Comment. Math. Helv. 73 (1998) 1–21
0010-2571/98/010001-21 $ 1.50+0.20/0

Commentarii Mathematici Helvetici

Applications harmoniques, applications pluriharmoniques et existence de 2-formes parallèles non nulles

Ahmad El Soufi et Robert Petit

Abstract. In this paper we study harmonic maps from a compact riemannian manifold equiped with a non trivial parallel 2-form, to a Kähler manifold of strongly negative curvature tensor or a riemannian manifold of strictly negative complex sectional curvature. In a first part we set up some rigidity results of Siu type. Then we obtain an upper bound for the rank of such maps in terms of the rank of the 2-form and deduce some vanishing theorems.

Mathematics Subject Classification (1991). 58E20, 53C55, 53C20.

Keywords. Harmonic maps, pluriharmonic maps, holomorphic maps, parallel forms, Kähler manifolds, rank estimates, vanishing theorems, Dirac operator.

1. Introduction

Dans le cadre des applications harmoniques, ou pluriharmoniques, définies sur des variétés kählériennes, plusieurs résultats de rigidité ont été démontrés ces dernières années, notamment par Siu [17], Sampson [15] et Ohnita-Udagawa [13] (cf. [3] pour une revue de ces résultats). L'objet principal de cet article est de montrer que, dans au moins une partie de ces résultats, le seul rôle joué par la structure kählérienne de la variété source est de fournir une 2-forme parallèle non nulle. Les résultats de rigidité que nous obtenons dans cet article porteront en fait à la fois sur la variété source et sur l'application. Signalons au passage que toutes les variétés que nous considérons dans cet article seront supposées implicitement connexes et sans bords.

L'un des résultats de rigidité majeurs est bien sûr celui obtenu par Siu dans [17]. Ce résultat nous dit que toute variété kählérienne compacte de dimension $m > 2$ ayant le même type d'homotopie qu'une variété kählérienne compacte à tenseur de courbure fortement négatif, lui est holomorphiquement (ou antiholomorphiquement) difféomorphe. La preuve de ce théorème repose sur un autre résultat de rigidité important, également dû à Siu: toute application harmonique, de rang au moins 4 quelque part, d'une variété kählérienne compacte à valeurs dans une variété kählérienne à tenseur de courbure fortement négatif, est holomorphe ou anti-holomorphe.

L'extension que nous obtenons de ces deux résultats de Siu se présentera comme suit. Nous commencerons par montrer (théorème 4.1) que,

si M est une variété riemannienne compacte de dimension paire $m > 2$ qui admet une 2-forme parallèle non nulle α, et si N est une variété kählérienne à tenseur de courbure fortement négatif, alors l'existence d'une application harmonique ϕ de M dans N de rang au moins $m-1$ quelque part, entraîne que α est une forme de Kähler sur M et que ϕ est holomorphe ou anti-holomorphe pour la structure complexe induite par α sur M.

Puis, nous en déduisons (corollaire 4.1) que,

si une variété riemannienne compacte orientable M admettant une 2-forme parallèle non nulle a le même type d'homotopie qu'une variété kählérienne compacte à tenseur de courbure fortement négatif, alors M est elle même kählérienne et les deux variétés sont holomorphiquement, ou antiholomorphiquement, difféomorphes.

Par ailleurs, nous montrons (théorème 4.3) que l'hypothèse sur le rang de ϕ dans le théorème 4.1 sus-mentionné peut être supprimée si l'on suppose à la place que le second nombre de Betti de M est égal à 1 et que la forme α est non dégénérée. Ceci nous permet de généraliser un résultat de Ohnita-Udagawa [13] dans lequel M est supposée kählérienne dès le départ.

Rappelons à propos de l'hypothèse sur le tenseur de courbure de N, que celle-ci est vérifiée en particulier lorsque la courbure sectionnelle holomorphe de N est constante strictement négative (cf. [17] pour plus de détails concernant cette hypothèse). De plus, la construction de Mostow-Siu [12], fournit des exemples de variétés kählériennes à tenseur de courbure fortement négatif qui ne sont même pas difféomorphes à des variétés localement symétriques.

Un autre résultat que nous généralisons est le suivant, dû à Hernandez [6]: sur une même variété compacte M il ne peut y avoir à la fois une métrique à courbure sectionnelle complexe strictement négative et une métrique kählérienne. En effet, nous montrons (corollaire 5.2) que *l'existence d'une métrique à courbure sectionnelle complexe strictement négative exclut non seulement les métriques kählériennes, mais aussi toute métrique pouvant admettre des 2-formes parallèles non nulles.* (cf. corollaire 5.2 pour un énoncé plus général). Ce résultat est à mettre en parallèle avec le fait qu'en courbure positive on a $b_2(M) = 0$ et donc qu'aucune métrique sur M n'admet de 2-formes harmoniques (cf. [11], [16] et [14]).

On peut noter que la courbure sectionnelle complexe d'une variété riemannienne est négative en particulier lorsque sa courbure sectionnelle est négative $\frac{1}{4}$ pincée en tout point.

Le résultat du corollaire 5.2 apparaîtra en fait comme conséquence des estimées que nous obtenons sur le rang des applications harmoniques ayant pour source une variété riemannienne compacte M munie d'une 2-forme parallèle α, en fonction

du rang de cette forme. En effet, nous montrons (théorèmes 5.1 et 5.2) que si $\phi : M \to N$ est une telle application et:
i) si N est kählérienne à tenseur de courbure fortement négatif, alors

$$rg(\phi) \leq Max(rg(\alpha), m - rg(\alpha)),$$

ii) si N est de courbure sectionnelle complexe strictement négative, alors

$$rg(\phi) \leq Max(2, m - rg(\alpha)),$$

où $rg(\phi)$ et $rg(\alpha)$ désignent respectivement les rangs de ϕ et de α.

L'existence d'une 2-forme parallèle non kählérienne $\alpha \neq 0$ sur la variété M, entraîne que la représentation du groupe d'holonomie $Hol(M)$ de M est réductible. En effet, si L désigne l'endomorphisme antisymétrique de TM associé à α via la métrique g, alors les espaces propres de l'endomorphisme symétrique L^2 sont stables par $Hol(M)$ (noter à ce propos que la forme α est kählérienne si et seulement si L^2 est une homothétie, cf. [10] pour plus de détails sur ce sujet). Par conséquent, le revêtement universel $\tilde{M}$ de M est un produit riemannien, dont les facteurs sont tangents aux relevés des espaces propres de L^2. Or, nous montrons que lorsque le rang de ϕ est au moins égal à 3, les majorations (i) et (ii) ci-dessus se traduisent par le fait que le relevé de ϕ à $\tilde{M}$ n'est fonction que de l'un des facteurs de ce produit (théorèmes 5.1, 5.2 et remarque 5.1).

On a vu dans [14] comment étendre la notion d'application pluriharmonique (i.e. dont la restriction à toute courbe holomorphe est harmonique) au cas où la variété source est non nécéssairement kählérienne, mais seulement munie d'une 2-forme parallèle α. On parle alors d'applications α-pluriharmoniques. Notons que, lorsque α est non dégénérée, toute application α-pluriharmonique est harmonique (cf. [14]), et que, réciproquement, lorsque la courbure de la variété but est négative ou nulle, alors toute application harmonique est α-pluriharmonique, pour toute 2-forme parallèle α (proposition 4.1). En fait, tous les résultats sus-cités concernant les applications harmoniques, peuvent aussi être énoncés pour les applications α-pluriharmoniques. Or, nous montrerons que, lorsqu'on s'intéresse aux applications α-pluriharmoniques, nous pouvons obtenir aussi des résultats du même type que les précédents mais sous des hypothèses de positivité sur la courbure de la variété but (théorèmes 4.2 et 4.4 et remarque 5.2). Ces résultats constituent pour l'essentiel, une extension de ceux qu' Ohnita-Udagawa [13] obtenaient pour les applications pluriharmoniques définies sur de variétés kählériennes.

La méthode que nous avons mise en oeuvre pour prouver les résultats de cet article relève de ce qu'on appelle la "technique de Bochner". En effet, nous établissons une formule (lemme 2.1) qui exprime, sur un fibré de Dirac de base M, le commutateur $[D^2, \alpha]$, où D est l'opérateur de Dirac du fibré et où α est une 2-forme sur M agissant par multiplication de Clifford, en fonction de la courbure du fibré. Nous en déduisons, dans le cas particulier du fibré ϕ^*TN associé à une application $\phi : M \to N$, une formule intégrale à la Bochner (proposition 3.1). Ce genre de considérations peut être rencontré en géométrie spinorielle, en particulier dans les travaux de Hijazi-Milhorat [7] et Kirchberg [8]. On peut aussi trouver dans le mémoire de Gromov-Pansu [5] une présentation des résultats de Corlette [1] qui s'appuie sur le formalisme de Clifford.

