Publ. RIMS, Kyoto Univ.
24(1988), 397-431

Systèmes Différentiels Fuchsiens le Long d'une Sous-Variété

par

Yves LAURENT* et Teresa MONTEIRO FERNANDES**

French Abstract

Soit X une variété analytique complexe et Y une sous-variété lisse de X. Nous introduisons la notion de "système differentiel fuchsien le long de Y", et nous montrons que pour de tels systèmes les solutions méromorphes et les solutions à singularités éssentielles sont les mêmes. Nous montrons aussi que les solutions formelles (le long de Y) sont toujours convergentes. Ces résultats sont bien connus dans le cas holonôme singulier régulier.

English Abstract

Let X be a complex analytic manifold and let Y be a submanifold of X. We introduce the notion of "fuchsian differential system along Y", and we prove that for such systems the meromorphic solutions and those with essential singularities are the same. We prove as well that the formal solutions (along Y) always converge. These results are well-known in the regular holonomic case.

Communicated by M. Kashiwara, October 12, 1987.
* Université Paris-Sud, Département de Mathématique, Bât 425, 91405 Orsay, France.
** Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Dept°. Matemática, Bloco Cl, 3°. Andar, Rua Ernesto Vasconcelos, 1700 Lisboa, Portugal et CMAF, INIC, Complexo II, 2, Av. Prof. Gama Pinto, 1699 Lisboa Codex, Portugal.

§ 0. Introduction

Soient X une variété analytique complexe et Y une sous-variété lisse de X. Soient $\mathscr{D}_X$ (resp. $\mathscr{D}_X^\infty$) le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini (resp. d'ordre infini) sur X, $\mathscr{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X et $\mathscr{O}_{X\hat{|}Y}$ le completé formel de $\mathscr{O}_X$ le long de Y. Soit $B_{Y|X}$ (resp. $B_{Y|X}^\infty$) le faisceau des hyperfonctions holomorphes le long de Y d'ordre fini (resp. d'ordre infini).

Dans ce travail nous introduisons la notion de "module fuchsien le long de Y" et nous démontrons que pour un tel $\mathscr{D}_X$-module on a

$$\mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{M}) \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \mathscr{M})$$

ainsi que les théorèmes dits de "comparaison" entre les solutions formelles et les solutions convergentes, i. e.

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)|_Y \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_{X\hat{|}Y})$$

et entre les solutions méromorphes et les solutions à singularités éssentielles;

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, B_{Y|X}) \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, B_{Y|X}^\infty).$$

Ces théorèmes sont bien connus dans le cas où $\mathscr{M}$ est un module holonôme à singularités régulières (of. [K-K-2], voir aussi [M], [R]).

Pour définir la notion de module fuchsien nous construisons une variété 1-microcaractéristique relative.

Rappelons que la variété 1-microcaractéristique d'un $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{M}$ le long du fibré conormal Λ^* à Y a été définie dans [M. F.] où elle est notée $C^1_{\Lambda^*}(\mathscr{M})$ et dans [L] où elle est notée $Ch_{\Lambda^*}(\infty, 1)(\mathscr{M})$.

Cette variété 1-microcaractéristique était un sous-ensemble de $T^*\Lambda^*$ alors qu'ici la variété 1-microcaractéristique relative est un sous-ensemble du fibré cotangent relatif $T^*(\Lambda|Y)$ (où Λ désigne le fibré normal T_YX).

Nous disons qu'un module est fuchsien le long de Y si sa variété 1-microcaractéristique relative ne rencontre pas le fibré conormal à la sphère unité des fibres de Λ au dessus de Y.

Par exemple si le module $\mathscr{M}$ est de la forme $\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P$ et si $Y=\{(y_1,\dots,y_p,t)\in\boldsymbol{C}^{p+1}; t=0\}$, il sera fuchsien le long de Y si et seulement si P s'écrit sous la forme

$$P(y, t, D_y, D_t) = t^m D_t^n [P_0(y, tD_t) + tQ(y, D_y, t, tD_t)]$$

où Q est d'ordre inférieur ou égal à l'ordre de P_0 tandis que l'ordre de P_0 est égal à celui de $P_0(0, tD_t)$.

Ainsi l'opérateur $(tD_t)^2 + \phi(y) + tD_y$ est fuchsien le long de Y alors que l'opérateur

$$(tD_t)^2 + D_y \text{ ne l'est pas.}$$

Signalons que dans le cas où Y est une hypersurface et où $\mathcal{M}$ se réduit à une seule équation le théorème de comparaison entre les solutions dans $\mathcal{O}_X$ et dans $\mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$ a été démontré par Oshima ([O]).

Lorsque Y est réduit à un point la condition sur P est celle énnoncée par Kashiwara, Kawai et Sjöstrand dans [K-K-S] et par ailleurs les systèmes qui admettent une b-fonction régulière relative à Y au sens de [K-3], [S], sont fuchsiens le long de Y. (En particulier les modules holonômes réguliers sont fuchsiens le long de toute sous-variété de X).

Notre méthode de démonstration consiste à démontrer les théorèmes de comparaison d'abord pour un opérateur et ensuite pour un système.

De ces théorèmes, nous déduisons l'isomorphisme

$$R\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}) \simeq \mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})$$

puis que les modules induits par $\mathcal{M}$ sur Y sont les mêmes qu'on les prennent au sens des opérateurs d'ordre fini ou d'ordre infini c'est à dire

$$\mathcal{D}_Y^\infty \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{M}_Y \simeq (\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M})_Y.$$

Enfin nous obtenons un théorème du type Cauchy-Kowalewsky.

Nous tenons à remercier P. Schapira qui nous a soumis ce problème et M. Kashiwara avec qui nous avons tenu de très utiles discussions.

§ 1. Construction de la Variété 1-Microscaractéristique Relative

1.1. Filtrations sur $\mathcal{D}_X$

Commençons par rappeler quelques notions sur les filtrations que l'on peut définir sur l'anneau des opérateurs différentiels (voir [K-3], [S], [L. Sch.]).

Soient X une variété analytique complexe, Y une sous-variété lisse de X, $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X et $\mathcal{I}_Y$ l'idéal de définition de Y dans $\mathcal{O}_X$. On note $\Lambda = T_Y X$ le fibré normal à Y et $p: \Lambda \to Y$ la projection. Soit $\mathcal{D}_X$ le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels d'ordre fini sur X. Sur $\mathcal{D}_X$ on définit deux filtrations :

(i) La filtration usuelle par l'ordre que l'on notera $F.(\mathcal{D}_X)$ ou $(\mathcal{D}_{X,j})_{j\in \boldsymbol{N}}$.

(ii) La filtration associée à Y que l'on notera $V.(\mathcal{D}_X)$, par définition on a :

$$V_k(\mathcal{D}_X) = \{P \in \mathcal{D}_X, P\mathcal{I}_Y^j \subset \mathcal{I}_Y^{j-k} \quad \text{for any } j \in \boldsymbol{Z}\}$$

avec la convention $\mathcal{I}_Y^j = \mathcal{O}_X$ si $j \leq 0$.

Le gradué $gr_V(\mathcal{D}_X)$ est alors isomorphe à $p_* \mathcal{D}_{[\Lambda]}$ où $\mathcal{D}_{[\Lambda]}$ désigne le sous-faisceau d'anneaux de $\mathcal{D}_\Lambda$ des opérateurs différentiels sur Λ à coefficients polynomiaux dans les fibres de p.

On déduit une bi-filtration sur $\mathcal{D}_X$

$$V_k F_l(\mathcal{D}_X) = V_k(\mathcal{D}_X) \cap F_l(\mathcal{D}_X).$$

Suivant [S] on note $R_{VF}(\mathcal{D}_X)$ l'anneau de Rees associé

$$R_{VF}(\mathcal{D}_X) = \bigoplus_{\substack{k\in \boldsymbol{Z}\\ l\in \boldsymbol{N}}} V_k F_l(\mathcal{D}_X)\theta^k \tau^l.$$

C'est un faisceau d'anneaux cohérent et noethérien. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent. Une bi-filtration de $\mathcal{M}$ est une famille $(\mathcal{M}_{ij})_{\substack{i\in \boldsymbol{Z}\\ j\in \boldsymbol{N}}}$ de sous-$\mathcal{O}_X$-modules cohérents de $\mathcal{M}$ vérifiant:

(1) $$\bigcup_{i,j} \mathcal{M}_{ij} = \mathcal{M}.$$

(2) Pour tous i, $k \in \boldsymbol{Z}$, j, $l \in \boldsymbol{N}$ on a

$$V_k F_l(\mathcal{D}_X)\mathcal{M}_{ij} \subset \mathcal{M}_{i+k,j+l}.$$

Définition 1.1.1. *Une bi-filtration sur $\mathcal{M}$ est bonne si localement il existe des sections $u_1, \ldots u_N$ de $\mathcal{M}$ et $(k_1, \ldots, k_N) \in \boldsymbol{Z}^N$, $(l_1, \ldots, l_N) \in \boldsymbol{N}^N$ tels que l'on ait*

$$\mathcal{M}_{kl} = \sum_{i=1}^{N} V_{k-k_i} F_{l-l_i}(\mathcal{D}_X) u_i.$$

A toute bi-filtration $\mathcal{M}_{ij}$ on associe le module de Rees $R(\mathcal{M}) =$

$\bigoplus_{\substack{i\in Z\\ j\in N}} \mathscr{M}_{ij}\, \theta^i\tau^j$ qui est un $R_{VF}(\mathscr{D}_X)$-module, cohérent si et seulement si la bi-filtration est bonne.

On a le lemme d'Artin-Rees:

Lemme 1.1.2. *Soit* $(\mathscr{M}_{ij})_{\substack{i\in Z\\ j\in N}}$ *une bonne bi-filtration d'un* $\mathscr{D}_X$*-module cohérent* $\mathscr{M}$. *Alors elle induit sur tout sous-quotient de* $\mathscr{M}$ *une bonne bi-filtration.*

1.2. Variété caractéristique relative

La variété caractéristique relative d'un $\mathscr{D}_X$-module est définie par Schapira dans [Sch]. Ici nous allons la définir pour un module sur l'anneau de Rees de $\mathscr{D}_X$. Lorsque ce module est le module de Rees d'un $\mathscr{D}_X$-module on retrouve la définition de [Sch].

Soit Y une variété analytique complexe et soit $\Lambda \xrightarrow{p} Y$ un fibré vectoriel. On définit le fibré cotangent relatif $T^*(\Lambda|Y)$ par la suite exacte de fibrés sur Y:

$$0\to \Lambda \times_Y T^*Y \to T^*\Lambda \to T^*(\Lambda|Y)\to 0$$

et les projections canoniques

$$\tilde{p} : T^*\Lambda\to Y,\quad \tilde{\tilde{p}} : T^*(\Lambda|Y)\to Y,\ \gamma : T^*\Lambda\to \Lambda.$$

On note $\mathscr{O}_{[\Lambda]}$ le sous-faisceau de $\mathscr{O}_\Lambda$ des sections polynomiales dans les fibres de p. Soit $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$ l'anneau des opérateurs différentiels sur Λ polynomiaux dans les fibres de p.

On note encore $\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]}$ le sous-anneau de $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$ des opérateurs relatifs, c'est à dire, des opérateurs qui commutent avec $p^{-1}\mathscr{O}_Y$.

On note $\mathscr{D}_{[\Lambda],j}$ (resp. $\mathscr{D}_{[\Lambda|Y],j}$) la filtration de $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$ (resp. de $\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]}$) par l'ordre. Le gradué associé s'identifie à $\gamma_*\mathscr{O}_{[T^*\Lambda]}$, le faisceau des fonctions holomorphes sur $T^*\Lambda$ polynomiales dans les fibres de $\tilde{p}$ $T^*\Lambda \xrightarrow{\tilde{p}} Y$ (resp. à $\gamma_*\mathscr{O}_{[T^*(\Lambda|Y)]}$, le faisceau des fonctions holomorphes sur $T^*(\Lambda|Y)$ polynomiales dans les fibres de $\tilde{\tilde{p}}$).

Notons $\mathscr{A}=\bigoplus_{j\in N}\mathscr{D}_{[\Lambda],j}\tau^j$ l'anneau de Rees de $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$ et $\mathscr{A}_0=\bigoplus_{j\in N}\mathscr{D}_{[\Lambda|Y],j}\tau^j$ l'anneau de Rees de $\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]}$.

On a alors $\mathscr{A}/\tau\mathscr{A}\simeq gr(\mathscr{D}_{[\Lambda]})\simeq\gamma_*\mathscr{O}_{[T^*\Lambda]}$ et de même $\mathscr{A}_0/\tau\mathscr{A}_0\simeq gr(\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]})\simeq\gamma_*\mathscr{O}_{[T^*(\Lambda|Y)]}$.

Proposition 1.2.1. *Tout $\mathscr{A}$-module cohérent est un $\mathscr{A}_0$-module pseudo-cohérent.*

Démonstration.

$\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}_0$ sont des faisceaux d'anneaux noethériens. Considerons des coordonnées locales (y, t) sur Λ où $y=(y_1 \dots y_p)$ est un système de coordonnées locales sur Y et $t=(t_1 \dots t_q)$ sont linéaires dans les fibres.

