Publ. RIMS, Kyoto Univ.
20 (1984), 659-670

Théorèmes de Dualité sur la Frontière Fortement Pseudoconvexe II, Dualité d'Alexandroff

Dédié à Professeur S. Nakano pour son soixantième anniversaire

par

Tosiaki KORI*

Introduction

Soit D un ouvert fortement pseudoconvexe dans un espace analytique X de dimension $n\geqq 3$ avec la frontière B supposée une sous-variété de la partie lisse de X. On montrera le théorème de dualité : *soient A une partie ouverte de B et F un faisceau coherent dans un voisinage (dans X) de A tel que* codh $F\geqq 2$. *Alors, pour tout* $p\leqq$ codh $F-2$, *le dual d'espace $H^p(A, \underline{H}_B^1 F)$ muni d'une structure d'espace $\boldsymbol{FS}$ est isomorphe à $Ext_c^{n-p-1}(A: \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)$. Si, en outre, F est de Cohen-Macaulay avec* $k=$ codh $F\geqq 2$, *l'espace $H^{k-1}(A, \underline{H}_B^1 F)$ est muni d'une structure limite inductive d'espaces $\boldsymbol{FS}$ et son dual est isomorphe à $Ext_c^{n-k}(A: \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)$, où Ω^p est le faisceau de p-formes holomorphes.* On sait qu'il y a un quasi-isomorphisme ; $\underline{H}_B^1 \Omega^\cdot \simeq \boldsymbol{C}_B$. Usant ce fait et le théorème de dualité ; $H^p(A, \underline{H}_B^1 \Omega^q)'\cong H_c^{n-p-1}(A, \underline{H}_B^1 \Omega^{n-q})$ pour $F=\Omega^q$, on obtient l'isomorphisme dual:

$$H^\cdot(A, \boldsymbol{C})'\cong H^{2n-1-\cdot}(B, B-A\,; \boldsymbol{C}).$$

Dans la section 3, faisant de la recherche d'hyperhomologie $\boldsymbol{H}.(\mathscr{V}, {}^b\omega.)$ d'un recouvrement $\mathscr{V}$ de A on trouvera la dualité d'Alexandroff sur B :

$$H_p(A, \boldsymbol{C})\cong H^{2n-1-p}(B, B-A\,; \boldsymbol{C}),$$
$$H_p(B, A\,; \boldsymbol{C})\cong H^{2n-1-p}(B-A, \boldsymbol{C}),$$

Communiqué par S. Nakano, le 11, juin, 1983.
* Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Technologies, Université de Waséda, Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo, Japon.

où ci-dessus ${}^b\omega_\cdot = H_c^{n-1}(\underline{H}_B^1\Omega^{n-\cdot})$ est le cofaisceau $U \longrightarrow H_c^{n-1}(U, \underline{H}_B^1\Omega^{n-\cdot})$.

Je voudrais faire une remarque. La dualité cité plus haut; $H^p(A, \underline{H}_B^1F)' \cong Ext_c^{n-p-1}(A; \underline{H}_B^1F, \underline{H}_B^1\Omega^n)$, pour $p \leqq \operatorname{codh} F-2$, et la dualité; $H_p(A, \boldsymbol{C}) \cong H^{2n-1-p}(B, B-A; \boldsymbol{C})$, pour $p \neq n-1$, n, peuvent se montrer exactement par le même argument qu'on a usé dans notre article précédente [6]. L'essentiel de ce travail est traiter le cas où $p=k-1$, $k=\operatorname{codh} F$, ou $p=n-1$ dans la ci-dessus. Pour cela on a besoin d'une nouvelle dualité des espaces qui ne sont pas $\boldsymbol{FS}$ ni $\boldsymbol{DFS}$ (Lemme 2. 3).

Notations

Pour une famille de supports Φ de X et une partie localement fermée Z, $\Phi|Z$ désigne la famille de supports de Z formée des $A \in \Phi$ qui sont contenus dans Z, et $\Phi \cap Z$ désigne la famille de supports de Z formée des parties $A \cap Z$ avec $A \in \Phi$.

Pour un ouvert U, $\varphi = \varphi(U)$ (resp. $c = c(U)$) désigne l'ensemble des toutes les parties fermées (resp. compactes) de U.

Pour un faisceau cohérent F, $\operatorname{prof} F_x$ (resp. $\dim F_x$) désigne le profondeur de F (resp. la dimension de F) en point x, et on pose

$$\operatorname{codh} F = \inf_x \operatorname{prof} F_x,$$

où l'infime est pris sur le domaine de définition de F, ainsi que,

$$\dim F = \sup_x \dim F_x.$$

On désigne par $\underline{H}_B^p$ le p-ème foncteur dérivé du foncteur $\underline{\Gamma}_B$; $\underline{\Gamma}_B F$ pour un faisceau F est le faisceau défini par $V \longrightarrow \Gamma_{V \cap B}(V, F|V)$.