Les auteurs tiennent à remercier le referee dont les remarques et suggestions ont permis d'améliorer cet article, notamment l'énoncé des théorèmes 5.1 et 5.2.

2. Fibrés de Dirac, opérateurs de Dirac et résultat préliminaire

Tout au long de cet article, tous les produits scalaires seront notés $< \ , \ >$, de même, toutes les connexions canoniques seront notées ∇. Les détails concernant les objets qui seront introduits dans ce paragraphe peuvent être trouvés dans le livre de Lawson-Michelsohn [9].

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m, on désignera par $Cl(M) = Cl(TM)$ son fibré en algèbres de Clifford. On rappelle que $Cl(M)$ est muni d'une structure de fibré riemannien induite par celle de TM et que la connexion canonique ∇ agit comme une dérivation sur $Cl(M)$.

Fibrés de Dirac: Soit S un fibré vectoriel sur M en $Cl(M)$-modules à gauche muni d'une métrique et d'une connexion riemanniennes. On dit que S est un fibré de Dirac si:
i) Les vecteurs unitaires de TM agissent isométriquement sur S.
ii) $\nabla(\phi.\sigma) = (\nabla\phi).\sigma + \phi.(\nabla\sigma)$, pour tout $\phi \in \Gamma(Cl(M))$ et tout $\sigma \in \Gamma(S)$, où le point . désigne l'action de $Cl(M)$ sur S.

Un exemple trivial d'un tel fibré est le fibré $Cl(M)$ lui-même muni de sa métrique et de sa connexion canoniques.

Si V est un fibré riemannien et S un fibré de Dirac alors $S \otimes V$, muni de la métrique et de la connexion produits tensoriels, est encore un fibré de Dirac, l'action de $Cl(M)$ sur les fibres étant donnée par:

$$\phi.(\sigma \otimes v) = (\phi.\sigma) \otimes v.$$

Désignons par $\wedge^* M = \wedge^* T^* M$ le fibré en algèbres extérieures de M. On a alors un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels de $Cl(M)$ sur $\wedge^* M$ et on peut définir pour toute p-forme α et tout $\sigma \in \Gamma(S)$ le produit $\alpha.\sigma$: si $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 \ldots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \ldots i_p} e^*_{i_1} \wedge \ \ldots \wedge e^*_{i_p}$ est la représentation locale de α dans un repère orthonormé local de M, alors on a

$$\alpha.\sigma = \sum_{1 \leq i_1 \ldots < i_p \leq m} \alpha_{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \ldots e_{i_p}.\sigma,$$

où $e_{i_1} \dots e_{i_p}$ désigne le produit de Clifford itéré. Ceci vaut en particulier pour le fibré de Dirac $Cl(M)$. Dans ce dernier cas on a, pour toute 1-forme σ et toute p-forme α sur M:

$$\sigma.\alpha = \sigma \wedge \alpha - i(\sigma)\alpha \quad \text{et} \quad \alpha.\sigma = (-1)^p(\sigma \wedge \alpha + i(\sigma)\alpha), \tag{1}$$

où $\wedge$ et i désignent respectivement le produit extérieur et le produit intérieur sur $\wedge^* M$.

Opérateurs de Dirac: Soit S un fibré de Dirac sur M. L'opérateur de Dirac associé à S est l'opérateur $D : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ défini dans tout repère orthonormé local $\{e_i\}_{i \leq m}$ de TM par:

$$D = \sum_i e_i.\nabla_{e_i}.$$

Si M est compacte alors D est un opérateur autoadjoint pour le produit scalaire (intégral) sur $\Gamma(S)$. Les éléments du noyau de D sont, par définition, les sections *harmoniques* de S.

Pour $Cl(M)$, considéré comme fibré de Dirac, l'opérateur de Dirac associé est (via l'isomorphisme canonique avec $\wedge^* M$) $D = d + \delta$, où d et δ désignent respectivement la différentielle et la codifférentielle extérieures.

A toute p-forme harmonique α sur M on associe l'opérateur D^α, qu'on appelera *α-twist* de D, donné pour tout $\sigma \in \Gamma(S)$ par:

$$D^\alpha \sigma = \frac{1}{2}(D(\alpha.\sigma) - (-1)^p \alpha.D\sigma).$$

On vérifie facilement que D^α est donné localement par:

$$D^\alpha = -\sum_i i(e_i)\alpha.\nabla_{e_i}. \tag{2}$$

Formule de commutation: On rappelle que la dérivée covariante seconde et la courbure de S sont respectivement données, pour tout $X, Y \in TM$ et tout $\sigma \in \Gamma(S)$, par:

$$\nabla^2_{X,Y}\sigma = \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_{\nabla_X Y}\sigma$$

et

$$R(X,Y)\sigma = \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_X \nabla_Y \sigma + \nabla_{[X,Y]}\sigma = (\nabla^2_{Y,X} - \nabla^2_{X,Y})\sigma.$$

Soit $\nabla^*\nabla$ le *Laplacien brut* (i.e. $\nabla^*\nabla = -trace_g \nabla^2_{.,.}$). La *formule de Weitzenböck* s'écrit alors:

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \Re,$$

où $\Re$ est l'endomorphisme de $\Gamma(S)$ donné dans un repère orthonormé local $\{e_i\}_{i\leq m}$ par:

$$\Re = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} e_i.e_j.R(e_i,e_j).$$

Nous avons alors la formule suivante pour le commutateur $[D^2,\alpha]$:

Lemme 2.1. *Soient M une variété riemannienne et S un fibré de Dirac sur M. Pour tout $\sigma\in\Gamma(S)$ et toute p-forme harmonique α sur M, on a:*

$$\begin{aligned} D^2(\alpha.\sigma)-\alpha.D^2\sigma &= 2\,(DD^\alpha+(-1)^pD^\alpha D)\sigma \\ &= -2\sum_i \nabla_{e_i}\alpha.\nabla_{e_i}\sigma+\sum_{i,j}[e_i,i(e_j)\alpha].R(\;e_i,e_j)\sigma, \end{aligned} \tag{3}$$

où $\{e_i\}_{i\leq m}$ est un repère orthonormé local de TM et où $[\phi,\psi]=\phi.\psi-(-1)^p\psi.\phi$.

Preuve. On a:

$$D^2(\alpha.\sigma)=D(D(\alpha.\sigma))=(-1)^pD(\alpha.D\sigma)+2DD^\alpha\sigma.$$

et

$$D(\alpha.D\sigma)=(-1)^p\alpha.D^2\sigma+2D^\alpha D\sigma.$$

D'où

$$D^2(\alpha.\sigma)-\alpha.D^2\sigma=2(DD^\alpha+(-1)^pD^\alpha D)\sigma.$$

Maintenant, en appliquant la formule de Weitzenböck, on a:

$$D^2(\alpha.\sigma)-\alpha.D^2\sigma=\nabla^*\nabla(\alpha.\sigma)-\alpha.\nabla^*\nabla\sigma+\Re(\alpha.\sigma)-\alpha.\Re\sigma. \tag{4}$$

Or, on a d'une part, la relation:

$$\nabla^*\nabla(\alpha.\sigma)=(\nabla^*\nabla\alpha).\sigma-2\,trace_g\nabla_.\alpha.\nabla_.\sigma+\alpha.\nabla^*\nabla\sigma. \tag{5}$$

D'autre part, on a:

$$\Re(\alpha.\sigma)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j}e_i.e_j.R(e_i,e_j)(\alpha.\sigma). \tag{6}$$

Sachant que $R(e_i,e_j)(\alpha.\sigma)=(R(e_i,e_j)\alpha).\sigma+\alpha.R(e_i,e_j)\sigma$, l'équation (6) s'écrit:

$$\Re(\alpha.\sigma)=(\Re\alpha).\sigma-\frac{1}{2}\sum_{i,j}e_i.e_j.\alpha.R(e_i,e_j)\sigma. \tag{7}$$

En utilisant (5) et (7), l'expression (4) devient:

$$D^2(\alpha.\sigma)-\alpha.D^2\sigma = (D^2\alpha).\sigma - 2\,trace_g\nabla_{.}\alpha.\nabla_{.}\sigma - \frac{1}{2}\sum_{i,j}(e_i.e_j.\alpha - \alpha.e_i.e_j).R(e_i,e_j)\sigma. \tag{8}$$

Or, α est une forme harmonique, donc $D^2\alpha = 0$. D'autre part, on a d'après (1):

$$\begin{aligned} e_i.e_j.\alpha - \alpha.e_i.e_j &= e_i.((-1)^p\alpha.e_j - 2i(e_j)\alpha) - ((-1)^p e_i.\alpha + 2(-1)^p i(e_i)\alpha).e_j \\ &= -2(e_i.i(e_j)\alpha + (-1)^p i(e_i)\alpha.e_j). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (8) et en permutant les indices i, j, on obtient finalement:

$$D^2(\alpha.\sigma)-\alpha.D^2\sigma = -2\,trace_g\nabla_{.}\alpha.\nabla_{.}\sigma + \sum_{i,j}(e_i.i(e_j)\alpha - (-1)^p i(e_j)\alpha.e_i).R(e_i,e_j)\sigma.$$

D'où le résultat. □

Remarque. Dans le cas particulier où la forme α est de degré 2, la formule (3) devient:

$$D^2(\alpha.\sigma) - \alpha.D^2\sigma = -2\sum_i \nabla_{e_i}\alpha.\nabla_{e_i}\sigma - \sum_{i,j} e_i.e_j.R_\alpha(e_i,e_j)\sigma, \tag{9}$$

où $R_\alpha(e_i,e_j) = R((i(e_i)\alpha)^{\#}, e_j) + R(e_i,(i(e_j)\alpha)^{\#})$ et où $(i(e_i)\alpha)^{\#}$ désigne le champ de vecteurs local associé canoniquement à la 1-forme $i(e_i)\alpha$.