Filtrons $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$ par $G_k(\mathscr{D}_{[\Lambda]})=\{P \in \mathscr{D}_{[\Lambda]}$, ordre de P en D_y est inférieur ou égal à $k\}$ et filtrons $\mathscr{A}$ par $\mathscr{A}_k=$Rees $(G_k(\mathscr{D}_{[\Lambda]}))$, où l'on considère $G_k(\mathscr{D}_{[\Lambda]})$ filtré par l'ordre usuel. Alors $\mathscr{A}_k \simeq \mathscr{A}_0 \underset{C}{\otimes} C[\tau D_y]_k$ (où$C[\tau D_y]_k$ designe l'anneau des polynomes en τD_y de degré $\leq k$) et la filtration $(\mathscr{A}_k)_{k \geq 0}$ satisfait les conditions de la proposition 1.1.5. de [K-K-2]. q.e.d.

Soit $\mathscr{N}$ un $\mathscr{A}_0$-module cohérent.

Définition 1.2.2. *La variété caractéristique de $\mathscr{N}$ (notée $Car(\mathscr{N})$) est le support dans $T^*(\Lambda|Y)$ du $\mathscr{O}_{T^*(\Lambda|Y)}$-module cohérent $\mathscr{O}_{T^*(\Lambda|Y)} \underset{\mathscr{O}_{[T^*(\Lambda|Y)]}}{\otimes} \gamma^{-1}(\mathscr{N}/\tau\mathscr{N})$.*

Car$(\mathscr{N})$ est donc un sous-ensemble analytique fermé de $T^*(\Lambda|Y)$.

Remarque. Soit $\mathscr{L}$ un $\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]}$-module cohérent muni d'une bonne filtration $\mathscr{L}_k$ et soit $\mathscr{N}=\bigoplus_{k \in N} \mathscr{L}_k \tau^k$ le module de Rees associé.

Alors $\mathscr{N}$ est un $\mathscr{A}_0$-module cohérent et la variété Car$(\mathscr{N})$ définie ci-dessus est égale à la variété caractéristique de $\mathscr{L}$ (car on a $\mathscr{N}/\tau\mathscr{N} \simeq gr(\mathscr{L})$).

Lemme 1.2.3. *Soit $0 \to \mathscr{N}' \to \mathscr{N} \to \mathscr{N}'' \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{A}_0$-modules cohérents. Alors on a*

$$\mathrm{Car}(\mathscr{N}) = \mathrm{Car}(\mathscr{N}') \cup \mathrm{Car}(\mathscr{N}'').$$

Démonstration.

On a une suite exacte

$$\mathscr{T}or_1^{\mathscr{A}_0}(\mathscr{A}_0/\tau\mathscr{A}_0, \mathscr{N}'') \to \frac{\mathscr{N}'}{\tau\mathscr{N}'} \to \frac{\mathscr{N}}{\tau\mathscr{N}} \to \frac{\mathscr{N}''}{\tau\mathscr{N}''} \to 0.$$

Par définition $\mathscr{T}or_1^{\mathscr{A}_0}(\mathscr{A}_0/\tau\mathscr{A}_0, \mathscr{N}'')$ est le noyau (que nous noterons $\mathscr{K}$) de l'application $\tau:\mathscr{N}''\to\mathscr{N}''$. Désignons par T le foncteur exact $\mathcal{O}_{T^*(\Lambda|Y)}\underset{\mathcal{O}_{[T^*(\Lambda|Y)]}}{\otimes}\gamma_*^{-1}$ de la catégorie des $\mathscr{A}_0/\tau\mathscr{A}_0$-modules à valeurs dans la catégorie des $\mathcal{O}_{T^*(\Lambda|Y)}$-modules (donc $\mathrm{Car}(\mathscr{N})=\mathrm{supp}\ T(\mathscr{N}/\tau\mathscr{N})$). Pour montrer le lemme il suffit de montrer que si en un point $x^*\in T^*(\Lambda|Y)$ on a $T(\mathscr{N}''/\tau\mathscr{N}'')_{x^*}=0$ alors $T(\mathscr{K})_{x^*}=0$.

Notons $\mathscr{K}^n$ le noyau de $\tau^n:\mathscr{N}''\to\mathscr{N}''$ et $\mathscr{H}^n=\mathscr{K}^n/\tau\mathscr{K}^n$. On a donc $\mathscr{H}^1=\mathscr{K}^1=\mathscr{K}$. Alors la suite $\mathscr{K}^1\subset\mathscr{K}^2\subset\ldots\subset\mathscr{K}^n\subset\ldots$ est stationnaire dans $\mathscr{N}''$ (car $\mathscr{A}_0$ est noethérien) et donc il existe $n\in\boldsymbol{N}$ tel que $\mathscr{K}^n=\mathscr{K}^{n+1}$, c'est à dire, $\mathscr{H}^n=\mathscr{H}^{n+1}$. Or pour tout $p\in\boldsymbol{N}$ on a une suite exacte $\mathscr{H}^{p+1}\to\mathscr{H}^p\to\mathscr{N}''/\tau\mathscr{N}''$.

Par suite si $T(\mathscr{N}''/\tau\mathscr{N}'')_{x^*}=0$, τ définit pour tout p un morphisme surjectif de $T(\mathscr{H}^{p+1})$ dans $T(\mathscr{H}^p)$ et donc τ^n est un morphisme surjectif de $T(\mathscr{H}^{n+1})_{x^*}$ dans $T(\mathscr{H}^1)_{x^*}=T(\mathscr{K})_{x^*}$ mais τ^n étant nul sur $T(\mathscr{H}^n)$ il en résulte $T(\mathscr{K})_{x^*}=0$.

Soit maintenant $\mathscr{M}$ un $\mathscr{A}$-module cohérent; il existe toujours localement un $\mathscr{A}_0$-sous-module cohérent $\mathscr{M}_0$ qui l'engendre (cf. Proposition 1. 2. 1).

Proposition et Définition 1. 2. 4.

a) *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{A}$-module cohérent. L'ensemble analytique* $\mathrm{Car}(\mathscr{M}_0)$ *ne dépend pas du choix du $\mathscr{A}_0$-sous-module $\mathscr{M}_0$ qui l'engendre; on le note $C_{\Lambda|Y}(\mathscr{M})$ et on l'appelle variété caractéristique relative de $\mathscr{M}$.*

b) *Soit $0\to\mathscr{M}'\to\mathscr{M}\to\mathscr{M}''\to0$ une suite exacte de $\mathscr{A}$-modules cohérents. Alors on a*

$$C_{\Lambda|Y}(\mathscr{M})=C_{\Lambda|Y}(\mathscr{M}')\cup C_{\Lambda|Y}(\mathscr{M}'').$$

Démonstration.

a) Soient $\mathscr{M}_0$ et $\mathscr{M}_0'$ deux $\mathscr{A}_0$-sous-modules cohérents de $\mathscr{M}$ qui l'engendrent. Considérons la filtration $\mathscr{A}_k$ de $\mathscr{A}$ définie plus haut. Alors il exist $l\in\boldsymbol{N}$ tel que $\mathscr{M}_0\subset\mathscr{A}_l\mathscr{M}_0'$ et $\mathscr{A}_l$ étant libre en tant que $\mathscr{A}_0$-bimodule on déduit grâce au lemme précédent Car $(\mathscr{M}_0)\subset$Car $(\mathscr{M}_0'.)$

b) Résulte de la proposition 1. 2. 1 et du lemme 1. 2. 3.

Remarque. Si τ est injectif sur $\mathscr{M}$ alors il existe un $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$-module cohérent $\tilde{\mathscr{M}}$ dont $\mathscr{M}$ est le module de Rees et alors $C_{\Lambda|Y}(\mathscr{M})$ est la variété caractéristique relative de $\tilde{\mathcal{M}}$ (cf. [Sch], Ch. III).

1.3. Variété 1-microcaractéristique relative

Considerons la bi-filtration de $\mathcal{D}_X$ définie dans §1.1. Par définition on a

$$R_{VF}(\mathcal{D}_X) = \bigoplus_{\substack{k\in Z\\ l\in N}} V_k F_l(\mathcal{D}_X)\theta^k\tau^l$$

et donc

$$\frac{R_{VF}(\mathcal{D}_X)}{\theta R_{VF}(\mathcal{D}_X)} \simeq \bigoplus_{\substack{k\in Z\\ l\in N}} \frac{V_k F_l(\mathcal{D}_X)}{V_{k-1}F_l(\mathcal{D}_X)}\theta^k\tau^l.$$

Or, comme on a vu au paragraphe 1.1.

$\dfrac{V_k F_l(\mathcal{D}_X)}{V_{k-1}F_l(\mathcal{D}_X)} \simeq \mathcal{D}_{[\Lambda],l}[k]$ (ensemble des opérateurs dans $\mathcal{D}_{[\Lambda],l}$ homogènes de degré k dans les fibres de $p:\Lambda\to Y$). Donc

$$\frac{R_{VF}(\mathcal{D}_X)}{\theta R_{VF}(\mathcal{D}_X)} \simeq \bigoplus_{l\in N}(\bigoplus_{k\in Z}\mathcal{D}_{[\Lambda],l}[k])\tau^l \simeq \bigoplus_{l\in N}\mathcal{D}_{[\Lambda],l}\tau^l = \mathcal{A}.$$

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent muni d'une bonne bi-filtration; le module de Rees $R(\mathcal{M})$ étant cohérent $\dfrac{R(\mathcal{M})}{\theta R(\mathcal{M})}$ est un $\mathcal{A}$-module cohérent.

Proposition 1.3.2.

1) *La variété* $C_{\Lambda|Y}\left(\dfrac{R(\mathcal{M})}{\theta R(\mathcal{M})}\right)$ *est un sous-ensemble analytique de* $T^*(\Lambda|Y)$ *indépendant du choix de la bonne bi-filtration de* $\mathcal{M}$. *On le notera*

$$C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{M}).$$

2) *Si* $0\to\mathcal{M}'\to\mathcal{M}\to\mathcal{M}''\to 0$ *est une suite exacte de* $\mathcal{D}_X$*-modules cohérents alors on a*

$$C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{M}) = C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{M}')\cup C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{M}'').$$

Démonstration.

1) Soient $\mathcal{M}_{ij}$ et $\mathcal{M}'_{ij}$ deux bonnes bi-filtrations sur $\mathcal{M}$. La démonstration se fera en deux étapes:

a) Supposons d'abord que pour tout i, j, $\mathcal{M}'_{ij}\subset\mathcal{M}_{ij}$ et montrons que dans ce cas

$$C_{\Lambda|Y}\left(\frac{R(\mathscr{M})}{\theta R(\mathscr{M})}\right)\subset C_{\Lambda|Y}\left(\frac{R(\mathscr{M}')}{\theta R(\mathscr{M}')}\right)$$

i) Supposons de plus qu'il existe $k\geq 1$ tel que $\mathscr{M}'_{ij}\subset\mathscr{M}_{ij}\subset\mathscr{M}'_{i+k,j}$ pour tous i, j. Soit $\mathscr{N}_{ij}=\mathscr{M}_{ij}\cap\mathscr{M}'_{i+1,j}$. On a

$$\mathscr{M}'_{ij}\subset\mathscr{N}_{ij}\subset\mathscr{M}'_{i+1,j}$$
$$\mathscr{M}_{i-k+1,j}\subset\mathscr{N}_{ij}\subset\mathscr{M}_{ij}.$$

Donc en raisonnant par récurrence sur k on peut se ramener au cas $k=1$. On a alors

$\theta R(\mathscr{M})\subset R(\mathscr{M}')\subset R(\mathscr{M})$ et donc les suites exactes de $\mathscr{A}$-modules cohérents

$$0\to\frac{\theta R(\mathscr{M})}{\theta R(\mathscr{M}')}\to\frac{R(\mathscr{M}')}{\theta R(\mathscr{M}')}\to\frac{R(\mathscr{M}')}{\theta R(\mathscr{M})}\to 0$$

$$0\to\frac{R(\mathscr{M}')}{\theta R(\mathscr{M})}\to\frac{R(\mathscr{M})}{\theta R(\mathscr{M})}\to\frac{R(\mathscr{M})}{R(\mathscr{M}')}\to 0.$$

En appliquant la proposition 1. 2. 4. on obtient

$$C_{\Lambda|Y}\left(\frac{R(\mathscr{M}')}{\theta R(\mathscr{M}')}\right)=C_{\Lambda|Y}\left(\frac{R(\mathscr{M})}{\theta R(\mathscr{M})}\right).$$

ii) On suppose seulement $\mathscr{M}'_{ij}\subset\mathscr{M}_{ij}$. Notons $\mathscr{M}''_{kj}=\mathscr{M}_{kj}\cap(\bigcup_{i\in\boldsymbol{Z}}\mathscr{M}'_{ij})$.
On a donc :

$$R(\mathscr{M}'')=R(\mathscr{M})\cap(\bigcup_{i\geq 0}\theta^{-i}R(\mathscr{M}')).$$

Soit $\mathscr{L}_k=R(\mathscr{M})\subset(\bigcup_{0\leq i\leq k}\theta^{-i}R(\mathscr{M}'))$; c'est une suite croissante de $R_{VF}(\mathscr{D}_X)$-sous-modules cohérents de $R(\mathscr{M})$, donc elle est localement stationnaire et il existe (localement) un entier $r\geq 0$ tel que

$$R(\mathscr{M}'')=R(\mathscr{M})\cap\theta^{-r}R(\mathscr{M}').$$

En particulier $R(\mathscr{M}'')$ est cohérent donc $\mathscr{M}''_{ij}$ est une bonne bi-filtration de $\mathscr{M}$.

