

Un théorème de rigidité différentielle

Laurent Bessières

Résumé. Nous démontrons dans cet article le résultat de rigidité suivant, concernant le volume minimal d'une variété lisse fermée de dimension ≥ 3 .

Théorème: soient N et M deux variétés lisses, fermées, orientées de même dimension $n \geq 3$. On suppose que M est munie d'une métrique hyperbolique g_0 . Si $f : N \rightarrow M$ est une application continue de degré non nul telle que $\text{Minvol}(N) = |\deg f| \text{vol}_{g_0}(M)$, alors N est une variété hyperbolique et f est homotope à un revêtement riemannien. La preuve repose sur l'utilisation de théorèmes de convergence riemannienne à la Gromov [GLP], et sur l'adaptation de la construction de Besson, Courtois, Gallot [BCG].

L'une des applications intéressantes est que le volume minimal n'est pas un invariant du type topologique de la variété, mais de la structure différentielle. Il n'est pas non plus additif par somme connexe.

Mathematics Subject Classification (1991). En premier 55C20; en second 53C21.

Mots clés. Rigidité, volume minimal, variétés hyperboliques.

1. Introduction

Un problème central en topologie différentielle est de savoir à quelles conditions une application de degré $p \geq 1$ entre deux variétés différentielles est proprement homotope à un revêtement. Dans cet article, nous considérons le cas des variétés différentielles fermées, orientées, connexes de dimension ≥ 3 .

Nous montrons qu'un invariant de nature riemannienne, le volume minimal d'une variété différentielle, introduit par M. Gromov [Gr], permet de résoudre le problème ci-dessus dans le cas où la variété au but admet une structure hyperbolique.

Le volume minimal d'une variété différentielle M est défini comme suit.

Définition 1. $\text{Minvol}(M) = \inf \{ \text{vol}_g(M) : g \text{ métrique riemannienne à courbure sectionnelle } |K(g)| \leq 1 \}$.

Le résultat principal de cet article est le théorème de rigidité suivant:

Théorème 1.1. *Soient M et N deux variétés différentielles, fermées, orientées connexes de dimension ≥ 3 . On suppose que M est munie d'une métrique hyperbolique g_0 , à courbure sectionnelle $K_{g_0} = -1$. S'il existe une application continue*

$$f : \longrightarrow M$$

de degré $p \geq 1$ telle que

$$\text{Minvol}(N) = p \cdot \text{vol}_{g_0}(M) \tag{1}$$

alors N est difféomorphe à une variété hyperbolique et f est homotope à un revêtement de degré p .

Remarque. D'après le résultat de Besson, Courtois, Gallot [BCG, 9.2], que nous rappelons au chapitre 3, on a l'inégalité

$$\text{Minvol}(N) \geq p \cdot \text{vol}_{g_0}(M) \tag{2}$$

Le théorème 1.1 généralise le théorème de Thurston [Thu] sur les applications de degré p entre variétés hyperboliques fermées orientées connexes. En effet G. Besson, G. Courtois et S. Gallot [BCG] ont montré que dans le cas d'une variété hyperbolique fermée, le volume minimal est atteint pour la métrique hyperbolique. Plus généralement, ils ont obtenu un théorème de rigidité riemannienne en utilisant l'entropie volumique d'une variété riemannienne, qui montre que la métrique hyperbolique est la seule à réaliser le volume minimal. En dehors du cas hyperbolique, on ne sait pas si le volume minimal est réalisable par une métrique riemannienne.

Le théorème 1.1 et le résultat ci-dessus de [BCG] permettent d'obtenir un énoncé de rigidité par le volume minimal, analogue au théorème de rigidité riemannienne obtenue dans [BCG] pour l'entropie volumique:

Corollaire 1.2. *Soient N et M deux variétés fermées orientées de même dimension n , reliées par une application continue*

$$f : N \longrightarrow M$$

de degré non nul. Supposons M munie d'une métrique hyperbolique g_0 , alors

$$\text{Minvol}(N) \geq |\deg f| \cdot \text{vol}_{g_0}(M).$$

De plus, en dimension $n \geq 3$, l'égalité est atteinte si et seulement si N peut être munie d'une métrique hyperbolique, et s'il existe un revêtement différentiable, homotope à f , de N sur M .

Une des conséquences du théorème 1.1 est que le volume minimal “repère” les sphères exotiques.

Corollaire 1.3. *Soit M une variété hyperbolique fermée orientée stablement-parallélisable de dimension $n \neq 4$ et Σ une variété fermée, de même dimension. Alors on a l'inégalité*

$$\text{Minvol}(M\sharp\Sigma) \geq \text{Minvol}(M),$$

et l'égalité est atteinte si et seulement si Σ est difféomorphe à S^n .

Ainsi, lorsque Σ est homéomorphe à S^n , mais non difféomorphe, la variété $M\sharp\Sigma$ est homéomorphe, mais non difféomorphe à M et

$$\text{Minvol}(M\sharp\Sigma) > \text{Minvol}(M).$$

Le corollaire montre par ailleurs que le volume minimal n'est pas additif par somme connexe. Un contre-exemple est également fourni par le résultat suivant

Corollaire 1.4. *Soit M une variété de dimension $n \geq 3$, fermée, orientée, admettant une métrique hyperbolique réelle g_0 . Alors*

$$\text{Minvol}(M\sharp M) > 2 \cdot \text{minvol}(M) = 2 \cdot \text{vol}_{g_0}(M).$$

Y. Babenko [Bab] considère l'invariant naturel suivant pour une variété différentiable M

$$\Omega(M) = \inf\{h(g)^n \text{vol}_g(M), g \text{ métrique riemannienne}\}.$$

Il a montré que c'est un invariant du type d'homotopie. D'après le corollaire 1.3, le volume minimal se trouve être un invariant plus fin en ce sens qu'il peut distinguer les structures différentiables de M .

La preuve du théorème 1.1 repose sur l'utilisation de théorèmes de convergence “à la Gromov” (cf. chapitre 2) et sur la construction principale du travail de [BCG] que nous rappelons et adaptons à notre cas au chapitre 3.

1.1. Schéma de la preuve

On considère une suite de métriques riemanniennes g_k sur N à courbure sectionnelle bornée par -1 et 1 et telle que $\text{vol}_{g_k}(N)$ converge vers $p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$. Le problème est qu'on ne sait pas a priori qu'il existe sur N une métrique réalisant l'égalité. Dans la première étape, on utilise une version optimisée du théorème de convergence de M. Gromov, convenable pour étudier $N_k = (N, g_k)$. Les difficultés auxquelles nous avons à faire face sont les suivantes: on obtient au mieux une convergence pointée vers une variété riemannienne (X, g) de même dimension, à

priori non compacte, munie d'une métrique C^{1+a} . On entend par là que pour tout réel $D \geq 0$, il existe un entier K_D et pour tout entier $k \geq K_D$ un plongement

$$f_k^D : B_g(0, D) \subset X \longrightarrow N_k, \quad 0 \in X$$

tels que $f_k^D * g_k$ converge vers g de façon C^1 .