Pour un recouvrement ouvert $\mathscr{V}$ d'une partie E et pour un complexe de faisceaux $K^\cdot$ sur E, on désigne par $\boldsymbol{H}^\cdot(\mathscr{V}, K^\cdot)$ l'hypercohomologie de recouvrement $\mathscr{V}$ à coefficient dans $K^\cdot$. L'hyperhomologie du recouvrement $\mathscr{V}$ à coefficients dans un complexe de précofaisceaux $L_\cdot$ est par définition l'homologie bicomplexe $C_\cdot(\mathscr{V}, L_\cdot)$ dont le composant d'indices (i, j) est $C_i(\mathscr{V}, L_j)$, groupe des i-chaînes alternées du nerf de $\mathscr{V}$ à valeur dans L_j. On la note $\boldsymbol{H}_\cdot(\mathscr{V}, L_\cdot)$.

1. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace analytique réduit de dimension $n \geqq 3$, $\mathcal{O}$

étant le faisceau des fonctions holomorphes. Soient D un ouvert relativement compact et fortement pseudoconvexe. On suppose que la frontière B de D est une sousvariété différentiable de codimension 1 dans la partie régulière de X.

On a vu dans [2, 6] les propriétés suivantes:

(1.1) *Chaque point sur B a un système fondamental des voisinages V, appelé* bon voisinage, *tel qu'on ait, pour tout faisceau cohérent F sur V,*

(1.1.1) $H^p(V\cap D,\ F)=0$ *pour* $p\geqq 1$,

(1.1.2) $H_c^p(V\cap D,\ F)=0$ *pour* $p\leqq \operatorname{prof} F-1$ *ou* $p\geqq \dim F+1$,

(1.1.3) $H^p(V-\bar{D},\ F)=0$ *pour* $1\leqq p\leqq \operatorname{prof} F-2$ *ou* $p\geqq \dim F$,

et

$$\Gamma(V,\ F)\xrightarrow{\cong}\Gamma(V-\bar{D},\ F)\ \textit{si}\ \operatorname{prof} F\geqq 2.$$

(1.2) *Soit F un faisceau de Cohen-Macaulay sur un bon voisinages V tel que $k=\operatorname{prof} F=\dim F\geqq 2$ sur V. On a alors ;*

(1.2.1) $H^p(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)=0$ *pour* $p\neq 0,\ k-1$,

$\Gamma(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)\cong\Gamma(V\cap D,\ F)$,

$H^{k-1}(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)\cong H^k_{\varphi(V)|D}(V\cap D,\ F)$,

(1.2.2) $H_c^p(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)=0$ *pour* $p\neq 0,\ k-1$,

$\Gamma_c(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)\cong\Gamma_{c(V)\cap D}(V\cap D,\ F)$,

$H_c^{k-1}(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)\cong H_c^k(V\cap D,\ F)$.

(1.3) *Soit F un faisceau cohérent sur un bon voisinage V tel que* $\operatorname{prof} F=k\geqq 2$ *sur V.*

(1.3.1) *On a*

$Ext_c^p(V\cap B\,;\ \underline{H}_B^1F,\ \underline{H}_B^1\Omega^n)=0$ *pour* $p\geqq n$, *et* $Ext_c^{n-1}(V\cap B\,;\ \underline{H}_B^1F,\ \underline{H}_B^1\Omega^n)$ *est muni d'une structure d'espace* ***DFS*** *de telle sorte qu'il soit dual à l'espace* ***FS*** $\Gamma(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)$. *Si de plus* $k\geqq 3$,

$Ext_c^p(V\cap B\,;\ \underline{H}_B^1F,\ \underline{H}_B^1\Omega^n)=0$ *pour* $n-k+1\leqq p\leqq n-2$.

(1.3.2) *Si F est de Cohen-Macaulay,*

$Ext^p(V\cap B\,;\ \underline{H}_B^1F,\ \underline{H}_B^1\Omega^n)=0$ *pour* $p\leqq n-2,\ p\neq n-k$,

et $Ext^{n-k}(V\cap B\,;\ \underline{H}_B^1F,\ \underline{H}_B^1\Omega^n)$ *est muni d'une structure d'espace* ***FS*** *et cet espace est le dual de l'espace* ***DFS*** $H_c^{k-1}(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)$.

Nous allons chercher le dual de $H^{k-1}(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)$.

Soit V un bon voisinage d'un point sur B. L'espace des (p, q)-formes différentielles (resp. à coefficients distributions et) à supports dans une famille de supports Φ est noté par $\mathscr{E}^{p,q}_{\Phi}(V)$ (resp. $\mathscr{K}^{p,q}_{\Phi}(V)$). On a

$$\mathscr{E}^{p,q}_{\varphi(V)|D\cap V}(V) = \varinjlim \mathscr{E}^{p,q}_{A}(V)$$

