partie d'une surface de Riemann, étalée aussi au-dessus de C_n sans aucun point frontière relatif par rapport à C_n, d'un nombre fini de feuillets. Désignons la par $\tilde{\mathfrak{R}}_S(\xi)$ et formons sur elle une fonction harmonique $V_1(p)$ par la résolution du problème de *Dirichlet* concernant les valeurs frontières $v_1(p)$ comme suit:

$$v_1(p) = \begin{cases} \log R & \text{si } p \text{ est un point frontière commun de } \\ & \mathfrak{R}_S(\xi) \text{ et de } \tilde{\mathfrak{R}}_S(\xi) \text{ et s'il se trouve} \\ & \text{au-dessus du point de } e_{\nu_0}. \\ 0 & \text{si } p \text{ n'est pas ainsi.} \end{cases}$$

On a alors $h_S(p) \leqq V_1(p)$ en tout point frontière de $\mathfrak{R}_S(\xi)$ sauf celui de l'ensemble convenable de mesure nulle. Ceci entraîne la même inégalité sur tout

$\mathfrak{R}_S(\xi)$ puisque $h_S(p)$ y est sousharmonique et bornée. D'autre part, on a

$$\sum V_1(p) \leqq \nu_0 \log R ,$$

où la somme est prise pour tous les points qui se trouvent au-dessus d'un même point $(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}; x_n)$ $(x_n \in C_n)$ sur $\tilde{\mathfrak{R}}_S(\xi)$. L'inégalité demandée a été donc établie pour tout point de $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n-1}; x^0)$ en dehors de $(\mathfrak{A}_{n-1}(x^0), x_n^0)$. Ensuite, on prend un point quelconque $(\xi_1, \cdots, \xi_{n-2})$ en dehors de $\mathfrak{A}_{n-2}(x^0)$ de $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n-2})$, et l'on considère encore la surface de Riemann $\tilde{\mathfrak{R}}_S(\xi, x_n^0)$ donnée par la section de $\mathfrak{R}_S$ par la droite analytique $x_j = \xi_j$ $(j=1, \cdots, n-2)$ et $x_n = x_n^0$ dans (C), et étalée au-dessus de C_{n-1}. Soit, comme dans le cas précédent, $\tilde{\mathfrak{R}}_S(\xi, x_n^0)$ une surface de Riemann, contenant $\mathfrak{R}_S(\xi, x_n^0)$, étalée au-dessus de C_{n-1} sans point frontière relatif par rapport à C_{n-1} et d'un nombre fini de feuillets, et soit $V_2(p)$ une fonction harmonique sur $\tilde{\mathfrak{R}}_S(\xi, x_n^0)$ donnée par la solution du problème de *Dirichlet* concernant les valeurs frontières $v_2(p)$ comme suit:

$$v_2(p) = \begin{cases} h_S(p) & \text{is } p \text{ est un point frontière commun de} \\ & \mathfrak{R}_S(\xi, x_n^0) \text{ et de } \tilde{\mathfrak{R}}_S(\xi, x_n^0) \text{ sauf au-dessus} \\ & \text{de point de } (\mathfrak{A}_{n-1}(x^0), x_n^0) \\ 0 & \text{si } p \text{ n'est pas ainsi.} \end{cases}$$

D'après le même raisonnement que ci-dessus, on a $h_S(p) \leqq V_2(p)$ sur tout $\mathfrak{R}_S(\xi, x_n^0)$; ce qui établit l'inégalité demandée pour tout point de $(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_{n-2}; x_{n-1}^0, x_n^0)$ en dehors de $(\mathfrak{A}_{n-2}(x^0), x_{n-1}^0, x_n^0)$. Ce processus peut se continuer de proche en proche sans aucune difficulté à ce que l'on ait l'inégalité demandée en (x^0).

Or, si un point (x^0, y^0) de S se trouve dans le polycylindre fermé Δ', on a

$$h_S(p) \geqq \log R'' - \log R'$$

p étant le point correspondant au (x^0, y^0) de $\mathfrak{R}_S$. Ceci entraîne immédiatement

$$n'(x, S) \leqq \nu_0 \log R / (\log R'' - \log R') .$$

Le lemme fondamental est donc démontré complètement.

