Publ. RIMS, Kyoto Univ.
23 (1987), 813–840

Sur les Classes Caractéristiques des Sous-Feuilletages

par

Demetrio DOMÍNGUEZ*

Abstract

The purpose of this paper is twofold. First, we compute the cohomology algebras $H(W(g, H)_l)$; and second, we study some properties of subfoliations, in order to give a geometric interpretation for certain secondary characteristic classes of subfoliations, in particular, Godbillon-Vey's classes of a subfoliation. We also construct examples of subfoliations with non-trivial Godbillon-Vey classes.

§ 1. Introduction

Soit M une variété différentiable de dimension n, TM son fibré tangent. Un sous-feuilletage de codimension (q_1, q_2) sur M est une paire (F_1, F_2) de sous-fibrés intégrables F_i de TM de dimensions $n-q_i$, $i=1, 2$, et tels que F_2 soit un sous-fibré de F_1. Les classes caractéristiques secondaires ou exotiques ont été définies pour les sous-feuilletages de codimension (q_1, q_2), par Cordero-Masa [3], en utilisant les techniques de Bott [1]. Finalement, Carballés [2], en utilisant les techniques de Kamber-Tondeur [8], généralise la construction de Cordero-Masa en introduisant l'homomorphisme caractéristique $\Delta_*=\Delta_*(P): H(W(g, H)_l) \longrightarrow H_{DR}(M)$ d'un fibré principal (F_1, F_2)-feuilleté $P \longrightarrow M$. C'est un fibré principal de la forme $P=P_1+P_2$ de groupe structural $G=G_1\times G_2$ tel que $P_i \longrightarrow M$, $i=1, 2$, soit un fibré principal F_i-feuilleté de groupe structural G_i.

Le but de ce travail est double: d'une part calculer la cohomologie de l'algèbre de Weil relative tronquée $W(g, h)_l$ pour certaines paires

Communiqué par N. Shimada, le 11 mai 1987.

* Departamento de Geometría y Topología, Facultad de Matemáticas, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, Spain.

réductives $(g, h)=(g_1\oplus g_2, h_1\oplus h_2)$ d'algèbres de Lie, d'autre part étudier quelques propriétés des sous-feuilletages, en interprétant géométriquement certaines classes caractéristiques secondaires, en particulier, les nouvelles classes de Godbillon-Vey d'un sous-feuilletage.

Le § 2 est consacré à quelques rappels concernant en particulier l'homomorphisme caractéristique généralisé Δ_* d'un fibré principal (F_1, F_2)-feuilleté $P=P_1+P_2$. D'autre part, nous montrons que l'homomorphisme caractéristique généralisé Δ_* d'un fibré principal (F_1, F_2)-feuilleté P (admettant une connexion basique somme $\omega=\omega_1+\omega_2$, au sens de Carballés [2]) ne dépend pas du choix de la connexion basique somme sur P.

Le § 3 contient le calcul de la cohomologie de l'algèbre de Weil relative tronquée $W(g, h)_I$ pour certaines paires réductives $(g, h)=(g_1\oplus g_2, h_1\oplus h_2)$ d'algèbres de Lie de dimension finie sur un corps commutatif $\mathfrak{K}$ de caractéristique zéro. Ceci nous permet d'introduire la notion de classes de Godbillon-Vey pour les sous-feuilletages de codimension (q_1, q_2).

Le § 4 étudie la compatibilité des structures F_2-feuilletées canoniques des fibrés vectoriels isomorphes $Q_2=TM/F_2$ et $Q_1\oplus Q_0=(TM/F_1)\oplus(F_1/F_2)$. On interprète en particulier les classes de Godbillon-Vey d'un sous-feuilletage (F_1, F_2) de codimension (q_1, q_2). Ce paragraphe contient aussi le cas où le sous-feuilletage (F_1, F_2) est de la forme $(F_1, F_1\cap F')$ pour un feuilletage F' de codimension $d=q_2-q_1\geqq 0$ sur M.

Le § 5 montre que les classes de Godbillon-Vey d'un sous-feuilletage peuvent s'obtenir en utilisant des techniques analogues à celles utilisées par Godbillon-Vey [5] pour un feuilletage.

Au § 6 nous donnons quelques exemples de sous-feuilletages localement homogènes pour appliquer les résultats des paragraphes précédents. En particulier, nous calculons les classes de Godbillon-Vey de ces sous-feuilletages.

Tout au long de ce travail, toutes les variétés et toutes les applications seront différentiables de classe C^∞. Nous adoptons aussi les notations de Kamber-Tondeur [8] et Carballés [2]. De même, on désignera par $gl(m)$ (resp. par $sl(m)$) l'algèbre de Lie du groupe $GL(m)=GL(m, \mathfrak{K})$ (resp. du groupe $SL(m)=SL(m, \mathfrak{K})$).

Ce travail est une partie de la dissertation doctoral de l'auteur qui exprime sa très grande reconnaissance à X. M. Masa pour son aide et encouragement.

§ 2. Homomorphisme Caractéristique d'un Fibré (F_1, F_2)-Feuilleté

Soient $H \subset G = G_1 \times G_2$ des groupes de Lie, $h \subset g = g_1 \oplus g_2$ leurs algèbres de Lie. Pour une paire (q_1, q_2) d'entiers q_i tels que $0 \leqq q_1 \leqq q_2$, on désignera par $W(g, H)_I$ l'algèbre de Weil relative tronquée $(W(g)_I)_H$ des éléments H-basiques de l'algèbre de Weil $W(g)_I = W(g)/I$ tronquée par l'idéal $I = 'F^{2(q_1+1)} W(g) + F^{2(q_2+1)} W(g)$ de l'algèbre de Weil $W(g) \cong W(g_1) \otimes W(g_2)$ engendré par les sous-espaces $S^i g_1^* \otimes S^j g_2^*$ tels que $i > q_1$ ou $i + j > q_2$.

Soit (F_1, F_2) un sous-feuilletage de codimension (q_1, q_2) sur une variété différentiable M de dimension n et soit $P = P_1 + P_2 \longrightarrow M$ un fibré principal (F_1, F_2)-feuilleté de groupe structural $G = G_1 \times G_2$. Supposons que H soit fermé dans G et qu'il existe une section $s : M \longrightarrow P/H$ de la projection canonique $\bar{\pi} : P/H \longrightarrow M$. Alors, d'après Carballés [2], l'homomorphisme caractéristique généralisé

$$\Delta_* = \Delta_*(P) : H(W(g, H)_I) \longrightarrow H_{DR}(M)$$

du fibré principal (F_1, F_2)-feuilleté P est l'homomorphisme induit en cohomologie par le DG-homomorphisme composé

$$\Delta(\omega) = s^* \circ k(\omega)_H : W(g, H)_I \longrightarrow \Omega(P)_H \cong \Omega(P/H) \longrightarrow \Omega(M),$$

où $k(\omega) : W(g) \longrightarrow \Omega(P)$ désigne l'homomorphisme de Weil d'une connexion adaptée somme $\omega = \omega_1 + \omega_2$ sur $P = P_1 + P_2$ (au sens de Carballés [2]). De plus, l'homomorphisme Δ_* ne dépend pas du choix de la connexion adaptée somme ω sur P. De même, si H contient un sous-groupe maximal compact de G, l'homomorphisme Δ_* est aussi indépendant de la section s choisie.

Considérons maintenant le fibré principal (F_1, F_2)-feuilleté $P = L(Q_1) + L(Q_0)$ des repères transverses au sous-feuilletage (F_1, F_2), c'est-à-dire le fibré des $GL(q_1) \times GL(d)$-repères du fibré normal $\nu(F_1, F_2) = Q_1 \oplus Q_0$ de (F_1, F_2), où $d = q_2 - q_1 \geqq 0$. Alors (cf. Carballés [2]), pour $H = O(q_1) \times O(d)$ (ou $H = \{e\}$, dans le cas où le fibré normal de ce sous-feuilletage est trivialisé), l'homomorphisme $\Delta_* = \Delta_*(P)$ coïncide avec l'homomorphisme caractéristique $\lambda^*_{(F_1, F_2)}$ défini par Cordero-Masa [3]. Dans ce cas, les éléments de $\mathrm{Im}\, \Delta_* \subset H_{DR}(M)$ seront appelés des *classes caractéristiques* de (F_1, F_2).

D'autre part, supposons que le fibré principal (F_1, F_2)-feuilleté $P = P_1 + P_2 \longrightarrow M$ admette une connexion basique somme $\omega = \omega_1 + \omega_2$ (au sens de

Carballés [2]), alors, par un raisonnement analogue à celui utilisé dans [2], nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 2.1. *L'homomorphisme caractéristique généralisé*

$$\Delta_*: H(W(g, H)_{I''}) \longrightarrow H_{DR}(M)$$

du fibré principal (F_1, F_2)*-feuilleté* $P=P_1+P_2$ *ne dépend pas du choix de la connexion basique somme* $\omega=\omega_1+\omega_2$ *sur* P, *où* I'' *est le G-DG-idéal de l'algèbre de Weil* $W(g)\cong W(g_1)\otimes W(g_2)$ *correspondant à la paire* $([(q_1+1)/2], [(q_2+1)/2])$.

Soit la situation précédente. Alors l'homomorphisme Δ_* se factorise de la manière suivante:

$$\Delta_*: H(W(g, H)_{I''}) \xrightarrow{p_*} H(W(g, H)_{I'}) \longrightarrow H_{DR}(M),$$

où p est la projection canonique induite par l'inclusion

$$I''\subset I'='F^{2([q_1/2]+1)}W(g)+F^{2([q_2/2]+1)}W(g),$$

mais l'homomorphisme $\Delta_*=\Delta(\omega)_*: H(W(g, H)_{I'}) \longrightarrow H_{DR}(M)$ dépend, en général, du choix de la connexion basique somme $\omega=\omega_1+\omega_2$ sur $P=P_1+P_2$ si q_1 ou q_2 est impair.

On déduit de cette proposition le

Corollaire 2.2. *L'homomorphisme caractéristique généralisé*

$$\Delta_*=\Delta_*(P): H(W(g, H)_{[(q+1)/2]}) \longrightarrow H_{DR}(M)$$

d'un G-fibré principal F-feuilleté $P\longrightarrow M$ *admettant une connexion basique* ω *est indépendant de la connexion basique* ω *sur* P *choisie, où* q *est la codimension du feuilletage* F *sur* M.

De la même manière, on a la factorisation

$$\Delta_*: H(W(g, H)_{[(q+1)/2]}) \xrightarrow{p_*} H(W(g, H)_{[q/2]}) \longrightarrow H_{DR}(M),$$

mais l'homomorphisme $\Delta_*=\Delta(\omega)_*: H(W(g, H)_{[q/2]}) \longrightarrow H_{DR}(M)$ dépend, en général, du choix de la connexion basique ω sur P si q est impair.

§ 3. Calcul de la Cohomologie $H(W(g, H)_I)$

Soient (G_i, H_i), $i=1, 2$, des paires de groupes de Lie, (g_i, h_i) leurs paires d'algèbres de Lie. On désigne par (G, H) la paire de groupes de Lie $(G_1\times G_2, H_1\times H_2)$ et par (g, h) sa paire d'algèbres de Lie $(g_1\oplus g_2, h_1\oplus h_2)$. Etant donnée une paire (q_1, q_2) d'entiers, avec $0\leqq q_1\leqq q_2$, considérons l'algèbre de Weil relative tronquée $W(g, H)_I$. Pour simplifier le calcul de la cohomologie $H(W(g, H)_I)$, on suppose que les algèbres des polynômes symétriques invariants $I(G)$ et $I(g)$ soient canoniquement isomorphes, que H ait un nombre fini de composantes connexes et que, pour chaque $i=1, 2$, la paire d'algèbres de Lie (g_i, h_i) soit une CS-paire (i.e. une paire réductive d'algèbres de Lie admettant une transgression τ_i pour g_i telle que $\mathrm{Ker}(I(g_i)\longrightarrow I(h_i))=\mathrm{Idéal}(\tau_i\hat{P}_i)\subset I(g_i)$, où $\hat{P}_i$ désigne l'espace de Samelson de la paire (g_i, h_i)). Par conséquent, (g, h) est aussi une CS-paire.

