Publ. RIMS, Kyoto Univ.
21 (1985), 593–616

Régularité des Mesures et Perturbations Stochastiques de Champs de Vecteurs sur des Espaces de Dimension Infinie

par

Bernard GAVEAU* et Jean-Marc MOULINIER

Introduction

C'est l'étude de certains systèmes quantiques de dimension infinie qui conduit au problème des équations d'évolution en dimension infinie, soit sur des espaces de Hilbert, soit sur des variétés plus compliquées; pour cette raison, un modèle de quantification de champ de Yang Mills avec cut-off a été développé dans [1] et [7]; de même, des diffusions sur l'espace des lacets ont été étudiées dans [4], ainsi que sur les groupes de dimension infinie [8]. Cependant, dans tous ces cas la diffusion étudiée était du type $dX_t = u(X_t)dB_t$ où dB_t est un bruit blanc de dimension infinie et u est un opérateur de Hilbert Schmidt, l'opérateur du $2n^d$ ordre associé généralisant directement le laplacien de dimension finie. Le grave défaut de ces diffusions est que leur probabilité de transition sont singulières les unes par rapport aux autres lorsque le temps varie de sorte qu'il est difficile de généraliser à ces opérateurs, les méthodes d'analyse classique qui reposent en général sur l'existence de noyaux, donc sur l'absolue continuité des solutions fondamentales. C'est en partie pour cette raison que nous abandonnons ce point de vue ici.

Par ailleurs, la théorie standard du champ libre sur l'espace de Fock, certains systèmes de mécanique statistique et le calcul des variations stochastiques donnent une autre classe d'équations elliptiques, celles d'Ornstein Uhlenbeck et leur généralisation. Pour ces équations, on sait d'avance qu'elles ont une mesure de probabilité invariante (en fait, c'est pour cela qu'elles sont construites), contrairement aux cas mentionnés plus haut. De plus dans [3], l'absolue

Communiqué par S. Matsuura, le 26 octobre, 1984.
* Université Pierre et Marie Curie, Mathématiques, Tour 45–46 5ème étage, 4, Place Jussieu 75230 PARIS CEDEX 05, France.

continuité des probabilités de transition a été démontrée et généralisée à d'autres opérateurs particuliers, même pseudodifférentiels.

L'objet de ce travail est de reprendre brièvement dans une première partie les résultats de [3] (voir aussi [10]) ce qui est l'objet du 1er chapitre, puis d'étudier *la régularité* des probabilités de transition d'une perturbation de l'équation de Langevin par un champ de vecteurs. La méthode consistera à démontrer d'abord une estimée à priori très générale en dimension infinie fournissant une régularité (2ème chapitre), puis de vérifier cette estimée a priori dans les situations que nous considérons en utilisant le calcul des variations stochastiques de Malliavin [12], [13] généralisé à une situation de dimension infinie (3ème chapitre). Nous examinerons aussi la perturbation d'un champ de vecteurs par un processus d'Ornstein Uhlenbeck dans un espace de Hilbert (4ème chapitre). Une publication ultérieure étudiera celle d'un champ de vecteurs par un mouvement brownien sur un produit infini de cercles (5ème chapitre).

Dans [15], le second auteur étudiera les perturbations d'un processus d'Ornstein Uhlenbeck dans son symbole principal ce qui pose alors d'abord un problème d'absolue continuité et nécessite une méthode plus compliquée. Nous n'avons pas cherché ici les résultats optimaux et il est très vraisemblable que l'on peut affaiblir beaucoup les hypothèses très fortes faites sur les champs de vecteurs et les potentiels.

Table des matières

I. L'Opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck dans l'espace de Hilbert

1. Notations

H désignera un espace de Hilbert séparable, $u: H \to H$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt, symétrique défini positif fixé une fois pour toutes dans ce travail. Notons e_n une base orthonormée de H diagonalisant u et posons

$$\begin{aligned} &u(e_n) = \lambda_n^{-1/2} e_n \\ &\sum \lambda_n^{-1} < +\infty \, . \end{aligned} \tag{1–1}$$

La décomposition d'un vecteur x de H sur la base (e_n) s'écrit $x = \sum x_n e_n$. L'image par u de la probabilité cylindrique gaussienne de H est une probabilité de Radon sur H, notée $\gamma(dx)$ dont l'expression dans le système de coordonnées (x_n) est

$$\begin{aligned} \gamma(dx) &= \prod_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(dx_n) \\ \gamma_n(dx_n) &= \left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\lambda_n x_n^2}{2}\right) dx_n. \end{aligned} \tag{1–2}$$

On notera encore.

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\ L &= \sum_n L_n \end{aligned} \tag{1–3}$$

L est appelé l'opérateur d'Ornstein Uhlenbeck. Sa propriété fondamentale est d'être autoadjoint par rapport à $\gamma(dx)$

$$\int u(x)(Lv)(x)\gamma(dx) = \int (Lu)(x)v(x)\gamma(dx)$$

propriété qui résulte trivialement de la propriété analogue en dimension 1.

L'opérateur L_n est générateur infinitésimal du processus d'Ornstein–Uhlenbeck à 1 dimension

$$\xi_n(t)=e^{-\frac{1}{2}\lambda_n t}\xi_n^{(0)}+\int_0^t e^{-\frac{\lambda_n}{2}(t-s)}\,db_n(s) \tag{1-4}$$

où $\xi_n^{(0)}$ est le point de départ à $t=0$ et $b_n(s)$ est un mouvement brownien, les $b_n(s)$ étant deux à deux indépendants.

Le processus d'Ornstein Uhlenbeck de H de générateur L est

$$\xi(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\xi_n(t)e_n. \tag{1-4)'$$

On vérifie aisément que $E(\|\xi(t)\|^2)=\sum_n E(\xi_n(t)^2)$ reste fini si $\xi^{(0)}=\sum_n \xi_n^{(0)}e_n$ est dans H.

2. Noyau de la chaleur de L

Théorème 1. *Le noyau de la chaleur de L, solution fondamentale de l'équation*

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial Q_t(x_0, dx)}{\partial t}=L_{x_0}Q_t(x_0, dx)=L_x^*Q_t(x_0, dx)\\ Q_t(x_0, dx)\longrightarrow\delta(x-x_0)\ si\ t\longrightarrow 0^+\end{array}\right. \tag{1-5}$$

est absolument continu par rapport à $\gamma(dx)$ et définit un noyau

$$q_t(x_0, x)=\frac{Q_t(x_0, dx)}{\gamma(dx)}.$$

Preuve. Notons $Q_t^{(n)}(x_{0,n}, dx_n)$ le noyau de la chaleur de L_n qui satisfait donc

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_t^{(n)}(x_{0,n}, dx_n)=L_{n,x_0}Q_t^{(n)}(x_{0,n}, dx_n)=L_{n,x}^*Q_t^{(n)}(x_{0,n}, dx_n)$$
$$Q_t^{(n)}(x_{0,n}, dx_n)\longrightarrow\delta(x_n-x_{0,n})\ si\ t\longrightarrow 0^+.$$

Alors il est clair que

$$Q_t(x_0, dx)=\prod_n Q_t^{(n)}(x_{0,n}, dx_n).$$

Mais il est connu que

$$\begin{aligned}Q_t^{(n)}(x_{0,n}, dx_n)&=\left(\frac{\lambda_n}{2\pi(1-e^{-\lambda_n t})}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{\lambda_n}{4\mathrm{sh}\left(\frac{\lambda_n t}{2}\right)}\left((x_n^2+x_{0,n}^2)\mathrm{ch}\left(\frac{\lambda_n t}{2}\right)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-2x_n\cdot x_{0,n}\right)-\frac{\lambda_n}{4}(x_n^2-x_{0,n}^2)\right]dx_n\\&=q_t^{(n)}(x_{0,n}, x_n)\gamma_n(dx_n)\end{aligned}$$

avec

$$(1\text{-}6)\qquad q_t^{(n)}(x_{0,n}, x_n) = (1-e^{-\lambda_n t})^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left[\frac{\lambda_n}{2\mathrm{sh}\left(\frac{\lambda_n t}{2}\right)} x_{0,n}x_n + \frac{\lambda_n}{4}(x_n^2 + x_{0,n}^2)\left(1-\coth\left(\frac{\lambda_n t}{2}\right)\right)\right]$$

Il est alors clair que le produit infini $\prod_n q_t^{(n)}(n_{0,n}, x_n)$ est convergent pour tout $t>0$, tout x_0, x dans H et il définit une fonction $q_t(x_0, x)$ sur $\mathbb{R}^+ \times H \times H$ symétrique, intégrable par rapport à la probabilité de Gauss $\gamma(dx)$ définie par (2).