D'aprés le lemme fondamental, on a facilement le

Corollaire. *S'il y a un point intérieur* (a), *tel qu'on ait* $N(a, F) = \infty$, *de* (C), *l'ensemble* E *de tous les points de la même sorte dans* (C) *est de mesure positive.*

En effet, s'il n'en est pas ainsi, on peut toujours trouver un système de nombre positifs r_j $(j=1, \cdots, n)$ plus petits que l'unité de manière que, Γ_j^* $(j=1, \cdots, n)$ étant les cercles de la forme $|x_j| = r_j$, l'intersection $E \frown (\Gamma^*)$ est de mesure nulle. Ceci est en contradiction avec le lemme fondamental, ce qui démontre certainement le corollaire.

§ 2. Surfaces Génériques

Soit $\mathfrak{M}$ une variété analytique complexe à dimension quelconque n $(n>1)$. On suppose qu'elle est connexe et constitue une réunion dénombrable de compacts. Un ensemble analytique, dont les composantes irréductibles sont toutes dimension $n-1$, sur $\mathfrak{M}$ s'appellera dans cette note simplement surface analytique sur $\mathfrak{M}$. Une surface analytique S sur $\mathfrak{M}$ sera dite *générique* si elle satisfait aux conditions suivantes:

1). S est compacte, irréductible et non singulière.

2). Toute donnée (p) du 1^{er} problème de *Cousin* dans un voisinage de S admettant un seul pôle en S est résoluble sur S.

3). Toute donnée (z) du $2^{ième}$ problème de *Cousin* dans un voisinage de S admettant un seul zéro en S est résoluble sur S.

Etant donnée une surface analytique S sur $\mathfrak{M}$, si elle est compacte, irréductible et non singulière et qu'elle se représente par le zéro d'ordre un d'une fonction holomorphe dans un voisinage de S, elle est toujours générique. Inversement, on a la

Proposition 1. *Si une surface analytique S sur $\mathfrak{M}$ est générique, on peut former une fonction holomorphe, admettant S comme seul zéro d'ordre un, dans un voisinage convenable de S.*

Cette proposition, une généralisation de la proposition 7 de [3] dû à *Kodaira* et *Spencer*, sera indiquée plus simplement par le même calcul que celle-ci. D'après cela, on peut toujours trouver, pour une surface générique S sur $\mathfrak{M}$, une suite de surfaces analytiques compactes S_j $(j=1, 2, \cdots)$ ne passant par aucun point de S et tendant vers S en ordre un. Inversement, on a la

Proposition 2. *Une surface analytique S, étant compacte, irréductible et non singulière, sur $\mathfrak{M}$ est générique s'il y a une suite de surfaces analytiques compactes S_j $(j=1, 2, \cdots)$ ne passant par aucun point de S et tendant vers S en ordre un.*

Cette proposition, qui est une généralisation de la proposition 8 de [3], sera aussi indiquée par le même raisonnement que pour celle-ci. Pour l'existence d'une surface générique sur $\mathfrak{M}$, on aura la

Proposition 3. *S'il existe sur $\mathfrak{M}$ une infinité non dénombrable de surfaces analytiques compactes et connexes ne se rencontrant jamais l'une l'autre, on peut trouver parmi elles au moins une surface générique sur $\mathfrak{M}$.*

On le verra par la suite. En prenant un système de coordonnées locales $(x)=(x_1, \cdots, x_n)$ sur $\mathfrak{M}$, on considère un polycylindre $\Delta=(C_1, \cdots, C_n)$ où $C_j: |x_j| < r_j$ $(j=1, \cdots, n)$, r_j étant des nombres positifs convenables. On l'appellera en général polycylindre par coordonnées locales (x) sur $\mathfrak{M}$. Une surface analytique S sur $\mathfrak{M}$ sera dite *complète* dans Δ pour n-ième coordonnée si la projection de $S\cap\Delta$