On a $\theta^r R(\mathscr{M}'')\subset R(\mathscr{M}')\subset R(\mathscr{M}'')$.
et d'après le cas i)

$$C_{\Lambda|Y}\left(\frac{R(\mathscr{M}')}{\theta R(\mathscr{M}')}\right)=C_{\Lambda|Y}\left(\frac{R(\mathscr{M}'')}{\theta R(\mathscr{M}'')}\right).$$

Par ailleurs l'application canonique

$$\frac{R(\mathscr{M}'')}{\theta R(\mathscr{M}'')}\to\frac{R(\mathscr{M})}{\theta R(\mathscr{M})}\text{ est injective}$$

donc

$$C_{\Lambda|Y}\left(\frac{R(\mathscr{M}')}{\theta R(\mathscr{M}')}\right)=C_{\Lambda|Y}\left(\frac{R(\mathscr{M}'')}{\theta R(\mathscr{M}'')}\right)\subset C_{\Lambda|Y}\left(\frac{R(\mathscr{M})}{\theta R(\mathscr{M})}\right).$$

b) Cas général: Soient $\mathscr{M}_{ij}$ et $\mathscr{M}'_{ij}$ deux bonnes bi-filtrations sur $\mathscr{M}$. Alors il existe k_0, $l_0\in N$ tels que

$$\mathscr{M}_{ij}\subset\mathscr{M}'_{i+k_0,j+l_0} \qquad \forall i,\ j$$

et en notant $\mathscr{M}''_{ij}=\mathscr{M}'_{i+k_0,j+l_0}$ on se retrouve dans la situation de a) c'est à dire, $C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{M})\subset C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{M}'')$ et il est clair que $C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{M}'')=C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{M}')$. De la même manière on conclut que $C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{M}')$ est contenu dans $C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{M})$. q. e. d.

2) Soit $0\to\mathscr{M}'\to\mathscr{M}\to\mathscr{M}''\to 0$ une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules cohérents. Soit $\mathscr{M}_{ij}$ une bonne bi-filtration de $\mathscr{M}$ et considerons $\mathscr{M}'$ (resp. $\mathscr{M}''$) muni de la bi-filtration induite (resp. de la bi-filtration quotient).

On a alors les suites exactes

$$0\to R(\mathscr{M}')\to R(\mathscr{M})\to R(\mathscr{M}'')\to 0$$

$$0\to\frac{R(\mathscr{M}')}{\theta R(\mathscr{M}')}\to\frac{R(\mathscr{M})}{\theta R(\mathscr{M})}\to\frac{R(\mathscr{M}'')}{\theta R(\mathscr{M}'')}\to 0$$

et il reste à appliquer la proposition 1. 2. 4. q. e. d.

Soit P un opérateur différentiel et soit $\hat{\sigma}_\Lambda(P)$ le symbole principal de P au sens de la V-filtration.

Définition 1. 3. 3. *On définit*

$\sigma^1_{\Lambda|Y}(P)=\sigma(\hat{\sigma}_\Lambda(P))$ si $\hat{\sigma}_\Lambda(P)\in\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]}$ et si l'ordre de $\hat{\sigma}_\Lambda(P)$ est égal à l'ordre de P (pour la F-filtration), et

$\sigma^1_{\Lambda|Y}(P)=0$ dans les autres cas.

Dans un système de coordonnées locales $(y,\ t)$ sur X où Y est donnée par $\{t=0\}$ dire que $\sigma^1_{\Lambda|Y}(P)$ est non nul signifie que P s'écrit sous la forme

$$P(y,t,D_y,D_t)=P_0(y,t,D_t)+P_1(y,t,D_y,D_t)$$

avec ordre P_0=ordre P au sens de la F-filtration et ordre P_1 strictement plus petit que celui de P au sens de la V-filtration. Alors

$\sigma^1_{\Lambda|Y}(P)=\sigma(P_0)$.

Proposition 1.3.4. *Soit* $\mathscr{I}$ *un idéal cohérent de* $\mathscr{D}_X$; *alors*:

$$C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{D}_X/\mathscr{I})=\{\omega\in T^*(\Lambda|Y),\ \forall P\in\mathscr{I},\ \sigma^1_{\Lambda|Y}(P)(\omega)=0\}.$$

Démonstration.

Considerons $\mathscr{M}=\mathscr{D}_X/\mathscr{I}$ muni de la bonne bi-filtration $\mathscr{M}_{ij}=\mathscr{D}_{ij}/\mathscr{D}_{ij}\cap\mathscr{I}$ où $\mathscr{D}_{ij}=V_iF_j(\mathscr{D}_X)$. Alors

$$\frac{R(\mathscr{M})}{\theta R(\mathscr{M})}=\bigoplus_{i,j}\frac{\mathscr{D}_{ij}}{(\mathscr{D}_{ij}\cap\mathscr{I})+\mathscr{D}_{i-1,j}}\theta^i\tau^j.$$

Or on a

$$\frac{\mathscr{D}_{ij}}{(\mathscr{D}_{ij}\cap\mathscr{I})+\mathscr{D}_{i-1,j}}\simeq\mathscr{D}_{[\Lambda],j}[i]/\tilde{\mathscr{I}}_{ij}\ \text{ où }\ \tilde{\mathscr{I}}_{ij}=\hat{\sigma}_\Lambda(\mathscr{I}\cap\mathscr{D}_{ij}).$$

Soit $\tilde{\mathscr{I}}_i=\bigoplus_{j\geq 0}\tilde{\mathscr{I}}_{ij}$; alors $\tilde{\mathscr{I}}=\bigcup_{j\geq 0}\tilde{\mathscr{I}}_j$ est un idéal gradué de $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$, la famille $\tilde{\mathscr{I}}_j$ definit une filtration de $\tilde{\mathscr{I}}$ et on note $R(\tilde{\mathscr{I}})=\bigoplus_{j\geq 0}\tilde{\mathscr{I}}_j\tau^j$ l'anneau de Rees associé. (Remarquons que cette filtration n'est pas en géneral la filtration induite par celle de $\mathscr{D}_{[\Lambda]}$).

Alors

$$\frac{R(\mathscr{M})}{\theta R(\mathscr{M})}\simeq\frac{R(\mathscr{D}_{[\Lambda]})}{R(\tilde{\mathscr{I}})}$$

et le module $\mathscr{M}_0=R(\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]})/R(\tilde{\mathscr{I}})\cap R(\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]})=\dfrac{R(\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]})}{R(\tilde{\mathscr{I}}\cap\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]})}$ est cohérent sur $R(\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]})$ et engendre $R(\mathscr{M})/\theta R(\mathscr{M})$.

Notons $\sigma_j(Q)$ le symbole d'ordre j de Q pour la F-filtration, c'est à dire l'image de Q dans $F_j(\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]})/F_{j-1}(\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]})$. (En particulier si l'ordre de Q est inférieur à j, $\sigma_j(Q)=0$).

Alors Car $(\mathscr{M}_0)=\bigcup_j\{\omega\in T^*(\Lambda|Y)\,|\sigma_j(Q)(\omega)=0$ pour tout $Q\in\tilde{\mathscr{I}}\cap\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]}\}$.

Finalement

Car$(\mathscr{M}_0)=\{\omega\in T^*(\Lambda|Y),\ \sigma(Q)(\omega)=0$ pour tout $Q\in\mathscr{D}_{[\Lambda|Y]}$ tel qu'il existe $P\in\mathscr{I}$, $Q=\hat{\sigma}_\Lambda(P)$ et ordre de Q=ordre de $P\}$. q. e. d.

Remarque: Dans le cas absolu, c'est à dire, si on calcule la variété caractéristique de $\dfrac{R(\mathscr{M})}{\theta R(\mathscr{M})}$ dans $T^*\Lambda$ on retrouve la variété $C^1_{\Lambda^*}(\mathscr{M})$

définie par les auteurs (cf. [L], [M. F.]), où Λ^* désigne le fibré conormal $T^*_Y X$ à Y dans X.

Exemple.
Considérons l'opérateur t^2D_t+1 pour $X=\boldsymbol{C}$ et $Y=\{0\}$.
Alors suivant les notations de la démonstration précédente on a

$$\tilde{\mathscr{I}}_0=0,\ \tilde{\mathscr{I}}_j=\mathscr{D}_{[\Lambda],j-1},\ j\geq 1 \text{ donc}$$

$$\frac{R(\mathscr{D}_{[\Lambda]})}{R(\tilde{\mathscr{I}})}\simeq\bigoplus_j \mathscr{O}_{[T^*\Lambda]}(j)\tau^j \text{ et donc}$$

$$C^1_{\Lambda|Y}\left(\frac{\mathscr{D}_C}{\mathscr{D}_C(t^2D_t+1)}\right)=T^*\Lambda.$$

§ 2. Théorèmes de Comparaison

2.1. Définition des $\mathscr{D}_X$-modules fuchsiens

Soit X une variété analytique complexe et Y une sous-variété lisse. Comme au §1 on notera $\Lambda=T_YX$ et $p: T_YX\to Y$ la projection. Soit y_0 un point de Y et $\sum=p^{-1}(y_0)\subset\Lambda$.

Si S est une sous-variété analytique réelle de $\sum$ le fibré conormal $T^*_S\sum$ à S dans $\sum$ est un sous-ensemble du fibré cotangent réel $(T^*\sum)_{\boldsymbol{R}}$ que l'on identifiera au fibré cotangent complexe $T^*\sum$.

Ce dernier fibré est isomorphe à $T^*(\Lambda|Y)\underset{\Lambda}{\times}\sum$ et peut donc être considéré comme un sous-ensemble de $T^*(\Lambda|Y)$. On peut donc définir

Définition 2.1.1. *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent défini au voisinage d'un point $y_0\in Y$. On dira que $\mathscr{M}$ est fuchsien le long de Y en y_0 s'il existe une métrique hermitienne sur l'espace vectoriel $\sum=p^{-1}(y_0)$ dont la sphère unite S vérifie*

$$T^*_S\textstyle\sum\cap C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{M})\subset\{0\}.$$

On dira que $\mathscr{M}$ est fuchsien le long de Y sur un ouvert U de Y s'il est fuchsien le long de Y en tout point de U.

Remarques.
1—Si $\mathscr{M}$ est fuchsien le long de Y en y_0 il existe un voisinage U de

y_0 dans Y tel que $\mathcal{M}$ soit fuchsien le long de Y sur U.

2—La définition 2. 1. 1 dépend du choix de la métrique, en particulier si on a une suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents

$$0\to\mathcal{M}'\to\mathcal{M}\to\mathcal{M}''\to 0$$

et si $\mathcal{M}$ est fuchsien le long de Y, $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ le sont aussi, d'après la proposition 1. 3. 2, par contre si $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ sont fuchsiens le long de Y pour des métriques différentes, il n'est pas clair que $\mathcal{M}$ soit fuchsien.

Voyons ce que la définition précédente signifie dans le cas où $\mathcal{M}$ est défini par un seul opérateur P.

Lemme 2. 1. 2. *Soit $\mathcal{M}=\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$. Alors $\mathcal{M}$ est fuchsien le long de Y en y_0 si et seulement si il existe au voisinage de y_0 un système de coordonnées locales $(y_1,\dots,y_p,t_1,\dots,t_q)$ sur X où $Y=\{t_1=\dots=t_q=0\}$ et un entier k tels que P s'écrive*

$$(*)\qquad P(y,t,D_y,D_t)=\sum_{\substack{|\beta|-|\alpha|=k\\|\beta|\leq m}} p_{\alpha\beta}(y)t^\alpha D_t^\beta+Q(y,t,D_y,D_t)$$

avec

a) $Q\in V_{k-1}F_m(\mathcal{D}_X)$

b) $\forall\tau\in\boldsymbol{C}^q-\{0\},\ \sum_{\substack{|\beta|=m\\|\alpha|=m-k}} p_{\alpha\beta}(y_0)\tau^\alpha\bar{\tau}^\beta\neq 0.$

Démonstration.

Soit S la sphère unité d'une métrique hermitienne de $p^{-1}(y_0)$ qui vérifie les conditions de la définition 2. 1. 1.

Choisissons des coordonnées locales (y,t) de X induisant les coordonnées (y,τ) sur Λ de sorte que $S\subset\Sigma$ soit définie par $\langle\tau,\bar{\tau}\rangle=1$.

Comme d'après la Proposition 1. 3. 4.

$C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{M})=\sigma^1_{\Lambda|Y}(P)^{-1}(0)\neq T^*(\Lambda|Y)$ on a par définition

$$P(y,t,D_y,D_t)=P_0(y,t,D_t)+Q(y,t,D_y,D_t)\ \text{où}$$

$$P_0(y,t,D_t)=\sum_{\substack{|\beta|-|\alpha|=k\\|\beta|\leq m}} p_{\alpha\beta}(y)t^\alpha D_t^\beta\ \text{et}$$

$Q\in V_{k-1}F_m(\mathcal{D}_X)$. De plus on a $\hat{\sigma}_\Lambda(P)=P_0(y,\tau,D_\tau)$ et la Définition 2. 1. 1 entraîne que S est non caractéristique pour $P_0(y,\tau,D_\tau)$, c'est à dire que la condition b) est vérifiée. q. e. d.