Remarque. Ce théorème a été démontré dans [3] et diverses applications y ont été données. Il est faux pour les opérateurs elliptiques usuels dans H: par exemple pour $\sum \lambda_n^2 \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, les noyaux de la chaleur sont des gaussiennes de H images par l'opérateur $\sqrt{t}\, u$ de la probabilité cylindrique de Gauss de H et dont elles sont mutuellement singulières lorsque t varie. D'autres exemples voisins du théorème 1 ont été donnés dans [3] pour des opérateurs différents de l'opérateur d'Ornstein Uhlenbeck. Un autre exemple sera considéré plus loin.

3. Opérateurs gradient et divergence

a) Notons d l'opérateur de différentielle totale agissant sur les fonctions sur H, ie

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .$$

Cette notation est, pour l'instant, formelle. Elle définit df comme une 1-forme sur H. De façon générale, une 1-forme sur H est un symbole

$$\alpha = \sum \alpha_n dx_n$$

où les α_n sont des fonctions sur H.

b) Notons δ_n l'adjoint de $\frac{\partial}{\partial x_n}$ par rapport à $\gamma_n(dx_n)$

$$(1\text{-}7)\qquad \delta_n = \frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda_n x_n .$$

Alors $L_n = \frac{1}{2}\delta_n \frac{\partial}{\partial x_n}$.

On peut noter δ l'adjoint formel de d par rapport à $\gamma(dx)$: il est tel que si α est une 1-forme et f une fonction, on ait

$$\int (\alpha|df)\gamma(dx) = \int \delta\alpha \cdot f\gamma(dx)$$

où on a définit le produit scalaire ponctuel de deux 1-formes α et β par

$$(\alpha|\beta) = \sum \alpha_n(x)\beta_n(x) \cdot \text{ Alors}$$

$$L = \frac{1}{2}\delta d$$

(voir [6], [9] et [16] où ce point de vue est systématiquement utilisé pour l'analyse de la régularité ainsi que [18] et [19]).

4. Propriétés spectrales des opérateurs L_n et L

Il sera important pour la suite d'obtenir la décomposition spectrale de L. Or celle-ci est évident car L est somme d'opérateurs deux à deux commutants dont on connaît les fonctions propres, chaque L_n a en effet pour fonction propre des polynômes d'Hermite $h_n(x_n)$ et on a

$$(L_n h_p)(x_n) = -\frac{1}{2} p\lambda_n h_p(x_n). \tag{1–8}$$

Par suite $L = \sum L_n$ a pour fonctions propres les produits

$$\prod_{h=1}^{n} h_{p_k}(x_{n_k}) \tag{1–9}$$

avec les valeurs propres $-\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} \lambda_{n_k} p_k$ pour toutes suites finies d'entiers $\geqslant 0$ $(n_k)_{k=1\cdots r}$ deux à deux distincts et $(p_k)_{k=1\cdots r}$. En particulier, le noyau de L est réduit à 1. On sait aussi depuis Wiener, que les produits finis (9) forment une base orthonormée de $L^2(H, \gamma)$ qui est l'espace de Fock classique associé au champ libre défini par les oscillateurs de fréquence λ_n.

En fait nous n'aurons besoin que des propriétés spectrales de $L^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} L_k$ pour tout $n < +\infty$. Notons H_n le sous espace de H engendré par $e_1 \cdots e_n$; $x_1 \cdots x_n$ sont les coordonnées de H_n. Alors les fonctions propres de $L^2(H_n, \gamma^{(n)})$

$$\left(\gamma^{(n)}(dx) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda_i x_i^2}{2}\right) dx_i\right)$$

sont du type

$$u_p(x) = \prod_{k=1}^{n} h_{p_k}^{(k)}(x_k) \tag{1–10}$$

où $p=(p_1\cdots p_n)\in N^n$ et $h^{(i)}_{p_i}(x_i)$ est le polynôme d'Hermite normalisé pour $\gamma_i(dx_i)$. On remarquera alors que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} h^{(k)}_{p_k}(x_k)=\sqrt{\lambda_k p_k}\, h^{(k)}_{p_k-1}(x_k) \tag{1-11}$$

$$\delta_k h^{(k)}_{p_k}(x_k)=\sqrt{\lambda_k(p_k+1)}\, h^{(k)}_{p_k+1}(x_k) \tag{1-12}$$

et en combinant (1–11) et (1–12)

$$L_k h^{(k)}_{p_k}(x_k)=\frac{1}{2}\left(\delta_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)h^{(k)}_{p_k}(x_k)=\frac{1}{2}\lambda_k p_k h^{(k)}_{p_k}(x_k).$$

Alors compte tenu de (1–10), on a

$$(L^{(n)}u_p)(x)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k p_k\right)u_p(x). \tag{1-13}$$

5. Une propriété de majoration du noyau $q_t(x_0, x)$

Notons ici une propriété importante du noyau $q_t(x_0, x)$.

Lemma 1. *Pour $\cdot x_0$ dans H fixé, et $t>0$ fixé, on a*

$$\int (q_t(x_0, x))^\alpha \gamma(dx)<+\infty$$

pour tout $1\leqslant\alpha<+\infty$.

Preuve. D'après le théorème 1, $q_t(x_0, x)=\prod_{n\geqslant 1} q^{(n)}_t(x_{0,n}, x_n)$. On doit donc étudier

$$\prod_{n\geqslant 1}\int (q^{(n)}_t(x_{0,n}, x_n))^\alpha \gamma_n(dx_n)$$

Mais on a

$$\int q^{(n)}_t(x_{0,n}, x_n)^\alpha \gamma_n(dx_n)=(1-e^{-\lambda_n t})^{-\frac{\alpha}{2}}\int\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{\lambda_n\alpha}{2sh\frac{\lambda_n t}{2}}\, x_{0n}x_n\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha\lambda_n}{4}\left(1-\coth\frac{\lambda_n t}{2}\right)(x_n^2+x_{0,n}^2)-\frac{\lambda_n}{2}x_n^2\right]dx_n.$$

L'intégrale est une intégrale gaussienne qui vaut

$$\exp\left[\frac{\alpha\lambda_n}{4}\left(1-\coth\frac{\lambda_n t}{2}\right)x_{0,n}^2\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda_n x_{0,n}^2\alpha^2}{8\left[1-\frac{\alpha}{2}\left(1-\coth\frac{\lambda_n t}{2}\right)\right]\mathrm{sh}^2\frac{\lambda_n t}{2}}\right]\left[1-\frac{\alpha}{2}\left(1-\coth\frac{\lambda_n t}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

et cela est évidemment le terme général d'un produit infini convergent.

Remarque. Si $x_{0,n}$ est tel que $\sum\lambda_n x_{0,n}^2 < +\infty$ (donc x_0 est dans le domaine de u^{-1}), alors on vérifie que

Lemma 1′. *Pour tout* $t>0$, *tout* $x_0 \in Dom\ u^{-1}$, $\sup_{x\in H} q_t(x_0, x) < +\infty$.