et

$$\mathscr{K}^{p,q}_{c(V)\cap D}(V) = \varprojlim \mathscr{K}^{p,q}_{c}(A),$$

où les limites sont prises suivant l'ordonné filtrant croissant des $A \in \varphi(V)\,|D\cap V$. On peut donc munir l'espace $\mathscr{E}^{p,q}_{\varphi(V)|D\cap V}(V)$ d'une structure d'espace limite inductive stricte des espaces ***FS***, tandis que $\mathscr{K}^{p,q}_{c(V)\cap D}(V)$ est muni d'une structure d'espace limite projective des espaces ***DFS***. Pour $\omega \in \mathscr{E}^{p,q}_{\varphi(V)|D\cap V}(V)$ et $T \in \mathscr{K}^{n-p,n-q}_{c(V)\cap D}(V)$ on considère l'intégrale

$$\int_{V\cap D} \omega \wedge T.$$

Le support de $\omega \wedge T$ étant compact dans $V \cap D$, cette intégrale est bien définie et elle s'annule si T est d''-fermée et ω est au bord de d''.

Par un argument habituel [7] on voit que l'accouplement ci-dessus donne un isomorphisme de $\mathscr{K}^{n-p,n-q}_{c(V)\cap D}(V)$ sur le dual de $\mathscr{E}^{p,q}_{\varphi(V)|D\cap V}(V)$ muni de la topologie ci-dessus. Pour que l'application $d'' : \mathscr{E}^{p,n-1}_{\varphi(V)|D\cap V}(V) \longrightarrow \mathscr{E}^{p,n}_{\varphi(V)|D\cap V}(V)$ soit à l'image fermée il faut et il suffit que sa transposée ${}^t d'' = (-1)^{p+n} d'' : \mathscr{K}^{n-p,0}_{c(V)\cap D}(V) \longrightarrow \mathscr{K}^{n-p,1}_{c(V)\cap D}(V)$ soit à l'image fermée. D'autre part on sait que

$$H^1_{c(V)\cap D}(V, \Omega^{n-p}) = 0, \quad \text{(Proposition 2. 1. 7 [6])},$$

donc ${}^t d''(\mathscr{K}^{n-p,0}_{c(V)\cap D}(V))$ est fermée. Il en découle que l'espace $H^n_{\varphi(V)|D\cap V}(V, \Omega^p)$ est canoniquement muni de la topologie séparée et limite inductive d'espaces ***FS***.

Proposition 1.4. *L'espace $H^n_{\varphi(V)|D\cap V}(V, \Omega^p)$ est muni d'une topologie limite inductive d'espaces **FS** et l'espace $\Gamma_{c(V)\cap D}(V, \Omega^{n-p})$ d'une topologie limite projective d'espaces **DFS**. Elles sont séparées et le dual de $H^n_{\varphi(V)|D\cap V}(V, \Omega^p)$ est isomorphe à $\Gamma_{c(V)\cap D}(V, \Omega^{n-p})$.*

Proposition 1.5. *Soit F un faisceau de Cohen-Macaulay sur un bon voisinage V tel que* $\operatorname{prof} F = k \geqq 2$ *sur V. Alors*

$$Ext_c^p(V\cap B\,;\underline{H}_B^1F,\ \underline{H}_B^1\Omega^n)=0 \qquad pour\ p\neq n-k,\ n-1,$$

et $Ext_c^{n-k}(V\cap B\,;\ \underline{H}_B^1F,\ \underline{H}_B^1\Omega^n)$ *est muni d'une topologie limite projective d'espaces* ***DFS***. *Ce dernier est isomorphe au dual de* $H^{k-1}(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)$ *muni d'une topologie limite inductive d'espaces* ***FS***.

En effet (1.2) et la Proposition 1.4 nous fournit la démonstration pour le cas où $F=\mathcal{O}$. Il en découle par récurrence sur k si l'on remarque l'exactitude du foncteur $\underline{H}_B^1$ opérant sur les faisceaux cohérents (Proposition 2.1.6 de [6]).

2. Soient F et G des $\mathcal{O}$-Modules. On désigne $ext^p(F,\ G)$ le préfaisceau ; $U\longrightarrow Ext^p(U\,;\ F,\ G)$, U étant ouvert. De même on désigne par $ext_c^p(F,\ G)$ le précofaisceau ; $U\longrightarrow Ext_c^p(U\,;\ F,\ G)$.

Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert d'un ensemble $A\subset X$. Il existe une suite spectrale aboutissante à $Ext^\cdot(A\,;F,\ G)$ (resp. $Ext_c^\cdot(A\,;\ F,\ G)$) dont le terme initial est donné par $E_1^{p,q}=C^p(\mathcal{U},\ ext^q(F,\ G))$ (resp. ${}_cE_1^{p,q}=C_{-p}(\mathcal{U},\ ext_c^q(F,\ G))$), où $C^\cdot(\mathcal{U},\ L)$ (resp. $C_\cdot(\mathcal{U},\ M)$) est le complexe des cochaînes (resp. chaînes) de $\mathcal{U}$ à valeur dans un préfaisceau L (resp. précofaisceau M). Le préfaisceau $\mathcal{H}^q(F)=ext^q(\mathcal{O},\ F)$ n'est autre que celui $(V\longrightarrow H^q(V,\ F))$, ainsi que $\mathcal{H}_c^q(F)=ext_c^q(\mathcal{O},\ F)=(V\longrightarrow H_c^q(V,\ F))$. On a donc des suites spectraux ;

$$E_1^{p,q}=C^p(\mathcal{U},\ \mathcal{H}^q(F))\Longrightarrow H^\cdot(A,\ F) \tag{2.1}$$

et

$${}_cE_1^{p,q}=C_{-p}(\mathcal{U},\ \mathcal{H}_c^q(F))\Longrightarrow H_c^\cdot(A,\ F).$$