Remarque. Dans le cas où Y se réduit à un point de X on retrouve ainsi la condition de Kashiwara-Kawai-Sjöstrand (cf. [K-K-S]).

Proposition 2.1.3. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent fuchsien le long de Y en y_0. Alors par toute section u de $\mathcal{M}$ il existe un opérateur $P\in V_0(\mathcal{D}_X)$ tel que $Pu=0$ et que $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_XP$ soit fuchsien le long de Y en y_0.*

Démonstration.

Fixons une métrique sur $\Sigma=p^{-1}(y_0)$ vérifiant la définition 2.1.1 et soit S sa sphère unité.

Soit u une section de $\mathcal{M}$. D'après la proposition 1.3.2 on a

$$C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{D}_Xu)\subset C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{M})$$

et donc

$$C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{D}_Xu)\cap T^*_S\Sigma\ \subset\{0\}.$$

Donc, d'après la proposition 1.3.4, pour tout $\tau_0\in S$ il existe un voisinage ouvert U de τ_0 dans S et un opérateur P défini au voisinage de y_0 tels que

$$(**)\quad C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_XP)\cap(T^*_S\Sigma\underset{S}{\times}U)\subset\{0\}.$$

S étant compacte on peut choisir un nombre fini d'ouverts $(U_i)_{i=1\dots N}$ et d'opérateurs $(P_i)_{i=1\dots N}$ définis au voisinage de y_0 tels que $\bigcup_{i=1,\dots,p}U_i=S$ et que chaque P_i satisfasse (**) par rapport à U_i.

Considérons maintenant des coordonnées locales (y,t) comme dans la démonstration du lemme précedent de sorte que S soit définie par $\langle\tau,\bar\tau\rangle=1$.

Si $Q(y,t,D_y,D_t)=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}a_{\alpha\beta\gamma}(y)t^\alpha D_t^\beta D_y^\gamma$ est un opérateur différentiel sur X on notera

$$\tilde{Q}(y,t,D_y,D_t)=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\overline{q_{\alpha\beta\gamma}(y)}\ t^\beta D_t^\alpha D_y^\gamma.$$

Comme chaque P_i vérifie la condition (*) du lemme 2.1.2 avec b) remplacée par

$$\text{b}')\quad\forall\tau\in U_i,\ \sum_{\substack{|\beta|=m_i\\|\beta|-|\alpha|=k_i}}p_{\alpha\beta}(y_0)\tau^\alpha\bar\tau^\beta\neq0$$

l'opérateur $P=\sum_{i=1,\dots,N}\tilde{P}_iP_i$ vérifie $Pu=0$ et $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_XP$ est fuchsien le long de Y en y_0. q. e. d.

Remarque. Lorsque Y est une hypersurface les objets de la catégorie R_Y définie para Kashiwara [K-3] (voir aussi Sabbah [S]) sont fuchsiens le long de Y.

Ainsi le lemme 4.1.5 de [K-K-2] montre que les modules holonômes réguliers sont fuchsiens le long de toute sous-variété de X.

2.2. Théorème de comparaison pour $B_{Y|X}$ et $B^{\infty}_{Y|X}$

Rappelons maintenant (cf. [S-K-K], [K-K-2]) que si Y est une sous-variété lisse de X de codimension d on pose

$B_{Y|X}=\mathscr{H}^d_{[Y]}(\mathcal{O}_X)=\varinjlim_{m\in N} \mathscr{E}xt^d_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathscr{J}^m_Y, \mathcal{O}_X)$ où $\mathscr{J}_Y$ désigne l'idéal de définition de Y,

$$\text{et } B^{\infty}_{Y|X}=\mathscr{H}^d_Y(\mathcal{O}_X).$$

Si on se place dans un système de coordonnées locales (y,t) sur X où $Y=\{t=0\}$ alors $B_{Y|X}$ est le quotient de $\mathscr{D}_X$ par l'idéal engendré par $t_1,\dots,t_q, D_{y_1},\dots D_{y_p}$ et $B^{\infty}_{Y|X}=\mathscr{D}^{\infty}_X\bigotimes_{\mathscr{D}_X} B_{Y|X}$.

Les sections de $B^{\infty}_{Y|X}$ sur un ouvert U de X s'ecrivent de manière unique

$$u=\sum_{\alpha\in N^q} u_\alpha(y)\delta^{(\alpha)}(t)$$

où $\delta^{(\alpha)}(t)$ désigne la classe de D^{α}_t et où les u_α sont des fonctions holomorphes sur $U\cap Y$ telles que

$$\forall K\Subset U,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists C_\varepsilon>0,\ \sup_{y\in K}|u_\alpha(y)|\le C_\varepsilon\varepsilon^{|\alpha|}\frac{1}{|\alpha|!}.$$

Alors $B_{Y|X}$ est le sous-ensemble de $B^{\infty}_{Y|X}$ des sommes finies $u=\sum u_\alpha(y)\delta^{(\alpha)}(t)$.

Nous noterons

$$B_{Y|X}(m)=\{u=\sum_{\alpha\in N^n} u_\alpha(y)\delta^{(\alpha)}(t), u_\alpha=0 \text{ si } |\alpha|>m\}.$$

Par suite $B_{Y|X}=\bigcup_{m\in N} B_{Y|X}(m)$.

Théorème 2.2.1. *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent fuchsien le long de Y sur un ouvert U.*

Alors le morphisme naturel

$$\boldsymbol{R}\ \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, B_{Y|X}) \to \boldsymbol{R}\ \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, B^{\infty}_{Y|X})$$

est un isomorphisme sur U.

Démonstration.

Par une méthode désormais classique nous allons nous ramener au cas où $\mathcal{M}=\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ pour un opérateur $P\in\mathcal{D}_X$. Soit donc $u_1\dots u_N$ un système local de générateurs de $\mathcal{M}$ en $y_0\in U$. Suivant la définition 2. 1. 1 il existe une métrique hermitienne sur $\Sigma=p^{-1}(y_0)$ telle que l'on ait

$$C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{M})\cap T^*_S\Sigma\subset\{0\} \text{ et donc } \forall i,\ 1\leq i\leq N,\ C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{D}_X u_i)\cap T^*_S\Sigma\subset\{0\}.$$

D'après la proposition 2. 1. 3 il existe P_i annulant u_i, $P_i\in V_0(\mathcal{D}_X)$ tel que l'on ait encore

$$C^1_{\Lambda|Y}(\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P_i)\cap T^*_S\Sigma\subset\{0\}.$$

Par suite $C^1_{\Lambda|Y}(\bigoplus_{i=1}^{N}\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P_i)\cap T^*_S\Sigma\subset\{0\}$ et donc $\mathcal{L}=\bigoplus_{i=1}^{N}\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P_i$ est encore un $\mathcal{D}_X$-module fuchsien le long de Y.

On obtient ainsi une suite exacte

$$0\to\mathcal{N}\to\mathcal{L}\to\mathcal{M}\to 0$$

où $\mathcal{N}$ est fuchsien le long de Y.

On notera $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, B^{\infty}_{Y|X})=M^{j\infty}$, $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, B_{Y|X})=M^j$ et de même pour les modules $\mathcal{N}$ et $\mathcal{L}$.

On a alors le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\dots\to & M^{k-1\infty} & \to & L^{k-1\infty} & \to & N^{k-1\infty} & \to & M^{k\infty} & \to & L^{k\infty} & \to & N^{k\infty} & \to\dots \\
 & \phi_{k-1}\uparrow & & \gamma_{k-1}\uparrow & & \phi_{k-1}\uparrow & & \psi_k\uparrow & & \gamma_k\uparrow & & \phi_k\uparrow & \\
\dots\to & M^{k-1} & \to & L^{k-1} & \to & N^{k-1} & \to & M^k & \to & L^k & \to & N^k & \to\dots
\end{array}$$

Si le théorème est démontré dans le cas d'un opérateur, pour tout i les flèches γ_i sont des isomorphismes. Montrons le théorème par récurrence sur k.

On suppose que pour tout $l<k$ et pour tout module $\mathcal{M}$ vérifiant l'hypothèse du Théorème les morphismes $M^l\to M^{l\infty}$ sont des isomorphismes. Par suite dans le diagramme précédent ϕ_{k-1} est un isomorphisme et donc ψ_k est injectif.

Comme $\mathcal{N}$ vérifie les hypothèses du Théorème, ϕ_k est aussi injectif donc Ψ_k est surjectif, donc un isomorphisme.

Pour montrer le Théorème on peut donc supposer que $\mathscr{M}=\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_XP$, avec $P\in V_0(\mathscr{D}_X)$.

Le complexe $\boldsymbol{R}\ \mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, B^\infty_{Y|X})$ est alors quasi-isomorphe à $B^\infty_{Y|X} \xrightarrow{P} B^\infty_{Y|X}$ tandis que le complexe $\boldsymbol{R}\ \mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, B_{Y|X})$ est quasi-isomorphe à $B_{Y|X} \xrightarrow{P} B_{Y|X}$.

Nous devons donc démontrer que P défini un isomorphisme de $\dfrac{B^\infty_{Y|X}}{B_{Y|X}}$ dans lui même, et nous sommes ramenés à démontrer la proposition suivante:

Proposition 2.2.2. *Soit P un opérateur différentiel sur X d'ordre* 0 *pour la V-filtration et tel que $(\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_XP)$ soit fuchsien le long de Y en un point y_0; il existe un voisinage U de y_0 et un entier N_0 tels que, pour tout $N\geq N_0$, P induise un isomorphisme de $B^\infty_{Y|X}/B_{Y|X}(N)$ dans lui-même sur l'ouvert U.*

Démonstration: D'aprés l'hypothèse, il existe un système de coordonnées locales $(y_1, \dots, y_p, t_1, \dots, t_q)$ dans lequel $y_0=0$,

$Y=\{(y,t)\in X\,|\,t=0\}$ et P s'écrit:

$$P(y,t,D_y,D_t)=P_0(y,t,D_t)+Q(y,t,D_y,D_t)$$

avec

$$1)\quad Q\in V_{-1}F_m(\mathscr{D}_X)$$

$$2)\quad P_0(y,t,D_t)=\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} p_{\alpha\beta}(y)t^\alpha D_t^\beta$$

et

$$\forall\tau\in\boldsymbol{C}^q-\{0\}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} p_{\alpha\beta}(0)\tau^\alpha\bar{\tau}^\beta\neq 0. \tag{2.0}$$

L'opérateur $Q(y,t,D_y,D_t)$ peut être écrit sous la forme

$$Q(y,t,D_y,D_t)=\sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|\leq m\\ |\alpha|>|\beta|}} q_{\alpha\beta\gamma}(y)t^\alpha D_t^\beta D_y^\gamma.$$

Cette somme est infinie en l'indice α et l'analyticité de Q au voisinage de y_0 se traduit par:

$$\exists C>0\,\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\boldsymbol{N}^q\times\boldsymbol{N}^q\times\boldsymbol{N}^p\times\boldsymbol{N}^p,\ |\beta|+|\gamma|\leq m,\ |\alpha|>|\beta| \tag{2.1}$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial_y}\right)^\delta q_{\alpha\beta\gamma}(0)\right|\leq C^{|\alpha|+|\delta|+1}\delta!.$$

Nous poserons pour $k \in \boldsymbol{N}$, $k \geq 1$:

$$P_k(y, t, D_y, D_t) = \sum_{\substack{|\beta|+|\gamma| \leq m \\ |\alpha|-|\beta|=k}} q_{\alpha\beta\gamma}(y) t^\alpha D_t^\beta D_y^\gamma$$

on a ainsi $P = \sum_{k \geq 0} P_k$.

On peut encore décomposer P_0 sous la forme

$$P_0(y, t, D_t) = P_0'(t, D_t) + P_0''(y, t, D_t)$$

avec $P_0'(t, D_t) = P_0(0, t, D_t)$ et $P_0''(0, t, D_t) = 0$.

On écrira

$$P_0''(y, t, D_t) = \sum_{|\alpha|=|\beta| \leq m} q_{\alpha,\beta,0}(y) t^\alpha D_t^\beta$$

avec $q_{\alpha,\beta,0}(0) = 0$ et, puisque $q_{\alpha,\beta,0}$ est analytique:

$$\exists C > 0 \ \forall \delta \in \boldsymbol{N}^p, \ \left|\left(\frac{\partial}{\partial_y}\right)^\delta q_{\alpha,\beta,0}(0)\right| \leq C^{|\delta|+1} \delta!. \tag{2.2}$$

Notons $S = \boldsymbol{C}[t_1, \ldots, t_q]$ l'espace des polynômes en q variables et pour $\nu \in \boldsymbol{N}$, S_ν le sous-espace de S des polynômes homogènes de degré ν.