Avec les hypothèses précédentes, Carballés [2], en utilisant un certain isomorphisme (d'algèbres graduées)

$$H(\hat{A}_I)\otimes_{I(G)}I(H)\xrightarrow{\cong}H(W(g, H)_I)\,,$$

réduit le calcul de la cohomologie $H(W(g, H)_I)$ à celui de la cohomologie de la DG-algèbre tronquée

$$\hat{A}_I=\hat{A}(W(g)_I)=\wedge\hat{P}\otimes I(G)_I\cong\wedge\hat{P}_1\otimes\wedge\hat{P}_2\otimes(I(G_1)\otimes I(G_2))_I\,,$$

où $\hat{P}$ (resp. $\hat{P}_i$) est l'espace de Samelson de la paire (g, h) (resp. de la paire (g_i, h_i)). Si, de plus, l'application de restriction $I(G)\longrightarrow I(H)$ est surjective, l'homomorphisme canonique $H(\hat{A}_I)\xrightarrow{\cong}H(\hat{A}_I)\otimes_{I(G)}I(H)$ est un isomorphisme ; par suite, on a donc

$$H(\hat{A}_I)\cong H(\hat{A}_I)\otimes_{I(G)}I(H)\cong H(W(g, H)_I)\,.$$

C'est par exemple le cas si $(G, H)=(GL(r_1)\times GL(r_2),\ O(r_1)\times O(r_2))$. En particulier, pour $r_1=q_1$ et $r_2=q_2-q_1$, on vérifie que $\hat{A}_I$ est la DG-algèbre WO_I utilisée par Cordero-Masa [3] dans la construction de l'homomorphisme caractéristique $\Delta_*=\lambda^*_{(F_1,F_2)}: H(WO_I)\longrightarrow H_{DR}(M)$ d'un sous-feuilletage (F_1, F_2) de codimension (q_1, q_2) sur M.

Nous calculons maintenant la cohomologie $H(\hat{A}_I)$ comme suit. Soient (g_i, h_i), $i=1, 2$, deux CS-paires d'algèbres de Lie de dimension finie sur un corps commutatif $\mathfrak{K}$ de caractéristique zéro ; on considère la CS-paire $(g, h)=(g_1\oplus g_2, h_1\oplus h_2)$ d'algèbres de Lie. Soit $P_g=P_{g_1}\oplus P_{g_2}$ le sous-espace des éléments primitifs de g (où P_{g_i} désigne le sous-espace des éléments primitifs de g_i) et soit $\hat{P}=\hat{P}_1\oplus\hat{P}_2\subset P_g$ l'espace de Samelson de la paire (g, h) (où $\hat{P}_i$

est l'espace de Samelson de la paire (g_i, h_i)). Alors on a $I(g_1)\cong\mathfrak{R}[c_1, , c_{r_1}]$ avec $\deg c_i\leqq\deg c_{i+1}$ et $r_1=\mathrm{rang}\, g_1$, et de même, $I(g_2)\cong\mathfrak{R}[c_1', \cdots, c_{r_2}']$ avec $\deg c_i'\leqq\deg c_{i+1}'$ et $r_2=\mathrm{rang}\ g_2$. Par conséquent, une base de P_{g_1} (resp. de P_{g_2}) est donnée par les éléments transgressifs avec $c_1, \cdots, c_{r_1}$ (resp. avec $c_1', \cdots, c_{r_2}'$). Soient $r_i'=\dim\hat{P}_i=\mathrm{rang}\, g_i-\mathrm{rang}\, h_i$, $i=1, 2$, et $y_1, \cdots, y_{r_1'}$ (resp. $y_1', \cdots, y_{r_2'}'$) une base de $\hat{P}_1$ (resp. de $\hat{P}_2$) telle que y_i (resp. y_i') soit transgressif avec c_{α_i} pour $\alpha_1<\cdots<\alpha_{r_1'}$ (resp. avec c_{β_i}' pour $\beta_1<\cdots<\beta_{r_2'}$. En particulier, si $h_1=0$ (resp. $h_2=0$), alors $\hat{P}_1=P_{g_1}$, $r_1'=r_1$ et $\alpha_i=i$ pour $i=1, \cdots, r_1$ (resp. $\hat{P}_2=P_{g_2}$, $r_2'=r_2$ et $\beta_i=i$ pour $i=1, \cdots, r_2$). De la même manière, si $h_1=h_2=0$, alors $\hat{P}_1=P_{g_1}$, $\hat{P}_2=P_{g_2}$, $r_1'=r_1$, $r_2'=r_2$, $\alpha_i=i$ et $\beta_i=i$ pour tout i.

D'autre part, pour $0\leqq q_1\leqq q_2\leqq\infty$, considérons l'idéal

$$I='F^{2(q_1+1)}I(g)+F^{2(q_2+1)}I(g)\subset I(g)\cong I(g_1)\otimes I(g_2)$$

(engendré par les sous-espaces $I^{2i}(g_1)\otimes I^{2j}(g_2)$ tels que $i>q_1$ ou $i+j>q_2$) et la DG-algèbre tronquée

$$\begin{aligned}\hat{A}_I=\hat{A}(W(g)_I)\cong&\wedge(y_1, \cdots, y_{r_1'})\otimes\wedge(y_1', \cdots, y_{r_2'}')\\&\otimes(\mathfrak{R}[c_1, \cdots, c_{r_1}]\otimes\mathfrak{R}[c_1', \cdots, c_{r_2}'])_I\end{aligned}$$

dont la différentielle d (de degré $+1$) est caractérisée par $dy_i=c_{\alpha_i}$, $dc_i=0$, $dy_i'=c_{\beta_i}'$ et $dc_i'=0$ pour tout i.

Pour énoncer le résultat, nous avons besoin des notations suivantes :

$$y_{(i)}=y_{i_1}\wedge\cdots\wedge y_{i_s}\quad \text{pour}\quad (i)=(i_1, \cdots, i_s)\,,$$
$$1\leqq i_1<\cdots<i_s\leqq r_1'\,,\quad \text{si}\quad s>0\,;$$
$$y_{(i)}=1\quad \text{pour}\quad (i)=\emptyset\quad \text{si}\quad s=0\,;$$
$$y_{(i')}'=y_{i_1'}'\wedge\cdots\wedge y_{i'_{s'}}'\quad \text{pour}\quad (i')=(i_1', \cdots, i_{s'}')\,,$$
$$1\leqq i_1'<\cdots<i_{s'}'\leqq r_2'\,,\quad \text{si}\quad s'>0\,;$$
$$y_{(i')}'=1\quad \text{pour}\quad (i')=\emptyset\quad \text{si}\quad s'=0\,;$$
$$c_{(j)}=c_1^{j_1}\cdots c_{r_1}^{j_{r_1}}\quad \text{pour}\ (j)=(j_1, \cdots, j_{r_1})\,,\quad 0\leqq j_i\,;$$
$$c_{(j')}'=c_1'^{j_1'}\cdots c_{r_2}'^{j'_{r_2}}\quad \text{pour}\quad (j')=(j_1', \cdots, j'_{r_2})\,,\quad 0\leqq j_i'\,;$$
$$z_{(i,j)}=y_{(i)}\otimes c_{(j)}\,,\quad z'_{(i',j')}=y'_{(i')}\otimes c'_{(j')}\,;$$
$$z_{(i,i',j,j')}=z_{(i,j)}\otimes z'_{(i',j')}=y_{(i)}\otimes y'_{(i')}\otimes c_{(j)}\otimes c'_{(j')}\,;$$
$$2n_i=\deg c_i\,,\quad 2p_1=\deg\ c_{(j)}=2\sum_{i=1}^{r_1}j_i\cdot n_i\,;$$

$$2n'_i = \deg c'_i\,,\quad 2p_2 = \deg c'_{(j')} = 2\sum_{i=1}^{r_2} j'_i \cdot n'_i\,,\quad p = p_1 + p_2\,;$$

$$i_0 = i_1 \quad \text{et} \quad n_{i_0} = n_{\alpha_{i_1}} \quad \text{si} \quad s > 0\,,\quad i_0 = n_{i_0} = \infty \quad \text{si} \quad s = 0\,;$$

$$i'_0 = i'_1 \quad \text{et} \quad n'_{i'_0} = n'_{\beta_{i'_1}} \quad \text{si} \quad s' > 0\,,\quad i'_0 = n'_{i'_0} = \infty \quad \text{si} \quad s' = 0\,;$$

$$j_0 = \min A_j \quad \text{et} \quad n_{j_0} = n_{\alpha_{j_0}} \quad \text{si} \quad A_j \neq \emptyset\,,\quad j_0 = n_{j_0} = \infty \quad \text{si} \quad A_j = \emptyset\,;$$

$$j'_0 = \min A'_{j'} \quad \text{et} \quad n'_{j'_0} = n'_{\beta_{j'_0}} \quad \text{si} \quad A'_{j'} \neq \emptyset\,,$$

$$j'_0 = n'_{j'_0} = \infty \quad \text{si} \quad A'_{j'} = \emptyset\,,$$

où A_j (resp. $A'_{j'}$) désigne l'ensemble des éléments $i=1, \cdots, r'_1$ tels que $j_{\alpha_i} > 0$ (resp. des éléments $i=1, \cdots, r'_2$ tels que $j'_{\beta_i} > 0$).

Nous obtenons alors le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Une $\mathfrak{K}$-base de $H(\hat{A}_I)$ est fournie par les classes de cohomologie des cocycles monômiaux $z_{(i,i',j,j')}$ vérifiant les conditions suivantes* :

(1) $0 \leqq p_1 \leqq q_1$, $0 \leqq p \leqq q_2$, $0 \leqq s \leqq r'_1$ *et* $0 \leqq s' \leqq r'_2$;

(2) $n_{i_0} + p_1 \geqq q_1 + 1$ *ou* $n_{i_0} + p \geqq q_2 + 1$, *et* $n'_{i'_0} + p \geqq q_2 + 1$ (*condition de cocycle*) ;

(3) *cette condition est énoncée comme suit* :

(a) $n'_{i'_0} < n_{j_0}$ *et* $i'_0 \leqq j'_0$ *si* $n_{i_0} > n'_{i'_0}$;

(b) $i_0 \leqq j_0$ *et* $n_{i_0} \leqq n'_{j'_0}$ *si* $n_{i_0} \leqq n'_{i'_0}$ *et* $n_{i_0} + p_1 < q_1 + 1$;

(c) $i_0 \leqq j_0$ *et* $i'_0 \leqq j'_0$ *si* $n_{i_0} \leqq n'_{i'_0}$ *et* $n_{i_0} + p_1 \geqq q_1 + 1$.

Démonstration. Il est clair que l'ensemble C des éléments $z_{(i,i',j,j')}$ tels que $0 \leqq p_1 \leqq q_1$, $0 \leqq p \leqq q_2$, $0 \leqq s \leqq r'_1$ et $0 \leqq s' \leqq r'_2$; constitue une $\mathfrak{K}$-base de $\hat{A}_I$. Soient C_a, C_b et C_c les ensembles des $z_{(i,i',j,j')} \in C$ satisfaisant respectivement aux conditions suivantes :

(a) $n_{i_0} > n'_{i'_0}$, $n'_{i'_0} < n_{j_0}$ et $i'_0 \leqq j'_0$;

(b) $n_{i_0} \leqq n'_{i'_0}$, $n_{i_0} + p_1 < q_1 + 1$, $i_0 \leqq j_0$ et $n_{i_0} \leqq n'_{j'_0}$;

(c) $n_{i_0} \leqq n'_{i'_0}$, $n_{i_0} + p_1 \geqq q_1 + 1$, $i_0 \leqq j_0$ et $i'_0 \leqq j'_0$

(en particulier, on a donc $C_a \cap C_b = C_a \cap C_c = C_b \cap C_c = \emptyset$). Posons $C'_a = C_a - C''_a$, $C'_b = C_b - C''_b$ et $C'_c = C_c - C''_c$, où C''_a, C''_b et C''_c désignent les ensembles des $z_{(i,i',j,j')}$ appartenant respectivement à C_a, C_b et C_c tels que soient des cocycles (c'est-à-dire satisfaisant respectivement aux conditions suivantes : $n'_{i'_0} + p \geqq q_2 + 1$; $n_{i_0} + p \geqq q_2 + 1$; $n'_{i'_0} + p \geqq q_2 + 1$). Considérons maintenant les sous-ensembles de C donnés par $C'_1 = C'_a \cup C'_b \cup C'_c$, $C''_1 = C''_a \cup C''_b \cup C''_c$, $C_1 = C'_1 \cup C''_1 = C_a \cup C_b \cup C_c$, $C_2 = C - C_1$ et $C'_2 = C_2 - C''_2$, où C_2'' est l'ensemble des $z_{(i,i',j,j')} \in C_2$ tels que $n_{i_0} \leqq n'_{i_0'}$, $n_{i_0} + p_1 \geqq q_1 + 1$, $i_0 \leqq j_0$, $n_{i_0} \leqq n'_{j_0'}$ et $j_0' < i_0'$. Par conséquent, C_1'' est l'ensemble des $z_{(i,i',j,j')}$ satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3).