dans C_n se trouve dans l'intérieur complet de C_n. A ce moment, la section de S par une droite analytique $x_j=x_j'$ $(j=1, \cdots, n-1)$ dans Δ consiste en un même nombre de points en tenant compte de ν fois le point d'ordre ν d'intersection. Le nombre sera dit *nombre de feuillets* de S dans Δ pour n-ième coordonnée. Toute surface analytique compacte S sur $\mathfrak{M}$ peut être recouverte d'un nombre fini de polycylindres Δ_μ par coordonnées locales (x^μ) $(\mu=1, \cdots, m)$ sur $\mathfrak{M}$ de manière que S soit complète dans chaque Δ_μ pour n-ième coordonnée. Comme on peut le voir facilement, on peut les choisir d'un ensemble dénombrable de polycylindres déterminés a priori sur $\mathfrak{M}$. Donc, étant donnée une famille F d'une infinité non dénombrable de surfaces analytiques compactes sur $\mathfrak{M}$, on peut toujours trouver un système d'un nombre fini de polycylindres Δ_μ par coordonnée locales (x^μ) $(\mu=1, \cdots, m)$ sur $\mathfrak{M}$ qui recouvre à la fois une infinité non dénombrable de surfaces de F de manière que toute la surface soit complète dans chaque Δ_μ pour n-ième coordonnée. Désignons par F_0 la famille partielle de toutes ces surfaces de F et, en considérant un système de m entiers non négatifs quelconques $(\nu)=(\nu_1, \cdots, \nu_m)$, soit $F_0(\nu)$ la famille de toutes les surfaces S, telles que le nombre de feuillets dans chaque Δ_μ pour n-ième coordonnée soit justement ν_μ, de F_0. Elles sont évidemment normales sur $\mathfrak{M}$ et, de plus, si une suite de surfaces S_j $(j=1, 2, \cdots)$ de $F_0(\nu)$ tend vers l'une S_0 appartenant aussi à $F_0(\nu)$, cette convergence est d'ordre un. Ceci se réalise pourvu que $F_0(\nu)$ contienne une infinité non dénombrable de surfaces, et de plus, il existe au moins une famille de cette sorte puisqu'il n'y a qu'une infinité dénombrable au plus de systèmes d'entiers différents. On suppose ici que les surfaces de F sont toutes connexes et ne se rencontrent jamais l'une l'autre. On peut alors dire que

Toute surface de F est irréductible et non singulière sauf une infinité dénombrable au plus d'entre elles.

En général, deux surfaces analytiques S_1 et S_2 sur $\mathfrak{M}$ seront dites *de même type topologique dans un polycylindre Δ* s'il y a un automorphisme continu de Δ qui fait correspondre $\Delta\cap S_1$ à $\Delta\cap S_2$. Evidemment, il n'y a qu'une infinité dénombrable au plus de surfaces analytiques de type topologique différent dans Δ sur $\mathfrak{M}$. Supposons maintenant que F contienne une famille $F^{(r)}$ d'une infinité non dénombrable de surfaces analytiques S qui admet un ensemble analytique σ de dimensions r comme les points singuliers, r étant un entier tel qu'on ait $0\leqq r\leqq n-2$. Alors, on peut faire correspondre à chaque surface S de $F^{(r)}$ un polycylindre (C) par coordonnées locales (x) tel que S soit complète dans Δ pour n-ième coordonnée et que, pour tout point $(x_1', \cdots, x_r')$ dans le polycylindre $(C_1, \cdots, C_r)$, l'intersection de S et du plan analytique $x_j=x_j'$ $(j=1, \cdots, r)$ dans Δ admette un et un seul point singulier isolé et soit contractile. Puisqu'on peut le choisir aussi dans un ensemble dénombrable de polycylindres déterminés a priori sur $\mathfrak{M}$, à une infinité non dénombrable de surfaces de $F^{(r)}$ correspond un même polycylindre

$\varDelta$. On peut, par consequent, en extraire une suite de surfaces S_j ($j=1, 2, \cdots$) tendant vers une surface S_0 telles que les sections de S_j ($j=0, 1, 2, \cdots$) par le plan analytique $x_j=0$ ($j=1, \cdots, r$) dans $\varDelta$ soient de même type topologique comme les surfaces analytiques dans le polycylindre $(C_{r+1}, \cdots, C_n)$. Ceci est en contradiction avec le fait que toute surface S_j ($j=1, 2, \cdots$) ne passe par aucun point de S_0 puisque le raisonnement pour la proposition 1 de [3] s'y applique sans changer presque rien. La proposition est donc complètement démontrée.