Soient D le domaine pseudoconvexe et B sa frontière comme dans la section 1. Soit $A=B\cap N$ une partie ouverte de B, N étant un ouvert dans la partie réguliere de X. Soient $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de B par des bons voisinages et $\mathcal{V}$ un raffinement de $\mathcal{U}\,|N$ qui consiste aussi en des bons voisinages. Soit F un faisceau cohérent sur N. On sait que l'espace $C^p(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)$ est muni d'une structure d'espace ***FS*** et l'espace $C_p(V\cap B,\ ext_c^{n-1}(\underline{H}_B^1F,\ \underline{H}_B^1\Omega^n))$ d'une structure d'espace ***DFS***. D'après (1.3.1) $C_p(V\cap B,\ ext_c^{n-1}(\underline{H}_B^1F,\ \underline{H}_B^1\Omega^n))$ est isomorphe au dual de $C^p(V\cap B,\ \underline{H}_B^1F)$.

Lemme 2.2. *Soient* $A=B\cap N$ *et* $\mathcal{V}$ *comme ci-dessus. Soit* F *un* *faisceau cohérent sur N tel que* $\operatorname{codh} F \geqq 2$. *Alors*

$$\dim_{\mathbf{C}} H^p(\mathscr{V} \cap B,\ \underline{H}^1_B F) < \infty \qquad \textit{pour } p \geqq 1,$$

et le dual de $H^p(\mathscr{V} \cap B,\ \underline{H}^1_B F)$ *est isomorphe à* $H_p(\mathscr{V} \cap B,\ ext_c^{n-1}(\underline{H}^1_B F,\ \underline{H}^1_B \Omega^n))$.

Démonstration. Il suffit à montrer la finitude. La deuxième partie du lemme suit ce qu'on a vu ci-dessus. Par un argument bien conu de H. Grauert ("*bumps lemma*") on peut montrer qu'il existe un ouvert fortement pseudoconvexe et relativement compact D' dans X et un ouvert relativement compact N' couvert par des bons voisinages tel qu'on ait $D \subset D'$, $D \cap N \subset D' \cap N'$ et que l'application $H^p(D' \cap N',\ F) \longrightarrow H^p(D \cap N,\ F)$ soit surjective pour $p \geqq 1$. Il en découle la finitude de $H^p(D \cap N,\ F)$ pour $p \geqq 1$. Puisque $\Gamma(V \cap B,\ \underline{H}^1_B F) \cong \Gamma(V \cap D,\ F)$, $V \in \mathscr{V}$, on a $H^p(\mathscr{V} \cap B,\ \underline{H}^1_B F) = H^p(\mathscr{V} \cap D,\ F) = H^p(D \cap N,\ F)$. D'où le lemme.

Lemme 2.3. *Soit F un faisceau de Cohen-Macaulay sur N tel que* $\operatorname{codh} F = \dim F = k \geqq 2$. *Alors*

$$H^p(\mathscr{V},\ \mathscr{H}^{k-1}(\underline{H}^1_B F)) = 0 \qquad \textit{pour } p \geqq 1.$$

Le dual de $H^0(\mathscr{V},\ \mathscr{H}^{k-1}(\underline{H}^1_B F))$ *est isomorphe à* $H_0(\mathscr{V},\ ext_c^{n-k}(\underline{H}^1_B F,\ \underline{H}^1_B \Omega^n))$.

En effet, on sait d'après la Proposition 1.5 que le dual de $C^0(\mathscr{V},\ \mathscr{H}^{k-1}(\underline{H}^1_B F)) = \prod_i H^{k-1}(V_i,\ \underline{H}^1_B F)$ muni d'une topologie limite inductive des espaces $\boldsymbol{FS}$ est isomorphe à $C_0(\mathscr{V},\ ext_c^{n-k}(\underline{H}^1_B F,\ \underline{H}^1_B \Omega^n))$. Donc il nous suffit à montrer que $H^p(\mathscr{V},\ \mathscr{H}^{k-1}(\underline{H}^1_B F)) = 0$ pour $p \geqq 1$. Soit $j: D \longrightarrow X$ l'inclusion naturelle. On a alors

$$H^q(V,\ j_!(F|D)) = H^q_{\varphi(V)|D \cap V}(D \cap V,\ F),$$

où $j_!$ désigne l'image directe propre. D'après la Proposition 2.1.7 de [6], $\mathscr{H}^q(j_!(F|D))$ s'annule pour $q \neq k$. On en déduit grace à (1.2.1) que $\mathscr{H}^p(\mathscr{V},\ \mathscr{H}^{k-1}(\underline{H}^1_B F)) = H^p(\mathscr{V},\ \mathscr{H}^k(j_!(F|D)) = H^{p+k}(N,\ j_!(F|D)) = H^{p+k}_{\varphi(N)|D \cap N}(D \cap N,\ F) = 0$ pour $p \geqq 1$.