La condition nécessaire et suffisante pour que X soit difféomorphe à N est que la convergence ait lieu à diamètre borné, ce que nos hypothèses ne donnent pas a priori. Pour obtenir cette conditions, on va plonger de manière la plus isométrique possible X dans une variété compacte, M en l'occurrence, de manière à majorer son diamètre et celui des N_k . Cela se fait via la variété N_k et les plongements f_k^D . Dans le chapitre 3, on reprend la construction principale de Besson, Courtois et Gallot [BCG] pour définir des applications

$$F_k : N_k \longrightarrow M$$

qui vérifient de bonnes propriétés, qui en font des quasi isométries sur des ensembles de volume arbitrairement grand dans N_k , mais ces propriétés sont moins fortes que celles obtenues dans [BCG].

On peut alors considérer les familles d'applications

$$h_k^D := F_k \circ f_k^D : B_g(0, D) \longrightarrow M$$

dont on montre qu'elles sont équicontinues. L'extraction de sous suites convergentes permet alors de définir une application limite $h : X \longrightarrow M$.

Nous montrons successivement que h est contractante au sens large (chapitre 4), que son degré absolu est fini, et que c'est une isométrie local (chapitre 5). On en déduit alors que X est une variété hyperbolique de diamètre borné, donc difféomorphe à N et que h est un revêtement localement isométrique fini (chapitre 6). Nous donnons les applications au chapitre 7.

Les résultats et les méthodes de [BCG] sont à l'origine de ce travail, je remercie Gérard Besson, Gilles Courtois et Sylvestre Gallot pour leurs remarques et leurs encouragements.

2. Convergence des variétés riemanniennes

2.1. Convergence "à la Gromov"

La variété N est munie d'une suite de métriques riemanniennes g_k approchant le volume minimal, c'est à dire que la courbure sectionnelle est bornée par -1 et 1 et le volume $\text{vol}_{g_k}(N)$ converge vers $\text{Minvol}(N) = p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$. Si la variété s'effondre (cf. [Pan]), le rayon d'injectivité tend en tout point vers 0 et le diamètre

peut tendre vers l'infini. L'effondrement riemannien est contrôlé par le volume simplicial qui doit être nul. Comme M est hyperbolique et f est de degré $p \geq 1$,

$$\|N\| \geq p \cdot \|M\| > 0$$

d'où N ne s'effondre pas. Pour chaque métrique g_k , la variété $N_k = (N, g_k)$ contient un point 0_k où le rayon d'injectivité

$$\text{inj}(0_k) > \varepsilon \tag{3}$$

pour une constante $\varepsilon > 0$. En fait, on peut prendre la constante universelle de Gromov ([Gr. 0.5], injectivity radius estimate). Cependant, le diamètre peut tendre vers l'infini.

Les conditions d'utilisation du théorème de convergence de Gromov ([GLP, 8.28]) sont vérifiées. Il existe une variété "riemannienne" complète (X, g) , g métrique de classe C^0 et une sous-suite de $\{(N, g_k)\}$ dont la limite pour la convergence pointée est X . Cela signifie qu'une boule centrée au point base de la variété limite est homéomorphe à partir d'un certain rang aux boules centrées de la sous-suite et que la dilatation des homéomorphismes et de leurs inverses converge vers 1.

Si, de plus, la convergence de (N, g_k) se fait à diamètre borné, alors la variété limite X est homéomorphe à N .

2.2. Régularisation de la variété limite

Maintenant, le théorème de régularisation de Nikolaev [Ni] permet de définir sur X une structure C^3 , la métrique g étant $C^{1+\alpha}$.

En utilisant divers résultats sur la métrique limite (prop 2.2), on établit

Proposition 2.1. *Il existe une suite de métriques riemanniennes g_k sur N , approchant le volume minimal, et satisfaisant à (3) telle que*

1. *La suite pointée $(N, 0_k, g_k)$ converge vers une variété "riemannienne" complète $(X, 0, g)$, g de classe $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Précisément, pour tout réel $D > 0$, il existe un entier K_D et pour tout entier $k > K_D$ un difféomorphisme*

$$f_k^D : B_g(0, D) \subset X \longrightarrow B_{g_k}(0_k, D) \subset N$$

tel que $\|df_k^D\|$ et $\|(df_k^D)^{-1}\|$ tendent vers 1 quand k tend vers $+\infty$.

2. *Les géodésiques de (X, g) sont localement uniques et prolongeables. L'application exponentielle est bien défini de $T_x X$ dans X .*
3. $\text{vol}(X) \leq \text{minvol}(N)$.

Remarque. Si on suppose de plus que le diamètre est uniformément borné, la variété limite est compacte et difféomorphe à N .

Dans la théorie des variétés riemanniennes, les bonnes propriétés métriques telles que l'existence et l'unicité locale des géodésiques, l'existence de l'exponentielle, etc... se ramènent à des problèmes différentiels. Les coefficients des équations différentielles font intervenir les dérivées des symboles de Cristoffel de la métrique, qui sont ici de classe C^α seulement. Les résultats classiques de la théorie des équations différentielles ne s'appliquent pas.

On se place dans le cadre plus géométrique des espaces d'Alexandrov à courbure bornée (cf. [ABN],[BGP]). Les résultats et les méthodes de cette théorie permettent de montrer (cf. [Pl],[GP]).

Proposition 2.2. *La variété X est un espace d'Alexandrov géodésiquement complet à courbure bornée $-1 \leq K \leq 1$ vérifiant les propriétés suivantes*

1. *Les géodésiques sont prolongeables de manière unique*
2. *Il existe une fonction $\phi : R_+ \rightarrow R_+$ telles que le rayon d'injectivité de X au point $x \in X$ est minoré*

$$\text{inj}(X) \geq \phi(d(0, x))$$

3. *L'application exponentielle est bien définie de $T_x X$ dans X .*

Remarque. La liste n'est pas exhaustive (cf. [Be]). On indique simplement les propriétés nécessaires pour nos besoins.

Lorsque la convergence a lieu avec un rayon d'injectivité uniformément minoré (dans le cas compact), l'assertion 1 est déjà connue (cf. chapitre 2 de [GP], propositions 3 – 7 de [Pl]) ainsi que l'assertion 3 (cf. [Pe, 4.4]). La proposition [GLP, 8.22] de Gromov montre que les démonstrations restent valables dans notre cas, et prouve aussi l'assertion 2.