§ 3. Normalité

On suppose dans cette section que la variété analytique $\mathfrak{M}$ est de dimension $n+1$ ($n>0$). Soit V un domaine sur $\mathfrak{M}$ admettant une application analytique f de V sur une surface de Riemann $\mathfrak{R}$ (d'une variable) telle que, pour tout point p de $\mathfrak{R}$, la surface analytique S_p donnée par $f^{-1}(p)$ soit compact et connexe. La totalité de ces surfaces, convenons d'écrire $\mathfrak{F}=(V, f, \mathfrak{R})$, s'appellera *famille holomorphe de surfaces analytiques donnée par f dans V* ou, plus simplement, *famille holomorphe*. Deux familles holomorphes $\mathfrak{F}_\nu=(V, f_\nu, \mathfrak{R}_\nu)$ ($\nu=1, 2$) données dans un même domaine V sont dites *identiques* s'il en est ainsi comme famille de surfaces analytiques. Quand on considère deux familles holomorphes $\mathfrak{F}_\nu=(V_\nu, f_\nu, \mathfrak{R}_\nu)$ ($\nu=1, 2$) données respectivement dans V_ν, l'une s'appelle *prolongement analytique* de l'autre si $V_1 \frown V_2$ n'est pas vide et qu'elles sont y identiques. Comme on l'a vu dans la section 4 de I de [3], le prolongement analytique se réalise s'il y a au moins une surface analytique appartenant à la fois aux deux familles holomorphes $\mathfrak{F}_\nu$. Dans la suite, on considérera le disque-unité $\mathfrak{C}: |z|<1$ sur le plan d'une variable z comme la surface de Riemann $\mathfrak{R}$ et l'on supposera que le domaine V se trouve dans l'intérieur complet de $\mathfrak{M}$. Soit l_θ ($\theta \in I=[0, 2\pi]$) un rayon d'une direction θ de $\mathfrak{C}: re^{i\theta}$ ($0 \leqq r<1$) et $\mathfrak{F}_\theta$ la famille partielle de $\mathfrak{F}$ paramétrisée par l_θ. Alors, on aura le

Théorème 1. *Toute famille $\mathfrak{F}_\theta$ est normale sur $\mathfrak{M}$ sauf celle pour θ de l'ensemble convenable de mesure nulle.*

On le verra par la suite. Prenons, d'abord, un point frontière quelconque p_0 de V et soit $X_1, \cdots, X_{n+1}$ un système de coordonnées locales en p_0. On prend ensuite $n+1$ points differents P_j ($j=1, \cdots, n+1$) dans la partie commune du voisinage de ce coordonnées locales et de V de manière que, D_j ($j=1, \cdots, n+1$) étant les droites analytiques passant par p_0 et p_j, on puisse prendre un nouveau système de coordonnées locales $t_1, \cdots, t_{n+1}$ en p_0 ayant D_j comme axe de t_j. Cela posé, on peut tracer $n+1$ polycylindres fermés $\varDelta_j$ ($j=1, \cdots, n+1$) de la forme $|t_\nu|<\rho_1$ ($\nu=1, \cdots, n+1; \nu \neq j$) et $|t_j|<\rho_2$, ρ_1 et ρ_2 étant deux nombres positifs tel qu'on ait $\rho_1<\rho_2$, de façon que chaque point p_j se trouve respectivement dans $\varDelta_j$ et que la surface analytique donnée par $t_j=a_j$ ($|a_j|<\rho_2$) passant par p_j dans $\varDelta_j$ se trouve dans l'intérieur complet de V. Il suffit pour cela de prendre ρ_1 suffisamment petit. Maintenant, on considère l'un quelconque de Δ_j $(j=1, \cdots, n+1)$, pour fixer l'idée, Δ_{n+1} et on le désigne, à nouveau, par Δ. On pose de plus

$$x_\nu=t_\nu/\rho_1 \ (\nu=1, \cdots, n) \quad \text{et} \quad y=\alpha\frac{\rho_2(t_{n+1}-\alpha_{n+1})}{\rho_2^2-\overline{\alpha_{n+1}}t_{n+1}}$$