De ces lemmes découle le

Corollaire 2.4. *Pour un faisceau de Cohen-Macaulay F sur N tel que* codh $F=\dim F=k\geqq 2$, *on a*

$$H_p(\mathscr{V},\ ext_c^{n-1}(\underline{H}_B^1 F,\ \underline{H}_B^1 \Omega^n))=0 \qquad \textit{pour } p\geqq k,$$

et

$$H_p(\mathscr{V},\ ext_c^{n-k}(\underline{H}_B^1 F,\ \underline{H}_B^1 \Omega^n))=0 \qquad \textit{pour } p\geqq 1.$$

$A=B\cap N$ et $\mathscr{V}$ étant toujours les mêmes que ci-dessus. Soit F un faisceau cohérent sur N tel que $k=\text{codh}\, F\geqq 2$. De la suite spectrale (2.1) on a l'isomorphisme

$$H^p(A,\ \underline{H}_B^1 F)\cong H^p(\mathscr{V}\cap B,\ \underline{H}_B^1 F) \qquad \text{pour } p\leqq k-2,$$

on peut donc munir les espaces $H^p(B,\ \underline{H}_B^1 F)$ pour $p\leqq k-2$ des structures d'espaces $\boldsymbol{FS}$, bien que ceux pour $1\leqq p\leqq k-2$ soient de dimensions finis. De la même considération on a l'isomorphisme

$$Ext_c^r(A\,;\ \underline{H}_B^1 F,\ \underline{H}_B^1 \Omega^n)\cong H_{n-r-1}(\mathscr{V}\cap B,\ ext_c^{n-1}(\underline{H}_B^1 F,\ \underline{H}_B^1 \Omega^n))$$

pour $r\geqq n-k+1$. Il en découle d'après le lemme 2.2 que le dual de $H^p(A,\ \underline{H}_B^1 F)$ pour $p\leqq k-2$ est isomorphe à $Ext_c^{n-p-1}(A\,;\ \underline{H}_B^1 F,\ \underline{H}_B^1 \Omega^n)$.

Soit maintenant F de Cohen-Macaulay. L'aboutissement de la suite spectrale ci-dessus se présent comme la suite exacte:

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} 0\longrightarrow H^{k-1}(\mathscr{V}\cap B,\ \underline{H}_B^1 F)\longrightarrow H^{k-1}(A,\ \underline{H}_B^1 F) \\ \longrightarrow H^0(\mathscr{V}\cap B,\ \mathscr{H}^{k-1}(\underline{H}_B^1 F))\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

L'espace $H^{k-1}(\mathscr{V}\cap B,\ \underline{H}_B^1 F)$ étant de dimension fini, cette suite exacte fournit $H^{k-1}(A,\ \underline{H}_B^1 F)$ d'une structure d'espace limite inductive de $\boldsymbol{FS}$. Par un argument analogue on a la suite exacte:

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} 0\longrightarrow H_0(\mathscr{V}\cap B,\ ext_c^{n-k}(\underline{H}_B^1 F,\ \underline{H}_B^1 \Omega^n))\longrightarrow \\ Ext_c^{n-k}(A\,;\ \underline{H}_B^1 F,\ \underline{H}_B^1 \Omega^n)\longrightarrow H_{k-1}(\mathscr{V}\cap B,\ ext_c^{n-1}(\underline{H}_B^1 F,\ \underline{H}_B^1 \Omega^n))\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

De plus on a

$$Ext_c^p(A\,;\ \underline{H}_B^1 F,\ \underline{H}_B^1 \Omega^n)=0 \qquad \text{pour } p\leqq n-k-1.$$

Lemmes 2.2 et 2.3 montrent que les deux côtés de la suite (2.6) sont respectivement les duaux des deux côtés à l'envers de (2.5). Cela étant ainsi, le dual de $H^{k-1}(A,\ \underline{H}_B^1 F)$ est isomorphe à $Ext_c^{n-k}(A\,;\ \underline{H}_B^1 F,\ \underline{H}_B^1 \Omega^n)$.

En résumé on a montré le

Théorème 2.7. *Soit F un faisceau cohérent sur N tel que $k=\operatorname{codh} F \geqq 2$. Alors, pour $p \leqq k-2$, le dual d'espace $H^p(A, \underline{H}_B^1 F)$ muni d'une structure d'espace* ***FS*** *est isomorphe à $Ext_c^{n-p-1}(A; \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)$. Si de plus F est de Cohen-Macaulay l'espace $H^{k-1}(A, \underline{H}_B^1 F)$ est muni d'une structure d'espace limite inductive de* ***FS*** *et son dual est $Ext_c^{n-k}(A; \underline{H}_B^1 F, \underline{H}_B^1 \Omega^n)$.*

3. Soit $A=B\cap N$ une partie ouverte de B, N étant un ouvert dans X. Soient $\mathscr{U}=(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de B par des bons voisinages U_i et $\mathscr{V}=(V_j)_{j\in J}$ un raffinement fini de $\mathscr{U}\cap N$, qui consiste en bons voisinages. On a $N=\bigcup_{j\in J} V_j$.