Si $v = \sum v_\alpha t^\alpha \in S$, on pose $|v| = \sup_\alpha |v_\alpha|$. Rappelons un résultat de Kashiwara-Kawai-Sjöstrand [K-K-S] :

Lemme 2.2.3: *Soient $\boldsymbol{S}^{2q-1}$ la sphère unité de $\boldsymbol{C}^q$ et μ la mesure standard sur $\boldsymbol{S}^{2q-1}$ normalisée par $\mu(\boldsymbol{S}^{2q-1}) = 1$.*

Soit $\|\ \|$ la norme induite sur S par la norme de $L^2(\boldsymbol{S}^{2q-1}, \mu)$:

$$\|v\|^2 = \int_{S^{2q-1}} v(t) \overline{v(t)} d\mu(t).$$

Soit $P = \sum_{|\alpha|=|\beta| \leq m} p_{\alpha\beta} t^\alpha D_t^\beta$ un opérateur différentiel qui vérifie :

$$\forall \tau \in \boldsymbol{C}^q - \{0\} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} p_{\alpha\beta} \tau^\alpha \bar{\tau}^\beta \neq 0.$$

Il existe un entier N_0 et une constante $C > 0$ tels que pour tout $k \geq N_0$ et tout $u \in S_k$ on ait :

(i) $k^m \|u\| \leq C \|Pu\|$

(ii) $\forall \alpha \in \boldsymbol{N}^q \|\tau^\alpha u\| \leq \|u\|$

(iii) $\forall \alpha \in \boldsymbol{N}^q$, $|\alpha| \leq k$, $\|D_t^\alpha u\| \leq C^{|\alpha|} \dfrac{k!}{(k-|\alpha|)!} \|u\|$

(iv) $C^{-k} |u| \leq \|u\| \leq C^k |u|$.

La partie (i) de ce lemme est montrée par [K-K-S], d'autre part la famille $(\sigma_\alpha t^\alpha)_{|\alpha|=k}$ pour $\sigma_\alpha=c_q\sqrt{\frac{(|\alpha|+q-1)!}{\alpha!}}$ (avec c_q constante ne dépendant que de q) est une base othonormée de $(S_k, \|\ \|)$ ce qui montre facilement les points (ii), (iii) et (iv).

Suite de la démonstration de la proposition 2. 2. 2.

Un élement u de $B^\infty_{Y|X}$ s'écrit de manière unique $u=\sum_{\alpha\in N^q} u_\alpha(y)\delta^{(\alpha)}(t)$ avec u_α holomorphe au voisinage de y_0.

A une série formelle $u=\sum_{\alpha\in N^q} u_\alpha(y)\delta^{(\alpha)}(t)$ nous associerons les polynômes Φ_N^δ définis pour $N\in\boldsymbol{N}$ et $\delta\in\boldsymbol{N}^q$ par

$$\Phi_N^\delta(u)=\sum_{|\alpha|=N}\left(\frac{\partial}{\partial_y}\right)^\delta u_\alpha(0)\tau^\alpha$$

Si on pose, pour $v=\sum_{|\alpha|=N} v_\alpha\tau^\alpha$, $|v|=\sup_{|\alpha|=N}|v_\alpha|$ on voit que $u=\sum u_\alpha(y)\delta^{(\alpha)}(t)$ est un élement de $B^\infty_{Y|X}$ dans un voisinage de $y_0=0$ si et seulement si

$$(2.3)\qquad \exists C>0\ \forall\varepsilon>0\ \exists C_\varepsilon>0\ \forall N\in\boldsymbol{N}\,\forall\delta\in\boldsymbol{N}^q\,|\Phi_N^\delta(u)|\le C_\varepsilon\varepsilon^N C^{|\delta|}\frac{\delta!}{N!}.$$

La propriété (iv) du lemme 2. 2. 3 montre que dans la formule ci-dessus on peut remplacer la norme $|\ |$ par la norme $\|\ \|$ du lemme.

D'autre part, par définition de l'action de $\mathscr{D}_X$ sur $B^\infty_{Y|X}$ on a $t^\alpha\delta^{(\gamma)}(t)=(-1)^{|\alpha|}\frac{\gamma!}{(\gamma-\alpha)!}\delta^{(\gamma-\alpha)}(t)$ et $D_t^\beta\delta^{(\gamma)}(t)=\delta^{(\gamma+\beta)}(t)$ donc

a) $\Phi_N^\delta(t^\alpha u)=\left(-\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^\alpha\Phi_{N+|\alpha|}^\delta(u)$

b) $\Phi_N^\delta(D_t^\beta u)=\tau^\beta\Phi_{N-|\beta|}^\delta(u)$

c) $\Phi_N^\delta(P_0'(t, D_t)u)=P_0'(-D_\tau, \tau)\Phi_N^\delta(u)$.

La condition (2. 0) montre que $P_0'(t, D_t)$ vérifie les hypothèses du lemme 2. 2. 3 et on observe que dans ce cas $P_0'(-D_\tau, \tau)$ vérifie lui aussi ces hypothèses comme opérateur sur $\boldsymbol{C}[\tau_1, \dots, \tau_q]$.

On voit donc que pour tout $N\ge N_0$ (N_0 donné par le lemme) et tout $u\in B^\infty_{Y|X}$ on aura

$$N^m\|\Phi_N^\delta(u)\|\le C\|\Phi_N^\delta(P_0'u)\|.$$

L'opérateur $P_0'(t, D_t)$ est donc inversible sur $B^\infty_{Y|X}/B_{Y|X}(N_0)$. Si $u=\sum u_\alpha\delta^{(\alpha)}(t)$, on posera

$\bar{u} = \sum_{|\alpha| \geq N_0} u_\alpha(y)\delta^{(\alpha)}(t)$ et $P_0'^{-1}(u) = P_0'^{-1}(\bar{u})$ et on a une majoration $\forall N \geq N_0$ $||\Phi_N^\delta(P_0^{-1}(u))|| \leq CN^{-m}||\Phi_N^\delta(u)||$.

Soit $u \in B^\infty_{Y|X,y_0}$ on définit une suite u_n de $B^\infty_{Y|X,y_0}$ par

$$u_0 = u,\ u_{n+1} = -(P_0'' + Q)P_0^{-1}(u_n).$$

Pour montrer la proposition, nous allons montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente dans $B^\infty_{Y|X,y_0}$ ce qui montrera que P est inversible sur $B^\infty_{Y|X}/B_{Y|X}(N)$ pour $N \geq N_0$.

En fait nous allons montrer par récurrence sur n que si N_0 est donné par le lemme 2. 2. 3 on a:

(2. 4) $\exists C > 0,\ \exists \theta_0 > 0,\ \forall \theta,\ 0 < \theta < \theta_0,\ \exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$
$\forall n \in \boldsymbol{N},\ \forall N \in \boldsymbol{N},$
$N \geq N_0,\ \forall \mu \in \boldsymbol{N}^q,\ ||\Phi_N^\mu(u_n)||$
$$\leq C_\varepsilon \varepsilon^N \theta^{n-2|\mu|} \frac{1}{N!} C^{|\mu|} \sum_{\substack{a_1 \leq m, \ldots, a_n \leq m \\ a \in N^n}} \phi_a(N)(|a| + \mu)!$$

avec $\phi_a(N) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(N+i)^{a_i}}$.

(1) *Si* (2. 4) *est vérifié pourtout* n, *la série* $\sum_{n \geq 0} u_n$ *est convergente.*

Fixons tout d'abord $l = |a|$ et écrivons $l = ms + r$ avec $r < m$. Comme $|a| = \sum a_i \leq nm$ on a $s \leq n$.

Pour $|a| = l$, la plus grande valeur de $\phi_a(N)$ est atteinte lorsque $a_1 = m, \ldots, a_s = m,\ a_{s+1} = r,\ a_{s+2} = \ldots = a_n = 0$ donc

$$\phi_a(N) \leq \phi_a(0) \leq \frac{1}{(s!)^m} \leq \frac{1}{(ms)!} 2^{[m(m+1)/2]s} \leq C_1^n \frac{1}{l!}$$

où C_1 ne dépend que de m.

$$\sum_{a_1 \leq m, \ldots, a_n \leq m} \phi_a(N)(|a| + |\mu|)! \leq C_1^n m^n \sum_{0 \leq l \leq mn} \frac{(l + |\mu|)!}{l!} \leq C_2^n 2^{|\mu|}(|\mu|)!.$$

On aura donc:

$$||\Phi_N^\mu(u_n)|| \leq C_\varepsilon \varepsilon^N \frac{1}{N!} \left(\frac{2C}{\theta^2}\right)^{|\mu|} (|\mu|)!(C_2\theta)^n.$$

C_2 ne dépend que de m donc pour $\theta \leq \frac{1}{2C_2}$, cette majoration montre que les séries $\sum_{n \geq 0} \Phi_N^\mu(u_n)$ sont convergentes quand $N \geq N_0$ et donc que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

(2) *Montrons les relations* (2. 4) *par récurrence sur n.*

Si u vérifie (2. 3), il est clair qu'on a (2. 4) pour $n=0$. Supposons donc (2. 4) vérifiée au rang n et posons $w_n=P_0^{-1}(u_n)$

On a $u_{n+1}=-(P_0+Q)u_n$ et $||\Phi_N^\mu(w_n)||\leq CN^{-m}||\Phi_N^\mu(u_n)||$.

$$\Phi_N^\mu(u_{n+1}) = \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\\ \delta\leq\mu}} \binom{\mu}{\delta}\left(\frac{\partial}{\partial_y}\right)^{\mu-\delta} q_{\alpha\beta\gamma}(0)\, D_\tau^\alpha \tau^\beta \Phi_{N+|\alpha|-|\beta|}^{\gamma+\delta}(w_n).$$

Dans cette somme on a $|\beta|+|\gamma|\leq m$ et $|\alpha|\geq|\beta|$, de plus si $|\alpha|=|\beta|$ on a $\gamma=0$ (car P_0'' est indépendant de D_y) et $\mu\neq\delta$ (car $q_{\alpha\beta 0}(0)=0$).

(La notation $\delta\leq\mu$ signifie $\forall i=1,\dots q$, $\delta_i\leq\mu_i$ et $\binom{\mu}{\delta}=\dfrac{\mu!}{\delta!(\mu-\delta)!}$ avec $\mu!=\mu_1!\dots\mu_q!$.)

D'après le lemme 2. 2. 3 on a les majorations suivantes:

$$\begin{aligned}||D_\tau^\alpha\tau^\beta\Phi_{N+|\alpha|-|\beta|}^{\gamma+\delta}(w_n)|| &\leq C^{|\alpha|}\frac{(N+|\alpha|-|\beta|)!}{(N-|\beta|)!}||\Phi_{N+|\alpha|-|\beta|}^{\gamma+\delta}(w_n)||\\ &\leq C^{|\alpha|+1}\frac{(N+|\alpha|-|\beta|)!}{(N+|\alpha|-|\beta|)^m(N-|\beta|)!}||\Phi_{N+|\alpha|-|\beta|}^{\gamma+\delta}(u_n)||.\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et les inégalités (2. 1) et (2. 2) on obtient:

$$\begin{aligned}||\Phi_N^\mu(u_{n+1})||\leq &\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\\ \delta\leq\mu}} C_\varepsilon \varepsilon^{N+|\alpha|-|\beta|}\theta^n\left(\frac{C}{\theta^2}\right)^{|\gamma|+|\delta|}\sum_{a_1\leq m,\dots,a_n\leq m}\phi_a(N+|\alpha|-|\beta|)\\ &\cdot(|\alpha|+|\gamma|+|\delta|)!C^{|\alpha|+1}C^{|\alpha|+|\mu|-|\delta|+1}\\ &\cdot\frac{1}{(N+|\alpha|-|\beta|)^m(N-|\beta|)!}\binom{\mu}{\delta}(\mu-\delta)!.\end{aligned}$$

La somme ci-dessus se décompose en A_1+A_2 où A_1 est la somme des termes tels que $|\alpha|=|\beta|$ (donc $\gamma=0$, $\delta<\mu$) et A_2 la somme pour $|\alpha|>|\beta|$.

$$\begin{aligned}A_1=&\sum_{\substack{|\alpha|=|\beta|\leq m\\ \delta<\mu}} C_\varepsilon\varepsilon^N\frac{\theta}{N!}^{n-2|\mu|}(\theta^2)^{|\mu|-|\delta|}C^{2|\alpha|+|\mu|+2}\cdot\\ &\cdot\sum_{a_1\leq m,\dots,a_n\leq m}\phi_a(N)(|a|+|\delta|)!\frac{\mu!}{\delta!}\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{\delta<\mu} \theta^{2(|\mu|-|\delta|)} \frac{(|a|+|\delta|)!}{\delta!} \leq \frac{(|a|+|\mu|)!}{\mu!} \frac{\theta}{(1+\theta^2)^p}.$$

on obtient:

$$A_1 \leq C_\varepsilon \varepsilon^N \frac{\theta^{n-2|\mu|+1}}{N!} C^{|\mu|} \sum_{\substack{a_1\leq m,\ldots,a_n\leq m \\ a_{n+1}=0}} \phi_a(N)(|a|+|\mu|)!\cdot$$

$$\cdot \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} C^{2|\alpha|+2} \frac{\theta}{(1+\theta^2)^p}$$