D'autre part, étant donné un élément $z_{(i,i',j,j')} \in C$, on a alors

$$dz_{(i,i',j,j')} = \sum_{t=1}^{s} (-1)^{t+1} z_t + \sum_{t'=1}^{s'} (-1)^{s+t'+1} z'_{t'} ,$$

où z_t et $z'_{t'}$ désignent respectivement les éléments

$$y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{y}_{i_t} \wedge \cdots \wedge y_{i_s} \otimes y'_{(i')} \otimes c_{\alpha_{i_t}} \cdot c_{(j)} \otimes c'_{(j')} \text{ et}$$

$$y_{(i)} \otimes y'_{i_1'} \wedge \cdots \wedge \hat{y}'_{i'_{t'}} \wedge \cdots \wedge y'_{i'_{s'}} \otimes c_{(j)} \otimes c'_{\beta_{i'_{t'}}} \cdot c'_{(j')} .$$

Supposons maintenant que $z = z_{(i,i',j,j')} \in C_1' = C_a' \cup C_b' \cup C_c'$; alors on voit que $dz \neq 0 \in \hat{A}_I$ et que les éléments z_t, $1 \leqq t \leqq s$, et $z'_{t'}$, $1 \leqq t' \leqq s'$, vérifient les conditions suivantes :

(a′) $z_1' \in C_2'$ et les z_t, $1 \leqq t \leqq s$, et $z'_{t'}$, $2 \leqq t' \leqq s'$, différents de $0 \in \hat{A}_I$ appartiennent à C_a si $z \in C_a'$;

(b′) $z_1 \in C_2'$ et les z_t, $2 \leqq t \leqq s$, et $z'_{t'}$, $1 \leqq t' \leqq s'$, différents de $0 \in \hat{A}_I$ appartiennent respectivement à $C_b \cup C_c \cup C_2''$ et C_b si $z \in C_b'$;

(c′) $z_1' \in C_2''$, $z_t = 0 \in \hat{A}_I$, $1 \leqq t \leqq s$, et les $z'_{t'}$, $2 \leqq t' \leqq s'$, différents de $0 \in \hat{A}_I$ appartiennent à C_c si $z \in C_c'$.

Il s'ensuit que l'application

$$\delta : C_1' = C_a' \cup C_b' \cup C_c' \longrightarrow C_2 = C_2' \cup C_2''$$

définie par $\delta z = z_1'$ pour $z \in C_a' \cup C_c'$ et $\delta z = z_1$ pour $z \in C_b'$, est bijective. Compte tenu des conditions (a′), (b′) et (c′), il en résulte que l'application $d_{|C_1'} : C_1' \longrightarrow d(C_1')$ est bijective et que les ensembles $d(C_1')$, $C_1 \cup d(C_1')$ (avec $C_1 \cap d(C_1') = \emptyset$) et $C_1'' \cup d(C_1')$ sont respectivement $\mathfrak{K}$-bases de $d\hat{A}_I$, $\hat{A}_I$ et Ker d. Par suite, on a alors

$$\hat{A}_I = \tilde{C}_1 \oplus d\hat{A}_I = \tilde{C}_1' \oplus \tilde{C}_1'' \oplus d\hat{A}_I \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} d = \tilde{C}_1'' \oplus d\hat{A}_I ,$$

où $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_1'$ et $\tilde{C}_1''$ désignent les $\mathfrak{K}$-sous-espaces de $\hat{A}_I$ engendrés respectivement par les ensembles C_1, C_1' et C_1''. Ceci prouve que la projection canonique $\operatorname{Ker} d \longrightarrow H(\hat{A}_I) = \operatorname{Ker} d / d\hat{A}_I$ induit un isomorphisme $\mathfrak{K}$-linéaire $\tilde{C}_1'' \xrightarrow{\cong} H(\hat{A}_I)$, d'où le théorème.

Remarques. 1) Le résultat précédent généralise celui de Kamber-Tondeur [8], Théorème 5.110 (cf. aussi Masa [10]). Par conséquent, le Théorème 3.1 est une généralisation du théorème de Vey [7], p.383.

2) Les classes des $z_{(i,\phi,j,0)}=z_{(i,j)}\otimes 1\in C_1''$ avec $s'=p_2=0$ (resp. des $z_{(\phi,i',0,j')}=1\otimes z'_{(i',j')}\in C_1''$ avec $s=p_1=0$) constituent une base de l'image de l'homomorphisme injectif canonique $H(\hat{A}(W(g_1)_{q_1}))\longrightarrow H(\hat{A}_I)$ (resp. $H(\hat{A}(W(g_2)_{q_2}))\longrightarrow H(\hat{A}_I)$). De même, une base de l'image de l'homomorphisme canonique $H(\hat{A}(W(g)_{q_2}))\longrightarrow H(\hat{A}_I)$ est fournie par les classes des $z_{(i,i',j,j')}\in C_1''$ tels que $n_{i_0}+p\geqq q_2+1$. En particulier, si $q_1=q_2=q\geqq 0$, alors $\hat{A}(W(g)_q)=\hat{A}_I$ et les éléments de la base de Vey de $H(\hat{A}(W(g)_q))$ coïncident (à un signe près) avec les éléments de la base de $H(\hat{A}_I)$ donnée dans le Théorème 3.1. D'autre part, pour $q_1=0$ ou $q_2=\infty$, on a donc $H(\hat{A}_I)\cong H(\hat{A}(W(g_1)_{q_1}))\otimes H(\hat{A}(W(g_2)_{q_2}))$.

3) Les classes des $z_{(\phi,\phi,j,j')}=1\otimes 1\otimes c_{(j)}\otimes c'_{(j')}\in C_1''$, $s=s'=0$, constituent une $\mathfrak{K}$-base de l'algèbre des classes caractéristiques universelles primaires (induites par l'homomorphisme canonique $I(g)\longrightarrow H(\hat{A}_I)$). De même, les classes des $z_{(i,i',j,j')}\in C_1''$ tels que $s>0$ ou $s'>0$ constituent une $\mathfrak{K}$-base de l'algèbre des classes caractéristiques universelles secondaires ; de plus, les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) $2q_1+1\leqq \deg z_{(i,i',j,j')}\leqq 2q_2+m_1$ pour $s>0$ et $s'=0$ (si, de plus, $p_2=0$, on a $\deg z_{(i,i',j,j')}\leqq 2q_1+m_1$), où $m_1=\dim g_1$;

(b) $2q_2+1\leqq \deg z_{(i,i',j,j')}\leqq 2q_2+m_2$ pour $s=0$ et $s'>0$, où $m_2=\dim g_2$;

(c) $2q_2+2\leqq \deg z_{(i,i',j,j')}\leqq 2q_2+m$ pour $s>0$ et $s'>0$, où $m=m_1+m_2=\dim g$.

4) Pour $0<q_1<q_2<\infty$, les classes secondaires des $z_{(i,i',j,j')}\in C_c''$ (avec $s>0$ et $s'>0$) tels que $n_{i_0}+p_1\geqq q_1+1$, $n_{i_0}+p<q_2+1$, $n'_{i_0'}+p\geqq q_2+1$ et $n'_{i_0'}+p_2<q_2+1$ (en particulier, $n_{i_0}<n'_{i_0'}$), ne sont pas induites dans $H(\hat{A}_I)$ par celles de $H(\hat{A}(W(g_1)_{q_1}))\otimes H(\hat{A}(W(g_2)_{q_2}))$ ou $H(\hat{A}(W(g)_{q_2}))$.

Définition 3.2. *La $\mathfrak{K}$-base de $H(\hat{A}_I)$ fournie par les classes des $z_{(i,i',j,j')}\in C_1''$ satisfaisant aux conditions* (1), (2) *et* (3) du Théorème 3.1 *sera appelée la base de Vey de $H(\hat{A}_I)$.*

Exemple 1. Pour la paire $(g,h)=(gl(r_1)\oplus gl(r_2),\ so(r_1)\oplus so(r_2))$ d'algèbres de Lie de la paire $(G,H)=(GL(r_1)\times GL(r_2),\ O(r_1)\times O(r_2))$ de groupes de Lie et $0\leqq q_1\leqq q_2\leqq\infty$, considérons la DG-algèbre tronquée $\hat{A}_I\cong \wedge(y_1,y_3,\cdots,y_{r_1'})\otimes\wedge(y_1',y_3',\cdots,y'_{r_2'})\otimes(\mathfrak{R}[c_1,c_2,\cdots,c_{r_1}]\otimes\mathfrak{R}[c_1',c_2',\cdots,c'_{r_2}])_I$ dont la différentielle d (de degré $+1$) est donnée par

$$dy_i=c_i\,,\quad dc_i=0\,,\quad dy_i'=c_i'\quad\text{et}\quad dc_i'=0\quad\text{pour tout } i\,,$$

où les éléments y_i (resp. y_i') de degrés $2i-1$ sont les suspensions des polynômes de Chern $c_i \in I(GL(r_1)) \cong \mathfrak{R}[c_1, c_2, \cdots, c_{r_1}]$ (resp. $c_i' \in I(GL(r_2)) \cong \mathfrak{R}[c_1', c_2', \cdots, c_{r_2}']$) de degrés $2i$, avec i impair, et où $r_i' = 2[(r_i+1)/2]-1$, $i=1, 2$. Soient maintenant

$$z_{(i,i',j,j')} = y_{(i)} \otimes y'_{(i')} \otimes c_{(j)} \otimes c'_{(j')} = y_{i_1} \wedge \cdots \wedge y_{i_s} \otimes y'_{i_1'} \wedge \cdots \wedge y'_{i'_{s'}} \otimes c_1^{j_1} \cdots c_{r_1}^{j_{r_1}} \otimes c_1'^{j'_1} \cdots c_{r_2}'^{j'_{r_2}}$$

les cochaînes de $\widehat{A}_I$ telles que

$1 \leqq i_1 < \cdots < i_s \leqq r_1'$ avec i_k impair pour $s>0$,

$y_{(i)} = 1$ pour $s=0$;

$1 \leqq i_1' < \cdots < i'_{s'} \leqq r_2'$ avec i_k' impair pour $s'>0$,

$y'_{(i')} = 1$ pour $s'=0$;

$2p_1 = \deg c_{(j)} = 2\sum_{i=1}^{r_1} j_i \cdot i$, $j_i \geqq 0$, $2p_2 = \deg c'_{(j')} = 2\sum_{i=1}^{r_2} j'_i \cdot i$,

$j_i' \geqq 0$, $p = p_1 + p_2$;

$i_0 = i_1$ pour $s>0$, $i_0 = \infty$ pour $s=0$,

$i_0' = i_1'$ pour $s'>0$, $i_0' = \infty$ pour $s'=0$;

$j_0 = \min A_j$ pour $A_j \neq \emptyset$, $j_0 = \infty$ pour $A_j = \emptyset$,

$j_0' = \min A'_{j'}$ pour $A'_{j'} \neq \emptyset$, $j_0' = \infty$ pour $A'_{j'} = \emptyset$,

où A_j (resp. $A'_{j'}$) désigne l'ensemble des $i=1, 3, \cdots, r_1'$ tels que $j_i>0$ (resp. des $i=1, 3, \cdots, r_2'$ tels que $j_i'>0$). Alors, d'après le Théorème 3.1, la base de Vey de $H(\widehat{A}_I) \cong H(W(g, H)_I)$ est constituée par les classes de cohomologie des cocycles monômiaux $z_{(i,i',j,j')}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) $0 \leqq p_1 \leqq q_1$, $0 \leqq p \leqq q_2$, $0 \leqq s \leqq [(r_1+1)/2]$ et $0 \leqq s' \leqq [(r_2+1)/2]$;

(2) $i_0 + p_1 \geqq q_1 + 1$ ou $i_0 + p \geqq q_2 + 1$, et $i_0' + p \geqq q_2 + 1$ (condition de cocycle);

(3) cette condition est énoncée comme suit :

(a) $i_0' < j_0$ et $i_0' \leqq j_0'$ si $i_0 > i_0'$;

(b) $i_0 \leqq j_0$ et $i_0 \leqq j_0'$ si $i_0 \leqq i_0'$ et $i_0 + p_1 < q_1 + 1$;

(c) $i_0 \leqq j_0$ et $i_0' \leqq j_0'$ si $i_0 \leqq i_0'$ et $i_0 + p_1 \geqq q_1 + 1$.

En particulier, les classes des cocycles suivants seront des classes caractéristiques secondaires de degré minimum (pour $q_2 < \infty$) :

(i) $y_1 \otimes c_1^{q_1} = y_1 \otimes 1 \otimes c_1^{q_1} \otimes 1$ de degré $2q_1 + 1$;

(ii) $y_1' \otimes c_1'^{q_2} = 1 \otimes y_1' \otimes 1 \otimes c_1'^{q_2}$ et $y_1 \otimes c_1^j c_1'^{q_2-j} = y_1 \otimes 1 \otimes c_1^j \otimes c_1'^{q_2-j}$ (ou son cohomologue $y_1'\otimes c_1^{j+1}c_1'^{q_2-(j+1)}=1\otimes y_1'\otimes c_1^{j+1}\otimes c_1'^{q_2-(j+1)})$ pour $0\leqq j<q_1$, de degré $2q_2+1$;

(iii) $y_1\wedge y_1'\otimes c_1^j c_1'^{q_2-j}=y_1\otimes y_1'\otimes c_1^j\otimes c_1'^{q_2-j}$ pour $0\leqq j\leqq q_1$, de degré $2q_2+2$.