Proposition 2.3 (Gromov). *Il existe une fonction universelle*

$$\phi_{n,\Lambda} : R_+ \times R_+ \longrightarrow R_+$$

telle que si V est une variété riemannienne à courbure sectionnelle pincée $|K| \leq \Lambda^2$, et $v, v' \in V$ alors

$$\ell(v') \geq \phi_{n,\Lambda}(\ell(v), d(v, v')) > 0$$

où $\ell(v) = 1/2 \min(\pi/\Lambda, \text{plus petite longueur d'un lacet géodésique non trivial basé en } v)$.

Cette proposition permet de minorer uniformément le rayon d'injectivité sur les $B_{g_k}(0_k, D)$. Le rayon d'injectivité passe à la limite sur $B_g(0, D)$.

3. Adaptation de la construction de [BCG]

On reprend et on adapte dans ce chapitre la construction principale de Besson, Courtois et Gallot [BCG].

3.1. Résultats de Besson, Courtois, Gallot

Avant d'énoncer leur théorème principal, on rappelle que l'entropie volumique d'une variété compacte N munie d'une métrique riemannienne g est définie par

$$h(N, g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \log(\text{vol}_{\tilde{g}}(B_{\tilde{g}}(R)))/R$$

où \tilde{g} est la métrique relevée de g au revêtement universel \tilde{N} , et $B_{\tilde{g}}(R)$ est une boule géodésique de rayon R dans le revêtement universel \tilde{N} (cf. [Ma]).

Théorème 3.1 (Besson, Courtois, Gallot, 1994). *Soient N et M deux variétés fermées connexes orientées de même dimension $n \geq 3$, reliées par une application continue*

$$f : N \longrightarrow M$$

de degré non nul. Supposons M munie d'une métrique localement symétrique de courbure strictement négative, notée g_0 . Alors toute métrique riemannienne g sur N vérifie

$$h_g^n(N) \cdot \text{vol}_g(N) \geq |\deg f| h_{g_0}^n(M) \cdot \text{vol}_{g_0}(M). \quad (4)$$

De plus, en dimension $n \geq 3$, l'égalité est atteinte si et seulement si (N, g) est localement symétrique (de même type que (M, g_0)). Il existe alors une constante λ telle que f est homotope à un revêtement isométrique de (N, g) sur $(M, \lambda g_0)$.

Un corollaire important de ce théorème est que la métrique hyperbolique sur une variété est la seule à réaliser le volume minimal.

Corollaire 3.2. *Soit M une variété fermée munie d'une métrique hyperbolique g_0 (de courbure sectionnelle $K_{g_0} = -1$), alors $\text{Minvol}(M) = \text{vol}_{g_0}(M)$. De plus, s'il existe une autre métrique g , de courbure sectionnelle $|K(g)| \leq 1$, telle que $\text{vol}_g(M) = \text{vol}_{g_0}(M)$ alors g est isométrique à g_0 .*

3.2. Construction fondamentale

On adapte la construction principale de [BCG] pour démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Soient M, N deux variétés différentielles fermées, connexes, orientées de dimension $n \geq 3$. On suppose que M est munie d'une métrique*

hyperbolique g_0 , que $\text{Minvol}(N) = p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$ et qu'il existe une application $f : N \rightarrow M$ continue de degré $p \geq 1$. Alors, il existe sur N une suite de points $(0_k)_{k \in \mathcal{N}}$, une suite de métriques riemanniennes $(g_k)_{k \in \mathcal{N}}$ à courbure sectionnelle bornée $|K(g_k)| \leq 1$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}_{g_k}(N) = p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$, et une suite d'applications C^1 , homotopes à f , $F_k : (N, g_k) \rightarrow (M, g_0)$ telles que

1. L'application F_k vérifie, pour tout entier k , pour tout point x de N

$$|\text{Jac } F_k(x)|_{g_k, g_0} \leq 1 \quad (5)$$

2. Soit $W_k = \{m \in M \text{ tel que } \text{card } F_k^{-1}(m) = p\}$ alors

$$\text{vol}_{g_0}(W_k) \geq \text{vol}_{g_0}(M) - o(k) \quad (6)$$

$$\text{Jac } F_k > 0 \text{ presque partout sur } F_k^{-1}(W_k) \quad (7)$$

$$\text{vol}_{g_k}(F_k^{-1}(W_k)) \geq \text{vol}_{g_k}(N) - o(k) \quad (8)$$

3. Soit $U_k = \{x \in N \text{ tel que } |\text{Jac } F_k(x)|_{g_k, g_0} > 1 - 1/k\}$ alors

$$\|d_x F_k\|_{g_k, g_0} \leq 1 + o(k), \quad \forall x \in U_k, \quad (9)$$

$$\text{vol}_{g_k}(U_k) \geq \text{vol}_{g_k}(N) - o(k), \quad (10)$$

$$\text{vol}_{g_k}(F_k(U_k)) \geq \text{vol}_{g_0}(M) - o(k), \quad (11)$$

4. Pour tout réel $D > 0$, il existe un entier K_D tel que

$$\|d_x F_k\|_{g_k, g_0} \leq n \cdot h_{g_0}(M) \quad (12)$$

pour tout entier $k \geq K_D$ et tout point x de $B_{g_k}(0_k, D)$.

Remarque. La notation $o(k)$ désignera dans l'article toute fonction positive tendant vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

La preuve de cette proposition occupe toute la fin de ce chapitre.

On se donne d'abord une application $f : N \rightarrow M$, de degré $p \geq 1$, entre les deux variétés fermées. En régularisant, on supposera dans la suite qu'on peut choisir une application de classe C^1 . On suppose que M est munie d'une métrique hyperbolique g_0 et que $\text{Minvol}(N) = p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$. Il existe alors une suite de métriques riemanniennes g_k à courbure sectionnelle bornée par -1 et 1 telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}(N, g_k) = p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$.

Quitte à extraire une sous-suite des métriques (g_k) , on va construire une suite d'application $F_k : N \rightarrow M$ vérifiant la proposition 3.3.

Puisque $\|N\| \geq \|M\| > 0$, la suite $(N_k) = (N, g_k)$ ne s'effondre pas, il existe donc une suite de points $0_k \in N$ pour laquelle $\text{inj}(0_k, g_k) \geq \varepsilon > 0$, où ε ne dépend que de la dimension.

On munit le revêtement universel \tilde{N} des métriques relevées, qu'on note encore g_k . On identifie l'espace hyperbolique sur H^n à $B(0,1) \subset R^n$ et ∂H^n à S^{n-1} . On appelle encore g_0 la métrique hyperbolique sur H^n . L'application f induit un homomorphisme $\rho : \Pi_1 N \rightarrow \Pi_1 M$ et se relève en une application équivariante $\tilde{f} : \tilde{N} \rightarrow H^n$, c'est à dire vérifiant

$$\tilde{f}(\gamma(x)) = \rho(\gamma)(\tilde{f}(x))$$

pour tout $\gamma \in \Pi_1 N$ et tout point $x \in \tilde{N}$.