3. Une formule de type Bochner-Weitzenböck

Dans toute la suite de cet article, M et N désigneront deux variétés riemanniennes connexes sans bords de dimensions respectives $m \geq 2$ et $n \geq 2$. Si ϕ est une application différentiable de M dans N, on désignera par $V = \phi^*TN$ le fibré image réciproque induit sur M par ϕ. Ce fibré est muni canoniquement d'une structure riemannienne (cf. [2]).

Comme nous venons de le voir au paragraphe précédent, le fibré $\wedge^*M \bigotimes V$ est un fibré de Dirac sur M. Or, $\Gamma(\wedge^*M \bigotimes V)$ n'est autre que l'espace des formes différentielles sur M à valeurs dans V que l'on note $\Omega(V)$ ($\Omega(V) = \bigoplus_{p\in \mathbb{N}} \Omega^p(V)$). Là encore, l'opérateur de Dirac associé à ce fibré coïncide avec l'opérateur $d+\delta$, où d et δ sont respectivement la différentielle et la codifférentielle extérieures sur $\Omega(V)$ (cf. [2]).

Notons respectivement R' et ρ' le tenseur de courbure et l'opérateur de courbure de N. On désigne par $T_y^{\mathbb{C}}N$ le complexifié de l'espace tangent à N au point y, et par $\rho'_{\mathbb{C}}$ et $(\ ,\ )$ les extensions naturelles respectives de ρ' et de $<\ ,\ >$ à $\wedge^*T_y^{\mathbb{C}}N$.

On rappelle que, si α est une 2-forme sur M, alors, pour tout $x \in M$, il existe une base orthonormée $\{e_i\}_{i \leq m}$ de T_xM telle que

$$\alpha(x) = a_1 e_1^* \wedge e_{d+1}^* + \ldots + a_d e_d^* \wedge e_{2d}^*,$$

où $\{e_i^*\}_{i \leq m}$ est la base duale de $\{e_i\}_{i \leq m}$, $d = [m/2]$ la partie entière de $m/2$, et où les a_i sont des réels positifs ou nuls. Une telle base sera dite *α-standard.*

Proposition 3.1. *Soient M et N deux variétés riemanniennes. On suppose que M est compacte. Si ϕ est une application de M dans N, alors, pour toute 2-forme parallèle α sur M (i.e. $\nabla\alpha = 0$), on a:*

$$\int_M |D(\alpha.d\phi)|^2 v_g = |\alpha|^2 \int_M |\tau(\phi)|^2 v_g + 4 \int_M R_\phi(\alpha) v_g. \tag{10}$$

où $\tau(\phi)$ est la tension de l'application ϕ (i.e. $\tau(\phi) = trace_g \nabla d\phi$), v_g l'élément de volume canonique de M, et où, dans une base α-standard $\{e_i\}_{i \leq m}$ de T_xM,

$$R_\phi(\alpha) = \sum_{i,j \leq d} (\rho'_{\mathbb{C}}(\xi_{ij}^\phi), \overline{\xi_{ij}^\phi})(a_i + a_j)^2 + \sum_{i,j \leq d} (\rho'_{\mathbb{C}}(\eta_{ij}^\phi), \overline{\eta_{ij}^\phi})(a_i - a_j)^2$$
$$+ \chi_m \sum_{i \leq d} (\phi^* R'_{imim} + \phi^* R'_{i'mi'm}) {a_i}^2$$

avec $\xi_{ij}^\phi = d\phi(Z_i) \wedge d\phi(Z_j)$, $\eta_{ij}^\phi = d\phi(Z_i) \wedge \overline{d\phi(Z_j)}$, $Z_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i + \sqrt{-1} e_{i'})$, $i' = i + d$, $\chi_m = m - 2[m/2]$ et $\phi^* R'_{imim} = R'(d\phi(e_i), d\phi(e_m), d\phi(e_i), d\phi(e_m))$.

Avant de commencer la démonstration de cette proposition, rappelons que le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ d'une forme vectorielle $\alpha \in \Omega^p(V)$ contre une forme scalaire $\beta \in \Omega^q(M)$ est une forme vectorielle de degré $p+q$ qui se définit de manière naturelle. De plus, via l'isomorphisme canonique entre $\Omega(V)$ et $\Omega(V^*)$, nous pouvons définir le produit extérieur $\sigma \wedge \gamma \in \Omega^{p+q}(M)$ de deux formes vectorielles $\sigma \in \Omega^p(V)$ et $\gamma \in \Omega^q(V)$. A chacun de ces produits extérieurs on peut associer un produit intérieur de la façon suivante: pour tout $\sigma \in \Omega^q(V)$, on désigne par $i(\sigma)$ l'un ou l'autre des deux opérateurs:

$$i(\sigma) : \Omega^p(M) \mapsto \Omega^{p-q}(V) \quad \text{et} \quad i(\sigma) : \Omega^p(V) \mapsto \Omega^{p-q}(M)$$

tels que, pour tout $\alpha \in \Omega^p(M)$, $\alpha' \in \Omega^{p-q}(M)$, $\gamma \in \Omega^p(V)$ et $\gamma' \in \Omega^{p-q}(V)$, on a

$$< i(\sigma)\alpha, \gamma' >=< \alpha, \sigma \wedge \gamma' >$$

et

$$< i(\sigma)\gamma, \alpha' >=< \gamma, \sigma \wedge \alpha' > .$$

En particulier, pour tout $\sigma \in \Omega^1(V)$ et tout $\alpha \in \Omega^p(M)$ on a la relation

$$\alpha.\sigma = (-1)^p(\sigma \wedge \alpha + i(\sigma)\alpha).$$

Nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 3.1. *Soient $\alpha, \beta \in \Omega^2(M)$, des 2-formes sur M, et soient $\sigma, \gamma \in \Omega^1(V)$ des 1-formes sur M à valeurs dans V, alors on a*

$$< \alpha.\sigma, \beta.\gamma > = < \alpha, \beta >< \sigma, \gamma > + < i(\sigma)\alpha, i(\gamma)\beta > - < i(\sigma)\beta, i(\gamma)\alpha > . \tag{11}$$

Preuve du lemme 3.1. On a:

$$< \alpha.\sigma, \beta.\gamma > = < \sigma \wedge \alpha, \gamma \wedge \beta > + < i(\sigma)\alpha, i(\gamma)\beta > .$$

En utilisant la définition du produit intérieur, on obtient:

$$\begin{aligned} < \sigma \wedge \alpha, \gamma \wedge \beta > &= < \alpha, i(\sigma)(\gamma \wedge \beta) > = < \alpha, (i(\sigma)\gamma)\beta - \gamma \wedge i(\sigma)\beta > \\ &= < \alpha, \beta >< \sigma, \gamma > - < i(\sigma)\beta, i(\gamma)\alpha > . \end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme. $\square$

Preuve de la proposition 3.1. Soit $\alpha \in \Omega^2(M)$ une 2-forme parallèle sur M et soit $\phi : M \to N$ une aplication différentiable. D'après le lemme 2.1, on a:

$$< D^2(\alpha.d\phi) - \alpha.D^2(d\phi), \alpha.d\phi > = 4R_\phi(\alpha), \tag{12}$$

où $R_\phi(\alpha) = -\frac{1}{4}\sum_{i,j} < e_i.e_j.R_\alpha(e_i, e_j)d\phi, \alpha.d\phi >$. D 'une part, on sait via (11), que $< \alpha.D^2(d\phi), \alpha.d\phi > = |\alpha|^2 < D^2(d\phi), d\phi >$ (noter que $D^2(d\phi)$ est une 1-forme à valeurs dans V car $d\phi$ est fermée). D'autre part, comme D est un opérateur auto-adjoint, on obtient en intégrant la relation (12):

$$\int_M |D(\alpha.d\phi)|^2 v_g = |\alpha|^2 \int_M |D(d\phi)|^2 v_g + 4\int_M R_\phi(\alpha) v_g,$$

avec $Dd\phi = \delta d\phi = -\tau(\phi)$. En considérant les 2-formes $\beta_{ij} = e_i^* \wedge e_j^*$ et en utilisant (11), cette dernière équation devient:

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha) = &-\frac{1}{4}\sum_{i,j} < \alpha, \beta_{ij} >< R_\alpha(e_i, e_j)d\phi, d\phi > \\ &-\frac{1}{4}\sum_{i,j}\Big(< i(d\phi)\alpha, i(R_\alpha(e_i, e_j)d\phi)\beta_{ij} > \\ &- < i(d\phi)\beta_{ij}, i(R_\alpha(e_i, e_j)d\phi)\alpha >\Big). \end{aligned} \tag{13}$$

Or, on sait que R_α est une 2-forme à valeurs dans les endomorphismes antisymétriques de $\Omega^1(\phi^*TN)$, ceci entraine la nullité du premier terme dans le membre de droite de l'expression (13). Maintenant, pour toute 1-forme $\sigma \in \Omega^1(\phi^*TN)$, $i(\sigma)\alpha$ peut s'écrire sous la forme $i(\sigma)\alpha = -\sum_k \sigma((i(e_k)\alpha)^{\#})e_k^*$, et donc (13) peut se réecrire de la façon suivante:

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha) &= \frac{1}{4}\sum_{i,j,k}\Big(< (R_\alpha(e_i,e_j)d\phi)(e_i)\delta_{jk} - (R_\alpha(e_i,e_j)d\phi)(e_j)\delta_{ik}, d\phi((i(e_k)\alpha)^{\#}) > \\ &\quad - < (R_\alpha(e_i,e_j)d\phi)((i(e_k)\alpha)^{\#}), d\phi(e_i)\delta_{jk} - d\phi(e_j)\delta_{ik} >\Big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\Big(< (R_\alpha(e_i,e_j)d\phi)(e_i), d\phi((i(e_j)\alpha)^{\#}) > \\ &\quad - < (R_\alpha(e_i,e_j)d\phi)((i(e_j)\alpha)^{\#}), d\phi(e_i) >\Big). \end{aligned} \tag{14}$$

On rappelle que, pour tout $X, Y \in TM$, la forme $R(X,Y)d\phi \in \Omega^1(V)$ est donnée par:

$$(R(X,Y)d\phi)(Z) = R^{'}(d\phi(X), d\phi(Y))d\phi(Z) - d\phi(R(X,Y)Z).$$

D'où, en revenant à la définition de R_α et en tenant compte du parallélisme de α, l'équation (14) devient:

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha) = \sum_{i,j}\Big(&R^{'}(d\phi(e_i), d\phi((i(e_j)\alpha)^{\#}), d\phi(e_i), d\phi((i(e_j)\alpha)^{\#})) \\ &- R^{'}(d\phi(e_i), d\phi((i(e_j)\alpha)^{\#}), d\phi(e_j), d\phi((i(e_i)\alpha)^{\#}))\Big). \end{aligned}$$

Ce qui peut encore s'écrire en utilisant la première identité de Bianchi:

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha) &= \sum_{i,j}\Big(R^{'}(d\phi(e_i), d\phi((i(e_j)\alpha)^{\#}), d\phi(e_i), d\phi((i(e_j)\alpha)^{\#})) \\ &\quad - \frac{1}{2}R^{'}(d\phi(e_i), d\phi((i(e_i)\alpha)^{\#}), d\phi(e_j), d\phi((i(e_j)\alpha)^{\#}))\Big) \\ &= \sum_i r_\phi((i(e_i)\alpha)^{\#}, (i(e_i)\alpha)^{\#}) - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\phi^*R^{'}(e_i, (i(e_i)\alpha)^{\#}, e_j, (i(e_j)\alpha)^{\#}), \end{aligned}$$

où $r_\phi(X,Y) = \sum_i \phi^*R^{'}(e_i, X, e_i, Y)$.

Reste à exprimer $R_\phi(\alpha)$ dans une base α-standard. Or, si $\{e_i\}_{i\le m}$ est une telle base, alors on a, pour tout $i \le d$, $(i(e_i)\alpha)^{\#} = a_i e_{i'}$ et $(i(e_{i'})\alpha)^{\#} = -a_i e_i$. On en déduit

$$R_\phi(\alpha) = \sum_{i\le d}(r_{ii} + r_{i'i'})a_i^2 - 2\sum_{i,j\le d}\phi^*R^{'}_{ii'jj'}a_i a_j. \tag{15}$$

Où $r_{ii} = r_\phi(e_i, e_i)$ et $\phi^* R'_{ii'jj'} = \phi^* R'(e_i, e_{i'}, e_j, e_{j'})$. En développant (15) on obtient:

$$R_\phi(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \le d} (\phi^* R'_{ijij} + \phi^* R'_{ij'ij'} + \phi^* R'_{i'ji'j} + \phi^* R'_{i'j'i'j'})(a_i^2 + a_j^2) + \chi_m \sum_{i \le d} (\phi^* R'_{imim} + \phi^* R'_{i'mi'm}) a_i^2 - 2 \sum_{i,j \le d} \phi^* R'_{ii'jj'} a_i a_j. \tag{16}$$

En utilisant les identités $a_i^2 + a_j^2 = \frac{1}{2}\Big((a_i + a_j)^2 + (a_i - a_j)^2\Big)$ et $a_i a_j = \frac{1}{4}\Big((a_i + a_j)^2 - (a_i - a_j)^2\Big)$, l'équation (16) devient:

$$\begin{aligned} R_\phi(\alpha) = {} & \frac{1}{4} \sum_{i,j \le d} (\phi^* R'_{ijij} + \phi^* R'_{ij'ij'} + \phi^* R'_{i'ji'j} + \phi^* R'_{i'j'i'j'} - 2\phi^* R'_{ii'jj'})(a_i + a_j)^2 \\ & + \frac{1}{4} \sum_{i,j \le d} (\phi^* R'_{ijij} + \phi^* R'_{ij'ij'} + \phi^* R'_{i'ji'j} + \phi^* R'_{i'j'i'j'} + 2\phi^* R'_{ii'jj'})(a_i - a_j)^2 \\ & + \chi_m \sum_{i \le d} (\phi^* R'_{imim} + \phi^* R'_{i'mi'm}) a_i^2. \end{aligned}$$

Une vérification simple permet de voir que cette dernière expression coincide avec celle donnée dans l'énoncé de la proposition. □

4. Résultats de rigidité

Si (N, g') est une variété riemannienne, alors, à chaque 2-plan $P = \mathbb{C}\{Z, W\} \subset T_y^{\mathbb{C}} N$, on peut associer un nombre réel, appelé *courbure sectionnelle complexe* de P, en posant:

$$K'_{\mathbb{C}}(P) = K'_{\mathbb{C}}(Z \wedge W) = \frac{\Big(\rho'_{\mathbb{C}}(Z \wedge W), (\overline{Z \wedge W})\Big)}{\Big(Z \wedge W, \overline{Z \wedge W}\Big)}.$$

Noter que, si $K'_{\mathbb{C}}$ est négative (resp. positive) en un point y de N, alors la courbure sectionnelle de N est négative (resp. positive) en y. En effet, pour tout couple $\{X, Y\} \subset T_y N$ de vecteurs orthonormés on a

$$R'(X, Y, X, Y) = K'_{\mathbb{C}}((X + \sqrt{-1}Y) \wedge (X - \sqrt{-1}Y)),$$

i.e. la courbure sectionnelle du 2-plan réel $p = \mathbb{R}\{X, Y\}$ est égale à la courbure sectionnelle complexe du 2-plan complexe $P = \mathbb{C}\{Z, \overline{Z}\}$, avec $Z = X + \sqrt{-1}Y$.

Il sera utile de remarquer que dans la proposition 3.1, l'expression de $R_\phi(\alpha)$ ne comporte que des courbures sectionnelles complexes.

Une application ϕ de M dans N est dite *harmonique* si $\tau(\phi) = Dd\phi = 0$ (i.e. si la 1-forme $d\phi \in \Omega^1(V)$ est harmonique). Elle est dite *α-pluriharmonique*, pour une certaine 2-forme harmonique $\alpha \in \Omega^2(M)$, si $D^\alpha d\phi = 0$ (cf. [14] pour plus de détails).