Ainsi, pour $r_1=q_1$ et $r_2=q_2-q_1\geqq 0$ (avec $q_2<\infty$), on a obtenu la base de Vey de l'algèbre $H(\hat{A}_l)=H(WO_l)$ des classes caractéristiques universelles pour les sous-feuilletages de codimension (q_1, q_2).

De même, pour $r_1=r_2=1$ et $q_2<\infty$, les classes caractéristiques secondaires de degré minimum des cocycles (i), (ii) et (iii) constituent la base de Vey de

$$\begin{aligned}&H^+(W(gl(1)\oplus gl(1),\quad O(1)\times O(1))_l)\\&\quad=H^+(W(gl(1)\oplus gl(1))_l)=H^+(\wedge(y_1)\otimes\wedge(y_1')\otimes(\mathfrak{R}[c_1]\otimes\mathfrak{R}[c_1'])_l)\,.\end{aligned}$$

Définition 3.3. *Les classes secondaires de degré minimum* $[y_1\otimes c_1^{q_1}]$, $[y_1'\otimes c_1^j c_1'^{q_2-j}]$, $[y_1\wedge y_1'\otimes c_1^j c_1'^{q_2-j}]\in H^+(W(gl(1)\oplus gl(1))_l)$ *pour* $0\leqq j\leqq q_1$, *seront appelées les classes de Godbillon-Vey* (*universelles*) *pour les sous-feuilletages de codimension* (q_1, q_2).

Plus précisément, on verra au § 5 que de telles classes nous permettent d'obtenir des classes caractéristiques secondaires pour les sous-feuilletages de codimension (q_1, q_2), en utilisant des techniques similaires à celles utilisées par Godbillon-Vey [5] pour un feuilletage. Par exemple, si (F_1, F_2) est un sous-feuilletage de codimension (q_1, q_2) sur M, la classe de Godbillon-Vey de F_1 (resp. de F_2) est donnée par $\Delta_*[y_1\otimes c_1^{q_1}]\in H_{DR}^{2q_1+1}(M)$ (resp. par

$$\Delta_*[(y_1+y_1')\otimes(c_1+c_1')^{q_2}]=\sum_{j=0}^{q_1}\begin{bmatrix} q_2+1\\ j\end{bmatrix}\ \Delta_*[y_1'\otimes c_1^j c_1'^{q_2-j}]\in H_{DR}^{2q_2+1}(M)$$

pour $q_1<q_2$) ; d'autre part, les classes de Godbillon-Vey

$$\Delta_*[y_1\wedge y_1'\otimes c_1^j c_1'^{q_2-j}]\in H_{DR}^{2q_2+2}(M)\,,\quad 0\leqq j\leqq q_1\,,$$

non nulles sont, en général (pour $0<q_1<q_2<\infty$), des nouveaux invariants caractéristiques secondaires du sous-feuilletage (F_1, F_2) qui ne peuvent pas s'obtenir en considérant séparément les feuilletages de la paire.

Exemple 2. Prenons $(G, H)=(GL(r_1)\times GL(r_2),\quad SO(r_1)\times SO(r_2))$. Compte tenu de l'isomorphisme $H(W(g, H)_l)\cong H(\hat{A}_l)\otimes_{I(G)}I(H)$, avec $0\leqq q_1\leqq q_2\leqq\infty$, on a donc

$$H(W(g, H)_I) \cong \begin{cases} H(\hat{A}_I) \quad \text{pour } r_1 = 2m-1 \text{ et } r_2 = 2n-1 \\ (H(\hat{A}_I) \otimes \Re[e_m])/(c_{2m} - e_m^2) \quad \text{pour } r_1 = 2m \text{ et } r_2 = 2n-1 \\ (H(\hat{A}_I) \otimes \Re[e_n'])/(c'_{2n} - e_n'^2) \quad \text{pour } r_1 = 2m-1 \text{ et } r_2 = 2n \\ (H(\hat{A}_I) \otimes \Re[e_m] \otimes \Re[e_n'])/(c_{2m} - e_m^2, c_{2n}' - e_n'^2) \\ \qquad \text{pour } r_1 = 2m \text{ et } r_2 = 2n\,, \end{cases}$$

où la cohomologie $H(\hat{A}_I)$ a été calculée dans l'Exemple 1, et où $e_m \in I^{2m}(SO(r_1))$ (resp. $e_n' \in I^{2n}(SO(r_2))$) est le polynôme de Pfaff pour $r_1 = 2m$ (resp. pour $r_2 = 2n$).

Remarque. Le calcul de la cohomologie $H(W(u(r_1) \oplus u(r_2), O(r_1) \times O(r_2))_I)$ (resp. $H(W(u(r_1) \oplus u(r_2), SO(r_1) \times SO(r_2))_I))$ est identique à celui de $H(W(gl(r_1) \oplus gl(r_2), O(r_1) \times O(r_2))_I)$ (resp. de $H(W(gl(r_1) \oplus gl(r_2), SO(r_1) \times SO(r_2))_I))$.

De la même manière, nous calculons les cohomologies $H(W(gl(r_1) \oplus gl(r_2))_I)$, $H(W(u(r_1) \oplus u(r_2))_I)$ et $H(W(gl(r_1, \mathfrak{C}) \oplus gl(r_2, \mathfrak{C}))_I)$. Ainsi, nous obtenons en particulier la base de Vey de l'algèbre $H^+(W_I) \cong H^+(W(gl(q_1) \oplus gl(q_2 - q_1))_I)$ des classes caractéristiques universelles secondaires pour les sous-feuilletages de codimension (q_1, q_2) à fibré normal trivialisé.

Soit maintenant $\hat{A}_I$ la DG-algèbre considérée dans le Théorème 3.1. Alors, par un raisonnement identique à celui qui a été utilisé dans la démonstration de ce théorème, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.4. *Une $\mathfrak{R}$-base de $H(\hat{A}_I)$ est fournie par les classes de cohomologie des cocycles monômiaux $z_{(i,i',j,j')}$ vérifiant les conditions* (1) *et* (2) *du Théorème* 3.1, *et la condition suivante*:

(3′) *cette condition est énonciée comme suit*:

(a′) $n'_{i_0'} \leqq n_{j_0}$ *et* $i_0' \leqq j_0'$ *si* $n_{i_0} \geqq n'_{i_0'}$;

(b′) $i_0 \leqq j_0$ *et* $n_{i_0} < n'_{j_0'}$ *si* $n_{i_0} < n'_{i_0'}$ *et* $n_{i_0} + p_1 < q_1 + 1$;

(c′) $i_0 \leqq j_0$ *et* $i_0' \leqq j_0'$ *si* $n_{i_0} < n'_{i_0'}$ *et* $n_{i_0} + p_1 \geqq q_1 + 1$.

§ 4. Quelques Propriétés des Sous-feuilletages. Classes Caractéristiques

Dans ce paragraphe nous étudions quelques propriétés des sous-feuilletages. En particulier, nous donnons certaines interprétations géométriques des classes de Godbillon-Vey d'un sous-feuilletage.

Soit (F_1, F_2) un sous-feuilletage de codimension (q_1, q_2) sur une variété différentiable M de dimension n, et soit $d=q_2-q_1\geqq 0$. Considérons le fibré normal $Q_1\oplus Q_0=(TM/F_1)\oplus(F_1/F_2)$ (resp. $Q_2=TM/F_2$) de (F_1, F_2) (resp. de F_2). D'après Cordero-Masa [3], les fibrés vectoriels isomorphes Q_2 et $Q_1\oplus Q_0$ sont canoniquement F_2-feuilletés, mais ces fibrés ne sont en général pas isomorphes comme fibrés vectoriels F_2-feuilletés.

Soient maintenant ∇ une connexion sur Q_0 et π_1' : $TM\longrightarrow F_1$ une scission de la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0\longrightarrow F_1\xrightarrow{i_1} TM\xrightarrow{\pi_1} Q_1\longrightarrow 0\ .$$

La torsion de ∇ par rapport à π_1' est la 2-forme $T=T_{\pi_1'}$ sur M à valeurs dans Q_0 donnée par la dérivée extérieure covariante de $\pi_0'=\pi_0\circ\pi_1'$: $TM\longrightarrow F_1\longrightarrow Q_0$ (par rapport à ∇), où π_0 est la projection canonique, c'est-à-dire

$$T(X,\ Y)=\nabla_X\pi_0'(Y)-\nabla_Y\pi_0'(X)-\pi_0'[X,\ Y] \quad \text{pour tout} \quad X,\ Y\in\Gamma(TM)\,.$$

Par conséquent, on a donc

$$T(X,\ Y)=\nabla_X\pi_0(Y)-\nabla_Y\pi_0(X)-\pi_0[X,\ Y] \quad \text{pour tout} \quad X,\ Y\in\Gamma(F_1)\,.$$

Ainsi, pour $F_1=TM$, cette notion coïncide avec la notion habituelle.

D'autre part, par un raisonnement analogue à celui utilisé par Cordero-Masa dans [3], nous obtenons alors le résultat suivant.

Proposition 4.1. i) *Une connexion ∇ sur Q_0 est adaptée (à la connexion partielle de Bott sur Q_0) si et seulement si $i_1^*(i(X)T)=0$ pour tout $X\in\Gamma(F_2)$, où $T=T_{\pi_1'}$ est la torsion de ∇ par rapport à une scission π_1' quelconque de la suite exacte précédente, et où $i(X)$ est l'opérateur substitution.*

ii) *Pour que les fibrés Q_2 et $Q_1\oplus Q_0$ soient isomorphes comme fibrés vectoriels F_2-feuilletés il faut et il suffit qu'il existe une scission π_1' de la suite exacte précédente telle que $i(X)T=0$ pour tout $X\in\Gamma(F_2)$, où $T=T_{\pi_1'}$ est la torsion d'une connexion F_2-adaptée ∇ sur Q_0 quelconque.*

iii) *Il existe un feuilletage F' de codimension $d=q_2-q_1\geqq 0$ sur M tel que $F_2=F_1\cap F'$ si et seulement si l'on peut choisir une connexion ∇ sans torsion sur Q_0 (i.e. $T=T_{\pi_1'}=0$) par rapport à quelque scission π_1' de la suite exacte précédente.*

On en déduit le

Corollaire 4.2. *S'il existe un feuilletage F' de codimension $d=q_2-q_1$*

sur M tel que $F_2 = F_1 \cap F'$, alors Q_2 et $Q_1 \oplus Q_0$ sont isomorphes comme fibrés vectoriels F_2-feuilletés. L'implication réciproque est aussi valable pour $q_1 = 1$.

Remarque. Si F est un feuilletage de codimension q sur M considéré comme un sous-feuilletage des trois façons différentes, on a (i) $F' = TM$ pour $F_1 = F_2 = F$ et $q_1 = q_2 = q$; (ii) $F' = F$ pour $F_1 = TM$, $F_2 = F$, $q_1 = 0$ et $q_2 = q$; (iii) pour $F_1 = F$, $F_2 = 0$, $q_1 = q$ et $q_2 = n$, on peut seulement affirmer que $Q_2 = TM$ et $Q_1 \oplus Q_0 = (TM/F) \oplus F$ sont isomorphes comme fibrés vectoriels 0-feuilletés.

Pour interpréter géométriquement certaines classes caractéristiques d'un sous-feuilletage, nous considérons le

Lemme 4.3. *Si Q_2 et $Q_1 \oplus Q_0$ sont isomorphes comme fibrés vectoriels F_2-feuilletés, il existe une connexion F_2-adaptée ∇ sur Q_0 de courbure R telle que*

$$R(X, Y) = 0 \text{ pour tout } X \in \Gamma(F_2) \text{ et tout } Y \in \Gamma(\mathrm{Ker}\, \pi_1') \cong \Gamma(Q_1)\,,$$

où π_1' est la scission de $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow TM \longrightarrow Q_1 \longrightarrow 0$ donnée dans la Proposition 4.1, partie ii).