La construction des applications F_k se fait alors en deux étapes. On définit pour tout entier k des applications équivariantes (pour une action isométrique de $\Pi_1 M$ sur $L^2(\partial H^n, d\theta)$)

$$\Phi_k : (\tilde{N}, g_k) \rightarrow L^2(\partial H^n, d\theta)$$

et

$$\pi : S^\infty \subset L^2(\partial H^n, d\theta) \rightarrow H^n.$$

On pose alors $\tilde{F}_k = \pi \circ \Phi_k : \tilde{N} \rightarrow H^n$.

Nous rappelons d'abord quelques objets nécessaires à la construction.

3.3. Définition des objets fondamentaux de la construction

3.3.1. Fonction de Buseman

Pour une variété d'Hadamard (c'est à dire riemannienne simplement connexe de courbure négative) une fonction de Buseman est définie de la façon suivante : soit d_0 la distance associée à g_0 , pour $(m, \theta) \in H^n \times \partial H^n$, on pose

$$\beta_\theta(m) = \lim_{t \rightarrow \infty} d_0(m, c(t)) - t$$

où c est la géodésique unitaire joignant 0 à θ . La fonction de Buseman est de classe C^1 , convexe, 1-lipschitzienne et de gradient unitaire (cf. [BGS]).

3.3.2. Noyau de Poisson

Pour $(m, \theta) \in H^n \times \partial H^n$, on définit le noyau de Poisson comme:

$$p_0(m, \theta) = \exp(-h_0 \beta_\theta(m))$$

où h_0 est l'entropie volumique de la métrique g_0 . On a la proposition suivante

Proposition 3.4 (BCG). *Soit $g \in \text{Isom}(H^n)$. Alors g agit sur ∂H^n et*

$$\text{Jac } g(\theta) = p_0(g^{-1}(0), \theta).$$

On en déduit que $p_0(m, \theta)d\theta$ est une mesure de probabilité sur ∂H^n . On définit alors une action de $\Pi_1 M$ sur $L^2(\partial H^n, d\theta)$ par

$$g(\phi)(\theta) = \phi(g^{-1}(\theta))(p_0(g(0), \theta))^{1/2}.$$

Proposition 3.5 (BCG). *L'action précédente de $\Pi_1 M$ sur $L^2(\partial H^n, d\theta)$ est isométrique.*

3.3.3. *Constructions des applications équivariantes positives Φ_k*

On définit maintenant des applications $\Phi_k : \tilde{N} \longrightarrow S^\infty \subset L^2(\partial H^n, d\theta)$ où $d\theta$ est une mesure de probabilité, vérifiant les conditions suivantes

1. pour tout point $(x, \theta) \in \tilde{N} \times \partial H^n$.

$$\int_{\partial H^n} \Phi^2(x, \theta) d\theta = 1$$

2. pour toute isométrie $\gamma \in \Pi_1 N$ et tout point $(x, \theta) \in \tilde{N} \times \partial H^n$,

$$\Phi(\gamma(x), \theta) = \rho(\gamma), \Phi(x, \theta) = \Phi(x, \rho^{-1}(\gamma)(\theta))(p_0(\rho(\gamma)(0), \theta))^{1/2}$$

3. pour tout $(x, \theta) \in \tilde{N} \times \partial H^n$,

$$\Phi(x, \theta) > 0.$$

En particulier, on utilisera dans la suite les applications suivantes

Définition 2. *Pour $(x, \theta) \in \tilde{N} \times \partial H^n$,*

$$\Phi_0(x, \theta) = e^{-\frac{h_0}{2}\beta_\theta(\tilde{f}(x))} = p_0(\tilde{f}(x), \theta)^{1/2}$$

Définition 3. *Pour $(x, \theta) \in \tilde{N} \times \partial H^n$,*

$$\Phi_k(x, \theta) = \Psi_k(x, \theta) / \|\Psi_k(x)\|_{L^2}$$

où

$$\Psi_k(x, \theta) = \left(\int_{\tilde{N}} e^{-h_0 d_{g_k}(x, y)} p_0(\tilde{f}(y) \cdot \theta) \omega_k(y) \right)^{1/2}$$

et ω_k est la forme volume associée à g_k .

La définition 3 a un sens si $h_{g_k}(N) < h_0(M)$. Or d'après le théorème de comparaison de Bishop (cf. [GHL, 3.101]), la condition $|K(g_k)| \leq 1$ implique $h_{g_k} \leq h_0$. Comme $K(\lambda g) = \frac{1}{\lambda^2} K(g)$, et $h(\lambda g) = \frac{1}{\lambda} h(g)$, on peut rendre h_{g_k} strictement inférieur à h_0 en remplaçant g_k par $(1 + o(k))g_k$. D'autre part, l'inégalité (4) p. 449 montre que h_{g_k} converge vers h_0 .

Les applications Φ_0 et Φ_k vérifient alors les conditions 1, 2 et 3. On peut faire montrer:

Proposition 3.6 (BCG). *L'application Φ_k est de classe C^1 , équivariante de \tilde{N} dans $S^\infty \subset L^2(\partial H^n, d\theta)$.*

3.3.4. Métriques images réciproques

Définition 4. Soit une application $\phi : \tilde{N} \rightarrow L^2(\partial H^n, d\theta)$ différentiable. On définit $g_\phi = \phi^*(\text{can})$ où can est le tenseur canonique de $S^\infty \subset L^2(\partial H^n, d\theta)$. Pour tous vecteurs u, v dans $T_x \tilde{N}$, on a

$$g_\phi(u, v)_x = \int_{\partial H^n} (d_x \phi \cdot u)(d_x \phi \cdot v)(\theta) d\theta.$$

Si ϕ est équivariante par rapport aux actions de $\Pi_1 N$ et $\Pi_1 M$, on peut faire passer la métrique g_ϕ au quotient. Si ϕ est une immersion, g_0 est définie positive.

Soit $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ une base g_k orthonormée de $T_x N$. On considère la trace de la métrique pull-back.

Définition 5.

$$\text{trace}_{g_k} g_0(x) = \sum_{i=1}^n g_\phi(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n \int_{\partial H^n} |e_i \cdot \phi(x, \theta)|^2 d\theta = \sum_{i=1}^n \|d_x \phi \cdot e_i\|_{L^2}^2.$$

Le lemme suivant sera utile dans la suite

Lemme 3.7 (BCG). L'application Φ_k définie précédemment vérifie

$$\text{trace}_{g_k} g_{\Phi_k}(x) \leq h_0^2/4 \tag{13}$$

pour tout point $x \in \tilde{N}$ et tout entier k .

3.3.5. Application barycentre

On donne les principaux résultats du chapitre 5 de [BCG].