Une conséquence immédiate de la proposition 3.1 est la

Proposition 4.1. *Soit N une variété riemannienne à courbure sectionnelle complexe non positive. Toute application harmonique d'une variété riemannienne compacte M à valeurs dans N est, pour toute 2-forme parallèle α sur M, α-pluriharmonique.*

Cette proposition est à rapprocher du résultat de Corlette ([1], théorème 3.1) qui est de portée plus générale, mais dans lequel l'hypothèse sur N est plus restrictive car exige la négativité de tout l'opérateur de courbure.

Si (N, g', J') est une variété presque hermitienne, alors la structure complexe J' induit une décomposition du fibré tangent complexifié $TN^{\mathbb{C}}$ en somme directe de deux sous fibrés $TN^{1,0}$ et $TN^{0,1}$ tels que, en chaque point y de N, la fibre $T_yN^{1,0}$ (resp. $T_yN^{0,1}$) soit l'espace propre de J'_y pour la valeur propre $\sqrt{-1}$ (resp. $-\sqrt{-1}$). Cette décomposition induit une décomposition de $\wedge^2 TN^{\mathbb{C}}$ sous la forme:

$$\wedge^2 TN^{\mathbb{C}} = \wedge^{2,0}TN \oplus \wedge^{1,1}TN \oplus \wedge^{0,2}TN.$$

Lorsque (N, g', J') est kählérienne, l'invariance du tenseur de courbure par J' entraîne que la restriction de $\rho'_{\mathbb{C}}$ à $\wedge^{2,0}TN$ et à $\wedge^{0,2}TN$ est identiquement nulle. En particulier, si $P = \mathbb{C}\{Z, W\} \subset T_y^{\mathbb{C}}N$ est un 2-plan tel que $(Z \wedge W)^{1,1} = 0$, où $(Z \wedge W)^{1,1}$ est la composante dans $\wedge^{1,1}TN$ de $Z \wedge W$, alors la courbure sectionnelle complexe $K'_{\mathbb{C}}(P)$ de P est nulle.

Définition. (Siu [17]) On dira qu'une variété presque hermitienne N a un tenseur de courbure *fortement négatif* (resp. *fortement positif*) en $y \in N$ si sa courbure sectionnelle complexe $K'_{\mathbb{C}}$ en y est négative (resp. positive) et strictement négative (resp. strictement positive) sur tous les plans $P = \mathbb{C}\{Z, W\} \subset T_y^{\mathbb{C}}N$ tels que $(Z \wedge W)^{1,1} \neq 0$.

On peut remarquer que pour tout couple de vecteurs linéairement indépendants X et $Y \in T_yN$, le vecteur $Z = X + \sqrt{-1}Y \in T_y^{\mathbb{C}}N$ vérifie $(Z \wedge \overline{Z})^{1,1} \neq 0$. Par suite, la courbure sectionnelle d'une variété presque hermitienne à tenseur de courbure fortement négatif (resp. fortement positif) est strictement négative (resp. strictement positive).

Une application ϕ entre deux variétés kählériennes (M, g, J) et (N, g', J') est dite *holomorphe* (resp. *anti-holomorphe*) si, pour tout $X \in TM$, $J' d\phi(X) =$

$d\phi(JX)$ (resp. $J^{'}d\phi(X) = -d\phi(JX)$). Une telle application est à la fois harmonique et ω-pluriharmonique pour la forme de Kähler ω de M.

Le rang d'une application $\phi : M \to N$ en un point x de M sera noté $rg_x(\phi)$. L'espace des 2-formes parallèles sur M sera noté $P_2(M)$.

Theoreme 4.1. *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension paire $m = 2d > 2$ telle que $P_2(M) \neq \{0\}$, et soit N une variété kählérienne à tenseur de courbure fortement négatif. S'il existe une application harmonique ϕ de M dans N telle que $Max\ rg_x(\phi) > m - 2$, alors:*
i) dim $P_2(M) = 1$ et $P_2(M)$ est engendré par une forme de Kähler α,
ii) ϕ est holomorphe ou anti-holomorphe pour la structure complexe induite par α sur M.

Compte tenu du théorème de Eells-Sampson [4] et du théorème de rigidité de Siu [17], nous déduisons du théorème 4.1 le:

Corollaire 4.1. *Soit N une variété kählérienne compacte à tenseur de courbure fortement négatif. Soit M une variété riemannienne compacte orientable de dimension $m > 2$ qui admet une 2-forme parallèle non nulle. Si M et N ont le même type d'homotopie, alors M est en fait une variété kählérienne et M et N sont holomorphiquement difféomorphes.*

Dans le cas où le tenseur de courbure de N est fortement positif on a le:

Theoreme 4.2. *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension paire $m = 2d > 2$ munie d'une 2-forme parallèle non nulle α, et soit N une variété kählérienne à tenseur de courbure fortement positif. S'il existe une application α-pluriharmonique ϕ de M dans N telle que $Max\ rg_x(\phi) > m - 2$, alors:*
i) α est une forme de Kähler sur M,
ii) $P_2(M) = \mathbb{R}\alpha$,
iii) ϕ est holomorphe ou anti-holomorphe pour la structure complexe induite par α sur M.

Remarque 4.1. Dans le cas particulier des immersions *isométriques* nous avions obtenu dans [14] des résultats analogues à ceux des théorèmes 4.1 et 4.2 avec des hypothèses plus faibles sur la courbure de N et sans l'hypothèse de compacité sur M.

Preuve du théorème 4.1. La preuve de ce théorème utilise des arguments analogues à ceux développés dans la preuve du théorème 5.1 de [14]. En effet, soit ϕ une application harmonique de M dans N et soit $\alpha \in P_2(M)\backslash\{0\}$ qu'on choisit telle que $|\alpha|^2 = d$. L'hypothèse sur la courbure de N entraîne que $R_\phi(\alpha) \leq 0$. L'équation (10), nous dit alors que $R_\phi(\alpha)$ est identiquement nul. Soient x un point de M où

$rg_x(\phi) > m-2$, et $\{e_i\}_{i\leq 2d}$ une base α-standard de T_xM. Alors on a, pour tout $i,j \in \{1,\dots,d\}$,

$$(\rho'_{\mathbb{C}}(\xi^{\phi}_{ij}), \overline{\xi^{\phi}_{ij}})(a_i + a_j)^2 = 0 \tag{17}$$

et

$$(\rho'_{\mathbb{C}}(\eta^{\phi}_{ij}), \overline{\eta^{\phi}_{ij}})(a_i - a_j)^2 = 0,$$

dont on déduit:

$$\Big((\rho'_{\mathbb{C}}(\xi^{\phi}_{ij}), \overline{\xi^{\phi}_{ij}}) + (\rho'_{\mathbb{C}}(\eta^{\phi}_{ij}), \overline{\eta^{\phi}_{ij}})\Big)(a_i^2 - a_j^2) = 0. \tag{18}$$

Dans [14], lemme 5.1, nous avions signalé que si Z et W étaient deux vecteurs linéairement indépendants de $T^{\mathbb{C}}_yN$ tels que $(Z \wedge W)^{1,1} = 0$, alors on avait $(Z\wedge \overline{W})^{1,1} \neq 0$ et, ou bien $Z^{1,0} = W^{1,0} = 0$, ou bien $Z^{0,1} = W^{0,1} = 0$. Or, il découle de l'hypothèse sur le rang de ϕ que les $d\phi(Z_i)$ sont linéairement indépendants. Par suite, on ne peut pas avoir simultanément $(\xi^{\phi}_{ij})^{1,1} = 0$ et $(\eta^{\phi}_{ij})^{1,1} = 0$ (pour $i \neq j$). Vu l'hypothèse sur la courbure de N, on a donc, pour tout $i,j \in \{1,\dots,d\}$, $i\neq j$, $\Big((\rho'_{\mathbb{C}}(\xi^{\phi}_{ij}), \overline{\xi^{\phi}_{ij}}) + (\rho'_{\mathbb{C}}(\eta^{\phi}_{ij}), \overline{\eta^{\phi}_{ij}})\Big) < 0$, et donc par l'équation (18), $a_i^2 = a_j^2$, c'est à dire $a_i = a_j$ (les a_i étant positifs). D'où $a_1 = \ldots = a_d = \frac{|\alpha|}{\sqrt{d}} = 1$. L'équation (17) entraîne que, pour tout $i,j \in \{1,\dots,d\}$, $(\xi^{\phi}_{ij})^{1,1} = 0$. On en déduit que, soit tous les $d\phi^{1,0}(Z_i)$ sont nuls, soit tous les $d\phi^{0,1}(Z_i)$ sont nuls.