Il existe θ_0 ne dépendant que de la dimension p de Y, de m et de C tel que si $\theta\leq\theta_0$,

$$\frac{\theta}{(1+\theta^2)^p} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} C^{2|\alpha|+2} \leq \frac{1}{2}.$$

Considérons maintenant A_2, on a donc $|\alpha|>|\beta|$ et $|\beta|+|\gamma|\leq m$

$$\frac{N!}{(N-|\beta|)!} \frac{1}{(N+|\alpha|-|\beta|)^m} \leq \frac{N^{|\beta|}}{(N+1)^m} \leq \frac{1}{(N+1)^{m-|\beta|}}$$

On pose $\tilde{a}_1=m-|\beta|$, $\tilde{a}_2=a_2,\ldots,\tilde{a}_{n+1}=a_n$ donc $|\tilde{a}|=|a|+m-|\beta|\geq |a|+|\gamma|$ et comme $|\alpha|-|\beta|\geq 1$ on a:

$$\frac{N!}{(N-|\beta|)!} \frac{1}{(N+|\alpha|-|\beta|)^m} \phi_a(N+|\alpha|-|\beta|) \leq \frac{1}{(N+1)^{m-|\beta|}}$$

$$\phi_a(N+|\alpha|-|\beta|) \leq \phi_{\tilde{a}}(N)$$

$$A_2 \leq \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C_\varepsilon \varepsilon^{N+|\alpha|-|\beta|} \frac{\theta^{n-2|\mu|}}{N!} C^{|\mu|} \sum_{\tilde{a}_1\leq m,\ldots,\tilde{a}_{n+1}\leq m} \phi_{\tilde{a}}(N)\cdot$$

$$\cdot C^{2|\alpha|+2} \sum_{\delta\leq\mu} \theta^{2(|\mu|-|\delta|)} \frac{\mu!}{\delta!} (|\tilde{a}|-m+|\beta|+|\gamma|+|\delta|)!.$$

(Dans la suite nous écrirons a pour $\tilde{a}$). On a:

$$\frac{(|a|-m+|\beta|+|\gamma|+|\delta|)!}{\delta!} \leq \frac{(|a|+|\delta|)!}{\delta!} \leq \frac{(|a|+|\mu|)!}{\mu!}$$

$$\sum_{\delta\leq\mu} \theta^{2(|\mu|)-|\delta|)} \leq 2 \text{ si } \theta\leq\theta_0\leq 1.$$

On obtient donc:

$$A_2 \leq C_\varepsilon \varepsilon^N \frac{\theta^{n-2|\mu|+1}}{N!} C^{|\mu|} \sum_{a_1\leq m,\ldots,a_{n+1}\leq m} \phi_a(N)(|a|+|\mu|)!\ S(\varepsilon)$$

avec $S(\varepsilon)=\dfrac{2}{\theta} \displaystyle\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ |\alpha|>|\beta|,|\beta|+|\alpha|\leq m}} C^{2|\alpha|+2} \varepsilon^{|\alpha|-|\beta|}.$

Pour tout $C>0$ et tout $\theta>0$, il existe $\varepsilon_1(\theta)>0$ tel que

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_1(\theta),\ S(\varepsilon) < \frac{1}{2}.$$

Donc pour $\theta \leq \theta_0$ et $\varepsilon \leq \inf(\varepsilon_1(\theta), \varepsilon_0)$ on aura :

$$\|\Phi_N^\mu(u_{n+1})\| \leq A_1 + A_2 \leq C_\varepsilon \varepsilon^N \frac{\theta^{n+1-2|\mu|}}{N!} C^{|\mu|} \sum_{a_1 \leq m, \ldots, a_{n+1} \leq m} \phi_a(N)(|a| + |\mu|)!$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 2. 2. 2.

2. 3. Théorèmes de comparaison pour $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$

Nous allons à présent démontrer un théorème de comparaison concernant le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes et le complété formel de $\mathcal{O}_X$ le long d'une sous-variété.

Si Y est une sous-variété lisse de X, nous noterons comme précédemment $\mathcal{I}_Y$ l'idéal de $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes nulles sur Y.

Le complété formel de $\mathcal{O}_X$ le long de Y est le faisceau :

$$\mathcal{O}_{X\hat{|}Y} = \varprojlim_k \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Y^k.$$

Théorème 2. 3. 1. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$ module cohérent fuchsien le long de Y en $y_0 \in Y$. Il existe un voisinage U de y_0 dans Y sur lequel on a :*

$$\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_U = \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X\hat{|}Y})|_U.$$

Nous démontrerons ce théorème directement en nous ramenant, suivant la même méthode que pour ce théorème 2. 2. 1, au cas d'un seul opérateur, c'est à dire à la proposition suivante :

Proposition 2. 3. 2. *Soit P un opérateur différentiel sur X, d'ordre* 0 *pour la V-filtration, tel que $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ soit fuchsien le long de Y en un point y_0. Il existe un voisinage U de y_0 et un entier $k_0 \geq 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$, P induise sur U des isomorphismes $\mathcal{I}_Y^k \to \mathcal{I}_Y^k$ et $\mathcal{I}_Y^k \mathcal{O}_{X\hat{|}Y} \to \mathcal{I}_Y^k \mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$.*

Remarque : Cette proposition a été démontrée par Kashiwara-Kawai-Sjöstrand dans le cas ou Y est un point et par Oshima [O] lorsque Y est une hypersurface. Nous suivrons ici la démonstration de [K-K-S] (en utilisant en particulier le lemme 2. 2. 3).

Démonstration : Nous nous plaçons dans un système de coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_p, t_1, \ldots, t_q)$ où P se décompose comme dans la démonstration de la proposition 2. 2. 2 et s'écrit donc

$$P = \sum_{k \geq 0} P_k,\ P_k \text{ opérant de } \mathscr{I}_Y^l \text{ dans } \mathscr{I}_Y^{l+k}.$$

On note encore $S = \boldsymbol{C}[t_1, \ldots, t_q]$ et S_N le sous-espace de S des polynômes homogènes de degré N.

On désigne par $\mathcal{O}_{Y,0}$ le germe en $y_0 = 0$ du faisceau $\mathcal{O}_Y$ des fonctions holomorphes sur Y, $\mathscr{S} = \mathcal{O}_{Y,0} \underset{\boldsymbol{C}}{\otimes} S = \mathcal{O}_{Y,0}[t_1, \ldots t_q]$ et $\mathscr{S}_N = \mathcal{O}_{Y,0} \underset{\boldsymbol{C}}{\otimes} S_N$.

Si $u(y, t)$ est un élément de $\mathscr{S}_N$ on peut l'écrire en développant ses coefficients en série de Taylor en 0 :

$$u(y, t) = \sum_{\alpha \in \boldsymbol{N}} u_\alpha(t) y^\alpha.$$

Pour tout $\rho > 0$ on pose:

$$\|u\|_\rho = \sum_{\alpha \in \boldsymbol{N}^p} \|u_\alpha\| \rho^{|\alpha|}$$

où $\|u_\alpha\|$ est la norme sur S_N définie dans le lemme 2. 2. 3.

Nous noterons $\mathscr{S}_N(\rho)$ le sous-espace de $\mathscr{S}_N$ des éléments u tels que $\|u\|_\rho < +\infty$ —il est clair que $\mathscr{S}_N = \bigcup_{\rho > 0} \mathscr{S}_N(\rho)$ (cette définition s'applique également à $\mathcal{O}_{Y,0} = \mathscr{S}_0$).

Les éléments de $\mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$ (resp. de $\mathscr{I}_Y^k \mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$) sont les séries formelles $u = \sum_{\nu \geq 0} u_\nu$ (resp. $u = \sum_{\nu > k} u_\nu$) avec $u_\nu \in \mathscr{S}_\nu$ pour tout ν.

Il est clair (vu le (iv) du lemme 2. 2. 3) qu'un élément $u = \sum u_\nu$ de $\mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$ (resp. de $\mathscr{I}_Y^k \mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$) est dans $\mathcal{O}_{X,y_0}$ (resp. $\mathscr{I}_{Y,y_0}^k$) si et seulement si :

$$\exists \rho > 0,\ \exists C > 0,\ \forall \nu \geq 0,\ \|u_\nu\|_\rho \leq C^{\nu+1}$$

Lemme 2. 3. 3: *L'opérateur* $P = \sum_{\mu \geq 0} P_\mu$ *vérifie,*

1) $\exists C_1 > 0,\ \exists \rho_0 > 0,\ \exists k_0,\ \forall \rho > 0,\ \rho \leq \rho_0,\ \forall k \in \boldsymbol{N},\ k \geq k_0,\ \forall u \in \mathscr{S}_k(\rho),$

$$k^m \|u\|_\rho \leq C_1 \|P_0 u\|$$

2) $\exists \rho_0 > 0,\ \forall \rho > 0,\ \rho \leq \rho_0,\ \exists C_2 > 0,\ \exists C_3 > 0,\ \forall \mu > 0,\ \forall k \geq 0,$

$$\forall u \in \mathscr{S}_k(\rho),\ \forall (s, t),\ \frac{1}{2} < s < t < 1,$$

$$\|P_\mu u\|_{s\rho} \leq C_2^m C_3^{\mu+1} \sum_{p=0}^{m} \frac{k!\,p!}{(k-m+p)!} \frac{1}{(t-s)^p} \|u\|_{t\rho}.$$

Démonstration : D'après le lemme 2.2.3 on a, pour tout $\rho>0$, tout $u\in\mathscr{S}_k(\rho)$ et tout $(\alpha,\beta)\in N^q\times N^q$:

$$||t^\alpha D_t^\beta u||_\rho\leq C^{|\beta|}\frac{k!}{(k-|\beta|)!}||u||_\rho.$$

D'autre part la formule de Cauchy montre (cf. [B-K]) que:

$$\forall (s,t)\ 1/2<s<t,\ ||D_y^\alpha u||_{s\rho}\leq C^{|\alpha|}\,|\alpha|!\Big(\frac{1}{t-s}\Big)^{|\alpha|}||u||_{t\rho}$$

L'opérateur P_μ s'écrit $P_\mu=\sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|\leq m\\ |\alpha|-|\beta|=\mu}} q_{\alpha\beta\gamma}(y)\,t^\alpha D_t^\beta D_y^\gamma$

et d'après (2.1) il existe $\rho_0>0$ et $C_0>0$ tel que pour $\rho\leq\rho_0$ on ait

$$||q_{\alpha\beta\gamma}||\leq C_0^{|\alpha|+1}.$$

On obtient donc immédiatement le point 2) du lemme. D'autre part P_0 se décompose comme précédemment sous la forme:

$$P_0(y,t,D_t)=P_0'(t,D_t)+P_0''(y,t,D_t)$$

avec $P_0'(t,D_t)=P_0(0,t,D_t)$.

L'opérateur P_0' vérifie les hypothèses du lemme 2.2.3 donc:

$$\exists k_0\in N,\ \exists C_0>0\ \exists\rho_0>0\ \forall\rho\leq\rho_0\ \forall k\in N,\ k\geq k_0,$$
$$\forall u\in\mathscr{S}_k(\rho),\ k^m||u||_\rho\leq C_0||P_0'u||_\rho.$$

De plus $P_0''(y,t,D_t)=\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m}\tilde{p}_{\alpha\beta}(y)\,t^\alpha D_t^\beta$ avec $\tilde{p}_{\alpha\beta}(0)=0$ donc $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\rho<\delta,\ ||\tilde{p}_{\alpha\beta}||_\rho\leq\varepsilon$ et donc si $u\in\mathscr{S}_k(\rho)$ on aura :

$$||P_0''u||_\rho\leq\varepsilon\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m}C^{|\beta|}\frac{k!}{(k-|\beta|)!}||u||_\rho\leq C'\varepsilon\frac{k!}{(k-m)!}||u||_\rho\leq C'\varepsilon k^m||u||_\rho.$$

Si on choisit $\varepsilon=\dfrac{1}{2C'C_0}$ on obtient :

$$2C_0||P_0u||_\rho\geq 2C_0||P_0'u||_\rho-\frac{1}{\varepsilon C'}||P''u||_\rho\geq k^m||u||_\rho.$$

q. e. d.

Fin de la démonstration de la proposition 2.3.2.

Le lemme 2.3.3 montre qu'il existe k_0 tel que pour $k\geq k_0$, P_0 soit bijectif de $\mathscr{S}_k$ dans lui même.

On en déduit immédiatement que pour $k\geq k_0$ P est injectif sur $\mathscr{J}_Y^k\mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$ et donc aussi sur $\mathscr{J}_Y^k$.

Montrons que P est surjectif.

Si $u=\sum_{\nu\geq k} u_\nu$ est un élément de $\mathscr{J}_Y^k \mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$ et si $v=Pu$ on a $v=\sum_{\nu\geq k} v_\nu$ avec $v_\nu=\sum_{\mu\geq 0} P_\mu u_{\nu-\mu}$.

L'équation $P\ u=v$ est donc équivalente a:

$$\forall j\geq k, \quad P_0 u_j=v_j-\sum_{\nu<j} P_{j-\nu} u_j$$

Pour $k\geq k_0$, P_0 est bijectif sur $\mathscr{S}_k$ donc on peut toujours résoudre les équations ci dessus et P est surjectif de $\mathscr{J}_Y^k \mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$ sur $\mathscr{J}_Y^k \mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$. Pour montrer que P est surjectif $\mathscr{J}_Y^k \to \mathscr{J}_Y^k$ il suffit de montrer que si $v\in\mathscr{J}_Y^k$ alors $u\in\mathscr{J}_Y^k$.