A toute mesure μ positive sans atome sur ∂H^n , on associe l'unique point $m = \text{bar}(\mu) \in H^n$ défini par

$$\int_{\partial H^n} d\beta_{(m, \theta)}(e_i) d\mu(\theta) = 0$$

où β est la la fonction de Buseman de la métrique g_0 et $\{e_i\}_{i=1}^n$ une base de $T_m H^n$. Toute isométrie γ sur H^n agit sur ∂H^n . Pour une mesure μ , on définit $\gamma * \mu$ par $\gamma * \mu(A) = \mu(\gamma^{-1}(A))$ pour tout ensemble mesurable A dans ∂H^n . On a les propriétés suivantes

$$\text{bar}(\gamma * \mu) = \gamma(\text{bar}(\mu)) \tag{14}$$

$$\text{bar}(p_0(m, \theta)d\theta) = m. \tag{15}$$

Définition 6. *On pose alors*

$$\begin{aligned}\pi : S^\infty \subset L^2(\partial H^n, d\theta) &\longrightarrow H^n \\ \pi(\phi) &= \text{bar}(\phi^2(\theta)d\theta).\end{aligned}$$

Proposition 3.8 (BCG). *π est une submersion C^1 , équivariante et sa différentielle s'écrit dans une base orthonormée $\{E_i\}_{i=1}^n$ de son espace horizontal au point $\phi \in \pi^{-1}(m)$,*

$$d_\phi \pi \cdot E_i = 2(I - H^m)^{-1} H_m^{1/2} e_i$$

où $\{e_i\}_{i=1}^n$ est une base orthonormée de $T_m H^n$ et H_m est l'endomorphisme (symétrique défini positif de trace = 1) de $T_m H^n$ défini en $m = \pi(\phi)$ par

$$g_0(H_m u, v) = h_m(u, v) = \int_{\partial H^n} d\beta_{(m, \theta)}(u) d\beta_{(m, \theta)}(v) \phi^2(\theta) d\theta.$$

3.4 Construction des applications F_k

Définition 7. *On pose*

$$\begin{aligned}\tilde{F}_k : \tilde{N} &\longrightarrow H^n \\ \tilde{F}_k(x) &= \pi \circ \Phi_k(x) = \text{bar}(\Phi_k^2(x, \theta)d\theta).\end{aligned}$$

Cette application est de classe C^1 , équivariante et passe au quotient en une application $F_k : N \longrightarrow M$ de classe C^1 .

Dans la suite des lemmes suivants, on montre qu'on peut extraire une sous-suite telle que les applications F_k vérifient les propriétés de la proposition 3.3. Ces propriétés traduisent le fait que les applications F_k sont proches "en volume" d'isométries locales.

On établit d'abord une propriété simple en terme de degré.

Affirmation 3.9. *Les applications F_k et f sont homotopes. En particulier, $\text{deg}(F_k) = \text{deg}(f) = p$.*

Preuve. Φ et Φ_k sont proprement homotopes par l'homotopie canonique, que est $\Pi_1 N$ équivariante

$$H(t, x) = ((1 - t)\Phi^2(x) + t\Phi_k^2(x))^{1/2}.$$

En utilisant la propriété (15) p. 453 du barycentre, $\tilde{f} = \pi \circ \Phi_0$ donc est reliée à $\pi \circ \Phi_k$ par une homotopie équivariante de \tilde{N} dans H^n . D'où le résultat pour f et F_k . \square

Lemme 3.10. *L'application F_k vérifie, pour tout entier k ,*

$$|\text{Jac } F_k|_{g_k, g_0} \leq 1 \quad \text{sur } N.$$

Preuve. Comme dans celle de [BCG], on utilise la majoration (13) et le calcul de comasse($\pi * \omega_0$).

Les deux résultats précédents permettent d'obtenir des informations sur le degré absolu de l'application F_k . Si les applications F_k sont proches en un certain sens d'une isométrie locale, les degrés absolus des applications F_k doivent coïncider avec le degré usuel sur les ensembles dont le volume croît vers le volume de M . On obtient un résultat dans ce sens en utilisant la formule de l'aire, qui relie le jacobien d'une application et son degré absolu.

Il faut noter qu'à partir de maintenant, les résultats diffèrent notablement de ceux de [BCG]. En effet, alors que la condition d'égalité des volumes $\text{vol}_g(N) = p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$ donnait dans leur article des convergences presque sûres, la condition de convergence des volumes $\text{vol}_{g_k}(N)$ vers $p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$ ne nous permet de récupérer que des convergences en volume. Dans tous les lemmes suivants, on démontre seulement que les applications F_k vérifient les propriétés de la proposition 3.3 sur des ensembles de volume convergeant vers le volume total de N .

C'est le lemme suivant qui démontre la propriété 2 de la proposition 3.3.

Lemme 3.11. *Soit $W_k = \{m \in M, \text{card}(F_k^{-1}(m)) = p\}$ alors*

1. $\text{vol}_{g_0}(W_k) \geq \text{vol}_{g_0}(M) - o(k)$
2. $\text{Jac } F_k > 0$ presque partout sur $F_k^{-1}(W_k)$
3. $\text{vol}_{g_k}(F_k^{-1}(W_k)) \geq \text{vol}_{g_k}(N) - o(k)$.

Preuve. On utilise la formule de l'aire qui s'écrit comme suit (cf. [Mo, EG]):

Soit $F : R^n \rightarrow R^n$ une application lipschitzienne. Alors pour tout ensemble mesurable $A \subset R^n$.

$$\int_A |\text{Jac } F(x)| \omega(x) = \int_{R^n} \text{card}(F^{-1}(y) \cap A) \omega(y)$$

Comme l'application F_k est de degré p , $\text{card}(F_k^{-1}(m)) \geq p$ presque partout sur M . On décompose M sous la forme $W_k \cup {}^c W_k$. Observons que $\text{card}(F_k^{-1}(m)) \geq p + 1$ presque sur ${}^c W_k$. On a les inégalités

$$\begin{aligned} \text{vol}_{g_k}(N) &\geq \int_N |\text{Jac } F_k(x)| \omega_k(x) \\ &= \int_{W_k \cup {}^c W_k} \text{card}(F_k^{-1}(m)) \omega_0(m) \\ &\geq \int_{W_k} p \omega_0(m) + \int_{{}^c W_k} p + 1 \omega_0(m) \end{aligned}$$

$$\geq p \cdot (\text{vol}_{g_0}(M) - \text{vol}_{g_0}({}^c W_k)) + (p+1)\text{vol}_{g_0}({}^c W_k).$$

D'où

$$\text{vol}_{g_0}({}^c W_k) \leq \text{vol}_{g_k}(N) - p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$$

qui tend vers 0 quand k tend vers ∞ .