Dans [5] on a vu que le complexe de faisceaux $(\underline{H}_B^1 \Omega^\cdot)$ est quasi-isomorphe au $\boldsymbol{C}_B$, c'est à dire qu'il donne une résolution de $\boldsymbol{C}_B$, et que le complexe de préfaisceau $(\mathscr{H}^{n-1}(\underline{H}_B^1 \Omega^\cdot))$ est quasi-isomorphe au 0. Il en découle que

$$\boldsymbol{H}^\cdot(\mathscr{V}, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) \cong \boldsymbol{H}^\cdot(A, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) \cong H^\cdot(A, \boldsymbol{C}),$$

et

$$\boldsymbol{H}^\cdot(\mathscr{V}, \mathscr{H}^{n-1}(\underline{H}_B^1 \Omega^\cdot)) = 0.$$

On désigne $\varepsilon: A \longrightarrow B$ et $\delta: B-A \longrightarrow B$ des inclusions naturelles. Alors la suite de faisceaux suivante est exacte;

$$0 \longrightarrow \varepsilon_!(\underline{H}_B^1 \Omega^\cdot | A) \longrightarrow \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot \longrightarrow \delta_*(\underline{H}_B^1 \Omega^\cdot | B-A) \longrightarrow 0.$$

On en déduit la suite d'hypercohomologies;

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \boldsymbol{H}_c^p(A, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) \longrightarrow \boldsymbol{H}^p(B, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) \\ &\qquad \longrightarrow \boldsymbol{H}^p(B-A, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) \longrightarrow \boldsymbol{H}_c^{p+1}(A, \underline{H}_B^1 \Omega^\cdot) \longrightarrow, \end{aligned}$$

d'où résulte la suite exacte de cohomologies du couple $(B, B-A)$;

$$\begin{aligned} (3.1) \qquad &\longrightarrow H^p(B, B-A; \boldsymbol{C}) \longrightarrow H^p(B, \boldsymbol{C}) \\ &\qquad \longrightarrow H^p(B-A, \boldsymbol{C}) \longrightarrow H^{p+1}(B, B-A; \boldsymbol{C}) \longrightarrow. \end{aligned}$$

Soit $\mathscr{D}$ un précofaisceau. Soit $\tau: J \longrightarrow I$ le raffinement pour $\mathscr{V} \prec \mathscr{U}\cap N$. τ définit une application de chaînes $\tau.: C.(\mathscr{V}, \mathscr{D}) \longrightarrow C.(\mathscr{U}, \mathscr{D})$. On désigne $C.(\tau, \mathscr{D})[-1]$ le cylindre d'application $\tau.$. L'homologie relative $H.(\mathscr{U}, \mathscr{V}; \mathscr{D})$ est définie comme l'homologie de $C.(\tau, \mathscr{D})[-1]$, et elle ne dépend pas du choix de τ. On a la suite exacte d'homologies;

$$\begin{aligned} &\longrightarrow H_q(\mathscr{V}, \mathscr{D}) \longrightarrow H_q(\mathscr{U}, \mathscr{D}) \longrightarrow H_q(\mathscr{U}, \mathscr{V}; \mathscr{D}) \\ &\qquad \longrightarrow H_{q-1}(\mathscr{V}, \mathscr{D}) \longrightarrow, \ [1]. \end{aligned}$$

Soit $\mathscr{D}.$ un complexe de précofaisceaux. L'hyperhomologie relative $\boldsymbol{H}.(\mathscr{U}, \mathscr{V}; \mathscr{D}.)$ est définie comme l'homologie du bicomplexe $C_p(\tau, \mathscr{D}_q)$ $[-1]$. Le premier terme de la suite spectrale de cette hyperhomologie est $H_p(\mathscr{U}, \mathscr{V}; \mathscr{D}_q)$ et indépendant du choix de τ, donc l'hyperhomologie relative est indépendant de τ. On a la suite exacte d'hyperhomologies ;

$$\longrightarrow \boldsymbol{H}_p(\mathscr{V}, \mathscr{D}.) \longrightarrow \boldsymbol{H}_p(\mathscr{U}, \mathscr{D}.) \longrightarrow \boldsymbol{H}_p(\mathscr{U}, \mathscr{V}; \mathscr{D}.) \longrightarrow \boldsymbol{H}_{p-1}(\mathscr{V}, \mathscr{D}.) \longrightarrow.$$

On considère maintenant l'homologie du couple $(B, B-A)$.