Soit $v=\sum_{\nu\geq k} v_\nu \in\mathscr{J}_Y^k$, il existe $\rho>0$ et $D>0$ tels que

$$\forall \nu\geq k,\ ||v_\nu||_\rho \leq \left(\frac{D}{2^m}\right)^{\nu+1}$$

et donc pour $1/2<s<1$, $||v_\nu||_{s\rho}\leq\left(\frac{D}{2^m}\right)^{\nu+1}\leq D^{\nu+1}\left(\frac{1}{1-s}\right)^{m\nu}$. Soit $u=\sum u_j$ tel que $Pu=v$.

Montrons par récurrence sur j que pour tout j on a:

$$\forall s,\ \frac{1}{2}<s<1,\ ||u_j||_{s\rho}\leq C^{j+1}\left(\frac{1}{1-s}\right)^{mj}$$

où C est une constante à déterminer.

Pour $j<k$, $u_j=0$ donc la relation est vérifiée. Supposons cette rélation vérifiée pour tout $\nu<j$.

Si $Pu=v$ on a $P_0u_j=v_j-\sum_{\nu<j} P_{j-\nu}u_\nu$

D'après le lemme 2.3.3 on a:

$$\forall s,\ \frac{1}{2}<s<1,\ ||u_j||_{s\rho}\leq C_1 j^{-m}||P_0 u_j||_{s\rho}$$

et

$$||P_{j-\nu}u_\nu||_{s\rho}\leq C_2^m C_3^{j-\nu+1}\sum_{p=0}^{m}\frac{\nu!p!}{(\nu-m+p)!}\ \frac{1}{(t-s)^p}||u_\nu||_{t\rho}$$

et donc d'après l'hypothèse de récurrence:

$$||u_j||_{s\rho}\leq C_0 j^{-m}[||v_j||_{s\rho}+\sum_{\nu<j}||P_{j-\nu}u_\nu||_{s\rho}]$$

$$||P_{j-\nu}u_\nu||_{s\rho}\leq C_2^m C_3^{j-\nu+1}\sum_{p=0}^{m}\frac{\nu!p!}{(\nu-m+p)!}\ \frac{1}{(t-s)^p}C^{\nu+1}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{m\nu}.$$

Cette inegalité est vraie pour tout t tel que $\frac{1}{2}<s<t<1$, or

$$\inf_{s<t<1}\left(\frac{1}{t-s}\right)^{p}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{m\nu}=\left(\frac{1}{1-s}\right)^{p+m\nu}\frac{(p+m\nu)^{p+m\nu}}{p^{p}(m\nu)^{m\nu}}$$

donc

$$||P_{j-\nu}u_{\nu}||_{s\rho}\leq C_{2}^{m}C_{3}^{j-\nu+1}C^{\nu+1}\left(\frac{1}{1-s}\right)^{m(\nu+1)}\sum_{p=0}^{m}\frac{\nu!p!}{(\nu-m+p)!}\frac{(p+m\nu)^{p+m\nu}}{p^{p}(m\nu)^{m\nu}}.$$

$$\text{Or } \frac{\lambda!}{(\lambda-m+p)!}\leq\lambda^{m-p}$$

$$\frac{(m\lambda+p)^{m\lambda+p}}{(m\lambda)^{m\lambda}p^{p}}=\left(1+\frac{p}{m\lambda}\right)^{m\lambda}\left(1+\frac{m\lambda}{p}\right)^{p}\leq\left(\frac{2m^{2}}{p}\right)^{p}e^{p}$$

donc $\sum_{p=0}^{m}\frac{\nu!p!}{(\nu-m+p)!}\frac{(p+m\nu)^{p+m}}{p^{p}(m\nu)^{m\nu}}\leq\nu^{m}a$ où a ne dépend que de m.

$$\sum_{\nu<j}||P_{j-\nu}u_{\nu}||_{s\rho}\leq C_{2}^{m}a\,j^{m}\left(\frac{1}{1-s}\right)^{mj}\sum_{\nu<j}C_{3}^{j-\nu+1}C^{\nu+1}$$

$$\leq C_{2}^{m}a\,j^{m}C_{3}^{2}\frac{C^{j+1}}{C-C_{3}}\left(\frac{1}{1-s}\right)^{mj}$$

et donc

$$||u_{j}||_{s}\leq\left(\frac{1}{1-s}\right)^{mj}[C_{0}D^{j+1}+aC_{0}C_{2}^{m}\frac{C_{3}^{2}}{C-C_{3}}C^{j}]$$

et la relation de récurrence est vérifiée dès que

$$C>2C_{0}D \text{ et } C>C_{3}+2aC_{0}C_{2}^{m}C_{3}^{2}.$$

q. e. d.

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent. On note $\mathscr{M}^*=\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X)$-c'est un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à droite. Les constructions menant à la définition 2. 1. 1 étant encore valables dans la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules à droite cohérents, on définit de la même manière la notion de $\mathscr{D}_X$-module à droite fuchsien le long de Y et on a:

Proposition 2. 3. 4. *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent. Alors*:

i) $C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{E}xt^j_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X))\subset C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{M})$.

ii) *Si $\mathscr{M}$ est fuchsien le long de Y alors $\mathscr{M}^*$ est un complexe dont les groupes de cohomologie sont fuchsiens le long de Y.*

Démonstration.

ii) Résulte immédiatement de i).

i) 1) Considérons d'abord le cas où $\mathscr{M}=\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P$. Alors $\mathscr{M}^*\simeq \mathscr{D}_X/P\mathscr{D}_X$ et le résultat est évident.

2) Dans le cas général, soit donné localement un système de générateurs $u_1\dots u_N$ de $\mathscr{M}$.

Soit $x^*\in T^*(\Lambda|Y)$ tel que $x^*\notin C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{M})$.

Il s'agit donc de montrer que pour tout j

$$x^*\notin C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{E}xt^j_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X)).$$

On a une suite exacte

$$0\leftarrow\mathscr{M}\leftarrow\bigoplus_{j=1}^N\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P_j\leftarrow\mathscr{N}\leftarrow 0$$

où $P_j u_j=0$, $\mathscr{L}=\bigoplus_{j=1}^N \mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P_j$ et $x^*\notin C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{L})$.

Pour tout $j\neq 1$, $\mathscr{E}xt^{\,j}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{L},\mathscr{D}_X)=0$ et d'après 1)

$$x^*\notin C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{L},\mathscr{D}_X)).$$

D'autre part on a les suites exactes

$$(*)\qquad 0\to\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X)\to\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{L},\mathscr{D}_X)\to \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N},\mathscr{D}_X)\to\mathscr{E}xt^2_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X)\to 0$$

et

$$(**)\qquad \forall j\geq 3\quad 0\to\mathscr{E}xt^{j-1}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N},\mathscr{D}_X)\to\mathscr{E}xt^j_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X)\to 0.$$

On déduit de (*) que $x^*\notin C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X))$ et donc $x^*\notin C^1_{\Lambda|Y}(\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{N},\mathscr{D}_X))$. On raisonne alors par récurrence sur j.

q. e. d.

Remarques:

1 — Les théorèmes de "comparaison" 2. 2. 1 et 2. 3. 1 restent valables pour les $\mathscr{D}_X$-modules $\mathscr{M}$ qui sont extension de modules fuchsiens le long de Y, c'est à dire, pour les modules pour qui il existe une suite exacte $0\to\mathscr{N}'\to\mathscr{M}\to\mathscr{N}''\to 0$ où $\mathscr{N}'$ et $\mathscr{N}''$ sont fuchsiens le long de Y.

2 — Les théorèmes 2. 2. 1 et 2. 3. 1 restent valables si on remplace $\mathscr{M}$ par un complexe $\dot{\mathscr{M}}$ de $\mathscr{D}_X$-modules cohérents dont les groupes de cohomologie $\mathscr{H}^j(\dot{\mathscr{M}})$ sont nuls pour $|j|$ assez grand et sont fuchsiens le long de Y. En particulier si $\mathscr{M}$ est fuchsien ils sont vrais pour le complexe dual de $\mathscr{M}$. Pour voir cela nous définissons suivant [H] les foncteurs "troncature" $\sigma_{\geq n}$ et $\sigma'_{\geq n}$ où $n\in\boldsymbol{N}$ par

$$\sigma'_{\geq n}(\mathcal{M}) = 0 \longrightarrow \operatorname{coker}\ d^{n-1} \xrightarrow{d^n} \mathcal{M}^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \mathcal{M}^{n+2} \longrightarrow \dots$$

$$\sigma_{\geq n}(\mathcal{M}^{\bullet}) = 0 \longrightarrow \operatorname{Im}\ d^n \xrightarrow{i} \mathcal{M}^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \mathcal{M} \xrightarrow{n+2} \dots$$

Alors on a $H^i(\sigma_{\geq n}(\mathcal{M}^{\bullet})) = \begin{cases} H^i(\mathcal{M}^{\bullet}) & \text{pour } i \geq n+1 \\ 0 & \text{pour } i < n+1 \end{cases}$

et $H^i(\sigma'_{\geq n}(\mathcal{M}^{\bullet})) = \begin{cases} H^i(\mathcal{M}^{\bullet}) & \text{pour } i \geq n \\ 0 & \text{pour } i < n \end{cases}$. De plus on a un triangle

$$\begin{tikzcd} & \sigma_{>n}(\mathcal{M}^{\bullet}) \arrow[dl, "+1"'] & \\ H^n(\mathcal{M}^{\bullet})[n] \arrow[rr] & & \sigma'_{\geq n}(\mathcal{M}^{\bullet}) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

et on peut donc raisonner par récurrence décroissante sur n.

§ 3. Applications

Reprenons les notations du paragraphe précédent.

Soit X une variété analytique complexe et Y une sous-variété lisse de X. Soit $\mathcal{J}_Y$ l'idéal de définition de Y. Rappelons que l'on note

$$\mathcal{D}_{Y\to X} = \mathcal{D}_X / \mathcal{J}_Y \mathcal{D}_X \text{ ; c'est un } (\mathcal{D}_Y, \mathcal{D}_X)\text{-bimodule}$$

On a $\mathcal{D}_{Y\to X} = B_{Y|Y\times X} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X$ où Ω_X désigne le faisceau des formes différentielles holomorphes de degré maximum et où l'on identifie Y au graphe de l'injection $Y \hookrightarrow X$. Soit $\mathcal{D}_X^\infty$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini ou infini sur X. On note $\mathcal{D}_{Y\to X}^\infty = \mathcal{D}_{Y\to Y} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{D}_X^\infty = \mathcal{D}_X^\infty / \mathcal{J}_Y \mathcal{D}_X^\infty$.

On a de même $\mathcal{D}_{Y\to X}^\infty = B_{Y|Y\times X}^\infty \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X$ et on pose encore $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} = B_{Y|Y\times X} \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Omega_Y$ et $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}^\infty = B_{Y|Y\times X}^\infty \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Omega_Y$. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent, le système induit par $\mathcal{M}$ sur Y est par définition le complexe $\mathcal{M}_Y^{\bullet} = \mathcal{D}_{Y\to X} \overset{u}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{M} = \mathcal{O}_Y \overset{u}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathcal{M}$. Si $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{D}_X^\infty$-module on pose de même

$$\mathcal{L}_Y^{\bullet} = \mathcal{D}_{Y\to X}^\infty \overset{u}{\underset{\mathcal{O}_X^\infty}{\otimes}} \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_Y \overset{u}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathcal{L}$$

Remarquons que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent fuchsien le long de Y alors $\mathcal{M}$ est elliptique le long de Y au sens de [L-Sch] (cf. aussi [Sch]) et donc $\mathcal{M}_Y$ est à cohomologie cohérente sur $\mathcal{D}_Y$.

Puisque $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{M})\simeq\mathscr{D}_{X\leftarrow Y}\overset{u}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}}\mathscr{M}_Y[-d]$ (cf. Prop. 4.2 et Prop. 4.3 de [K-2]) on en déduit que $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{M})$ est à cohomologie cohérente sur $\mathscr{D}_X$.

3.1. Comparaison des cohomologies d'un système fuchsien

Si $\mathscr{M}$ est $\mathscr{D}_X$-module cohérent nous noterons $\mathscr{M}^\infty=\mathscr{D}_X^\infty\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}\mathscr{M}$.

Théorème 3.1.1. *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module fuchsien sur un ouvert U de Y. Alors le morphisme naturel*

$$(\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{M}))^\infty\to\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{M}^\infty) \text{ est un isomorphisme.}$$

Remarque. Dans le cas où $\mathscr{M}$ est holonôme singulier régulier ce théorème a été démontré par Kashiwara-Kawai [K-K-2] (voir aussi Mebkhout [M]).

Démonstration.