Comme le degré de F_k est égal à $p \geq 1$ et que le nombre d'antécédents par F_k est exactement p sur W_k , il en résulte que le signe de $\text{Jac } F_k$ est presque partout constant sur $F_k^{-1}(W_k)$. En particulier $\text{Jac } F_k > 0$ presque partout sur $F_k^{-1}(W_k)$.

De plus, $\text{vol}_{g_k}(F_k^{-1}(W_k)) \geq \text{vol}_{g_k}(N) - o(k)$. En effet,

$$\begin{aligned} \text{vol}_{g_k}(F_k^{-1}(W_k)) &\geq \int_{F_k^{-1}(W_k)} |\text{Jac } F_k| \omega_k \\ &= \int_{W_k} \text{card}(F^{-1}(m)) \omega_0(m) \\ &\geq p \cdot \text{vol}_{g_0}(W_k) \end{aligned}$$

qui tend vers $p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$. □

On démontre la partie 3 de la proposition 3.3 en extrayant une sous-suite convenable.

Lemme 3.12. *Il existe une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathcal{N}}$ telle que pour chaque entier k , l'ouvert $U_{n_k} = \{x \in N, |\text{Jac } F_{n_k}(x)|_{g_{n_k}, g_0} \geq 1 - 1/k\}$ vérifie*

1. $\text{vol}_{g_{n_k}}(U_{n_k}) \geq \text{vol}_{g_{n_k}}(N) - o(k)$
2. $\text{vol}_{g_0}(F_{n_k}(U_{n_k})) \geq \text{vol}_{g_0}(M) - o(k)$.

Remarque. Pour obtenir exactement la partie 3 de la proposition 3.3, il suffit d'extraire la suite $(g_{n_k})_{k \in \mathcal{N}}$ et de la renuméroter $(g_k)_{k \in \mathcal{N}}$.

Preuve du lemme 3.12. Fixons un entier $k \geq 0$. Soit l'ensemble $V_l = \{x \in N, |\text{Jac } F_l|_{g_l, g_0}(x) \leq 1 - 1/k\}$ défini pour tout entier l . On note ω_l la forme volume sur N_l . Les applications F_l sont de degré p , donc

$$\begin{aligned} p \cdot \text{vol}_{g_0}(M) &= p \cdot \int_M \omega_0 \\ &= \int_N (F_l) * \omega_0 \\ &\leq \int_N |\text{Jac } F_l| \omega_l \\ &= \int_{V_l} |\text{Jac } F_l| \omega_l + \int_{N \setminus V_l} |\text{Jac } F_l| \omega_l \end{aligned}$$

$$\leq (1 - 1/k)\text{vol}_{g_l}(V_l) + \text{vol}_{g_l}(n) - \text{vol}_{g_l}(V_l)$$

donc

$$\text{vol}_{g_l}(V_l)k(\text{vol}_{g_l}(N) - p \cdot \text{vol}_{g_0}(M))$$

qui tend vers 0 quand l tend vers $+\infty$. On obtient la minoration 2 en utilisant la formule de l'aire et le fait que $F_l^{-1}(W_l) \cap U_l \subset F_l^{-1}(F_l(U_l) \cap W_l)$.

$$\begin{aligned} \text{vol}_{g_0}(F_l(U_l)) &\geq 1/p \int_{F_l(U_l) \cap W_l} \text{card}(F^{-1}(m))\omega_0(m) \\ &\geq 1/p \int_{F_l^{-1}(W_l) \cap U_l} |\text{Jac } F_l| \omega_l \\ &\geq 1/p \int_{F_l^{-1}(W_l) \cap U_l} 1 - 1/k \omega_l \\ &\geq \frac{1 - \frac{1}{k}}{p} \text{vol}_{g_l}(F_l^{-1}(W_l) \cap U_l) \end{aligned}$$

qui tend vers $\text{vol}_{g_0}(M)$.

Pour un entier l suffisamment grand, on obtient $\text{vol}_{g_l}(V_l) \leq 1/k$ et $\text{vol}_{g_0}(F_l(U_l)) \geq \text{vol}_{g_0}(M) - 1/k$.

Pour un tel entier l , on pose $n_k = l$. □

L'inégalité (9) de la proposition 3.3 montre que F_k est presque contractante. Pour la démontrer, on a besoin d'un lemme technique qui relie la convergence des jacobiens au comportement des dérivées de F_k . Cela se fait en montrant que les valeurs propres des formes quadratiques qui expriment dF_k convergent vers $1/n$.

Lemme 3.13. *On note $\mu_j^k(x)$ les valeurs propres des formes quadratiques*

$$h_x^k(\bullet, \bullet) = \int_{\partial H^n} (d\beta_{(F_k(x), \theta)}(\bullet))^2 \Phi_k^2(x, \theta) d\theta = g_0(H_x^k \bullet, \bullet).$$

Les application μ_j^k sont continues, $\Pi_1 N$ invariantes, classées $0 < \mu_j^k \leq \dots \leq \mu_j^k < 1$ et bien définies sur N . De plus,

$$|\mu_j^k(x) - 1/n| \leq o(k) \quad \text{sur } U_k.$$

Preuve. On utilise les propriétés d'équivariance de F_k . Pour ne pas surcharger les notations, on notera $x \in \tilde{N}$ un relevé de $x \in N$. On remplace la notation $H_{\Phi_k(x)}$ introduite en 3.8 p. 454 par H_x^k pour $x \in N$. En reprenant la preuve de [BCG, 7.4], on établit que

$$\begin{aligned} |\text{Jac } F_k(x)| &\leq 2^n (\det H_x^k)^{1/2} \det(I - H_x^k)^{-1} \left(\frac{h_0^2}{4n} \right)^{n/2} \\ &\leq 1 - A \sum_{i=1}^n (\mu_j^k(x) - 1/n)^2 \end{aligned}$$

pour une constante $A > 0$ (cf. [BCG, B5]) d'où

$$\sum_{i=1}^n (\mu_j^k(x) - 1/n)^2 \leq 1/A(1 - |\text{Jac } F_k(x)|)$$

et donc, pour tout point $x \in U_k$, (cf. lemme 3.12)

$$|\mu_j^k(x) - 1/n| \leq o(k).$$

□

On en déduit le résultat suivant.