Maintenant, soit J le champ d'endomorphismes associé à la forme α via la métrique g, i.e. pour tout $X, Y \in TM$,

$$\alpha(X,Y) = g(JX,Y).$$

Comme α et g sont parallèles, J est parallèle. Or, d'après ce qui précède, on a au point x, $\alpha(x) = \sum_{i\leq d} e_i \wedge e_{i'}$ et donc, pour tout $i \leq d$, $J(e_i) = e_{i'}$ et $J(e_{i'}) = -e_i$. Par suite, $J_x^2 = -Id$ et J_x préserve g_x. Par parallélisme, J^2 et $-Id$ coïncident partout sur M et donc J est une structure presque complexe intégrable (car parallèle) et hermitienne sur M. Elle induit une structure kählérienne sur la variété M.

Soit U un voisinage ouvert de M où $rg_x(\phi) > m-2$. En tout point de U on a (cf ci-dessus), ou bien $d\phi^{1,0}(Z_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} d\phi^{1,0}(e_i + \sqrt{-1}Je_i) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big((d\phi(e_i) + J'd\phi(Je_i)) + \sqrt{-1}(d\phi(Je_i) - J'd\phi(e_i))\Big) = 0$ pour tout i, ou bien $d\phi^{0,1}(Z_i) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big((d\phi(e_i) - J'd\phi(Je_i)) + \sqrt{-1}(d\phi(Je_i) + J'd\phi(e_i))\Big) = 0$ pour tout i. On en déduit que, ou bien $J' \circ d\phi_{/T_xM} = d\phi \circ J_{/T_xM}$, ou bien $J' \circ d\phi_{/T_xM} = -d\phi \circ J_{/T_xM}$. Par suite, ϕ est holomorphe ou anti-holomorphe dans un ouvert non vide de M. Comme elle est harmonique, elle est donc holomorphe ou anti-holomorphe sur M toute entière (théorème de prolongement analytique de Siu [17]).

Maintenant, si β est une autre 2-forme parallèle non nulle sur M, alors, d'après ce qui précède, β induit sur M une structure kählérienne J_1 telle que $J^{'} \circ d\phi = d\phi \circ J_1$ ou $J^{'} \circ d\phi = -d\phi \circ J_1$. Mais, comme ϕ est de rang supérieur à $m-1$ en au moins un point x, on a nécéssairement $J_{1x} = J_x$ ou $J_{1x} = -J_x$, et donc, par parallélisme, $J_1 = J$ ou $J_1 = -J$ sur M. D'où α et β sont proportionnelles. □

Remarque 4.2. Si l'on regarde de près cette preuve du théorème 4.1, on trouve que:
(i) Si l'hypothèse sur le rang de ϕ était exigée en tout point de M, alors la variété N pourrait être supposée seulement presque hermitienne (au lieu de kählérienne). En effet, le parallélisme de $J^{'}$ n'intervient dans la preuve de ce théorème que dans l'avant dernier paragraphe où l'on utilise le théorème de prolongement analytique de Siu [17].
(ii) Si la forme α était déjà supposée kählérienne, alors l'hypothèse sur le rang de ϕ pourrait être remplacée par l'hypothèse plus faible: $Max\ rg_x(\phi) \geq 3$ (cependant nous perdons alors l'unicité de la structure kählérienne de M). Autrement dit, notre méthode permet aussi de retrouver le résultat de Siu.

Preuve du théorème 4.2. Soit $\alpha \in P_2(M)\backslash\{0\}$ qu'on choisit telle que $|\alpha|^2 = d$. Si ϕ est une application α-pluriharmonique, alors on a $|D(\alpha.d\phi)|^2 = |\alpha|^2|\tau(\phi)|^2$, et donc, d'après (10), $R_\phi(\alpha) = 0$. La suite de la preuve est identique à celle du théorème 4.1; il suffit juste de remarquer que, lorsque α est de rang maximum, alors la α-pluriharmonicité entraîne l'harmonicité (cf. [14]). □

Dans le cas particulier où le second nombre de Betti $b_2(M)$ de M est égal à 1, l'hypothèse sur le rang de ϕ dans les théorèmes précédents peut être remplaçée par une hypothèse sur le rang de α.

On rappelle qu'une forme symplectique sur une variété différentiable est une 2-forme fermée et non dégénérée en tout point.

Theoreme 4.3. *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension paire $m = 2d > 2$ telle que $b_2(M) = 1$, et soit N une variété kählérienne à tenseur de courbure fortement négatif. S'il existe une forme symplectique parallèle α sur M et une application harmonique non constante ϕ de M dans N, alors:*
i) α est une forme de Kähler sur M,
ii) ϕ est holomorphe ou anti-holomorphe pour la structure complexe induite par α sur M.

Dans le cas où le tenseur de courbure est fortement positif, nous obtenons le:

Theoreme 4.4. *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension paire $m = 2d > 2$ telle que $b_2(M) = 1$, et soit N une variété kählérienne à tenseur de courbure fortement positif. S'il existe une application α-pluriharmonique non*

constante ϕ de M dans N, pour une certaine forme symplectique parallèle α sur M, alors:
i) α est une forme de Kähler sur M,
ii) ϕ est holomorphe ou anti-holomorphe pour la structure complexe induite par α sur M.

Ces deux résultats généralisent ceux de Ohnita-Udagawa [13] dans lesquels la variété M est déjà supposée kählérienne.

Remarque 4.3. Dans le cas particulier où M est de dimension 4, il n'est pas difficile de voir que l'hypothèse $b_2(M) = 1$ entraîne que toute 2-forme parallèle non nulle est une forme de Kähler sur M. Par conséquent, le cas de la dimension 4 dans les théorèmes précédents se ramène à celui déjà traité par Ohnita-Udagawa dans [13].

Preuve du théorème 4.3. Compte tenu de la remarque 4.3, on peut supposer $m \geq 6$. Soit donc α et ϕ comme dans l'énoncé du théorème 4.3, avec $|\alpha|^2 = d$. D'après (10), ϕ est α-pluriharmonique et $R_\phi(\alpha) = 0$. Considérons la 2-forme β donnée par

$$\beta(X,Y) = \phi^* g^{'}((i(X)\alpha)^{\#}, Y) - \phi^* g^{'}(X, (i(Y)\alpha)^{\#}).$$

La α-pluriharmonicité de ϕ entraîne, après une vérification élémentaire, que β est fermée. Comme $b_2(M) = 1$, on a en notant $[\beta]$ la classe de cohomologie réelle de β, $[\beta] = \lambda[\alpha]$, avec $\lambda = |\alpha|^{-2} \int_M (\beta, \alpha) v_g$. Ce réel λ est non nul car α est non dégénérée et ϕ non constante. Par suite, $[\beta^d] = [\beta]^d = \lambda^d [\alpha]^d = \lambda^d [\alpha^d] \neq 0$ et il existe donc un point $x_0 \in M$ tel que $\beta^d_{x_0} \neq 0$, c'est à dire, tel que β_{x_0} soit non dégénérée. La restriction de $d\phi_{x_0}$ au sous-espace $L = \{(i(X)\alpha)^{\#}; X \in Kerd\phi_{x_0}\}$ est alors injective et on a $rg_{x_0}(\phi) \geq dimL = m - rg_{x_0}(\phi)$, i.e., $rg_{x_0}(\phi) \geq d \geq 3$.

Soit $\{e_i\}_{i \leq 2d}$ une base α-standard de $T_{x_0}M$. On a alors pour tout $i, j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$(\rho^{'}_{\mathbb{C}}(\xi^\phi_{ij}), \overline{\xi^\phi_{ij}})(a_i + a_j)^2 = 0 = (\rho^{'}_{\mathbb{C}}(\eta^\phi_{ij}), \overline{\eta^\phi_{ij}})(a_i - a_j)^2. \tag{19}$$

Comme α est symplectique, aucun des a_i n'est nul. Par suite, on a, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, $(\rho^{'}_{\mathbb{C}}(\xi^\phi_{ij}), \overline{\xi^\phi_{ij}}) = 0$ et donc, d'après la forte négativité de la courbure de N, $(\xi^\phi_{ij})^{1,1} = (d\phi(Z_i) \wedge d\phi(Z_j))^{1,1} = 0$, autrement dit,

$$d\phi^{1,0}(Z_i) \wedge d\phi^{0,1}(Z_j) = d\phi^{1,0}(Z_j) \wedge d\phi^{0,1}(Z_i). \tag{20}$$