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}$ une métrique riemannienne sur M telle que $\mathrm{Ker}\, \pi_1' \cong Q_1$ soit le fibré complément orthogonal de F_1 dans TM. En utilisant cette métrique, le fibré Q_2 (resp. Q_0) est isomorphe au fibré complément orthogonal de F_2 dans TM (resp. dans F_1). Par conséquent,

$$F_1 \cong F_2 \oplus Q_0\,, \quad Q_2 \cong Q_0 \oplus Q_1 \quad \text{et} \quad TM \cong F_1 \oplus Q_1 \cong F_2 \oplus Q_2 \cong F_2 \oplus Q_0 \oplus Q_1\,.$$

Considérons maintenant la *seconde connexion* $\tilde{\nabla}$ de la variété feuilletée riemannienne $(M, \mathfrak{g}, F_1)$ au sens de Vaisman ([13], p.181). Puisque l'application composée $\pi_0' \circ \tilde{\nabla}_{|\Gamma(TM) \times \Gamma(Q_0)} : \Gamma(TM) \times \Gamma(Q_0) \longrightarrow \Gamma(Q_0)$ est une connexion ∇^0 sur Q_0, on définit alors une connexion F_2-adaptée ∇ sur Q_0 en posant pour tout $X = X_1 + X_2 \in \Gamma(TM)$, $X_1 \in \Gamma(F_2)$ et $X_2 \in \Gamma(Q_2)$, et tout $Z \in \Gamma(Q_0)$,

$$\nabla_X Z = \pi_0[X_1, Z] + \nabla^0_{X_2} Z\,.$$

Compte tenu de la Proposition 4.1, partie ii), on obtient

$$R(X, Y) = 0 \quad \text{pour tout} \quad X \in \Gamma(F_2) \quad \text{et tout} \quad Y \in \Gamma(\mathrm{Ker}\, \pi_1') \cong \Gamma(Q_1)\,,$$

R étant la courbure de ∇, d'où le lemme. □

On déduit de ce lemme le

Théorème 4.4. *Si Q_2 et $Q_1 \oplus Q_0$ sont isomorphes comme fibrés vectoriels F_2-feuilletés, l'homomorphisme caractéristique Δ_* du sous-feuilletage (F_1, F_2) se factorise de la manière suivante :*

$$\Delta_* : H(WO_I) \xrightarrow{p_*} H(W(gl(q_1) \oplus gl(d)\,,\ O(q_1) \times O(d))_{I'}) \longrightarrow H_{DR}(M)\,,$$

où p est la projection canonique induite par l'inclusion

$$I \subset I' = I + W(gl(q_1)) \otimes F^{2([q_1/2]+d+1)} W(gl(d))\,.$$

Ainsi, avec les hypothèses du théorème précédent, les classes de Godbillon-Vey

$$\Delta_*[y_1' \otimes c_1^{q_1-k} c_1'^{d+k}] \quad \text{et} \quad \Delta_*[y_1 \wedge y_1' \otimes C_1^{q_1-k} c_1'^{d+k}]$$

de ce sous-feuilletage sont nulles pour $k=[q_1/2]+1, \cdots, q_1$.

On en déduit le

Corollaire 4.5. *Pour que les structures F_2-feuilletées de Q_2 et $Q_1 \oplus Q_0$ soient incompatibles il suffit que l'une des classes de Godbillon-Vey précédentes soient non nulles.*

Dans le cas où $F_2 = F_1 \cap F'$ pour F' de codimension $d = q_2 - q_1$, le fibré vectoriel F_2-feuilleté $Q_0 \cong TM/F'$ est aussi F'-feuilleté. Par suite,

Théorème 4.6. *S'il existe un feuilletage F' de codimension $d = q_2 - q_1$ sur M tel que $F_2 = F_1 \cap F'$, l'homomorphisme caractéristique Δ_* du sous-feuilletage (F_1, F_2) se factorise comme suit :*

$$\Delta_* : H(WO_I) \xrightarrow{p_*'} H(WO_{q_1}) \otimes H(WO_d)$$

$$\xrightarrow{\Delta_*(Q_1) \otimes \Delta_{*F'}(Q_0)} H_{DR}(M) \otimes H_{DR}(M) \xrightarrow{\mu} H_{DR}(M)\,,$$

où μ est la multiplication de $H_{DR}(M)$, où $\Delta_*(Q_1)$ (resp. $\Delta_{*F'}(Q_0)$) est l'homomorphisme caractéristique du feuilletage F_1 (resp. du feuilletage F'), et où p' est la projection canonique induite par l'inclusion

$$I \subset (F^{2(q_1+1)} W(gl(q_1))) \otimes W(gl(d)) + W(gl(q_1)) \otimes F^{2(d+1)} W(gl(d))\,.$$

Pour $0 < q_1 < q_2$, le théorème précédent implique que les uniques classes de Godbillon-Vey du sous-feuilletage $(F_1, F_2) = (F_1, F_1 \cap F')$ qui peuvent être non nulles sont les deux classes suivantes :

$$\Delta_*[y_1 \otimes c_1^{q_1}] \quad \text{et} \quad \Delta_*[y_1 \wedge y_1' \otimes c_1^{q_1} c_1'^{d}]\,;$$

par conséquent, la classe de Godbillon-Vey du feuilletage F_2 est nulle (cf. aussi Moussu [12]).

On en déduit le

Corollaire 4.7. *Si l'une des classes de Godbillon-Vey*

$$\Delta_*[y_1'\otimes C_1^{q_1-k}c_1'^{d+k}] \quad et \quad \Delta_*[y_1\wedge y_1'\otimes c_1^{q_1-k}c_1'^{d+k}], \quad 1\leqq k\leqq q_1,$$

n'est pas nulle, il n'existe aucun feuilletage F' de codimension $d=q_2-q_1$ sur M tel que $F_2=F_1\cap F'$.

Remarque. Il est clair que toutes les classes de Godbillon-Vey de (F_1, F_2) sont nulles dans les deux cas suivants :
(i) le fibré des repères transverses à ce sous-feuilletage admet une connexion basique somme ;
(ii) le fibré normal de ce sous-feuilletage est orientable (i.e. Q_1 et Q_0 sont des fibrés vectoriels orientables) et la structure (F_1, F_2)-feuilletée de $P=L(Q_1)+L(Q_0)$ est induite par une structure (F_1, F_2)-feuilletée d'une $SL(q_1)\times SL(d)$-réduction $P'=P_1'+P_2'$ de P.

§ 5. Classes de Godbillon-Vey d'un Sous-feuilletage

Dans ce paragraphe, en reprenant les notations du § 4, nous construisons les classes de Godbillon-Vey d'un sous-feuilletage de deux façons différentes, l'une d'elles est basée sur les techniques de Godbillon-Vey [5], l'autre utilise l'homomorphisme caractéristique du sous-feuilletage.

a) *Construction de ces classes par les techniques de Godbillon-Vey.*

Soit $0\longrightarrow Q_0\xrightarrow{i} Q_2\xrightarrow{\pi} Q_1\longrightarrow 0$ la suite exacte de fibrés vectoriels, canoniquement associée à (F_1, F_2). Soient Q_i^*, $i=0, 1, 2$, les fibrés vectoriels duals de Q_i ; on considère Q_0^* comme un sous-fibré vectoriel de Q_2^*, en utilisant une scission $p^*: Q_0^*\longrightarrow Q_2^*$ de la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0\longrightarrow Q_1^*\xrightarrow{\pi^*} Q_2^*\xrightarrow{i^*} Q_0^*\longrightarrow 0.$$

Par conséquent, on a donc $\wedge Q_1^*\otimes\wedge Q_0^*\cong\wedge Q_2^*\subset\wedge TM^*$.

Supposons maintenant que (F_1, F_2) soit un sous-feuilletage à fibré normal orientable (c'est Q_1 et Q_0 sont des fibrés vectoriels orientables). Soient γ_1 et γ_2 deux formes volumes de Q_1 et Q_0 respectivement ; en particulier, $\gamma=\gamma_1\Lambda\gamma_2$ est une forme volume de Q_2. Alors il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{R}=\{U\}$ de M et un repère mobile $\{\omega_i\}$, $1\leqq i\leqq q_2$, sur U pour $Q_2{}^*\cong Q_1{}^*\oplus Q_0{}^*\subset TM^*$ tel que $\{\omega_u\}$, $1\leqq u\leqq q_1$ (resp. $\{\omega_a\}$, $q_1+1\leqq a\leqq q_2\}$ soit un repère mobile sur U pour $Q_1{}^*$ (resp. pour $Q_0{}^*$), et tel que, sur chaque $U\in\mathfrak{R}$, on ait

$$\gamma_1=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{q_1} \quad \text{et} \quad \gamma_2=\omega_{q_1+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{q_2}\,.$$

Par le théorème de Frobenius, il existe des 1-formes locales α_{uv}, α_{av} et α_{ab}, $1\leqq u,\ v\leqq q_1,\ q_1+1\leqq a,\ b\leqq q_2$, sur M telles que $d\omega_u=\sum_{v=1}^{q_1}\alpha_{uv}\wedge\omega_v$ et $d\omega_a=\sum_{v=1}^{q_1}\alpha_{av}\wedge\omega_v+\sum_{b=q_1+1}^{q_2}\alpha_{ab}\wedge\omega_b$. Ainsi, par différentiation de ces relations, on obtient, sur chaque $U\in\mathfrak{R}$,

$$\begin{aligned} d\gamma_1=\tau_1{}^U\Lambda\gamma_1 \quad \text{et} \quad & d\gamma_2-\tau_2{}^U\Lambda\gamma_2=\sum_{v=1}^{q_1}\omega_v\wedge\phi_v\in F^1\Omega(U)\\ &=\Gamma(U,\underline{Q}_1{}^*\cdot\Omega_M)\subset\Omega(U)\,,\end{aligned}$$

où $\tau_1{}^U=\sum_{u=1}^{q_1}\alpha_{uu}$, $\tau_2{}^U=\sum_{a=q_1+1}^{q_2}\alpha_{aa}$ et $\phi_v=\sum_{a=q_1+1}^{q_2}(-1)^{a-q_1}\alpha_{av}\wedge\omega_{q_1+1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\omega}_a\wedge\cdots\wedge\omega_{q_2}$, et où $\underline{Q}_1{}^*$ désigne le faisceau de 1-formes locales annulant F_1.

D'autre part, considérons une partition différentiable de l'unité $\{\lambda^U\}$ subordonnée au recouvrement $\mathfrak{R}$. On définit alors deux 1-formes τ_1 et τ_2 sur M en posant

$$\tau_i=\sum_{U\in\mathfrak{R}}\lambda^U\cdot\tau_i{}^U \quad \text{pour} \quad i=1,\,2\,.$$

Il en résulte que

$$d\gamma_1=\tau_1\wedge\gamma_1 \quad \text{et} \quad d\gamma_2-\tau_2\wedge\gamma_2\in F^1\Omega(M)=\Gamma(M,\underline{Q}_1{}^*\cdot\Omega_M)\subset\Omega(M)\,.$$

En particulier, on a donc $d\gamma=\tau\wedge\gamma$ avec $\tau=\tau_1+\tau_2$.

Nous obtenons alors le résultat suivant.

Lemme 5.1. *Les formes $\tau_1\wedge(d\tau_1)^{q_1}$, $\tau_2\wedge(d\tau_1)^j\wedge(d\tau_2)^{q_2-j}$ et $\tau_1\wedge\tau_2\wedge(d\tau_1)^j\wedge(d\tau_2)^{q_2-j}$, $0\leqq j\leqq q_1$, sur M sont fermées, et leurs classes de cohomologie dans $H_{DR}(M)$ ne dépendent que du sous-feuilletage (F_1, F_2).*

On peut généraliser la construction précédente au cas général d'un sous-feuilletage (F_1, F_2) dont le fibré normal $Q_1\oplus Q_0$ n'est pas nécessairement orientable comme suit. Soit $\mathfrak{R}=\{U\}$ un recouvrement ouvert de M tel qu'il existe un repère mobile normé $\gamma_1{}^U$ (resp. $\gamma_2{}^U$) sur U pour $\wedge^{q_1}Q_1{}^*$

(resp. pour $\wedge^d Q_0^*$) par rapport à une métrique riemannienne fixe sur $\wedge^{q_1} Q_1^*$ (resp. sur $\wedge^d Q_0^*$). En particulier, $\gamma^U=\gamma_1^U\wedge\gamma_2^U$ est un repère mobile normé sur U pour $\wedge^{q_2}Q_2^*\cong\wedge^{q_1}Q_1^*\otimes\wedge^d Q_0^*$ par rapport à la métrique riemannienne induite. Alors, par une technique similaire à celle utilisée dans le cas précédent, on construit deux 1-formes τ_1 et τ_2 sur M (entièrement définies) telles que, sur chaque $U\in\mathfrak{R}$, $d\gamma_1^U=\tau_1\wedge\gamma_1^U$ et $d\gamma_2^U-\tau_2\wedge\gamma_2^U\in F^1\Omega(U)$. Par suite, $d\gamma^U=\tau\wedge\gamma^U$ avec $\tau=\tau_1+\tau_2$. Compte tenu du lemme précédent et du fait qu'il existe un revêtement à quatre feuillets $f: M'\longrightarrow M$ tel que $f^{-1}(F_1, F_2)=(f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2))$ soit un sous-feuilletage de codimension (q_1, q_2) sur M' dont le fibré normal est orientable, on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.2. *Les formes $\tau_1\wedge(d\tau_1)^{q_1}$, $\tau_2\wedge(d\tau_1)^j\wedge(d\tau_2)^{q_2-j}$ et $\tau_1\wedge\tau_2\wedge(d\tau_1)^j\wedge(d\tau_2)^{q_2-j}$, $0\leqq j\leqq q_1$, sur M sont fermées, et leurs classes de cohomologie dans $H_{DR}(M)$ ne dépendent que du sous-feuilletage (F_1, F_2).*

De telles classes de cohomologie dans $H_{DR}(M)$ seront appelées les *classes de Godbillon-Vey du sous-feuilletage* (F_1, F_2).