Démonstration. Pour chaque n on calcule le maximum en x_n de l'exposant de l'exponentielle dans $q_t^{(n)}(x_{0,n}, x_n)$ atteint pour

$$x_n = (1-e^{-\lambda_n t})\frac{x_{0,n}e^{\lambda_n t}}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{\lambda_n t}{2}}$$

On voit alors que $\prod_n \max_{x_n} q_t^{(n)}(x_{0,n}, x_n)$ converge si et seulement si $\sum\lambda_n x_{0,n}^2 < +\infty$.

III. Régularité des mesures dans H par rapport à la mesure gaussienne γ

1. Espaces de fonctions régulières

Notons $\mathscr{H}^1(\gamma)$ l'espace des fonctions $f\in L^2(H, \gamma)$ telles que

$$\int_H \|df\|^2\gamma(dx) \text{ soit fini}$$

ou:

$$\sum_n \int_H \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|^2 \gamma(dx) < +\infty .$$

On vérifie facilement:

Lemme 1. *L'espace* $\mathscr{H}^1(\gamma)$ *avec la norme* $\|f\|_{L^2} + \|df\|_{L^2}$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy; alors elle converge vers f dans $L^2(H, \gamma)$. De plus pour presque tout $x_{k+1},\dots, x_{k+p},\dots$ fixé la suite des gradients de $(x_l)_{l=1\cdots k}\to f_n(x_1\cdots x_k x_{k+1}\cdots x_{k+p}\cdots)$ est une suite convergente vers le gradient de $(x_l)_{l=1\cdots k}\to f(x_1\cdots x_k x_{k+1}\cdots x_{k+p}\cdots)$ d'après les propriétés bien connues des espaces de Sobolev de dimension finie, ce qui montre que $\|df\|_{L^2}^2 < +\infty$. Voir aussi [14] pour certains espaces de fonctions sur l'espace de Wiener et [17], [19].

2. Critère de régularité des mesures de probabilité sur H

Théorème 2. *Soit* $\nu(dx)$ *une mesure de probabilité sur* H. *Supposons* *que pour tout $k \geqslant 1$, il existe une constante C_k telle que pour toute fonction cylindrique φ sur H, régulière, on ait*

$$\left| \int (\delta_k \varphi)(x) \nu(dx) \right| \leqslant C_k \|\varphi\|_{L^2(\gamma)}$$

et que de plus $\sum_{k \geqslant 1} C_k^2 < +\infty$. Alors $\nu(dx)$ est absolument continue par rapport à $\gamma(dx)$ et la densité $q(x) = \dfrac{\nu(dx)}{\gamma(dx)}$ est dans l'espace $\mathscr{H}^1(\gamma)$.

Démonstration. Soit H_n le sous-espace de dimension n engendré par les vecteurs $e_1 \cdots e_n$ et $\nu^{(n)} = P_n^* \nu$ et $\gamma^{(n)} = P_n^* \gamma$ les images de ν et γ sur le sous-espace H_n par le projecteur $P_n \colon H \to H_n$. Appliquons l'estimée du théorème 2 à des fonctions φ_n ne dépendant que de $x_1 \cdots x_n$; il existe donc $\alpha_k^{(n)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ qui sont $L^2(H_n, \gamma^{(n)})$ avec $\|\alpha_k^{(n)}\|_{L^2} \leqslant C_k$ et

$$\int \delta_k \varphi_n \nu^{(n)}(dx) = \int \varphi_n \alpha_k^{(n)} \gamma^{(n)}(dx).$$

Soit $L^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} L_k$ l'opérateur d'Ornstein Uhlenbeck sur H_n pour $\gamma^{(n)}$. Considérons une fonction $q^{(n)}$ définie par

$$L^{(n)} q^{(n)} = \delta^{(n)} \alpha^{(n)} \tag{2–2}$$

où $\delta^{(n)} \alpha^{(n)} = \sum_{h=1}^{n} \delta_k \alpha_k^{(n)}$ est la divergence de la 1-forme $\alpha^{(n)} = \sum_{h=1}^{n} \alpha_k^{(n)} dx_k$; $q^{(n)}$ n'est pas totalement définie aussi car $L^{(n)}$ a un noyau. Comme celui-ci est engendrée par 1, on imposera de plus que $\int q^{(n)} \gamma^{(n)}(dx) = 1$ ce qui définit totalement $q^{(n)}$ par

$$q^{(n)} = 1 + (L^{(n)})^{-1} (\delta^{(n)} \alpha^{(n)}) \tag{2–3}$$

où $(L^{(n)})^{-1}$ est l'inverse de $L^{(n)}$ à valeur l'orthogonal de 1 dans $L^2(H_n, \gamma^{(n)})$. Maintenant cherchons $q^{(n)}$ et en particulier $\|q^{(n)}\|_{L^2}$ et $\|dq^{(n)}\|_{L^2}$. On a vu au I.4, qu'une base orthonormale de $L^2(H_n, \gamma^{(n)})$ était donnée par les $\prod_{k=1}^{n} h_{p_k}^{(k)}(x_k) = u_p$ où $p = (p_1 \cdots p_n)$. Ecrivons

$$\alpha_k^{(n)} = \sum_p \alpha_{k,p}^{(n)} u_p \qquad \sum_p |\alpha_{k,p}^{(n)}|^2 \leqslant C_k^2. \tag{2–4}$$

Alors par le I.4, on a

$$(L^n)^{-1} \delta^{(n)} \alpha^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_p \alpha_{k,p}^{(n)} (L^{(n)})^{-1} \delta_k u_p. \tag{2–5}$$

Mais la formule (1–12) donne $\delta_k u_p = \sqrt{p_k + 1} \sqrt{\lambda_k}\, u_{p'}$, avec

$$p' = (p_1, \dots, p_{k-1}, p_k + 1, p_{k+1}, \dots, p_n)$$

la formule (1–13) donne

$$(L^{(n)})^{-1} u_{p'} = -\frac{2}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k p'_k} u_{p'}$$

d'où

$$(L^{(n)})^{-1} \delta^{(k)} u_p = y_{p',k} u_{p'} \qquad |y_{p',k}| \leqslant \frac{2}{\sqrt{\lambda_k}}. \tag{2–6}$$

Alors pour chaque k, il existe un p'' multiindice tel que

$$(L^{(n)})^{-1} \delta^{(n)} \alpha^{(n)} = \sum_p u_p \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,p''}^{(n)} y_{p',k} \tag{2–7}$$

et par conséquent

$$\|L^{(n)-1} \delta^{(n)} \alpha^{(n)}\|_{L^2}^2 = \sum_p |\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,p''}^{(n)} y_{p',k}|^2 \leqslant \sum_p (\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k,p''}^{(n)})^2)(\sum_{k=1}^{n} y_{p,k}^2).$$

Mais par (6), on a

$$\sum_{k=1}^{n} y_{p,k}^2 \leqslant 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \leqslant 4 \|u\|_{HS}^2$$

où $\|u\|_{HS}$ est la norme de Hilbert Schmidt de u et de plus par hypothèse sur les C_k^2

$$\sum_p \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k,p''}^{(n)})^2 \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_p (\alpha_{k,p}^{(n)})^2 \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} C_k^2 \leqslant +\infty.$$