α étant un nombre positif suffisamment grand pour que la partie de Δ donnée par $|y|\leqq 1$ se trouve dans l'intérieur complet de V. Le polycylindre Δ se représente par $(C, D)=(C_1, \cdots, C_n, D)$, où C_j: $|x_j|\leqq 1$ $(j=1, \cdots, n)$ et D: $|y|\leqq R$ $(R=\alpha\cdot\rho_2)$. A ce moment, toute surface S_z de $\mathfrak{F}$ ne passe par aucun point (a, b), tel qu'on ait $|b|\leqq 1$, de Δ pourvu que $|z|$ surpasse un certaine nombre r_0 $(0<r_0<1)$. Soient $\mathfrak{F}_\theta^0$ $(\theta\in I)$ les restrictions de $\mathfrak{F}_\theta$ dans Δ. Les notations $L(a)$, $n(a, S_z)$ et $N(a, F_\theta^0)$ etc. ont les mêmes significations imposées dans la section 1. Lorsqu'on a $N(a, \mathfrak{F}_\theta^0)=\infty$, θ s'appellera *direction singulière* au (a) de (C). D'après le lemme 1 de [3] et le corollaire du lemme fondamental de cette note, on a les deux énoncés suivants.

Pour chaque point (a') de (C), l'ensemble de toutes les directions singulières θ $(\theta\in I)$ au (a') est de mesure nulle.

Pour chaque direction θ' de I, l'ensemble de tous les points (a), auxquel θ' est une direction singulière, de (C) est ou bien vide ou bien de mesure positive.

Soit Ω l'ensemble de tous les points (a, θ), tels que θ soit une direction singulière à (a), dans l'ensemble produit (C, I). On peut alors conclure que Ω est de mesure nulle et ce que la projection de Ω dans I l'est aussi. La projection s'appellera *ensemble de directions singulières* à Δ par rapport à $n+1$-ième coordonnée.

Revenons aux notations originales Δ_j $(j=1, \cdots, n+1)$ etc. et posons $\Delta_0=\bigcap_{j=1}^{n+1}\Delta_j$. A chaque polycylindre Δ_j correspond un ensemble de directions singulières Θ_j à Δ_j par rapport à j-ième coordonnée dans I. La somme $\Theta_{\Delta_0}=\cup\Theta_j$ s'appellera *ensemble de directions singulières en* Δ_0. Elle est aussi de mesure nulle. On aura ici l'énoncé que

Toute famille $\mathfrak{F}_\theta$ $(\theta\in I)$ est normale dans l'intérieur de Δ_0 sauf celle pour θ de Θ_{Δ_0}.

En effet, soit $\Delta_0'=(C_j', \cdots, C_{n+1}')$ un polycylindre fermé quelconque dans Δ_0, où C_j': $|t_j|<\rho'$ $(j=1, \cdots, n+1)$ $(\rho'<\rho_1)$, et soient $L_j(a)$ $(j=1, \cdots, n+1)$ les droites analytiques données par $t_\nu=a_\nu$ $(\nu=1, \cdots, n+1; \nu\neq j)$ dans Δ_0. D'après le lemme fondamental, étant donnée une famille $\mathfrak{F}_\theta$ $(\theta\in I-\Theta_{\Delta_0})$, le nombre des points communs $S_z\cap L_j(a)$ $(S_z\in\mathfrak{F}_\theta)$ situés dans Δ_0' est plus petit qu'un entier dépendant seulment de θ. Cela veut dire que l'aire de $S_z\cap\Delta_0'$ est bornée uniformément pour toute surface de $\mathfrak{F}_\theta$. Donc, d'après le théorème de *Stoll* [4], la famille $\mathfrak{F}_\theta$ est normale dans l'intérieur de Δ_0; ce qui démontre l'énoncé.