Maintenant, si, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, d\}$, on a $d\phi^{1,0}(Z_i) \wedge d\phi^{0,1}(Z_j) = d\phi^{1,0}(Z_j) \wedge d\phi^{0,1}(Z_i) \neq 0$, alors, d'après le lemme 5.1 de [14], on aurait, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $d\phi(Z_i) = \lambda_i \, d\phi(Z_1)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, et donc, ϕ serait de rang 2 en

x_0. Comme $rg_{x_0}(\phi) \geq d > 2$, il existe donc nécéssairement un couple $i, j \in \{1, \dots, d\}$ tel que $d\phi^{1,0}(Z_i) \wedge d\phi^{0,1}(Z_j) = d\phi^{1,0}(Z_j) \wedge d\phi^{0,1}(Z_i) = 0$, ce qui entraîne, sachant que $d\phi(Z_i)$ et $d\phi(Z_j)$ sont non nuls (car β est non dégénérée), que ou bien, $d\phi^{1,0}(Z_i) = d\phi^{1,0}(Z_j) = 0$, ou bien $d\phi^{0,1}(Z_i) = d\phi^{0,1}(Z_j) = 0$. On déduit alors de (20) que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, soit tous les $d\phi^{1,0}(Z_i)$ sont nuls, soit tous les $d\phi^{0,1}(Z_i)$ sont nuls. Il en découle que, pour tout $i, j,\ i \neq j$, $(\eta_{ij}^{\phi})^{1,1} = (d\phi(Z_i) \wedge \overline{d\phi(Z_j)})^{1,1} = d\phi^{1,0}(Z_i) \wedge \overline{d\phi^{1,0}(Z_j)} + d\phi^{0,1}(Z_i) \wedge \overline{d\phi^{0,1}(Z_j)} \neq 0$, et donc, $(\rho'_{\mathbb{C}}(\eta_{ij}^{\phi}), \overline{\eta_{ij}^{\phi}}) < 0$. L'équation (19) nous dit alors que $a_1 = \ldots = a_d = 1$. La fin de la preuve est identique à celle du théorème 4.1. $\square$

La preuve du théorème 4.4 est identique à la précédente, moyennant la remarque faite dans la preuve du théorème 4.2.

5. Estimations sur le rang et applications

Si $\alpha \in \Omega^2(M)$ est une 2-forme réelle, alors, en tout point x de M, on notera $rg_x(\alpha)$ le rang de α en x, i.e. $rg_x(\alpha) = m - dim\, Ker\alpha_x$ où $Ker\alpha_x = \{X \in T_xM; i(X)\alpha = 0\}$. Notons que si α est parallèle, alors son rang est constant sur M.

Soit donc α une 2-forme parallèle sur M. Son noyau $Ker\ \alpha$ est stable sous l'action du groupe d'holonomie de M. Par suite (théorème de décomposition de de Rham), il existe un revêtement $\pi : \tilde{M} \to M$ de M par une variété produit $\tilde{M} = {M_0}^{\alpha} \times {M_1}^{\alpha}$, où $d\pi(T{M_0}^{\alpha})$ coïncide avec $Ker\ \alpha$ et où $d\pi(T{M_1}^{\alpha})$ coïncide avec $(Ker\ \alpha)^{\perp}$, qui est aussi l'image de l'endomorphisme associé à α via la métrique g.

Theoreme 5.1. *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension $m \geq 2$ munie d'une 2-forme parallèle non nulle α, et soit N une variété presque hermitienne à tenseur de courbure fortement négatif. Si ϕ est une application harmonique de M dans N alors:*
i) en tout point x de M on a: $rg_x(\phi) \leq Max(rg(\alpha), m - rg(\alpha))$.
ii) Si $rg_x(\phi) > 2$ en tout point x de M, alors le relevé $\tilde{\phi} = \phi \circ \pi : {M_0}^{\alpha} \times {M_1}^{\alpha} \to N$ de ϕ, n'est fonction que de l'un des facteurs ${M_0}^{\alpha}$ ou ${M_1}^{\alpha}$.
iii) Si $rg_x(\phi) \geq rg(\alpha) > m/2$ en tout point x de M, alors la forme α induit sur ${M_1}^{\alpha}$ une structure kählérienne et il existe une immersion holomorphe ou antiholomorphe $\psi : {M_1}^{\alpha} \to N$ telle qu'on ait, pour tout $(x_0, x_1) \in {M_0}^{\alpha} \times {M_1}^{\alpha}$, $\tilde{\phi}(x_0, x_1) = \psi(x_1)$.

La preuve de ce théorème est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 5.1. *Soient M, N, α et ϕ comme dans l'énoncé du théorème 5.1. Si x est un point de M tel que $rg_x(\phi) > 2$, alors ou bien $Ker\alpha_x \subset Kerd\phi_x$, ou bien $(Ker\alpha_x)^{\perp} \subset Kerd\phi_x$.*

Preuve. Soit $x \in M$ tel que $rg_x(\phi) > 2$ et soit $\{e_i\}_{i\leq m}$ une base α-standard de T_xM telle que $\alpha_x = \sum_i a_i e_i \wedge e_{i'}$, avec $a_i > 0$ pour tout $i \leq l = rg(\alpha)/2$, et $a_{l+1} = \ldots = a_d = 0$. L'harmonicité de ϕ et la négativité du tenseur de courbure de N entraînent la nullité de $R_\phi(\alpha)$ (proposition 3.1). On a donc, pour tout $i \leq d$ et tout $j \leq d$,

$$(\rho'_{\mathbb{C}}(\xi^\phi_{ij}), \overline{\xi^\phi_{ij}})(a_i + a_j)^2 = 0, \tag{21}$$

$$(\rho'_{\mathbb{C}}(\eta^\phi_{ij}), \overline{\eta^\phi_{ij}})(a_i - a_j)^2 = 0, \tag{22}$$

et

$$\chi_m(\phi^* R'_{imim} + \phi^* R'_{i'mi'm}){a_i}^2 = 0. \tag{23}$$

Comme $rg_x(\phi) > 2$, alors nécessairement l'un des deux cas suivants a lieu:

i) Il existe un $i \in \{1, \ldots, d\}$ et un $j \in \{1, \ldots, d\}$ tels que $d\phi(Z_i) \wedge d\phi(Z_j) \neq 0$. Dans ce cas on a (cf. [14], lemme 5.1) $(\xi^\phi_{ij})^{1,1} \neq 0$ ou $(\eta^\phi_{ij})^{1,1} \neq 0$; ce qui donne d'après les équations (21) et (22), $a_i = a_j$.

Si $a_i = a_j = 0$, les équations (21) et (22) nous donnent pour tout $k \leq l$, $(\xi^\phi_{ki})^{1,1} = (\eta^\phi_{ki})^{1,1} = 0$ et $(\xi^\phi_{kj})^{1,1} = (\eta^\phi_{kj})^{1,1} = 0$. Par suite, pour tout $k \leq l$, on a $d\phi(Z_k) \wedge d\phi(Z_i) = 0 = d\phi(Z_k) \wedge d\phi(Z_j)$ et donc, comme $d\phi(Z_i) \wedge d\phi(Z_j) \neq 0$, $d\phi(Z_k) = 0$. Nous en déduisons l'inclusion $(Ker\alpha_x)^\perp \subset Kerd\phi_x$.

Si $a_i = a_j > 0$, on a alors pour tout $k > l$, $(\xi^\phi_{ki})^{1,1} = (\eta^\phi_{ki})^{1,1} = 0$ et $(\xi^\phi_{kj})^{1,1} = (\eta^\phi_{kj})^{1,1} = 0$. Nous en déduisons comme ci-dessus que $d\phi(Z_k) = 0$ pour tout $k > l$ et donc, lorsque M est de dimension paire, que $Ker\alpha_x \subset Kerd\phi_x$. Maintenant, si M est de dimension impaire, l'équation (23) nous donne compte tenu de la négativité de la courbure sectionnelle de N, $d\phi(e_m) \wedge d\phi(Z_i) = d\phi(e_m) \wedge d\phi(Z_j) = 0$ et donc $d\phi(e_m) = 0$. D'où $Ker\alpha_x \subset Kerd\phi_x$.

ii) M est de dimension impaire et il existe $i \leq d$ tel qu'on ait $d\phi(e_m) \wedge d\phi(Z_i) \neq 0$. L'équation (23) nous dit alors que $a_i = 0$. Pour tout $k \leq l$, on a d'une part, (équations (21) et (22)), $d\phi(Z_k) \wedge d\phi(Z_i) = 0$ et, d'autre part, (équation (23)) $d\phi(e_k) \wedge d\phi(e_m) = d\phi(e_{k'}) \wedge d\phi(e_m) = 0$. Nous en déduisons que $d\phi(Z_k) = 0$ pour tout $k \leq l$ et donc que $(Ker\alpha_x)^\perp \subset Kerd\phi_x$. □