Ainsi il existe une constante K indépendante de n avec

$$\|q^{(n)}\|_{L^2} \leqslant K. \tag{2–8}$$

Mais l'espace H_n étant de dimension finie, on peut toujours régulariser $\nu^{(n)}$ par un procédé standard, selon $\nu_\varepsilon^{(n)}$ et écrire $\nu_\varepsilon^{(n)} = \rho_\varepsilon^{(n)} \gamma^{(n)}(dx)$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{H_n} (\delta_k \varphi_n)(x) \nu(dx) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{H_n} (\delta_k \varphi_n)(x) \rho_\varepsilon^{(n)}(x) \gamma^{(n)}(dx) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \varphi_n(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \rho_\varepsilon^{(n)}(x) \gamma^{(n)}(dx) \end{aligned}$$

et on a trivialement

$$\rho_\varepsilon^{(n)} = 1 + (L^{(n)})^{-1}(\delta^{(n)} d\rho_\varepsilon^{(n)}).$$

Mais au sens des distributions $d\rho_\varepsilon^{(n)}$ tend vers la forme $\alpha^{(n)}$ et donc $\rho_\varepsilon^{(n)}$ tend vers $q^{(n)}$, d'où

$$\nu^{(n)}(dx) = q^{(n)}(x)\gamma^{(n)}(dx). \tag{2–9}$$

Mais alors il est clair que si $m > n$, on a

$$q^{(n)}(x_1 \cdots x_n) = \int_{R^{m-n}} q^{(m)}(x_1 \cdots x_n x_{n+1} \cdots x_m) \prod_{i=n+1}^{m} \gamma_i(dx^i) \tag{2–10}$$

ce qui signifie que la suite $q^{(n)}$ considérée comme suite de $L^2(H, \gamma)$ est une martingale qui, par (8) est uniformément bornée dans L^2, donc qui converge vers $q(x)$ dans L^2. Mais alors clairement $\nu(dx)$ et $q(x)\ \gamma\ (dx)$ sont deux mesures coïncidant sur les fonctions test cylindriques donc elles coïncident

$$\nu(dx) = q(x)\gamma(dx).$$

De plus le $\alpha_k^{(n)}$ introduit au début de la preuve est exactement $\dfrac{\partial q^{(n)}}{\partial x_k}$ et sa norme L^2 est donc $\leqslant C_k$. La suite $q^{(n)}$ est dans un borné de l'espace $\mathscr{H}^1(\gamma)$ puisque $\|dq^{(n)}\|_{L^2(\gamma)} \leqslant (\sum_{k=1}^{+\infty} C_k^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty$. Donc, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente $q^{(l)}$ dans $\mathscr{H}^1(\gamma)$. Mais comme $q^{(n)}$ converge vers q dans $L^2(\gamma)$, $q^{(l)}$ converge faiblement vers q dans $\mathscr{H}^1(\gamma)$ et donc q est dans $\mathscr{H}^1(\gamma)$.

III. Calcul des variations stochastiques sur les processus d'Ornstein Uhlenbeck

1. Produit infini de calculs de variations stochastiques

Nous aurons besoin dans les IV et V d'une adaptation du calcul des variations stochastiques au cas d'une infinité de mouvements browniens indépendants $(b_n(t))_{n\in N}$ qui servent à construire les trajectoires (1–4) du processus d'Ornstein–Uhlenbeck sur H. Soit (Ω^0, P^0) l'espace de probabilité du mouvement brownien à 1 dimension; on note

$$\begin{aligned} \Omega &= \prod_{i=1}^{+\infty} \Omega^0 \ni \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \\ P &= \bigotimes_{i=1}^{+\infty} P^0 \end{aligned} \tag{3–1}$$

On définit alors sur (Ω, P) un processus d'Ornstein–Uhlenbeck (à ne pas confondre avec celui du I) qui laisse invariante la mesure P: ce processus consiste à se donner une infinité dénombrable de processus d'Ornstein–Uhlenbeck sur chaque Ω^0 laissant invariant P^0 tels qu'ils ont été construits par Malliavin dans [12]. On notera τ le temps de ce processus d'Ornstein Uhlenbeck à valeur Ω. La variation infinitésimale pendant le temps $\delta\tau$, de l'accroissement de la trajectoire $\omega=(\omega_1\cdots\omega_n\cdots)$ de $(b_{n,\omega_n}(t))_{n\in N}$ pendant l'intervalle dt est donc

$$d_t b_{n,\omega_n+\delta\omega_n} - d_t b_{n,\omega_n} = \sqrt{dt}\,\beta_{n,\delta\omega_n} - \frac{1}{2}(d_t b_{n,\omega_n})\delta\tau \tag{3-2}$$

où $\beta_{n,\delta\omega_n}$ est une variable gaussienne indépendante de (Ω, P) de variance $\sqrt{\delta\tau}$.

Nous noterons $\mathscr{L}=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathscr{L}_n$ l'opérateur d'Ornstein–Uhlenbeck, générateur du processus précédent. Chaque $\mathscr{L}_n$ est un exemplaire de l'opérateur d'Ornstein Uhlenbeck de Malliavin agissant sur la variable $\omega_n\in\Omega^0$. On aura pour toute fonctionnelle $F\colon \Omega\to\mathbb{C}$ dans le domaine de $\mathscr{L}$

$$(\mathscr{L}F)\,(\omega)=\lim_{\delta\tau\to 0}\frac{E'(F(\omega+\delta\omega))-F(\omega)}{\delta\tau} \tag{3-3}$$

où E' est l'espérance mathématique sur les variables $\delta\omega_i$ indépendantes de ω.

On définira de même le gradient stochastique que nous noterons $(DF)(\omega)$. En particulier, on a

$$\|(DF)(\omega)\|^2=\lim_{\delta\tau\to 0}\frac{E'[(F(\omega+\delta\omega)-F(\omega)-(\mathscr{L}F)(\omega)\delta\tau)^2]}{\delta\tau} \tag{3-4}$$

lorsque cela a un sens. La formule d'Itô permet de montrer que

$$\mathscr{L}(FG)=F\cdot\mathscr{L}(G)+G\mathscr{L}(F)+(DF|DG). \tag{3-5}$$

De même si $F_1\cdots F_n$ sont des variables aléatoires à valeurs $\mathbb{C}$ et si $f\colon \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ est une fonction dérivable, on a

$$D(f(F_1,\dots,F_n))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}DF_i \tag{3-6}$$

2. Variations stochastiques de la trajectoire du processus d'Ornstein-Uhlenbeck $\xi(t)$

Les formules (1–4) et (1–4′) définissent une application

$$\Phi_t\colon H\times\Omega\longrightarrow H$$

$$\Phi_t(x_0,\omega)=\sum_{n=1}^{+\infty}\xi_{n,\omega_n}(t)e_n \qquad \xi_{n,\omega_n}(0)=x_{0,n}.$$

Chaque composante $\xi_{n,\omega_n}(t)$ dépend d'un ω_n indépendant à cause de la formule (1–4)

$$\xi_{n,\omega_n}(t)=e^{-\frac{\lambda_n}{2}t}\,\xi^0_{0,n}+\int_0^t e^{-\frac{\lambda_n}{2}(t-s)}\,d_s b_{n,\omega_n}(s).$$

Alors nous calculons $\mathscr{L}\xi_n = \mathscr{L}_n\xi_n$ par (3–2) et (3–3)

$$\mathscr{L}\xi_n(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t e^{-\frac{\lambda_n}{2}(t-s)}\, d_s b_{n,\omega_n}(s). \tag{3–7}$$

Par conséquent, nous avons aussitôt par (3–7) et (3–4)

$$\begin{aligned} \|D\xi_n(t)\|^2 &= \lim_{\delta\tau\to 0}\frac{1}{\delta\tau} E'\left(\left(\int_0^t e^{-\frac{\lambda_n}{2}(t-s)}\sqrt{ds}\,\beta_{n,\delta\omega_n}\right)^2\right) \\ &= \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)}ds = \frac{1}{\lambda_n}(1-e^{-\lambda_n t}). \end{aligned} \tag{3–8}$$

Enfin soit $f\colon H\to\mathbb{C}$ une fonction régulière cylindrique. Alors, d'après (3–6)

$$D(f(\xi(t))) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi(t))D\xi_i.$$