Lemme 3.14. *Pour une application linéaire $L : T_x N \rightarrow T_x M$, on définit la norme*

$$\|L\|_{g_k, g_0} = \sup_{u \in T_x N, g_k(u, u)=1} g_0(l \cdot u, L \cdot u)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, pour tout point $x \in U_k$,

$$\|d_x F_k\|_{g_k, g_0} \leq 1 + o(k)$$

Preuve. En suivant [BCG. 7.7], on montre que pour tout point $x \in U_k$,

$$1 - 1/k \leq |\text{Jac } F_k(x)|^{2/n} \leq 1/n \text{ trace}_{g_k}(F_k * g_0)(x) \leq 1 + o(k).$$

On appelle α_i^2 les valeurs propres du 2-tenseur $F_k * g_0(x)$ relativement à g_k et on pose $\beta_i = \alpha_i / (\prod_{i=1}^n \alpha_i)^{1/n}$. Les inégalités

$$1 - 1/k \leq \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)^{1/n} \leq 1/n \sum_{i=1}^n m \alpha_i^2 \leq 1 + o(k) \quad (16)$$

et

$$1/n \sum_{i=1}^n (\beta_i - 1)^2 \leq \frac{1 + o(k)}{1 - 1/k} - 1 \quad (17)$$

et l'inégalité triangulaire impliquent

$$|\alpha_i - 1| \leq \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right)^{1/n} |\beta_i - 1| + \left| \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right)^{1/n} - 1 \right| \leq o(k)$$

pour tout $x \in U_k$. Ceci prouve bien que les valeurs propres de $F_k * g_0(x)$ sont uniformément proches de 1 sur U_k . D'où le résultat. \square

La relation (12) de la proposition 3.3 est particulièrement importante. Elle permet de construire une suite équicontinue d'applications, convergente et de limite contractante. Nous aurons besoin du lemme suivant, pour lequel il faut travailler à diamètre borné.

Lemme 3.15. *Pour tout réel $D > 0$, il existe un entier K_D , tel que*

$$\mu_n^k(x) \leq 1 - 1/n \tag{18}$$

pour tout entier $K \geq K_D$, tout point $x \in B_{g_k}(0_k, D)$.

Preuve. On peut reprendre la preuve de [BCG, 7.5]. La seule modification à apporter est de rester à distance majorée du point base, ce qui permet de minorer uniformément le rayon d'injectivité sur la boule. Comme la courbure est bornée, on en déduit qu'étant donné un réel $\delta > 0$, il existe un entier $k_{\delta, D}$ à partir duquel $B_{g_k}(0_k, 2D) \setminus U_k$ ne contient pas de g_k boule de rayon δ , $\forall k > k_{\delta, D}$. Ce qu'on reformule en disant que tout point de $B_{g_k}(0_k, D)$ est à distance plus petite que δ d'un point de U_k . On indique les étapes de la preuve, en suivant [BCG, 7.5].

On raisonne par l'absurde. Considérons donc un entier k assez grand. On suppose qu'il existe un point $x_1 \in B_{g_k}(0_k, D)$ tel que $\mu_n^k(x_1) > 1 - 1/n$. Il existe un point $x_0 \in U_k$ tel que $d_g(x_0, x_1) < \delta$. D'après le lemme 3.13, $\mu_n^k(x_0) < 1/n + o(k) \leq 1/n + \delta$ puisque que μ_n^k converge uniformément vers $1/n$ sur U_k . On peut considérer x_0 et x_1 comme des points de \tilde{N} situés dans un même domaine fondamental et considérer l'application équivariante \tilde{F}_k de \tilde{N} dans H^n . Notons x_2 le premier point de la g_k géodésique minimisante α joignant x_0 à x_1 qui vérifie $\mu_n^k(x_2) = 1 - 1/n$. On peut supposer que l'arc de géodésique $[x_0 x_2]$ n'est pas réduit à un point, en prenant k suffisamment grand.

On a pour tout point $x \in \alpha$, l'inégalité

$$\frac{\sqrt{\mu_j^k(x)}}{1 - \mu_j^k(x)} \leq n$$

d'où $\|d\pi\|_{g_0} \leq 2n$ sur $\Phi_k \circ \alpha$. La minoration $\|d_x \Phi_k\|_{L^2}^2 \leq \frac{h_0^2}{4}$ (cf. lemme 3.7) et le théorème des accroissements finis impliquent alors

$$d_{g_0}(\tilde{F}_k(x_0)m\tilde{F}_k(x_2)) \leq nh_0\delta.$$

Soient maintenant σ la géodésique g_0 -minimisante joignant $\tilde{F}_k(x_0)$ à $\tilde{F}_k(x_2)$ et Y un champ de vecteur, unitaire, parallèle le long de σ . Posons $Y_0 = Y_{\tilde{F}_k(x_0)}$ et $Y_2 = Y_{\tilde{F}_k(x_2)}$. On estime la quantité

$$\begin{aligned} & |h_x^k(Y_2, Y_2) - h_x^k(Y_0, Y_0)| \\ &= \left| \int_{\partial H^n} (d\beta_{(\tilde{F}_k(x_2), \theta)} Y_2)^2 (\Phi_k^2(x_2, \theta) - \Phi_k^2(x_0, \theta)) \right. \\ & \quad \left. + [(d\beta_{(\tilde{F}_k(x_2), \theta)} Y_2)^2 - (d\beta_{(\tilde{F}_k(x_0), \theta)} Y_0)^2] \Phi_k^2(x_0, \theta) d\theta \right|. \end{aligned}$$

On majore la première partie de l'intégrale en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\|d\beta\|_{g_0} = 1$. Pour la deuxième partie, on utilise le théorème des accroissements finis et le calcul de $Dd\beta$ (cf. [BCG]) pour majorer la quantité $|d\beta_{(\tilde{F}_k(x_2), \theta)} \cdot Y_2 - d\beta_{(\tilde{F}_k(x_0), \theta)} \cdot Y_0|$ par $2d_{g_0}(\tilde{F}_k(x_0), \tilde{F}_k(x_2))$.

On obtient $|h_x^k(Y_2, Y_2) - h_x^k(Y_0, Y_0)| \leq (8n + 1)h_0\delta$, et finalement

$$\mu_n^k(x_2) \leq 1/n + \delta + (8n + 1)h_0\delta = 1/n + ((8n + 1)h_0 + 1)\delta.$$

En choisissant $\delta < \frac{n-2}{n((8n+1)h_0+1)}$, on trouve $\mu_n^k(x_2) < 1/n + (n-2)/n = 1 - 1/n$ ce que est contradictoire avec le choix de x_2 . \square

On en déduit

Corollaire 3.16. *Pour tout réel $D > 0$, il existe un entier K_D tel que*

$$\|d_x F_k\|_{g_k, g_0} \leq nh_0$$

pour tout entier $k \geq K_D$, tout point $x \in B_k(0_k, D)$.