Preuve du théorème 5.1. Les assertions (i) et (ii) se déduisent facilement du lemme 5.1. Soit maintenant un point x de M tel que $rg_x(\phi) \geq rg(\alpha) > m/2$. L'assertion (i) nous dit alors que $rg_x(\phi) = rg(\alpha) > m - rg(\alpha)$. Par suite, on a d'après le lemme 5.1, $Ker\alpha_x = Kerd\phi_x$ et $d\phi(Z_1) \wedge d\phi(Z_2) \wedge \ldots \wedge d\phi(Z_l) \neq 0$. Par un raisonnement identique à celui développé dans la preuve du théorème 4.1, nous en déduisons que $a_1 = \ldots = a_l$ et donc que α induit une structure complexe J sur $(Ker\alpha)^\perp$ telle qu'on ait, pour tout $X \in (Ker\alpha)^\perp$, $J' \circ d\phi(X) = \pm d\phi \circ JX$. Par conséquent, la forme $\tilde{\alpha} = \pi^*\alpha$ induit une structure kählérienne sur ${M_1}^\alpha$ pour laquelle $\tilde{\phi}$ sera holomorphe ou anti-holomorphe. □

Remarque 5.1. Le groupe d'holonomie de M laisse stable non seulement $Ker\ \alpha$ et $(Ker\ \alpha)^{\perp}$, mais aussi tous les espaces propres $P_0 = Ker\ \alpha, P_1, \ldots, P_k$ du carré L^2 de l'endomorphisme L associé à α via la métrique g. Par conséquent, il existe un revêtement $\pi : \tilde{M} \to M$ de M par un produit $\tilde{M} = {M_0}^{\alpha} \times {M_1}^{\alpha} \times \ldots \times {M_k}^{\alpha}$, où, pour tout $i \leq k$, $d\pi(T{M_i}^{\alpha})$ coïncide avec P_i. En remarquant que les valeurs propres de L^2 en x ne sont rien d'autres que les $-{a_i}^2$ utilisés dans la preuve ci-dessus, nous pouvons en déduire le raffinement suivant du théorème 5.1:
i) pour tout x de M, $rg_x(\phi) \leq Max_{i \leq k}\ dim\ P_i$.
ii) Si $rg_x(\phi) > 2$ en tout point x de M, alors le relevé $\tilde{\phi}$ de ϕ à $\tilde{M}$, n'est fonction que de l'un des facteurs ${M_i}^{\alpha}$.

Corollaire 5.1. *Soit M_1 une variété kählérienne compacte, M_2 une variété riemannienne compacte de dimension $m_2 \geq 2$, et N une variété kählérienne à tenseur de courbure fortement négatif. Si $\phi : M_1 \times M_2 \to N$ est une application harmonique telle que $rg(\phi) > m_2$ en tout point de $M_1 \times M_2$, alors il existe une application holomorphe ou anti-holomorphe $\psi : M_1 \to N$ telle qu'on ait pour tout $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$, $\phi(x_1, x_2) = \psi(x_1)$.*

Preuve. L'hypothèse $rg(\phi) > m_2 \geq 2$ va entraîner comme dans le théorème 5.1, que ϕ n'est fonction que du premier facteur M_1. Par suite, il existe $\psi : M_1 \to N$ harmonique telle que $rg(\psi) > 2$. Mais cette application est nécéssairement holomorphe ou anti-holomorphe (théorème de Siu). □

Theoreme 5.2. *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension $m \geq 2$ munie d'une 2-forme parallèle non nulle α, et soit N une variété riemannienne à courbure sectionnelle complexe strictement négative. Si ϕ est une application harmonique de M dans N alors:*
i) en tout point x de M, on a $rg_x(\phi) \leq Max(2, m - rg(\alpha))$.
ii) Si $rg_x(\phi) > 2$ en tout point x de M, alors il existe une application harmonique $\psi : {M_0}^{\alpha} \to N$ telle qu'on ait, pour tout $(x_0, x_1) \in \tilde{M} = {M_0}^{\alpha} \times {M_1}^{\alpha}$, $\tilde{\phi}(x_0, x_1) = \psi(x_0)$.

Dans le cas particulier où M est une variété kählérienne munie de sa forme de Kähler α, on retrouve dans l'assertion (i) de ce théorème certains résultats de Sampson [15], Hernandez [6] et Ohnita-Udagawa [13].

La preuve de ce théorème est semblable à celle du théorème 5.1. Il suffit de remarquer que, compte tenu de la nouvelle hypothèse sur la courbure de N, la nullité de $(\rho'_{\mathbb{C}}(\xi^{\phi}_{ij}), \overline{\xi^{\phi}_{ij}})$ entraîne celle de ξ^{ϕ}_{ij} et donc que $d\phi(Z_i)$ et $d\phi(Z_j)$ sont $\mathbb{C}$-colinéaires.

Remarque 5.2. Comme dans le paragraphe précédent, nous pouvons réécrire les résultats ci-dessus dans le cas où la courbure de N est positive à condition d'y remplacer l'hypothèse d'harmonicité de ϕ par celle de la α-pluriharmonicité.

Une conséquence du théorème 5.1 et du théorème de Eells-Sampson est le:

Corollaire 5.2. *Soient M et N deux variétés compactes orientables de même dimension $m > 2$. Si M admet une métrique riemannienne telle que $P_2(M) \neq 0$ et si N admet une métrique riemannienne à courbure sectionnelle complexe strictement négative, alors toute application continue ϕ de M dans N est de degré nul.*

Preuve du corollaire 5.1. Supposons qu'il existe une application continue ϕ de M dans N de degré non nul. D'après Eells-Sampson (comme $K^{'} < 0$), il existe une application harmonique de (M, g) dans (N, h), homotope à ϕ. Or, une telle application est nécéssairement de rang m en au moins un point, ce qui contredit l'estimation du rang donnée par le théorème 5.3. □

Ce dernier corollaire nous dit en particulier que si une variété compacte orientable M de dimension $m > 2$ admet une métrique riemannienne à courbure sectionnelle complexe strictement négative, alors aucune métrique riemannienne sur M n'admet de 2-formes parallèles non nulles (i.e. pour toute métrique g sur M, on a $P_2(M, g) = \{0\}$). Ce résultat couvre un théorème dû à Hernandez [6].

References

[1] K. Corlette, Archimedian superrigidity and hyperbolic geometry, *Ann. of Math.* **135** (1992), 165–182.

[2] J. Eells et L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps, CBMS Regional Conf. Series **50**, AMS, Providence 1983.

[3] J. Eells et L. Lemaire, Another report on harmonic maps, *Bull. London. Math. Soc.* **20** (1988), 385–524.

[4] J. Eells et J. H. Sampson, Harmonic mappings of riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* **86** (1964), 109–160.

[5] M. Gromov et P. Pansu, Rigidity of lattices: An introduction. Geometric topology: recent developments, CIME Conf.; 1990, *Springer lecture Notes in Math.* **1504** (1991), 139-137.

[6] L. Hernandez, Kähler manifolds and 1/4 Pinching, *Duke Math. J.* **62** (3) (1991), 601–611.

[7] O. Hijazi et J. L. Milhorat, Minoration des valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur les variétés spin Kähler-quaternioniennes, *J. Math. Pures. Appl.* **74** (1995), 387–414.

[8] K.D. Kirchberg, Properties of kählerian twistor-spinors and vanishing theorems, *Math. Ann.* **293** (1992), 349–369.

[9] H. B. Lawson et M. L. Michelsohn, Spin Geometry, *Princeton Math. Ser.* **38**, Princeton University Press, Princeton 1989.

[10] A. Lichnerowicz, *Global Theory of Connections and Holonomy Groups*, Noordhoff International Publishing, Leyden 1976.

[11] M. Micallef et M. Wang, Metrics with non negative isotropic curvature, *Duke Math. J.* **72** (3) (1993), 649–672.

[12] G. D. Mostow et Y. T. Siu, A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball, *Ann. of Math.* **112** (1980), 321–360.

[13] Y. Ohnita et S. Udagawa, Stability, complex analyticity and constancy of pluriharmonic maps, etc., *Math.Z.* **205** (1990), 629-644.

[14] R. Petit, Immersions minimales et immersions pluriharmoniques entre variétés riemanniennes: résultats de non existence et de rigidité, *Thèse de doctorat de l'Université de Tours,* chapitre I, (1996).

[15] J. H. Sampson, Harmonic maps in Kähler geometry, CIME Conf.; 1984, *Springer lecture Notes in Math.* **1161** (1985), 193–205.

[16] W. Seaman, On manifolds with non negative curvature on totally isotropic 2-planes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **338** (1993), 843–855.

[17] Y. T. Siu, The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, *Ann. of Math.* **112** (1980), 73–111.

Ahmad El Soufi
Laboratoire de Mathématiques
et Physique Théorique
UPRES-A 6083 du CNRS
Parc de Grandmont
F-27200 Tours
France
e-mail: elsoufi@univ-tours.fr

Robert Petit
Département de Mathématiques
UMR 6629 du CNRS
2, rue de la Houssinière
BP 92208
F-44322 Nantes
France
e-mail: petit@math.univ-nantes.fr

(Received: March 4, 1996)