Multiplions scalairement par $D\xi_j$ en remarquant que si $i\neq j$

$$(D\xi_i|D\xi_j)=0$$

parce que ξ_i et ξ_j dépendent de ω_i et ω_j indépendants (3–5). Il vient alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi(t)) = (D(f(\xi(t)))|D\xi_j(t))\|D\xi_j(t)\|^{-2}$$

et donc par (3–8)

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi(t)) = (D(f(\xi(t)))|D\xi_j(t))\frac{\lambda_j}{1-e^{-\lambda_j t}} \tag{3–9}$$

3. Calculs de variations de certaines fonctionnelles du processus $\xi(t)$

Lemme 2. *Soit $W\colon H\to\mathbb{R}$ une fonction C^1 sur H. Alors*

$$\left(D\left(\int_0^t W(\xi(s))\,ds\right)\Big|D\xi_j(t)\right) = \int_0^t \frac{\partial W}{\partial x_j}(\xi(s))\,\frac{e^{-\lambda_i t}}{2\lambda_i}(e^{\lambda_i s}-e^{-\lambda_i s})\,ds \tag{3–10}$$

Preuve. On a par (3–6)

$$D\left(\int_0^t W(\xi(s))\,ds\right) = \sum_{i=1}^{+\infty}\int_0^t \frac{\partial W}{\partial x_i}(\xi(s))D\xi_i(s)\,ds$$

d'où

$$\left(D\left(\int_0^t W(\xi(s))ds\right)\Big|D\xi_j(t)\right) = \int_0^t \frac{\partial W}{\partial x_i}(\xi(s))\,(D\xi_i(s)|D\xi_j(t))ds.$$

Mais clairement comme l'accroissement de ξ_j de s à t est indépendant du passé de s, on a si $s\leqslant t$ par (3–8):

$$(3\text{-}11)\quad \begin{aligned}(D\xi_i(s)|D\xi_j(t)) &= \delta_{ij}\int_0^s\int_0^s e^{-\lambda_i(t+s-u-u')}(Dd_ub_i(u)|Dd_{u'}b_j(u')) \\ &= \delta_{ij}\int_0^s e^{-\lambda_i(t+s-2u)}du\end{aligned}$$

d'où

$$\left(D\left(\int_0^t W(\xi(s))\,ds\right)|D\xi_j(t)\right) = \int_0^t \frac{\partial W}{\partial x_j}(\xi(s))\frac{e^{-\lambda_i t}}{2\lambda_i}(e^{\lambda_i s}-e^{-\lambda_i s})ds.$$

Lemme 3. *Soit $V_i(x)$ un champ de vecteurs sur H. Alors*

$$(3\text{-}12)\quad \begin{aligned}&\left(D\left(\int_0^t V(\xi(s))\cdot db(s)\right)|D\xi_i(t)\right) \\ &= \int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)}V_i(\xi(s))ds \\ &+ \int_0^t \sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i}(\xi(s))\left(\int_0^s e^{-\lambda_i(t+s-2u)}du\right)db_j(s).\end{aligned}$$

Preuve. On a

$$D\left(\int_0^t V_j(\xi(s))\,db_j(s)\right) = \int_0^t \sum_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\xi(s))D\xi_k(s)db_j(s) + \int_0^t V_j(\xi(s))D(db_j(s)).$$

Mais alors par (3–11)

$$\int_0^t \sum_{j,k}\frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\xi(s))(D\xi_k(s)|D\xi_i(t))db_j(s) = \int_0^t \sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_i}(\xi(s))\left(\int_0^s e^{-\lambda_i(t+s-2u)}\,du\right)db_j(s).$$

Mais il est facile de voir que

$$(Ddb_j(s)|D\xi_i(t)) = \delta_{ij}e^{-\lambda_i(t-s)}ds$$

d'où

$$\left(D\left(\int_0^t\sum_j V_j(\xi(s))db_j(s)\right)|(D\xi_i(t))\right) = \int_0^t\sum_j\frac{\partial V_j}{\partial x_i}(\xi(s))\left(\int_0^s e^{-\lambda_i(t+s-2u)}\,du\right)db_j(s) + \int_0^t V_i(\xi(s))e^{-\lambda_i(t-s)}\,ds.$$

IV. Application aux perturbations stochastiques de champs de vecteurs sur H

1. Perturbation stochastique d'un champ de vecteurs de H

Soit un champ de vecteurs $V(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} V_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ sur H. Supposons que nous fassions une perturbation stochastique de V par le processus d'Ornstein Uhlenbeck ξ introduit dans (1–4). Cela nous amène à étudier le système d'équations différentielles stochastiques

$$\text{(4–1)} \qquad \begin{cases} dx_i(t) = db_i(t) - \frac{1}{2}\lambda_i x_i(t)dt + V_i(x(t))dt \\ x_i(0) = x_{0,i} \text{ donné dans } H. \end{cases}$$

Formellement le générateur de ce processus est l'opérateur

$$\text{(4–2)} \qquad G = L + \sum_{i=1}^{+\infty} V_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

(L défini en (1–3)). Notons $P_t(x_0, dx)$ la loi de (4–1); elle satisfait donc

$$\text{(4–3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P_t(x_0, dx)}{\partial t} = G_{x_0}P_t(x_0, dx) = G_x^* P_t(x_0, dx) \\ P_t(x_0, dx) \longrightarrow \delta(x_0 - x) \quad \text{si} \quad t \longrightarrow 0^+ \end{cases}$$

où dans (4–3) G_x^* est l'adjoint formel "par rapport à dx". Au lieu de (4–2) on va introduire un opérateur comprenant aussi des termes d'ordre 0

$$\text{(4–4)} \qquad G = L + \sum_{i=1}^{+\infty} V_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + W$$

où W est donné. Le problème posé est alors la *régularité* de $P_t(x_0, dx)$ en x où P_t est défini par (4–3), G étant défini par (4–4).

Ici il est clair que $P_t(x_0, dx)$ est absolument continu par rapport à $Q_t(x_0, dx)$ (défini en (1–5)) et donc à cause du théorème 1, par rapport à $\gamma(dx)$. Cela résulte de la formule de Girsanov qui donne

$$\text{(4–5)} \qquad \int_H f(x)P_t(x_0, dx) = E(\exp(\Phi(t))f(\xi(t))|\xi(0) = x_0)$$

où

$$\text{(4–6)} \qquad \Phi(t) = \int_0^t V(\xi(s))\cdot db(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|V(\xi(s))\|^2 ds + \int_0^t W(\xi(s))ds$$

avec:

$\xi(t)$ est le processus d'Ornstein Uhlenbeck (1–4)

$$\|V\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} V_i^2$$

$$V.db = \sum_{i=1}^{\infty} V_i db_i.$$

La démonstration de (4–5) est standard pourvu que par exemple

$$\text{(4–7)} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{x \in H} |V_i(x)|^2 < +\infty$$

$$\sup |W(x)| < +\infty .$$

On se propose de démontrer les résultats suivants

Théorème 3. *Supposons les estimées* (4–7) *satisfaites. D'autre part* x_0 *étant fixé dans* H *et* $t>0$ *étant fixé, supposons qu'il existe* $q_0>2$ *tel que*

$$\text{(4–8a)} \qquad \sum_{k\geq 1} \left(E_{x_0}\left(\left(\int_0^t \left(\frac{\partial W}{\partial x_k}(\xi(s)) - \frac{1}{2}\frac{\partial \|V\|^2}{\partial x_k}(\xi(s)) \right) ds \right)^{q_0} \right) \right)^{\frac{2}{q_0}} < +\infty$$

$$\text{(4–8}b\text{)} \qquad \sum_{k\geq 1} E_{x_0}\left(\left(\int_0^t \sum_j \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\xi(s)) \right)^2 ds \right)^{q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} < +\infty$$

les espérances E_{x_0} *étant les espérances conditionnelles sachant que* $\xi(0)=x_0$. *Alors* $P_t(x_0, dx)$ *est absolument continu par rapport à* $\gamma(x)$ *et* $p_t(x_0, dx)= \dfrac{p_t(x_0, dx)}{\gamma(dx)}$ *est dans la classe* $\mathscr{H}^1(\gamma)$.