On pose

$$\begin{aligned} {}^b\omega. &= \mathscr{H}_c^{n-1}(\underline{H}_B^1 \Omega^{n-\cdot}), \\ \lambda. &= \mathscr{H}_c^0(\underline{H}_B^1 \Omega^{n-\cdot}). \end{aligned}$$

${}^b\omega.$ est un de complexe de cofaisceaux et $\lambda.$ est un complexe de précofaisceaux. On a vu dans [6] que les suites

$$0 \longrightarrow {}^b\omega_n \longrightarrow {}^b\omega_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow {}^b\omega_0 \longrightarrow \boldsymbol{C} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \lambda_n \longrightarrow \lambda_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \lambda_0 \longrightarrow 0$$

sont exactes. Il en découle

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H}.(\mathscr{V}, {}^b\omega.) \cong H.(A, \boldsymbol{C}), \\ &\boldsymbol{H}.(\mathscr{V}, \lambda.) = 0. \end{aligned}$$

Appliquant la suite d'hyperhomologies ci-dessus au ${}^b\omega.$ on a la suite exacte;

$$\longrightarrow H_q(A, \boldsymbol{C}) \longrightarrow H_q(B, \boldsymbol{C}) \longrightarrow H_q(B, A; \boldsymbol{C}) \longrightarrow H_{q-1}(A, \boldsymbol{C}) \longrightarrow. \tag{3.2}$$

Voici la dualité d'Alexandroff et celle de Poincaré sur le bord B.

Théorème 3.3. *Soit A une partie ouverte de B. On a*;

$$\begin{aligned} &H_i(A, \boldsymbol{C}) \cong H^{2n-1-i}(B, B-A; \boldsymbol{C}) \\ &H_i(B, \boldsymbol{C}) \cong H^{2n-1-i}(B, \boldsymbol{C}) \\ &H_i(B, A; \boldsymbol{C}) \cong H^{2n-1-i}(B-A, \boldsymbol{C}). \end{aligned}$$

Démonstration. Comme on l'a vu tout à l'heure il existe des suites spectraux:

$$'E_1^{p,q} = H_{-p}(\mathscr{V}, {}^b\omega_{-q}) \Longrightarrow H.(A, \boldsymbol{C}),$$

$$E_1^{p,q}=H_c^p(\mathscr{V},\ \underline{H}_B^1\Omega^q)\Longrightarrow H.(B,\ B-A;\ \boldsymbol{C}),$$
$$F_1^{p,q}=H_{-p}(\mathscr{V},\ \lambda_{-q})\Longrightarrow \boldsymbol{H}.(V,\ \lambda.)\cong 0.$$

On verra d'abord la dernière suite spectrale. Puisque $F_1^{p,q}=0$ pour $p\neq 0$ (Corollaire 2.4) on a que $F_2^{p,q}=0$ pour tout p et q. D'autre part d'après (2.6) on voit que

$$E_1^{p,q}\cong {}'E_1^{p+1-n,q-n} \qquad \text{pour } p\neq n-1,$$

et que la suite

$$0\longrightarrow F_1^{0,q-n}\longrightarrow E_1^{n-1,q}\longrightarrow {}'E_1^{0,q-n}\longrightarrow 0$$

est exacte. Donc on a

$$E_2^{p,q}\cong {}'E_2^{p+1-n,q-n} \qquad \text{pour tout } p \text{ et } q.$$

Il en résulte que

$$H_i(A,\ \boldsymbol{C})\cong H^{2n-1-i}(B,\ B-A\,;\ \boldsymbol{C}).$$

En particulier, prennant $A=B$, on a

$$H_i(B,\ \boldsymbol{C})\cong H^{2n-1-i}(B,\ \boldsymbol{C}).$$

De la suite exacte (3.1) et (3.2) on a

$$H_i(B,\ A;\ \boldsymbol{C})\cong H^{2n-1-i}(B-A,\ \boldsymbol{C}).$$

Proposition 3.4. *Il y a un isomorphisme dual*

$$H^i(A,\ \boldsymbol{C})'\cong H^{2n-1-i}(B,\ B-A\,;\ \boldsymbol{C}).$$

En effet la Proposition découle des suites spectrales;

$${}_cE_1^{p,q}=H_c^p(A,\ \underline{H}_B^1\Omega^q)\Longrightarrow H^\cdot(B,\ B-A\,;\ \boldsymbol{C}),$$
$$E_1^{r,s}=H^r(A,\ \underline{H}_B^1\Omega^s)\Longrightarrow H^\cdot(A,\ C),$$

et la dualité du Théorème 2.7;

$$H_c^{n-p-1}(A,\ \underline{H}_B^1\Omega^{n-q})'\cong H^p(A,\ \underline{H}_B^1\Omega^q).$$

Nous passons maintenant au *théorème de dualite de Lefschetz*

$$H_i(\bar{D},\ B\,;\ \boldsymbol{C})\cong H^{2n-i}(\bar{D},\ \boldsymbol{C})$$

que nous ne pouvions montrer dans [6] que pour $i\neq n,\ n+1$.