Maintenant, on prend, pour chaque point frontière p de V, un polycylindre

Δ_p comme ci-dessus. D'après le théorème de *Borel-Lebesgue*, on peut recouvrir toute la frontière de V par un nombre fini de tels polycylindres. Désignons les par $\Delta^{(\nu)}$ $(\nu=1, \cdots, N)$ et par $\Theta^{(\nu)}$ $(\nu=1, \cdots, N)$ les ensembles de directions singulières en $\Delta^{(\nu)}$. La somme $\Theta=\cup\Theta^{(\nu)}$ est aussi de mesure nulle dans I. Evidemment, la famille $\mathfrak{F}_\theta$ $(\theta\in I-\Theta)$ est normale dans $\mathfrak{M}$. Le théorème est donc complètement démontré.

θ de Θ sera dit *direction singulière* pour $\mathfrak{F}$.

Le théorème de la normalité de cette sorte peut s'établir pour une famille holomorphe de forme un peut différente sur $\mathfrak{M}$. Soit e un ensemble fermé quelconque dans l'intérieur complet du disque-unité $\mathfrak{C}$: $|z|<1$ et posons $\mathfrak{C}^*=\mathfrak{C}-e$. On suppose que l'origine de $\mathfrak{C}$ se trouve dans $\mathfrak{C}^*$. Pour chaque θ $(\theta\in I)$, on désigne par l_θ^* le segment dans $\mathfrak{C}^*$ de la forme $re^{i\theta}$ $(r_\theta<r<1)$, dont l'éxtrémité $z_\theta=r_\theta e^{i\theta}$ appartient à e ou bien coïncide avec l'origine de $\mathfrak{C}$. Soit $\mathfrak{F}^*=(V^*, f^*, \mathfrak{C}^*)$ une famille holomorphe donnée par une application analytique f^* d'un domaine V^* $(V^*\Subset\mathfrak{M})$ sur $\mathfrak{C}^*$, et soit $\mathfrak{F}_\theta^*$ $(\theta\in I)$ la famille partielle de $\mathfrak{F}^*$ paramétrisée par l_θ^*. Alors, on a, tout pareillement, le

Théorème 2. *Toute famille $\mathfrak{F}_\theta^*$ sauf celle pour θ de l'ensemble convenable de mesure nulle est normale sur $\mathfrak{M}$.*

§ 4. Prolongement Analytique

Un domaine V dans l'intérieur complet d'une variété analytique $\mathfrak{M}$ est dit *pseudoconvexe* s'il y a, dans un voisinage convenable U de toute la frontière de V, une fonction plurisousharmonique φ telle que $U\cap V$ soit donnée par $\varphi<0$. Une variété analytique $\mathfrak{M}$ est dite *pseudoconvexe* s'il y a une suite de domaines pseudoconvexes V_μ $(\mu=1, 2, \cdots)$ telle qu'on ait $V_\mu\Subset V_{\mu+1}$, et $\mathfrak{M}=\cup V_\mu$. Dans cette dernière section, on suppose que la variété analytique $\mathfrak{M}$ est compacte ou bien pseudoconvexe et de dimension n $(n>1)$. Supposons, maintenant, que $\mathfrak{M}$ admet une surface générique S_0. D'après la proposition 1, on peut former une famille holomorphe $\mathfrak{F}_0$ donnée par la fonction holomorphe f_0 admettant S_0 comme un seul zéro d'ordre un dans un voisinage convenable V_0 de S_0. On la prolonge analytiquement dans la mesure du possible sur $\mathfrak{M}$. La famille holomorphe $\mathfrak{F}=(V, f, \mathfrak{R})$ ainsi obtenue, dite maximale, est donnée par une application analytique f d'un domaine V sur une surface de Riemann $\mathfrak{R}$ (d'une variable). Si $\mathfrak{R}$ est compacte, V coïncide évidemment avec toute la variété $\mathfrak{M}$. On verra ici que le domaine V coïncide toujours avec $\mathfrak{M}$.

On considère d'abord le cas où $\mathfrak{M}$ est compacte. De même que pour l'énoncé de la section 5 de III de [3], on a l'énoncé que

Le genre de la surface de Riemann est fini.