Remarque. Les lois de $\xi(s)$ sachant $\xi(0)=x_0$ étant parfaitement connues par le I.2, (4–8a) et (4–8b) sont en principe vérifiables dès que V et W sont données. Ainsi on a par exemple

Théorème 3′. *Supposons toujours* (4–7) *satisfaits et supposons que*

$$\text{(4–8c)} \qquad \sum_{k\geq 1} \sup_{x\in H} \left| \frac{\partial W}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial \|V\|^2}{\partial x_k} \right|^2 < +\infty$$

$$\text{(4–8d)} \qquad \sum_{k\geq 1} \sup_{x\in H} \sum_j \left| \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right|^2 < +\infty .$$

Alors pour tout $x_0 \in H$ *et tout* $t>0$, $P_t(x_0, dx)$ *est absolument continu par rapport à* $\gamma(dx)$ *et*

$$p_t(x_0, x) = \frac{p_t(x_0, dx)}{\gamma(dx)}$$

est dans la classe $\mathscr{H}^1(\gamma)$.

Démonstration du théorème 3′. Il est clair en effet que les estimées (4–8c) et (4–8d) entraînent respectivement (4–8a) et (4–8b) et donc la conclusion par le théorème 3.

2. Démonstration du théorème 3

On va montrer que l'estimée du théorème 2 est réalisée donc que pour toute fonction cylindrique φ

$$\left|\int (\delta_k\varphi)(x)P_t(x_0, dx)\right| \leqslant C_k\|\varphi\|_{L^2(\gamma)} \tag{4–9}$$

avec $\sum_{k\geqslant 1} C_k^2 < +\infty$; cela sera obtenu en utilisant le calcul des variations stochastiques. Pour cela, φ étant une fonction cylindrique fixée, utilisons (4–5) avec $f=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}$

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)P_t(x_0, dx) = E(\exp(\Phi(t))\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\xi(t))|\xi(0)=x_0). \tag{4–10}$$

Relevons le champ $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ dans l'espace Ω défini au III 1 par la formule (3–9); posons

$$\Delta_k = \frac{\lambda_k}{1-e^{-\lambda_k t}} \tag{4–11}$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)P_t(x_0, dx) = \Delta_k E(\exp(\Phi(t))(D(\varphi(\xi(t)))|D(\xi_k(t)))|\xi(0)=x_0).$$

Utilisons (3–5)

$$(D(\varphi(\xi(t)))\,|\,D(\xi_k(t))) = \mathscr{L}(\varphi(\xi(t))\times\xi_k(t)) - \varphi(\xi(t))\mathscr{L}(\xi_k(t)) - \mathscr{L}(\varphi(\xi(t)))\xi_k(t)$$

D'où, en utilisant que $\mathscr{L}$ est autoadjoint par rapport à P sur Ω

$$\begin{aligned} &E(\exp(\Phi(t))\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\xi(t))) \\ &\quad= \Delta_k E(\exp(\Phi(t))[\mathscr{L}(\varphi(\xi(t))\xi_k(t)) - \xi_k(t)\mathscr{L}\varphi(\xi(t)) - \varphi(\xi(t))\mathscr{L}(\xi_k(t))]) \\ &\quad= \Delta_k E(\varphi(\xi(t))[\xi_k(t)\mathscr{L}(\exp\Phi(t)) - \mathscr{L}((\exp\Phi(t))\xi_k(t)) - \exp(\Phi(t))\mathscr{L}(\xi_k(t))]). \end{aligned}$$

Mais par (3–5)

$$\mathscr{L}(\exp(\Phi(t))\xi_k(t)) = \exp(\Phi(t))\mathscr{L}(\xi_k(t)) + \xi_k(t)\mathscr{L}(\exp\Phi(t)) + (D\xi_k(t)|D\exp\Phi(t))$$

et par (3–7), puisque

$$\mathscr{L}\xi_k(t) = -\frac{1}{2}\hat{\xi}_k(t)$$

(où $\hat{\xi}_k(t)$ désigne le processus d'Ornstein Uhlenbeck de H issu de 0 à $t=0$)

$$\begin{aligned} E(\exp(\Phi(t))\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\xi(t))) = \Delta_k E(\varphi(\xi(t))[\hat{\xi}_k(t)\exp\Phi(t) \\ -(D\xi_k(t)|D\exp\Phi(t))]). \end{aligned}$$

Mais par définition

$$(\delta_k\varphi)(\xi(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\xi(t)) - \lambda_k \xi_k(t)\varphi(\xi(t))$$

d'où

$$\begin{aligned} E(\exp(\Phi(t))(\delta_k\varphi)(\xi(t))) = & -\Delta_k E(\varphi(\xi(t))(D\xi_k(t)|D\exp\Phi(t))) \\ & + E(\varphi(\xi(t))\exp(\Phi(t))\xi_k(t))(\Delta_k-\lambda_k) \\ & - E(\varphi(\xi(t))\exp(\Phi(t)))\lambda_k\Delta_k x_{0,k}e^{-\lambda_k t}. \end{aligned} \tag{4–12}$$

Lemme 5. *Chacun des trois termes du second membre de* (4–12) *est contrôlé en valeur absolue par* $C_k\|\varphi\|_{L^2}$ *où les* C_k *sont des constantes telles que* $\sum_k C_k^2 < +\infty$.

Fin du théorème 3. Si on admet ce lemme 5, on voit donc que

$$|E(\exp(\Phi(t))(\delta_k\varphi)(\xi(t)))| \leqslant C_k\|\varphi\|_{L^2}$$

avec $\sum C_k^2 < +\infty$ ce qui est exactement l'estimée (4–9). Le théorème 2 implique alors le théorème 3.

3. Démonstration du lemme 5

a) Estimation de $|\Delta_k E(\varphi(\xi(t))(D(\xi_k(t))|D(\exp\Phi)))|$.

On a d'après (3–6)

$$D(\exp\Phi) = (\exp\Phi)D\Phi$$

et $(D\Phi|D(\xi_k(t)))$ se calcule en utilisant les lemmes 3 et 4 (formules (3–10) et (3–12)). En regroupant les termes on a donc

(4–13)

$$\begin{aligned} (D\Phi|D\xi_k(t)) = & \int_0^t \left(\frac{\partial W}{\partial x_k}(\xi(s)) - \frac{1}{2}\frac{\partial\|V\|^2}{\partial x_k}(\xi(s))\right)\frac{e^{-\lambda_k t}}{2\lambda_k}(e^{\lambda_k s}-e^{-\lambda_k s})\,ds \\ & + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)}V_k(\xi(s))\,ds + \int_0^t \sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\xi(s))\frac{e^{-\lambda_k t}}{2\lambda_k}(e^{\lambda_k s}-e^{-\lambda_k s})db_j(s). \end{aligned}$$

Alors soit $1<p<2$: l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} |\Delta_k E(\varphi(\xi(t))(D(\xi_k(t))|D\exp\Phi))| \leqslant & E(|\varphi|^p(\xi(t)))^{\frac{1}{p}} \\ & \times \Delta_k(E(\exp(q\Phi)|(D(\xi_k(t))|D\Phi)|^q))^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $1<p<2$, $2<q<+\infty$.