Remarques. 1) Il est clair que $[\tau_1\wedge(d\tau_1)^{q_1}]\in H_{DR}^{2q_1+1}(M)$ est la classe de Godbillon-Vey du feuilletage F_1 et que (pour $q_1<q_2$)

$$[\tau\wedge(d\tau)^{q_2}]=\sum_{j=0}^{q_1}\begin{pmatrix} q_2+1 \\ j \end{pmatrix}[\tau_2\wedge(d\tau_1)^j\wedge(d\tau_2)^{q_2-j}]\in H_{DR}^{2q_2+1}(M)$$

est la classe de Godbillon-Vey du feuilletage F_2.

2) Du Théorème 5.2 on déduit immédiatement que l'homomorphisme $f^*: H_{DR}(M)\longrightarrow H_{DR}(N)$ induit en cohomologie par une application différentiable transverse $f: N\longrightarrow M$ à (F_1, F_2), transforme chaque classe de Godbillon-Vey de (F_1, F_2) en la classe correspondante de Godbillon-Vey du sous-feuilletage $f^{-1}(F_1, F_2)$ sur la variété N. En particulier, les classes de Godbillon-Vey d'un sous-feuilletage ne dépendent que de la classe d'homotopie de ce sous-feuilletage.

b) *Construction des classes de Godbillon-Vey en utilisant l'homomorphisme caractéristique.*

Soit $P=L(Q_1^*)+L(Q_0^*)$ le fibré principal (F_1, F_2)-feuilleté des $GL(q_1)\times GL(d)$-repères de $Q_1^*\oplus Q_0^*$. Alors le fibré principal (F_1, F_2)-feuilleté $P'=L(\wedge^{q_1}Q_1^*)+L(\wedge^d Q_0^*)$ des $GL(1)\times GL(1)$-repères de $\wedge^{q_1}Q_1^*\oplus\wedge^d Q_0^*$ est associé à P par l'homomorphisme de groupes de Lie $\rho=(\text{dét}, \text{dét}): GL(q_1)$

$\times GL(d) \longrightarrow GL(1)\times GL(1)$. Par suite, l'homomorphisme caractéristique généralisé Δ_*' de P' est donné par la composition

$$\Delta_*' : H(W(gl(1)\oplus gl(1), O(1)\times O(1))_l) \xrightarrow{w(d\rho)^*} H(WO_l) \xrightarrow{\Delta_*} H_{DR}(M)\,,$$

où Δ_* désigne l'homomorphisme caractéristique généralisé de P.

Soit maintenant $\nabla^{1*}\oplus\nabla^{2*}$ une connexion adaptée somme sur le fibré vectoriel (F_1, F_2)-feuilleté $\wedge^{q_1}Q_1^*\oplus\wedge^d Q_0^*$. Considérons des métriques riemanniennes sur $\wedge^{q_1}Q_1^*$ et $\wedge^d Q_0^*$ respectivement. Soit γ_1 (resp. γ_2) un repère mobile normé (de norme 1) pour $\wedge^{q_1}Q_1^*$ (resp. pour $\wedge^d Q_0^*$) sur un ouvert U de M au-dessus duquel $\wedge^{q_1}Q_1^*$ (resp. $\wedge^d Q_0^*$) est trivial. Alors, par un raisonnement analogue à celui par lequel on a prouvé le Théorème 7.20 dans [8], on en déduit le

Théorème 5.3. *Les classes de Godbillon-Vey* $\Delta_*[y_1\otimes c_1^{q_1}]$, $\Delta_*[y_1'\otimes c_1^j c_1'^{q_2-j}]$ *et* $\Delta_*[y_1\wedge y_1'\otimes c_1^j c_1'^{q_2-j}]$, $0\leq j\leq q_1$, *sont réalisées respectivement par les formes fermées* $\sigma_1\wedge(d\sigma_1)^{q_1}$, $\sigma_2\wedge(d\sigma_1)^j\wedge(d\sigma_2)^{q_2-j}$ *et* $\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge(d\sigma_1)^j\wedge(d\sigma_2)^{q_2-j}$, $0\leq j\leq q_1$, *sur* M, *où les* 1-*formes* σ_1 *et* σ_2 *sur* M (*entièrement définies*) *sont déterminées* (*sur* U) *par les formules*

$$\nabla_X^{1*}\gamma_1 = 2\pi\sigma_1(X)\gamma_1 \quad et \quad \nabla_X^{2*}\gamma_2 = 2\pi\sigma_2(X)\gamma_2 \quad pour \quad X\in\Gamma(TM)\,.$$

Par conséquent, pour chaque $i=1, 2$, $2\pi\sigma_i$ est la forme de la connexion ∇^{i*}, $2\pi d\sigma_i$ sa forme de courbure, associée au repère mobile normé γ_i sur U.

Remarque. Si (F_1, F_2) est un sous-feuilletage à fibré normal orientable, il est clair que l'on peut choisir les repères mobiles précédents de telle sorte que γ_1 et γ_2 soient des formes volumes de Q_1 et Q_0 respectivement.

c) *Relation entre les classes de Godbillon-Vey construites par les voies* a) *et* b).

Démontrons d'abord le résultat suivant.

Lemme 5.4. *Il existe des connexions adaptées* ∇^1, ∇ *et* ∇^2 *sur* Q_1, Q_2 *et* Q_0 *compatibles avec les homomorphismes canoniques* $\pi: Q_2\longrightarrow Q_1$ *et* $i: Q_0\longrightarrow Q_2$ *telles que* ∇^1 *et* ∇ *soient des connexions sans torsion.*

Démonstration. Soit g une métrique riemannienne sur M. On identifie alors Q_i, $i=1, 2$ (resp. Q_0) avec le fibré complément orthogonal de F_i dans TM (resp. de F_2 dans F_1). Soit $\tilde{\nabla}$ la *seconde connexion* de la variété feuilletée riemannienne (M, g, F_1). Alors l'application

$$\nabla^1 = \pi_1 \circ \tilde{\nabla}_{|\Gamma(TM)\times\Gamma(Q_1)} : \Gamma(TM)\times\Gamma(Q_1) \longrightarrow \Gamma(Q_1)$$

est une connexion F_1-adaptée sur Q_1 et sans torsion. D'autre part, en utilisant la connexion $\nabla^0 = \pi_0' \circ \tilde{\nabla}_{|\Gamma(TM)\times\Gamma(Q_0)} : \Gamma(TM)\times\Gamma(Q_0) \longrightarrow \Gamma(Q_0)$ sur Q_0, on définit une connexion F_2-adaptée ∇^2 sur Q_0 de torsion T_2 en posant, pour tout $X = X_1 + X_2 \in \Gamma(TM)$, $X_1 \in \Gamma(F_2)$ et $X_2 \in \Gamma(Q_2)$, et tout $Z \in \Gamma(Q_0)$, $\nabla^2_X Z = \pi_0[X_1, Z] + \nabla^0_{X_2} Z$.

On peut maintenant considérer la connexion ∇' sur $Q_2 \cong Q_0 \oplus Q_1$ donnée, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, par la formule

$$\nabla'_X Z = \left(\nabla_X{}^2 Z_0 - \frac{1}{2} T_2(X, Z_1)\right) + \nabla^1_X Z_1 , \quad Z = Z_0 + Z_1 \in \Gamma(Q_2) ,$$

$$Z_0 \in \Gamma(Q_0) , \quad Z_1 \in \Gamma(Q_1) .$$

On définit alors une connexion F_2-adaptée ∇ sur Q_2 et sans torsion en posant, pour tout $X = X_1 + X_2 \in \Gamma(TM)$, $X_1 \in \Gamma(F_2)$ et $X_2 \in \Gamma(Q_2)$, et tout $Z \in \Gamma(Q_2)$,

$$\nabla_X Z = \pi_2[X_1, Z] + \nabla'_{X_2} Z .$$

Les connexions ∇^1, ∇ et ∇^2 sont évidemment compatibles avec les homomorphismes canoniques π et i. Ceci achève la démonstration du lemme. □

On dira, d'un triplet $(\nabla^1, \nabla, \nabla^2)$ de connexions adaptées qu'il est *adapté* au sous-feuilletage (F_1, F_2), si ces connexions vérifient les propriétés précédentes (cf. aussi Cordero-Masa [3]).

Soit $(\nabla^1, \nabla, \nabla^2)$ un triplet adapté de connexions adaptées. Considérons le triplet adapté $(\nabla^{1*}, \nabla^*, \nabla^{2*})$ de connexions adaptées sur $Q_1{}^*$, $Q_2{}^*$ et $Q_0{}^*$ induit par $(\nabla^1, \nabla, \nabla^2)$. Soit U un ouvert de M au-dessus duquel $Q_1{}^*$, $Q_2{}^*$ et $Q_0{}^*$ sont triviaux, et soit $\{\omega_i\}$, $1 \leqq i \leqq q_2$, un repère mobile sur U pour $Q_2{}^* \subset TM^*$ *adapté* (au sens de Cordero-Masa [3]), cela signifie que $\{\omega_u\}$, $1 \leqq u \leqq q_1$ (resp. $\{i^* \omega_a\}$, $q_1 + 1 \leqq a \leqq q_2$) est un repère mobile sur U pour $Q_1{}^* \subset Q_2{}^*$ (resp. pour $Q_0{}^*$). Alors les matrices (θ^1_{uv}), (θ_{ij}) et (θ^2_{ab}) des connexions ∇^{1*}, ∇^* et ∇^{2*} associées au repère mobile adapté $\{\omega_i\}$ sur U vérifient respectivement $\theta^1_{uv} = \theta_{uv}$, $\theta_{ub} = 0$ et $\theta^2_{ab} = \theta_{ab}$ pour $1 \leqq u$, $v \leqq q_1$ et $q_1 + 1 \leqq a$, $b \leqq q_2$. Par conséquent, les connexions adaptées ∇^{1*}, ∇^{2*} et ∇^* sur $\wedge^{q_1} Q_1{}^*$, $\wedge^d Q_0{}^*$ et $\wedge^{q_2} Q_2{}^*$ induites par les connexions précédentes sont données respectivement, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, par les formules

$$\nabla^{1*}_X \gamma_1 = \tau_1(X)\gamma_1 , \quad \nabla^{2*}_X i^* \gamma_2 = \tau_2(X) i^* \gamma_2 \quad \text{et} \quad \nabla^*_X \gamma = \tau(X)\gamma ,$$

où $\gamma_1=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{q_1}$, $\gamma_2=\omega_{q_1+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{q_2}$, $\gamma=\gamma_1\wedge\gamma_2$, $\tau_1=\sum_{u=1}^{q_1}\theta_{uu}$, $\tau_2=\sum_{a=q_1+1}^{q_2}\theta_{aa}$ et $\tau=\tau_1+\tau_2$. Il s'ensuit que $\wedge^{q_1}Q_1^*\otimes\wedge^d Q_0^*$ et $\wedge^{q_2}Q_2^*$ sont isomorphes comme fibrés vectoriels F_2-feuilletés.

D'autre part, puisque ∇^1 et ∇ sont des connexions sans torsion, on a alors

$$d\omega_u=\sum_{v=1}^{q_1}\theta_{uv}\wedge\omega_v \quad \text{et} \quad d\omega_a=\sum_{v=1}^{q_1}\theta_{av}\wedge\omega_v+\sum_{b=q_1+1}^{q_2}\theta_{ab}\wedge\omega_b$$

$$\text{pour} \quad 1\leqq u\leqq q_1 \quad \text{et} \quad q_1+1\leqq a\leqq q_2\,.$$

Par différentiation de ces relations, on obtient donc

$$d\gamma_1=\tau_1\Lambda\gamma_1\,, \quad d\gamma_2=\sum_{v=1}^{q_1}\omega_v\Lambda\phi_v+\tau_2\wedge\gamma_2 \quad \text{et} \quad d\gamma=\tau\wedge\gamma\,,$$

où $\phi_v=\sum_{a=q_1+1}^{q_2}(-1)^{a-q_1}\theta_{av}\wedge\omega_{q_1+1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_a\wedge\cdots\wedge\omega_{q_2}$.