Supposons que l'espace X est une *variété complexe* de dimension n. Soient $j: D\longrightarrow X$ et $i: B\longrightarrow X$ les inclusions naturelles. Soit $\mathscr{U}=\{V_i\}$ un recouvrement de $\bar{D}$ par des ouverts de Stein tel que V_i soit un bon voisinage si $V_i \cap B \neq \phi$. On pose

$$\mathscr{U}' = \{V_i ;\ V_i \cap B \neq \phi\}.$$

On sait d'après 4.2 [6] que, pour tout faisceau localement libre F, $\mathscr{H}_c^q(j_*(F|D)) = 0$ pour $q \neq n$ sur tout nerf de $\mathscr{U}$ qui est contenu dans D et $\mathscr{H}_c^q(j_*(F|D)) = 0$ pour $q \neq 0$ sur tout nerf de $\mathscr{U}'$. Par un argument de la suite spectrale on a

$$H_{n-p}(\mathscr{U},\ \mathscr{H}_c^n(j_*(F|D))) \cong H^p(D,\ F) \quad \text{pour } p \geqq 1,$$

et regardant l'aboutissement de la suite spectrale on voit que la suite ;

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_0(\mathscr{U},\ \mathscr{H}_c^0(j_*(F|D))) &\longrightarrow \Gamma(D,\ F) \\ &\longrightarrow H_n(\mathscr{U},\ \mathscr{H}_c^n(j_*(F|D))) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

est exacte. On remarque qu'il y a des isomorphismes

$$H_c^0(V,\ j^*(F|D)) \cong H_{c(V) \cap D}^0(V \cap D,\ F) \cong H_c^0(V \cap B,\ \underline{H}_B^1 F)$$

pour tout $V \in \mathscr{U}'$, donc

$$\mathscr{H}_c^0(j_*(F|D)) \cong \mathscr{H}_c^0(\underline{H}_B^1 F)$$

sur les nerfs de $\mathscr{U}'$(1.2.2). D'où et d'après le Corollaire 2.4 on a

$$H_p(\mathscr{U}',\ \mathscr{H}_c^0(j_*(F|\mathrm{D}))) = 0 \quad \text{pour } p \geqq 1.$$

On définit les complexes :

$$\begin{aligned} {}^c\omega. &= \mathscr{H}_c^n(j_*(\Omega^{n-\cdot}|D)), \\ {}^c\lambda. &= \mathscr{H}_c^0(j_*(\Omega^{n-\cdot}|D)). \end{aligned}$$

On a alors les suites spectrales ;

$$\begin{aligned} {}_cE_1^{p,q} &= H_{-p}(\mathscr{U},\ {}^c\omega_{-q}) \Longrightarrow H.(\bar{D},\ B\ ;\ \boldsymbol{C}), \\ E_1^{r,s} &= H^r(D,\ \Omega^s) \Longrightarrow H^{\cdot}(\bar{D},\ \boldsymbol{C}), \end{aligned}$$

et

$${}_cF_1^{p,q} = H_{-p}(\mathscr{U}',\ {}^c\lambda_{-q}) \Longrightarrow \boldsymbol{H}.(\mathscr{U}',\ {}^c\lambda.) \cong 0,$$

où le dernier isomorphisme est la conséquence du quasi-isomorphisme

$${}^c\lambda. \cong \lambda. \cong 0.$$

Des discussions faites plus haut il résulte que

$$\begin{aligned} &{}_cF_1^{p,q} = 0 \qquad p \neq 0, \\ &{}_cE_1^{p,q} \cong E_1^{p+n,q+n} \qquad p \neq -n, \end{aligned}$$

et que la suite

$$0 \longrightarrow {}_cF_1^{0,q} \longrightarrow E_1^{0,n+q} \longrightarrow {}_cE_1^{-n,q} \longrightarrow 0$$

est exacte. Il en découle que

$$ {}_cE_2^{p,q} \cong E_2^{p+n,q+n} \qquad \text{pour tous } p,\ q, $$

et

$$ H_i(\bar{D},\ B;\ \boldsymbol{C}) \cong H^{2n-i}(\bar{D},\ \boldsymbol{C}). $$

Bibliographie

[1] Andreotti, A. and Banica, C., Relative duality on complex spaces, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **20**-**9** (1975), 981-1181.

[2] Andreotti, A. et Grauert, H., Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 193-259.

[3] Cartan, H. and Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[4] Grothendieck, A., Eléments de Géométrie Algébrique III, Chapitres préliminaires, *Publ. I. H. E. S.*, **11**, 1961.

[5] Kori, T., Cohomologie de de Rham au bord d'un domaine fortement pseudoconvexe, *Tokyo J. Math.*, **3**, (1980), 37-74.

[6] ———, Théorème de dualité de type Serre et de type Poincaré-Lefschetz sur la frontière fortement pseudoconvexe, *Tokyo J. Math.*, **5**, (1982), 299-327.

[7] Serre, J-P., Un théorème de dualité, *Comm. Math. Helv.*, **29**, (1955), 9-26.