Mais la loi de $\xi(t)$, $Q_t(x_0, dx)$ définie au I théorème. 1 est absolument continue par rapport à γ de dérivée de Radon Nikodym q_t étudiée au théorème

1, on a par l'inégalité de Hölder appliquée aux exposants $\frac{2}{p}$ et $\frac{2}{2-p}$

$$E(|\varphi|^p(\xi(t)))^{\frac{1}{p}} = \left(\int |\varphi|^p(x) q_t(x_0, x)\,\gamma(dx)\right)^{\frac{1}{p}}$$

(4–15)

$$\leqslant \left(\int \varphi^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int q_t(x_0, x)^{\frac{2}{2-p}}\,\gamma(dx)\right)^{\frac{2-p}{p}}$$

Mais par le lemme 1, du I, on voit que cela est encore contrôlé par

(4–16) $$C\|\varphi\|_{L^2(\gamma)}$$

(C dépendant de x_0).

Il faut donc étudier le second facteur du second membre de (4–14), ce qui, compte tenu de l'expression (4–13) de $(D\xi_k(t)|D\Phi)$ donne trois termes à étudier

a.1) D'abord regardons:

$$\Delta_k\left(E\left[(\exp q\Phi)\left(\int_0^t \left(\frac{\partial W}{\partial x_k}(\xi(s)) - \frac{1}{2}\frac{\partial \|V\|^2}{\partial x_k}(\xi(s))\right)\frac{e^{-\lambda_k t}}{2\lambda_k}(e^{\lambda_k s} - e^{-\lambda_k s})\,ds\right)^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Utilisons l'expression (4–11) de Δ_k: le numérateur de Δ_k contient λ_k qui se détruit avec le λ_k du dénominateur de l'expression sous le signe $\int_0^t$. La fonction $e^{-\lambda_k t}(e^{\lambda_k s} - e^{-\lambda_k s})$ est uniformément bornée sur $s \in [0, t]$, $t > 0$ en t, s, λ_k et donc comme $\exp\Phi$ est de puissance q'-ième intégrable pour tout q' par l'hypothèse (4–7) et par l'inégalité de Hölder, l'expression ci-dessus est contrôlée par

(4–17) $$CE\left(\left(\int_0^t \left(\frac{\partial W}{\partial x_k}(\xi(s)) - \frac{1}{2}\frac{\partial \|V\|^2}{\partial x_k}(\xi(s))\right)ds\right)^{q''}\right)^{\frac{1}{q''}} \leqslant C_k^{(1)}$$

où $q'' > q > 2$ et C est une constante indépendante de k. Mais si on choisit pour q'' le q_0 de l'hypothèse (4–8a), ce qui est toujours possible, car on a la liberté complète sur $1 < p < 2$, donc sur $q > 2$, et aussi sur le $q'' > 1$, on voit que

$$\sum_k (C_k^{(1)})^2 < +\infty.$$

a.2) Ensuite le second terme de $(D(\xi_k(t))|D\Phi)$ de (4–13) donne une contribution à (4–14) valant

$$\Delta_k\left(E\left(\exp(q\Phi)\left|\int_0^t V_k(\xi(s))e^{-\lambda_k(t-s)}ds\right|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

qui se majore compte tenu de (4–11) par

$$C \sup |V_k(x)| \lambda_k \left| \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} ds \right| \leqslant C_k^{(2)} \tag{4–18}$$

où $\sum (C_k^{(2)})^2 < +\infty$ par l'hypothèse (4–7).

a.3) Le troisième terme de $(D(\xi_k(t))|D\Phi)$ de (4–13) donne une contribution à (4–14) valant

$$\Delta_k \left(E\left((\exp q\Phi) \left| \int_0^t \sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_k} (\xi(s)) \frac{e^{-\lambda_k t}}{2\lambda_k} (e^{\lambda_k s} - e^{-\lambda_k s}) db_j(s) \right|^q \right) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Encore une fois le λ_k du numérateur de (4–11) pour Δ_k se simplifie avec le λ_k du dénominateur de l'expression précédente. Si on applique l'inégalité de Hölder à cette expression ci-dessus on a

$$e^{-\lambda_k t} E\left(\left| \int_0^t \sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_k} (\xi(s)) (e^{\lambda_k s} - e^{-\lambda_k s}) db_j(s) \right|^{q''} \right)^{\frac{1}{q''}}. \tag{4–19}$$

Mais sous le signe valeur absolue, apparaît une martingale M_t. L'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy donne

$$E(|M_t|^{q''}) \leqslant CE(A_t^{q''})^{\frac{1}{2}}$$

où A_t est le processus croissant associé qui est ici

$$A_t = \int_0^t \sum_j \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k} (\xi(s)) \right)^2 (e^{\lambda_k s} - e^{-\lambda_k s})^2 ds$$

et donc on a une majoration de (4–19) par

$$C' \left(E\left(\int_0^t \sum_j \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k} (\xi(s)) \right)^2 ds \right)^{q''} \right)^{\frac{1}{2q''}}.$$

Encore une fois compte tenu des libertés sur le choix de $1<p<2$, donc de $q>2$ et aussi du q'', on peut prendre le $q''=q_0$ de (4–8b) et majorer par

$$C_k^{(3)}$$
$$\text{où} \quad \sum (C_k^{(3)})^2 < +\infty .$$

Alors (4–17), (4–18), (4–19) permettent de contrôler

$$\Delta_k [E((\exp q\Phi)|(D\xi_k(t)|D\Phi)|^q)]^{\frac{1}{q}} \quad \text{par} \quad C_k^{(4)} \quad \text{avec} \quad \sum (C_k^{(4)})^2 < +\infty . \tag{4–20}$$

b) Estimation de $E(\varphi(\xi(t)) \exp(\Phi(t))\xi_k(t))(\Delta_k - \lambda_k)$

On a $\Delta_k - \lambda_k = \dfrac{\lambda_k e^{-\lambda_k t}}{1-e^{-\lambda_k t}} \equiv \Gamma_k$ avec $\sum \Gamma_k^2 < +\infty$.

Un raisonnement analogue à celui effectué au a) montre que pour $1<p<2$

$$(4\text{–}21)\quad \begin{aligned}(\varDelta_k-\lambda_k)|E(\exp(\varPhi(t))\varphi(\xi(t))\xi_k(t))| &\leqslant \varGamma_k C(E(\exp q\varPhi))^{\frac{1}{q}} E(|\xi_k(t)\varphi(\xi(t))^p|)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant \varGamma_k E(|\xi_k(t)|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(E(|\varphi(\xi(t))|^{p'}))^{\frac{1}{p'}}\end{aligned}$$

où $1<p'<2$ pourvu qu'on choisisse bien α. Mais

$$E(|\xi_k(t)|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\int |x_k|^\alpha Q_t{}^{(k)}(x_{0,k}, dx_k)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

où $Q_t^{(k)}$ est donné au I.2. Mais appliquons encore l'inégalité de Hölder à cette expression

$$(4\text{–}22)\qquad E(|\xi_k(t)|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \left(\int |x_k|^{\alpha'}\gamma_k(dx_k)\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\left(\int q_k^{(k)}(x_{0,h}x_k)^{\alpha''}\gamma_k(dx_k)\right)^{\frac{1}{\alpha'}}$$

Mais on a

$$\left(\int |x_k|^{\alpha'}\gamma_k(dx_k)\right)^{\frac{1}{\alpha'}}=\frac{C}{\lambda_k^{1/2}}$$

et de plus d'après le lemme 1, le produit infini des $\int q_t^{(k)}(x_{0,k}, x_k)^{\alpha''}\gamma_k(dx_k)$ converge vers $\int q_t(x_0, x)^{\alpha''}\gamma(dx)$ donc les termes $\int q_t^{(k)}(x_{0,k}, x_k)^{\alpha''}\gamma_k(dx_k)$ restent bornés, donc (4–22) donne

$$(4\text{–}23)\qquad E(|\xi_k(t)|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \frac{C}{\lambda_k^{1/2}}\,.$$

Par suite (4–21) est majoré par la méthode du a) par

$$(4\text{–}24)\qquad \|\varphi\|_{L^2}C_k^{(5)}\quad\text{avec}\quad C_k^{(5)}=\frac{C\varGamma_k}{\lambda_k^{1/2}}$$

où $\sum(C_k^{(5)})^2<+\infty$ puisque $\sum\varGamma_k^2<+\infty$.

c) Estimation de $E(\varphi(\xi(t))\exp(\varPhi(t)))\lambda_k\varDelta_k x_{0,k}{}^{-\lambda_k t}$.