Supposons maintenant que γ_1 (resp. $i^*\gamma_2$) soit un repère mobile normé sur U pour $\wedge^{q_1}Q_1^*$ (resp. pour $\wedge^d Q_0^*$) par rapport à une métrique riemannienne fixe sur $\wedge^{q_1}Q_1^*$ (resp. sur $\wedge^d Q_0^*$). Il en résulte que τ_1, τ_2 et $\tau=\tau_1+\tau_2$ sont des 1-formes sur M (entièrement définies) satisfaisant, sur chaque ouvert $U\subset M$ de la trivialisation locale,

$$d\gamma_1=\tau_1\wedge\gamma_1 \quad \text{et} \quad d\gamma_2-\tau_2\wedge\gamma_2\in F^1\Omega(U)\,.$$

De plus, on a donc

$$\tau_i=2\pi\sigma_i\,, \quad i=1,\,2, \quad \text{et} \quad \tau=\tau_1+\tau_1=2\pi\sigma_1+2\pi\sigma_1\,,$$

où les σ_i sont les 1-formes sur M données dans le Théorème 5.3. On a ainsi démontré le

Théorème 5.5. *Les classes de Godbillon-Vey construites dans les Théorèmes* 5.2 *et* 5.3 *vérifient les relations suivantes*:
(i) $[\tau_1\wedge(d\tau_1)^{q_1}]=(2\pi)^{q_1+1}[\sigma_1\wedge(d\sigma_1)^{q_1}]\in H_{DR}^{2q_1+1}(M)$;
(ii) $[\tau_2\wedge(d\tau_1)^j\wedge(d\tau_2)^{q_2-j}]=(2\pi)^{q_2+1}[\sigma_2\wedge(d\sigma_1)^j\wedge(d\sigma_2)^{q_2-j}]\in H_{DR}^{2q_2+1}(M)$, $0\leqq j\leqq q_1$;
(iii) $[\tau_1\wedge\tau_2\wedge(d\tau_1)^j\wedge(d\tau_2)^{q_2-j}]=(2\pi)^{q_2+2}[\sigma_1\wedge\sigma_2\wedge(d\sigma_1)^j\wedge(d\sigma_2)^{q_2-j}]\in H_{DR}^{2q_2+2}(M)$, $0\leqq j\leqq q_1$.

§ 6. Quelques Exemples

Pour appliquer les résultats des paragraphes précédents, nous donnons dans ce paragraphe quelques exemples de sous-feuilletages localement homogènes ayant des classes de Godbillon-Vey non nulles.

Soient $H\subset G_2\subset G_1\subset \bar{G}$ des groupes de Lie, $h\subset g_2\subset g_1\subset \bar{g}$ leurs algèbres de Lie. Supposons que H soit fermé dans $\bar{G}$. Soit $\Gamma\subset\bar{G}$ un sous-groupe discret opérant de manière proprement discontinue et sans points fixes sur $\bar{G}/H$. Considérons le sous-feuilletage localement homogène $(F_1, F_2)=(F_{G_1}, F_{G_2})$ de codimension $(q_1, q_2)=(\dim\bar{g}/g_1, \dim\bar{g}/g_2)$ sur la variété localement homogène $M=\Gamma\backslash\bar{G}/H$ de dimension $n=\dim\bar{g}/h$ induit par le sous-feuilletage sur $\bar{G}$, déterminé par les orbites des opérations à droite de G_1 et G_2. Soit $Q_1\oplus Q_0$ (resp. Q_2) le fibré normal de (F_1, F_2) (resp. de F_2). On a alors $d=q_2-q_1=\dim g_1/g_2$, $Q_i\cong\Gamma\backslash\bar{G}\times_H\bar{g}/g_i$, $i=1, 2$, et $Q_0\cong\Gamma\backslash\bar{G}\times_H g_1/g_2$.

Exemple 1. Pour $d\geqq 1$, prenons $\bar{G}=SL(d+2)$, $G_1=SL(d+2,1)_0$, $G_2=SL(d+2,2)_0$, $H=SO(d)$ et Γ un sous-groupe discret, uniforme et sans torsion de $SL(d+2)$, où $SL(d+2,1)_0$ (resp. $SL(d+2,2)_0$) désigne la composante connexe du groupe $SL(d+2,1)$ (resp. du groupe $SL(d+2,2)$) des matrices de déterminant 1 de la forme $\left[\begin{array}{c|c}\lambda & * \\ \hline 0 & A\end{array}\right]$ pour $A\in GL(d+1)$ et $\lambda=\text{dét}A^{-1}$ (resp. $\left[\begin{array}{c|cc}\lambda_1 & & * \\ \hline & \lambda_2 & * \\ \cline{2-3} 0 & 0 & B\end{array}\right]$ pour $B\in GL(d)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in GL(1)$, avec $\lambda_1^{-1}=\lambda_2\cdot\text{dét}B$). Soit $(F_1, F_2)=(F_{G_1}, F_{G_2})$ le sous-feuilletage localement homogène de codimension $(q_1, q_2)=(d+1, 2d+1)$ sur $M=\Gamma\backslash SL(d+2)/SO(d)$ dont le fibré normal $Q_1\oplus Q_0$ est orientable. Pour appliquer le Lemme 5.1, considérons la scission $p^*: Q_0^*\longrightarrow Q_2^*$ de $0\longrightarrow Q_1^*\longrightarrow Q_2^*\longrightarrow Q_0^*\longrightarrow 0$ induite par la scission $GL(d+1)$-équivariante $\theta: \bar{g}\longrightarrow g_1$ de la suite exacte $0\longrightarrow g_1\longrightarrow\bar{g}\longrightarrow\bar{g}/g_1\longrightarrow 0$, définie par la formule

$$\theta\left(\left[\begin{array}{c|c}\lambda & * \\ \hline * & A\end{array}\right]\right)=\left[\begin{array}{c|c}\lambda & * \\ \hline 0 & A\end{array}\right].$$

D'autre part, soit $\{x_{ij}^*\}$, $1\leqq i, j\leqq d+2$, la base duale de la base canonique $\{x_{ij}\}$ de $gl(d+2)$. On désigne par ω_{ij} la restriction de x_{ij}^* à $sl(d+2)$. On vérifie alors que $\{\omega_{ij}\}\cup\{\omega_{kk}\}$, $1\leqq i, j\leqq d+2$, $i\neq j$, $1\leqq k\leqq d+1$, est la base duale de la base canonique de $sl(d+2)$ et que $\sum_{i=1}^{m}\omega_{ii}=0$, où $m=d+2$. De plus, une base de $(\bar{g}/g_1)^*\subset(\bar{g}/g_2)^*$ (resp. de $(g_1/g_2)^*\xrightarrow{\theta^*}(\bar{g}/g_2)^*$) est donnée par

$$\{\omega_{i1}\}\,,\quad 2\leqq i\leqq m \text{ (resp. par } \{\omega_{i2}\}, 3\leqq i\leqq m).$$

Il s'ensuit que les deux bases précédentes fournissent une base de $(\bar{g}/g_2)^*\cong(\bar{g}/g_1)^*\oplus(g_1/g_2)^*$. Notons respectivement γ_1' et γ_2' les bases $\omega_{21}\wedge\cdots\wedge\omega_{m1}$ et $\omega_{32}\wedge\cdots\wedge\omega_{m2}$ de $\wedge^{d+1}(\bar{g}/g_1)^*$ et $\wedge^{d}(g_1/g_2)^*$. Du fait que la différentielle de Chevalley-Eilenberg $d_\wedge$ sur $\wedge\bar{g}^*$ est définie par

$$d_\wedge\omega_{ij}=-\sum_{k=1}^{m}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\quad\text{pour}\quad 1\leqq i,\quad j\leqq m=d+2\,,$$

on obtient donc

$$d_\wedge\gamma_1'=\tau_1'\wedge\gamma_1'\quad\text{et}\quad d_\wedge\gamma_2'=\sum_{i=3}^{m}\omega_{i1}\wedge\phi_i+\tau_2'\wedge\gamma_2'\,,$$

où $\tau_1'=m\omega_{11}$, $\tau_2'=\omega_{11}+(m-1)\omega_{22}$ et $\phi_i=(-1)^i\omega_{12}\wedge\omega_{32}\wedge\cdots\wedge\widehat{\omega}_{i2}\wedge\cdots\wedge\omega_{m2}$. Puisque τ_1', τ_2', γ_1', $\gamma_2'\in(\wedge\bar{g}^*)_H$ (sous-algèbre des éléments H-basiques de $\wedge\bar{g}^*$), ces éléments induisent des formes τ_1, τ_2, γ_1 et γ_2 sur $M=\Gamma\backslash\bar{G}/H$ vérifiant

$$d\gamma_1=\tau_1\wedge\gamma_1\quad\text{et}\quad d\gamma_2-\tau_2\wedge\gamma_2\in F^1\Omega(M)\,.$$

De plus, γ_1 (resp. γ_2) est une forme volume de Q_1 (resp. de Q_0).

D'autre part, on déduit de $d_\wedge\omega_{ii}=-\sum_{k=1}^{m}\omega_{ik}\wedge\omega_{ki}$ les identités suivantes :

$$(d_\wedge\omega_{11})^{d+1}=(-1)^{d+1}(d+1)!\bigwedge_{k=2}^{m}(\omega_{1k}\wedge\omega_{k1})\,,\quad (d_\wedge\omega_{11})^{d+2}=0\,;$$

$$(d_\wedge\omega_{22})^{d+1}=(-1)^{d+1}(d+1)!\,\omega_{21}\wedge\omega_{12}\wedge\Big(\bigwedge_{k=3}^{m}(\omega_{2k}\wedge\omega_{k2})\Big)\,,\quad (d_\wedge\omega_{22})^{d+2}=0\,;$$

$$\begin{aligned}(d_\wedge\omega_{11})^{d+1}\wedge(d_\wedge\omega_{22})^{d}&=-(d_\wedge\omega_{11})^{d}\wedge(d_\wedge\omega_{22})^{d+1}\\&=-(d+1)!\,d!\Big(\bigwedge_{k=2}^{m}(\omega_{1k}\wedge\omega_{k1})\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{k=3}^{m}(\omega_{2k}\wedge\omega_{k2})\Big)\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d_\wedge\tau_1')^j\wedge(d_\wedge\tau_2')^{q_2-j}=&-(d+2)^j(d+1)^d(d-j)\begin{bmatrix}q_2-j\\ d\end{bmatrix}\\&\times(d_\wedge\omega_{11})^{d+1}\wedge(d_\wedge\omega_{22})^{d}\,,\quad 0\leqq j\leqq q_1=d+1\,.\end{aligned}$$

Par suite, on a donc

$$[\tau_2\wedge(d\tau_1)^j\wedge(d\tau_2)^{q_2-j}]=0\in H_{DR}^{2q_2+1}(M)\,,\quad 0\leqq j\leqq q_1\,;$$

$$[\tau_1\wedge\tau_2\wedge(d\tau_1)^d\wedge(d\tau_2)^{q_1}]=0\in H_{DR}^{2q_2+2}(M)\,.$$

En particulier, la classe de Godbillon-Vey du feuilletage F_2 est nulle.

Pour démontrer que les autres classes de Godbillon-Vey du sous-feuilletage (F_1, F_2) ne sont pas nulles, nous procédons comme suit. Puisque $\tau_1'\wedge(d_\wedge\tau_1')^{d+1}=(d+2)^{d+2}\omega_{11}\wedge(d_\wedge\omega_{11})^{d+1}$ est un élément non nul dans $(\wedge^p\bar{g}^*)_{SL(d+1)}$, avec $p=\dim\bar{g}/sl(d+1)=2q_1+1$, il en résulte que la classe $[\tau_1'\wedge(d_\wedge\tau_1')^{d+1}]\in H(\bar{g}, H)$ est non nulle. De même, pour chaque $j=0, 1, \cdots, q_1$, $j\neq d$, l'élément

$$\tau_1'\wedge\tau_2'\wedge(d_\wedge\tau_1')^j\wedge(d_\wedge\tau_2')^{q_2-j}=-(d+2)^{j+1}(d+1)^{d+1}(d-j)\begin{bmatrix} q_2-j \\ d \end{bmatrix}$$
$$\omega_{11}\wedge\omega_{22}\wedge(d_\wedge\omega_{11})^{d+1}\wedge(d_\wedge\omega_{22})^d$$

n'est pas nul dans $(\wedge^q\bar{g}^*)_{SL(d)}$, avec $q=\dim\bar{g}/sl(d)=2q_2+2$. Par conséquent, la classe $[\tau_1'\wedge\tau_2'\wedge(d_\wedge\tau_1')^j\wedge(d_\wedge\tau_2')^{q_2-j}]\in H(\bar{g}, H)$ est non nulle pour $0\leqq j\leqq q_1$ et $j\neq d$. Comme l'algèbre $H(\bar{g}, H)$ satisfait à la dualité de Poincaré (par rapport à un élément non nul dans $(\wedge^n\bar{g}^*)_H$, avec $n=\dim\bar{g}/h=\dim M$), et comme la variété M est compacte et orientable, on a obtenu le résultat suivant.