On en conclut que $\mathfrak{R}$ peut être regardée comme une partie d'une autre surface de Riemann, qu'on désigne par $\tilde{\mathfrak{R}}$, compacte et de même genre que $\mathfrak{R}$, n'étant pas unique. On désigne par $\tilde{e}$ l'ensemble de tous les points n'appartenant pas à $\mathfrak{R}$ sur $\tilde{\mathfrak{R}}$. Soit Γ une partie simplement connexe de $\tilde{\mathfrak{R}}$ limitée par une seule courbe simple fermée dans $\mathfrak{R}$ et contenant tous les points de $\tilde{e}$. On fait correspondre Γ au disque-unité $\mathfrak{C}$: $|z|<1$ sur le plan de z d'une façon conforme par $z=\lambda(p)$. Désignons par e l'image de $\tilde{e}$ par λ et posons $\mathfrak{C}^*=\mathfrak{C}-e$. On suppose que l'origine de $\mathfrak{C}$ n'appartient pas à e. On a alors une famille holomorphe $\mathfrak{F}^*=(V^*, f^*, \mathfrak{C}^*)$, où $f^*=\lambda f$ et $V^*=f^{*-1}(\mathfrak{C}^*)$. Les notations l_θ^*, z_θ, $\mathfrak{F}_\theta^*$ ont les mêmes significations que celles définies en fin de section précédente. On aura alors la

Proposition 4. *L'ensemble e est un ensemble négligeable de la classe N_D au sens de la théorie des fonctions.*

En effet, d'après le théorème de *Ahlfors* et *Beurling* [1], en tenant compte du fait qu'on peut prendre $\tilde{\mathfrak{R}}$ arbitrairement, il suffit pour cela qu'on voir que la mesure de e est nulle. Supposons pour le réduir à l'absurde, qu'il n'en soit pas ainsi. Alors, l'ensemble de toutes les directions θ tels que les extrémités z_θ de l_θ^* appartiennent à e est de mesure positive. Par suite, d'après le théorème 2 de [3], il y a une infinité non dénombrable de surfaces analytiques compactes ne se rencontrant jamais l'une l'autre sur la frontière de V^*. D'après la proposition 3, c'est l'absurde puisque $\mathfrak{F}^*$ est maximale, ce qui démontre certainement la proposition.

Soit p un point frontière quelconque de V^*. En prenant un système de coordonnées locales $(x_1, \cdots, x_n)$ en p de façon convenable, on trace le polycylindre $\varDelta=(C_1, \cdots, C_n)$, où C_j: $|x_j|<1$ $(j=1, \cdots, n)$, de manière que, pour tout point $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ de $(C_1, \cdots, C_{n-1})$, la droite analytique $L(a)$ donnée par $x_j=a_j$ $(j=1, \cdots, n-1)$ dans $\varDelta$ contienne au moins un point de V^*. Alors, de même que pour l'énoncé de la dernière section de [3], la restriction de f sur $L(a)\cap V^*$ se prolonge analytiquement sur tout $L(a)$ en tant qu'une application sur $\tilde{\mathfrak{R}}$. Ceci montre, d'après le théorème de *Hartogs*, que f est analytique dans tout $\varDelta$. Puisqu'on prend p arbitrairement sur la frontière de V^* la famille holomorphe $\mathfrak{F}$ est donnée sur $\mathfrak{M}$ tout entier.

De même que ci-dessus, il n'y a aucune difficulté pour le cas où la variété $\mathfrak{M}$ est pseudoconvexe. On a donc le

Théorème. *Si une variété analytique $\mathfrak{M}$ est compacte ou bien pseudoconvexe, l'existence d'une surface générique nous permet de former une fonction analytique sur toute la variété $\mathfrak{M}$.*

Bibliographie

[1] Ahlfors, L. and Beurling, A., Conformal invariantes and Function-theoretic Null-set, *Acta Math.*, **83** (1950), 101-129.
[2] Kodaira, K. and Spencer, D.C., A theorem of completeness of characteristic systems of complete continuous systems, *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 477-500.
[3] Nishino, T., L'existence d'une fonction analytique sur une variété analytique complexe à deux dimensions, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **18** (1982), 387-419.
[4] Stoll, W., Normal families of non-negative divisors, *Math. Z.*, **84** (1964), 154-218.