Cela est clairement majoré par

$$(4\text{–}25)\qquad \|\varphi\|_{L^2}C_k^{(6)}$$

où $C_k^{(6)}=C\lambda_k\varDelta_k x_{0,k}e^{-\lambda_k t}$ et donc

$$\sum(C_k^{(6)})^2<+\infty.$$

Les estimées (4–25), (4–24) et (4–20) montrent bien que l'expression (4–12) est contrôlée par

$$C_k^{(7)} \|\varphi\|_{L^2}$$

où $C_k^{(7)} = C_k^{(6)} + C_k^{(5)} + C_k^{(4)}$ et donc

$$\sum (C_k^{(7)})^2 < +\infty.$$

Cela achève le lemme 5 et donc le théorème 3.

4. Remarques et compléments

a) Il est clair que si dans le théorème 3 (ou le théorème 3′) on remplace les estimées (4–8a) et (4–8b) par une estimée individuelle pour chaque k du type

$$(4\text{–}26)\qquad \begin{aligned} &E_{x_0}\left(\left(\int_0^t \left(\frac{\partial W}{\partial x_k}(\xi(s)) - \frac{1}{2}\frac{\partial \|V\|^2}{\partial x_k}(\xi(s))\right) ds\right)^{q_0}\right) < +\infty \\ &E_{x_0}\left(\left(\int_0^t \sum_j \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\xi(s))\right)^2 ds\right)^{q_0}\right) < +\infty \end{aligned}$$

alors la densité $p_t(x_0, x)$ est, pour x_0 et $t>0$ fixés, dérivable en x_k pour tout k, et on a pour tout k

$$(4\text{–}27)\qquad \int \left| \frac{\partial}{\partial x_k} p_t(x_0, x)\right|^2 \gamma(dx) < +\infty$$

mais a priori p_t n'est pas dans l'espace de Sobolev $\mathscr{H}^1(\gamma)$.

b) **Un exemple en mécanique statistique.**

Supposons que F soit une fonction d'une infinité de variable, positive, ayant un maximum en 0 et telle que la forme hessienne de F soit non dégénérée valant $-\sum \lambda_n x_n^2$.

Ecrivons $F = -\frac{1}{2}\sum \lambda_n x_n^2 + f$. Alors la "mesure formelle" $\exp(\beta F) dx_1 \cdots dx_n \cdots$ peut être considérée comme la mesure d'équilibre pour le système à une infinité de degrés de liberté $x_1 \cdots x_n \cdots$ d'hamiltonien F. Fabriquons alors un opérateur différentiel formel laissant $\exp \beta F$ invariante; l'adjoint formel d'un tel opérateur serait

$$(4\text{–}28)\qquad \frac{1}{2}\left(\sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \beta(\vec{\nabla} F)\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)$$

car si on est à un nombre fini de variables, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_k} e^{\beta F} = \beta \frac{\partial F}{\partial x_k} e^{\beta F}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} e^{\beta F} = \left(\beta \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l} + \beta^2 \frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial x_l}\right) e^{\beta F}$$

et donc

$$\Delta e^{\beta F} - \beta \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\vec{\nabla} F)\, e^{\beta F}) = 0.$$

Ainsi (4–28) est un opérateur du 2^{nd} ordre dont le processus de diffusion associé admet la mesure $e^{\beta F}$ comme mesure invariante. Mais si F est du type $-\sum \lambda_n x_n^2 + f$, alors l'opérateur est exactement du type

$$L + \frac{1}{2} \beta \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où L est l'opérateur d'Ornstein Uhlenbeck associé à l'opérateur u de valeur propre $\beta^{-1/2} \lambda_n^{-1/2}$ (lorsque les λ_n sont tels que u soit de Hilbert Schmidt). Lorsque f est une "très petite perturbation" de la gaussienne γ associée à u, au sens où les hypothèses du théorème 3 sont satisfaites pour le champ de vecteurs $\vec{V} = \vec{\nabla} f$, alors on a absolue continuité et régularité des lois du processus de diffusion de générateur $L + \frac{1}{2} \beta \vec{\nabla} f.\ \vec{\nabla}$ (en particulier un tel système n'a pas de transition de phase). Il serait évidemment extrêmement intéressant de pouvoir développer une théorie de tels opérateurs pour des fonctions f qui ne sont pas petites.

c) Dans un travail en cours d'élaboration, nous étudions des diffusions sur des espaces topologiques qui n'ont pas de structure de variété de dimension infinie (par exemple un produit infini de variétés compactes). Nous établissons une théorie de la régularité en utilisant la notion de "différentiation le long des trajectoires d'un système dynamique", en fait, le système dynamique défini par le processus de diffusion ([6]).

Références

[1] Asorey, M. and Mitter, P., *Comm. Math. Phys.*, (1981).

[2] Bismut, J. M., *Z für Wahrscheinlichkeit theorie* **56** (1981), 469–505.

[3] Gaveau, B., *C. R. Acad. Sci. Paris* **293** (1981), 469–472. et *Proc. Japan Acad. Sci.* **59** (1983), 8–10.

[4] Gaveau, B. et Mazet, E., *C.R. Acad. Sci. Paris* **289** (1979), 643–646 et *Annales Institut Poincaré section A* **35** (1981), 105–111.

[5] Gaveau, B. et Moulinier, J. M., *C. R. Acad. Sci. Paris* **296** (1983), 43–46.

[6] ———, en préparation

[7] Gaveau, B. et Trauber, Ph., *J. Funct. Anal* **38** (1980), 324–341 et *J. Func. Anal.* **42** (1981) 356–367.

[8] ———, *C. R. Acad. Sci. Paris* **291** (1980), 575–578.

[9] ———, *J. Funct. Anal.* **46** (1982), 230–238 et *C. R. Acad. Sci. Paris* **291** (1980), 283–286.

[10] Itô, K., *Proc Int Taniguchi symposium on stochastic analysis Katata 1982*, Ed: K. Itô, North Holland, 1985.

[11] Mc Kean, H. P., *Stochastic integrals*, Acad. Press, 1969.

[12] Malliavin, P., Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. *Proc. Int. Symposium on stochastic differential equations Kyoto* (1976).

[13] ———, C^k hypoellipticity with degeneracy in *Stochastic analysis* Ed A. Friedman, M. Pinsky Acad. Press, 1978.

[14] ———, *Proc Int Taniguchi symposium on stochastic analysis Kyoto 1982*, Ed: K. Itô, North Holland, 1985.

[15] Moulinier, J. M., Absolue continuité des probabilités de transition par rapport à une mesure gaussienne dans un espace de Hilbert. Funct. anal (1985).

[16] Shigekawa, I., *J. Math. Kyoto Univ.* (1980), 263–289.

[17] Krée, P., Solutions faibles d'equations auxdéés fonctionnelles, Sém. Lelong 1973–74, Lecture Note in Math. **474**, 16–47, Springer.

[18] Krée, M, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **279** (1974), 158 et Bull. Sci. Math. **105** (1977), 145.

[19] Krée, M et Krée P., Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener, *C. R. Acad. Sci. Paris*, (1983).