Théorème 6.1. *Pour le sous-feuilletage localement homogène* $(F_1, F_2)=(F_{SL(d+2,1)_0}, F_{SL(d+2,2)_0})$ *de codimension* $(q_1, q_2)=(d+1, 2d+1)$ *sur* $M=\Gamma\backslash SL(d+2)/SO(d)$, *les classes de Godbillon-Vey* $[\tau_1\wedge(d\tau_1)^{q_1}]\in H_{DR}^{2q_1+1}(M)$ *et* $[\tau_1\wedge\tau_2\wedge(d\tau_1)^j\wedge(d\tau_2)^{q_2-j}]\in H_{DR}^{2q_2+2}(M)$, $0\leqq j\leqq q_1$, $j\neq d$, *sont non nulles. Ainsi, d'après le Corollaire* 4.5, *les fibrés* Q_2 *et* $Q_1\oplus Q_0$ *ne sont pas isomorphes comme fibrés vectoriels* F_2*-feuilletés.*

Ceci montre que le fibré principal (F_1, F_2)-feuilleté $P=L(Q_1)+L(Q_0)$ des repères transverses à (F_1, F_2) n'admet pas une connexion basique somme et que la structure (F_1, F_2)-feuilletée de P n'est pas induite par une structure (F_1, F_2)-feuilletée de une $G_1'\times G_2'$-réduction $P'=P_1'+P_2'$ de P, où $G_1'\times G_2'$ désigne l'un des groupes suivants :

$$SL(q_1)\times SL(d)\,,\quad GL(q_1)\times SL(d)\,,\quad SL(q_1)\times GL(d)\,.$$

Remarque. Si $d=1$, alors, pour chaque $j=0$, 2, on vérifie que $\tau_1\wedge\tau_2\wedge(d\tau_1)^j\wedge(d\tau_2)^{3-j}$ est une forme volume de la variété compacte $M=\Gamma\backslash SL(3)$. Par suite, on peut considérer ce cas comme une généralisation de l'exemple de Roussarie [5].

Exemple 2. Pour $d \geqq 1$, considérons les groupes de Lie $\bar{G}=SL(d+2)$, $G_1=SL(d+2,1)$, $G_2=SL(d+2,2)$, $H=O(d)$ (ou $O(1)\times O(d)$) et $\Gamma\subset SL(d+2)$ un sous-groupe discret, uniforme et sans torsion. Alors le fibré normal $Q_1\oplus Q_0$ du sous-feuilletage localement homogène $(F_1, F_2)=(F_{G_1}, F_{G_2})$ de codimension $(q_1, q_2)=(d+1, 2d+1)$ sur la variété compacte connexe $M=\Gamma\backslash\bar{G}/H$ n'est pas nécessairement orientable.

Soit maintenant ρ la représentation canonique de H dans $\wedge\bar{\mathfrak{g}}^*$. Avec les notations de l'Exemple 1, on obtient alors $\rho(\bar{A})\omega_{11}=\omega_{11}$, $\rho(\bar{A})\omega_{22}=\omega_{22}$, $\rho(\bar{A})\gamma_1'=\lambda^d \text{dét}\, A^d\cdot\gamma_1'$ et $\rho(\bar{A})\gamma_2'=\lambda^d\text{dét}A\cdot\gamma_2'$ pour $\bar{A}=(\lambda, A)\in H$, où $\lambda=1$ si $H=O(d)$. Par conséquent, pour chaque $i=1, 2$, l'élément $\tau_i'\in(\wedge\bar{\mathfrak{g}}^*)_H$ induit une 1-forme τ_i sur M. De même, γ_1' (resp. γ_2') détermine un produit intérieur euclidien H-invariant sur $\wedge^{d+1}(\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_1)^*$ (resp. sur $\wedge^d(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_2)^*$) tel que γ_1' (resp. γ_2') soit de norme 1. Ainsi, pour appliquer le Théorème 5.2, on peut utiliser les métriques riemanniennes sur $\wedge^{d+1}Q_1^*\cong\Gamma\backslash\bar{G}\times_H\wedge^{d+1}(\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}_1)^*$ et $\wedge^dQ_0^*\cong\Gamma\backslash\bar{G}\times_H\wedge^d(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_2)^*$ induites par les produits scalaires précédents. D'autre part, on obtient un recouvrement ouvert $\{U\}$ de M et des repères mobiles normés γ_1^U et γ_2^U sur U pour $\wedge^{d+1}Q_1^*$ et $\wedge^dQ_0^*$ (par rapport à ces métriques) tels que

$$d\gamma_1^U=\tau_1\wedge\gamma_1^U \quad \text{et} \quad d\gamma_2^U-\tau_2\wedge\gamma_2^U\in F^1\Omega(U).$$

Comme l'homomorphisme canonique $H(\bar{\mathfrak{g}}, H)\longrightarrow H(\bar{\mathfrak{g}}, SO(d))$ est injectif, il en résulte que les classes de Godbillon-Vey de (F_1, F_2) sont données par l'Exemple 1 et le Théorème 6.1. En particulier, Q_2 et $Q_1\oplus Q_0$ ne sont pas isomorphes comme fibrés vectoriels F_2-feuilletés.

Il est clair que l'application canonique

$$f: M'=\Gamma\backslash SL(d+2)/SO(d)\longrightarrow M=\Gamma\backslash SL(d+2)/H$$

est une application de variétés sous-feuilletées. Par suite, l'homomorphisme $f^*: H_{DR}(M)\longrightarrow H_{DR}(M')$ transforme chaque classe de Godbillon-Vey de $(F_{SL(d+2,1)}, F_{SL(d+2,2)})$ en la classe correspondante de Godbillon-Vey de $(F_{SL(d+2,1)_0}, F_{SL(d+2,2)_0})$.

Remarques. 1) Si, dans les Exemples 1 et 2, on remplace les groupes G_i, $i=1, 2$, par les groupes G_i^t des matrices transposées de celles de G_i, on vérifie que les 1-formes τ_i^t, $i=1, 2$, sur $M=\Gamma\backslash\bar{G}/H$, obtenues pour les nouveaux sous-feuilletages, sont données par $\tau_i^t=-\tau_i$, $i=1, 2$, où τ_1 et τ_2 sont les 1-formes sur M construites dans les Exemples 1 et 2. Il s'ensuit que

$[\tau_1{}^t\wedge\tau_2{}^t\wedge(d\tau_1{}^t)^j\wedge(d\tau_2{}^t)^{q_2-j}]=-[\tau_1\wedge\tau_2\wedge(d\tau_1)^j\wedge(d\tau_2)^{q_2-j}]\neq 0\in H_{DR}^{2q_2+2}(M)$,
$0\leqq j\leqq q_1$, $j\neq d$.

Par conséquent, il existe au moins deux sous-feuilletages de codimension $(q_1, q_2)=(d+1, 2d+1)$ sur M, qui ne sont pas intégrablement homotopes.

2) Dans une publication ultérieure, en utilisant l'homomorphisme caractéristique d'un sous-feuilletage, nous montrerons que, si d est impair, les classes de Godbillon-Vey non nulles de degré $2q_2+2$ des sous-feuilletages considérés dans les exemples précédents sont des invariants (non nuls) de ces sous-feuilletages, qui n'appartiennent pas à la sous-algèbre de $H_{DR}(M)$ engendrée par les classes caractéristiques des feuilletages de la paire. De même, la non trivialité de ces classes implique que les algèbres de Lie $sl(d+2, i)$, $i=1, 2$, ne sont pas réductives. De plus, on vérifie que, si d est pair, aucun feuilletage intégrablement homotope à F_1 ne peut se prolonger en un feuilletage de codimension q pour $0<q<q_1=d+1$.

3) Pour un sous-feuilletage localement homogène $(F_1, F_2)=(F_{G_1}, F_{G_2})$ de codimension (q_1, q_2) sur $M=\Gamma\backslash\bar{G}/H$, on peut facilement démontrer que Q_2 et $Q_1\oplus Q_0$ sont isomorphes comme fibrés vectoriels F_2-feuilletés, pourvu que g_2 soit une sous-algèbre réductive dans $\bar{g}$ et que G_2 ait un nombre fini de composantes connexes. C'est par exemple le cas si $\bar{G}=SL(q+2)$, $G_1=GL(q+1)$, $G_2=GL(1)\times GL(q)$, $H=O(q)$ et $\Gamma\subset SL(q+2)$ un sous-groupe discret, uniforme et sans torsion.

De la même manière, s'il existe un sous-groupe de Lie $G'\subset\bar{G}$ tel que $G_2=G_1\cap G'$ et dim $\bar{g}/g'=d=q_2-q_1$ (g' étant l'algèbre de Lie de G'), alors $F_2=F_1\cap F'$, où F' désigne le feuilletage localement homogène $F_{G'}$, de codimension d sur M. Un exemple de ce cas s'obtient en prenant $\bar{G}=SL(d+1)$, $G_1=SL(d+1, 1)$, $G'=SL(d+1, 1)^t$, $G_2=GL(d)$, $H=O(d)$ et $\Gamma\subset SL(d+1)$ un sous-groupe discret, uniforme et sans torsion. De même, on peut prendre $\bar{G}=U(q+1)$, $G_1=SU(q+1)$, $G'=U(1)\times U(q)$, $G_2=U(q)$, $H=O(q)$ et $\Gamma=\{e\}$.

4) Avec les notations de la Proposition 2.1, on démontre sans difficulté que l'homomorphisme caractéristique Δ_*: $H(W(g, H)_{I'})\longrightarrow H_{DR}(M)$ de chacun des sous-feuilletages localement homogènes suivants (à connexion basique somme) dépend du choix de la connexion basique somme (I' étant l'idéal correspondant à la paire $([q_1/2], [q_2/2])$):

i) $(F_1, F_2)=(F_{U(2)}, F_{U(1)})$, $(q_1, q_2)=(2, 5)$ et $M=SO(4)$.

ii) $(F_1, F_2)=(F_{U(q)}, F_{SU(q)})$, $(q_1, q_2)=(2q+1, 2q+2)$ et $M=U(q+1)$.

iii) $(F_1, F_2)=(F_{SO(2n)\times U(q+1)}, F_{SO(2n)\times U(q)})$, $(q_1, q_2)=(2n, 2n+2q+1)$ et $M=SO(2n+1)\times U(q+1)$.

iv) $(F_1, F_2)=(F_{GL(1)}, 0)$, $(q_1, q_2)=(2, 3)$ et $M=\Gamma\backslash SL(2)$, où $\Gamma\subset SL(2)$ est un sous-groupe discret et uniforme.

Dans le cas d'un feuilletage localement homogène à connexion basique dont l'homomorphisme caractéristique Δ_*: $H(W(g, H)_{[q/2]})\longrightarrow H_{DR}(M)$ dépend du choix de la connexion basique (q étant la codimension du feuilletage F sur M), nous donnons les exemples suivants :

i) $F=F_{U(q')}$ (resp. $F=F_{SU(q')}$), $q=2q'+1$ et $M=U(q'+1)$ (resp. $M=SU(q'+1)$).

ii) $F=F_{SO(2n-1)}$, $q=4n-1$ et $M=SO(2n+1)$.

iii) $F=F_{SL(1)}=0$, $q=3$ et $M=\Gamma\backslash SL(2)$, où $\Gamma\subset SL(2)$ est un sous-groupe discret et uniforme.

Ainsi, en vertu du Corollaire 2.2, on a obtenu le résultat suivant.

Proposition 6.2. *L'ensemble (supposé non vide) des connexions basiques à un feuilletage de codimension q est* $J(>[(q+1)/2])$-*connexe (au sens de Lehmann*[9]), *mais cet ensemble n'est généralement pas* $J(>[q/2])$-*connexe si q est impair.*

References

[1] Bott, R., Lectures on characteristic classes and foliations, *Lecture Notes in Math.*, **279** (1972), Springer, Berlin, 1-94.

[2] Carballés, J. M., Characteristic homomorphism for (F_1, F_2)-foliated bundles over subfoliated manifolds, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* **33, 3** (1984), 219-245.

[3] Cordero, L. A. et Masa, X., Characteristic classes of subfoliations, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* **31, 2** (1981), 61-86.

[4] Feigin, B. L., Characteristic classes of flags of foliations, *Funct. Anal. and its Appl.*, **9** (1975), 312-317.

[5] Godbillon, C. et Vey, J., Un invariant des feuilletages de codimension 1, *C. R. Acad, Sci. Paris,* **273** (1971), 92-95.

[6] Greub, W., Halperin, S. et Vanstone, R., *Connections, curvature and cohomology,* Academic Press, New York, Vol. I (1972), Vol. II (1973), Vol. III (1976).

[7] Heitsch, J. L., Deformations of secondary characteristic classes, *Topology,* **12** (1973), 381-388.

[8] Kamber, F. W. et Tondeur, Ph., Foliated bundles and characteristic classes, *Lecture Notes in Math.,* **493** (1975), Springer, Berlin.

[9] Lehmann, D., Classes caractéristiques exotiques et J-connexité des espaces de connexions, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* **24, 3** (1974), 267-306.

[10] Masa, X., Characteristic classes of subfoliations II, preprint.

[11] Molino, P., Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à

connexion transverse projetable, *Topology,* **12** (1973), 317-325.

[12] Moussu, R., Sur les classes exotiques des feuilletages, *Lecture Notes in Math.,* **392** (1974), Springer, Berlin, 37-42.

[13] Vaisman, I., *Cohomology and differential forms,* Marcel Dekker, Inc., New York (1973).

[14] Yamato, K., Examples of foliations with non-trivial exotic characteristic classes, *Osaka J. Math.,* **12** (1975), 401-417.