Par une méthode analogue à celle du théorème 2.2.1 on peut se ramener au cas où $\mathscr{M}=\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_XP$ avec P fuchsien le long de Y et $P\in V_0(\mathscr{D}_X)$. Il faut donc démontrer que les complexes

$$0\longrightarrow\mathscr{D}_X^\infty\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}R\Gamma_{[Y]}(\mathscr{D})_X\xrightarrow{P}\mathscr{D}_X^\infty\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}R\Gamma_{[Y]}(\mathscr{D}_X)\longrightarrow 0$$

et

$$0\longrightarrow\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}_X^\infty)\xrightarrow{P}\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}_X^\infty)\longrightarrow 0$$

sont quasi-isomorphes.

Soit d la codimension de Y dans X.

Considerons la suite d'immersions fermées de variétés $Y\subset Y\times X\subset X\times X$ et notons $Z=Y\times X$, $\mathscr{X}=X\times X$. Rappelons que $\mathscr{D}_X=B_{X|X\times X}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X$ (cf. [S-K-K]). Comme le théorème est de nature locale on peut donc identifier $\mathscr{D}_X$ et $B_{X|X\times X}$.

On a alors $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{D}_X)\simeq\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\boldsymbol{R}\Gamma_{[X]}(\mathscr{O}_{X\times X})[n])\simeq$
$$R\Gamma_{[Y]}(\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z]}(\mathscr{O}_{X\times X}))[n]\simeq\boldsymbol{R}_{[Y]}(B_{Z|\mathscr{X}})[n-d],$$

et de même

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{D}_X^\infty) \simeq R\Gamma_Y(B_{Z|\mathfrak{X}}^\infty) \quad [n-d].$$

Par la première projection de $X\times X$ dans X, l'opérateur P s'identifie à un opérateur de $\mathscr{D}_{X\times X}$ fuchsien le long de Z. D'après la proposition 2. 2. 2 il existe donc un entier $N_0\geq 0$ tel que pour tout $N\geq N_0$ le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & B_{Z|\mathfrak{X}}[N] & \xrightarrow{P} & B_{Z|\mathfrak{X}}[N] & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & B_{Z|\mathfrak{X}}^\infty & \xrightarrow{P} & B_{Z|\mathfrak{X}}^\infty & \longrightarrow 0 \end{array}$$

soit un quasi-isomorphisme. On a donc un quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H_Y^{n-d}(B_{Z|\mathfrak{X}}[N]) & \xrightarrow{P} & H_Y^{n-d}(B_{Z|\mathfrak{X}}[N]) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & H_Y^{n-d}(B_{Z|\mathfrak{X}}^\infty) & \xrightarrow{P} & H_Y^{n-d}(B_{Z|\mathfrak{X}}^\infty) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Identifions $B_{Z|\mathfrak{X}}[N]$ à $\mathscr{O}_Z \underset{\boldsymbol{C}}{\otimes} S_N$ où S_N désigne comme au § 2 le $\boldsymbol{C}$-espace vectoriel des polynômes à d-variables de degré inférieur ou égal à N et $B_{Z|\mathfrak{X}}$ à $\mathscr{O}_Z \underset{\boldsymbol{C}}{\otimes} S$ où $S = \underset{N}{\varinjlim}\, S_N$ est le $\boldsymbol{C}$-espace vectoriel des polynômes à d-variables.

On a alors

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Y(B_{Z|\mathfrak{X}}[N]) \simeq R\Gamma_Y(\mathscr{O}_Z) \underset{\boldsymbol{C}}{\otimes} S_N \text{ et d'autre part}$$

$$\mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(B_{Z|\mathfrak{X}}[N]) \simeq \mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{O}_Z) \underset{\boldsymbol{C}}{\otimes} S_N.$$

Vérifions donc que $\mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{O}_Z) \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{O}_Z)$. Puisque X et Z sont transversales dans $X\times X$ et que $X\cap Z = Y$ on a

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{O}_Z) &\simeq \mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \boldsymbol{R}\Gamma_{[X]}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \overset{L}{\underset{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}{\otimes}} \mathscr{O}_Z \\ &\simeq \mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \mathscr{D}_X[-n] \overset{L}{\underset{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}{\otimes}} \mathscr{O}_Z \simeq \mathscr{D}_X^\infty \overset{L}{\underset{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}{\otimes}} \mathscr{O}_Z[-n] \\ &\simeq \boldsymbol{R}\Gamma_X(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \overset{L}{\underset{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}{\otimes}} \mathscr{O}_Z \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{O}_Z). \end{aligned}$$

Il reste à remarquer que $\underset{N}{\varinjlim}\, \mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{O}_Z) \underset{\boldsymbol{C}}{\otimes} S_N \simeq \mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}$ $(B_{Z|\mathfrak{X}})$.

q. e. d.

3. 2. Systèmes induits

Théorème 3. 2. 1. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent fuchsien le long de Y sur un ouvert U de Y. Alors le morphisme naturel:*

$$\mathcal{D}_Y^\infty \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} (\mathcal{D}_{Y\to X} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{D}_{Y\to X}^\infty \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{M}$$

est un isomorphisme (c'est à dire $(\mathcal{M}^\infty)_Y \simeq (\mathcal{M}_Y)^\infty$).

Démonstration.

D'après le théorème 3. 1. 1 on a

$$(\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}))^\infty \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{M}^\infty) \text{ et donc}$$

$$\mathcal{D}_{Y\to X}^\infty \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X^\infty}{\otimes}} R_{[Y]}(\mathcal{M})^\infty \simeq \mathcal{D}_{Y\to X}^\infty \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{D}_{Y\to X}^\infty \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X^\infty}{\otimes}} R\Gamma_Y(\mathcal{M}^\infty).$$

Or comme nous l'avons vu plus haut $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{M}_Y[-d]$ donc

$$\mathcal{D}_{Y\to X}^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{D}_{Y\to X}^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{D}_{X\to Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{M}_Y[-d] \simeq$$
$$\mathcal{D}_Y^\infty \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{M}_Y \simeq (\mathcal{M}_Y)^\infty.$$

(d désignant la codimension de Y dans X).

D'autre part $\mathcal{D}_{Y\to X}^\infty \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X^\infty}{\otimes}} \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{M}^\infty) \simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{D}_{Y\to X}^\infty \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{M}^\infty) \simeq (\mathcal{M}^\infty)_Y$, ce qui termine la démonstration. q. e. d.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module. Alors on a un isomorphisme canonique $\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{Y\hat{|}X})|_Y \simeq \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$ (Il suffit de vérifier ce résultat dans le cas $\mathcal{M}=\mathcal{D}_X$).

Le Théorème 2. 3. 1 permet donc d'obtenir le théorème de Cauchy :

Théorème 3. 2. 2. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module fuchsien le long de Y; alors le morphisme naturel*

$$\boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_Y \longrightarrow \boldsymbol{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$$

est un isomorphisme.

Ce même théorème 2. 3. 1 entraîne la proposition :

Proposition 3.2.3. *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module fuchsien le long de Y. Alors le morphisme naturel*

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\Omega_X \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{M}) \longrightarrow \Omega_Y \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}} \mathscr{M}_Y[-d]$$

est un isomorphisme.

Démonstration.

On a

$$\Omega_X \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{M} \simeq \Omega_X \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X^\infty}{\otimes}} \mathscr{D}_X^\infty \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X^\infty}{\otimes}} \mathscr{M} \simeq \Omega_X \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X^\infty}{\otimes}} \mathscr{M}^\infty$$

et donc

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\Omega_X \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{M}) &\simeq \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\Omega_X \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X^\infty}{\otimes}} \mathscr{M}^\infty) \\
&\simeq \Omega_X \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X^\infty}{\otimes}} \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathscr{M}^\infty) \simeq \Omega_X \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X^\infty}{\otimes}} (\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{M}))^\infty \\
&\simeq \Omega_X \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{M}) \\
&\simeq \Omega_X \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}} \mathscr{M}_Y[-d] \\
&\simeq \Omega_Y \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}} \mathscr{M}_Y[-d].
\end{aligned}$$

q. e. d.

Les résultats du § 2 permettent encore de donner un théorème de Cauchy pour $B_{Y|X}^\infty$:

Si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent (ou un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules cohérents à cohomologie cohérente) on note comme précédement:

$$\mathscr{M}^* \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X).$$

Le complexe induit sur Y par $\mathscr{M}^*$ est par définition $\mathscr{M}_Y^* \simeq \mathscr{M}^* \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{D}_{X\leftarrow Y}$. Enfin $(\mathscr{M}_Y^*)^*$ est le dual de $\mathscr{M}_Y^*$, c'est à dire $\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{M}_Y^*, \mathscr{D}_Y)$.

Théorème 3.2.4. *Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_X$-module fuchsien le long de Y. Alors on a*

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, B_{Y|X}^\infty)\,|Y \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}((\mathscr{M}_Y^*)^*, \mathscr{O}_Y).$$

Démonstration.

Nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme 3.2.5.

On a un isomorphisme $B_{Y|X} \rightleftarrows \mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}} \mathscr{O}_Y$

Démonstration.

Soit $p: Y\times X \to X$ la deuxième projection; d'après [S-K-K] on a un morphisme d'image directe

$$p^*: B_{Y|Y\times X} \underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes} \Omega_Y \simeq \mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \longrightarrow B_{Y|X}$$

Puisque $\mathscr{O}_Y$ est un sous anneau de $\mathscr{D}_Y$ on obtient un morphisme

$$\mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}} \mathscr{O}_Y \longrightarrow \mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \longrightarrow B_{Y|X}.$$

Pour montrer que ce morphisme est un isomorphisme on peut se placer dans un système de coordonnées locales $(y_1, \ldots y_p, t_1 \ldots t_q)$ sur X où Y est définie par $t_1 = \ldots = t_q = 0$. Alors $\mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \simeq \dfrac{\mathscr{D}_X}{\mathscr{D}_X t_1 + \ldots + \mathscr{D}_X t_q}$ et $\mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}} \mathscr{O}_Y \simeq \dfrac{\mathscr{D}_X}{\mathscr{D}_X t_1 + \ldots + \mathscr{D}_X t_q + \mathscr{D}_X D_{y_1} \ldots + \mathscr{D}_X D_{y_p}} \simeq B_{Y|X}$.

q. e. d.

Démonstration du théorème 3.2.4.

D'après le théorème 2.2.1 on a

$$\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, B^\infty_{Y|X}) \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, B_{Y|X}).$$

Par ailleurs d'après le lemme 3.2.5 on a

$$B_{Y|X} \simeq \mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}} \mathscr{O}_Y$$

donc

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, B_{Y|X}) &\simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X) \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} B_{Y|X} \\ &\simeq \mathscr{M}^* \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} B_{Y|X} \simeq \mathscr{M}^* \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}} \mathscr{O}_Y \\ &\simeq \mathscr{M}^*_Y \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}} \mathscr{O}_Y \simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}((\mathscr{M}^*_Y)^*, \mathscr{D}_Y) \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}} \mathscr{O}_Y\end{aligned}$$

$$\simeq \boldsymbol{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}((\mathscr{M}_Y^*)^*, \mathscr{O}_Y).$$

q. e. d.

Bibliographie

[B-K] Boutet de Monvel, L., Kree, P., Pseudodifferential operators and Gevrey classes, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **T-26** (1976), 81-140.

[H] Hartshorne, R., Residues and Duality, *Lecture Notes in Maths.*, Springer, **20** (1966).

[K-1] Kashiwara, M., On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **10** (1975), 563-579.

[K-2] ——————, On the holonomic systems of linear differential equations, II, *Inventiones Math.*, **49** (1979), 121-135.

[K-3] ——————, Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations, *Springer Lect. Notes in Math.*, n° **1016** (1983).

[K-K-1] Kashiwara, M., Kawai, T., Second microlocalisation and asymptotic expansions, *Lecture Notes in Physics*, Springer, **126** (1980), 21-56.

[K-K-2] ——————————, On the holonomic systems of microdifferential equations, III, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **17** (1981), 813-979.

[K-K-S] Kashiwara, M., Kawai, T., Sjostrand, J., On a class of linear partial differential equations whose formal solutions always converge, *Arkiv für Math.*, **17, n°1** (1979), 83-91.

[L] Laurent, Y., Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe, *Progress in Math. Birkhäuser*, 1985.

[L-Sch] Laurent, Y., Schapira, P., Images inverses des modules différentiels, *Compositio Mathematica*, **61** (1987), 229-251.

[M] Mebkhout, Z., Une équivalence de catégories et une autre équivalence de catégories, *Compositio mathematica*, **vol 51**, n°1 (1984), pp. 55-62 et pp. 63-68.

[M. F.] Monteiro Fernandes, T., Problème de Cauchy microdifférentiel et théorèmes de propagation—in "Géometrie et analyse microlocal", *Astérisque*, n° **140-141** (1986), 135-220.

[O] Oshima, T., A Definition of boundary values of solutions of partial differential equations with regular singularities, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **19** (1983), 1203-1230.

[R] Ramis, J. P., Variations sur le thème GAGA, *Lecture Notes in Math.*, Springer, **694** (1978), 228-289.

[S] Sabbah, C., $\mathscr{D}$-modules et cycles évanescents, apparu.

[Sch] Schapira, P., Microdifferential systems in the complex domain, *Grundlehren der mathmatischen Wissenchaften*, **269**, Springer-Verlag.

[S-K-K] Sato, M., Kashiwara, M., Kawai, T., Hyperfunctions and pseudo-differential equations, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, **287** (1973), 265-529.