Preuve. D'après le lemme précédent, pour tout entier $k > k_D$, pour tout point $x \in B_{g_k}(0_k, D)$, on a $\mu_n^k(x) \leq 1 - 1/n$ pour tout $j = 1, \dots, n$. Donc pour tout entier $k > K_D$, pour tout vecteur g_k -unitaire u de $T_x \tilde{N}$,

$$\|d_x \tilde{F}_k, u\|_{g_0} = \|d\pi \circ d_x \Phi_k \cdot u\|_{g_0} \leq \|d\pi\| \|d_x \Phi_k \cdot u\|_{g_0}.$$

On conclut avec les majorations

$$\|d\pi\| \leq 2 \frac{\sqrt{1 - 1/n}}{1 - (1 - 1/n)} \leq 2n$$

et

$$\|d_x \Phi_k \cdot u\|_{L^2} \leq \frac{h_0}{2}.$$

\square

4. L'application contractante $h : X \rightarrow M$

4.1 Construction de l'application $h : X \rightarrow M$

Rappelons nos hypothèses: étant donnés deux variétés différentielles M et N , fermées, connexes, orientées de dimension $n \geq 3$, il existe une application $f : N \rightarrow M$ de degré $p \geq 0$ telle que $\text{Minvol}(N) = p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$, où g_0 est une métrique riemannienne à courbure sectionnelle -1 sur M .

Les chapitre 1 et 2 permettent de construire une suite de métriques riemanniennes g_k sur N à courbure sectionnelle $|K(g_k)| \leq 1$ et telles que $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}_k(N) = p \cdot \text{vol}_{g_0}(M)$, ayant les propriétés suivantes

1. $(N, g_k) = N_k$ converge au sens de Gromov (2.1) vers une variété riemannienne (X, g) .
2. Il existe une suite d'applications $F_k : N \rightarrow M$, homotopes à f , vérifiant la proposition 3.3.

Pour tout $D > 0$, la convergence pointée des variétés N_k vers X permet de définir des applications

$$h_k^D = F_k \circ f_k^D : B_g(0, D) \rightarrow (M, g_0).$$

Ces applications sont définies pour tout entier $k > K_D$ et ont la propriété de cohérence suivante: $\forall D' > D, \forall k > K_{D'}, h_{k|B_g(0, D)}^{D'} = h_k^D$.

Lemme 4.1. *Pour tout $D > 0$, la suite de fonctions*

$$h_k^D : B_g(0, D) \rightarrow (M, g_0)$$

est équicontinue.

Preuve. Cela découle directement des majorations obtenues dans la proposition 2.1 pour $\|df_k\|_{g, g_k}$ et dans l'inégalité (12) de la proposition 3.3 pour $\|dF_k(x)\|_{g_k, g_0}$ sur toute boule compacte $B_g(0, D)$. \square

Puisque pour $D' > D$, et k suffisamment grand, $h_k^{D'}$ et h_k^D coïncident sur $B_g(0, D)$, le théorème d'Ascoli et un procédé diagonal permettent de montrer.

Corollaire 4.2. *Il existe une sous suite $h_k^{D_k} : B_g(0, D_k) \rightarrow M$, avec $\lim_{k \rightarrow \infty} D_k = +\infty$, qui converge uniformément sur tout compact vers une application lipschitzienne $h : X \rightarrow M$.*

4.2. L'application h est contractante au sens large

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 4.3. *L'application $h : (X, g) \longrightarrow (M, g_0)$ donnée par le corollaire 4.2 est contractante (au sens large).*

Preuve. Soient deux points $x, x' \in X$. Il s'agit de montrer que

$$d_{g_0}(h(x), h(x')) \leq d_g(x, x'). \quad (19)$$

On choisit un réel D assez pour que $x, x' \in B_g(0, D)$.

Observons que le rayon d'injectivité est minoré sur $B_g(0, D)$ par un réel $r > 0$. Il suffit d'établir l'inégalité (19) pour tous points x, x' de $B_g(0, D)$ tels que $d_g(x, x') < r/2$. Le cas général se traite alors comme suit.

Soit γ une géodésique minimale de x à x' , et une suite de point $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m = x'$ sur γ tels que $d_g(x_i, x_{i+1}) \leq r/2$. Alors,

$$\begin{aligned} d_{g_0}(h(x), h(x')) &\leq \sum_{i=0}^{m-1} d_{g_0}(h(x_i), h(x_{i+1})) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-1} d_g(x_i, x_{i+1}) \\ &= d_g(x, x'). \end{aligned}$$

On suppose donc dans la suite de la preuve que $d_g(x, x') \leq r/2$.

Fixons quelques notations. On pose $h_k = h_k^D$, $m_k = h_k(x)$, $m'_k = h_k(x')$ et $U'_k = f_k^{-1}(U_k) \subset B_g(0, D)$. Sans perte de temps, les propositions 2.1 et 3.3 permettent de supposer que

1. $\|dh_k\| \leq 1 + o(k)$ sur U'_k
2. $\|dh_k\| \leq n^2$ sur $B_g(0, D)$ pour tout entier k grand
3. $|\text{Jac } h_k| \geq 1 - o(k)$ sur U'_k
4. $\text{vol}_g(U'_k) \geq \text{vol}_g(B_g(0, D)) - o(k)$

La preuve de la proposition repose sur le résultat suivant.

Lemme 4.4. *Soit un réel $0 < \delta \ll d_g(x, x')$ et γ une géodésique minimale de x à x' . Il existe un entier $K_{\delta, D}$ tel que pour tout entier $k > K_{\delta, D}$, il existe un point x_k proche de x' et une géodésique minimale $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow B_g(0, D)$ telle que*

1. $\gamma(0) = x$, $\gamma_k(1) = x_k$, $d_g(x_k, x') \leq \delta$
2. $\ell(\gamma_k \cap {}^c U'_k) \leq \delta$.

Autrement dit, le fait que U'_k soit de volume convergeant vers le volume plein dans $B_g(0, D)$ implique qu'il existe une géodésique γ_k proche de γ telle que γ_k rencontre U'_k sur une longueur $\geq \ell(\gamma_k) - \delta$.

Terminons la preuve de la proposition en supposant le lemme montré. Soit $0 < \delta \ll d_g(x, x')$ et un entier $K_{\delta, D}$ donné par le lemme.

$$\begin{aligned} d_{g_0}(h(x), h(x')) &= \lim_{k \rightarrow \infty} d_{g_0}(h_k(x), h_k(x')) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} (d_{g_0}(h_k(x), h_k(x_k)) + d_{g_0}(h_k(x_k), h_k(x'))) \end{aligned}$$

La propriété 2 de $\|dh_k\|$ et le lemme impliquent que

$$d_{g_0}(h_k(x_k), h_k(x')) \leq n^2 \delta. \quad (20)$$

D'autre part, pour $k > K_{\delta, D}$,

$$\begin{aligned} d_{g_0}(h_k(x), h_k(x_k)) &\leq \ell(h_k \circ \gamma_k) \\ &\leq \int_{\gamma_k \cap U'_k} \|dh_k \cdot \dot{\gamma}_k(t)\| dt + \int_{\gamma_k \cap {}^c U'_k} \|dh_k \cdot \dot{\gamma}_k(t)\| dt \\ &\leq (1 + o(k)) \cdot \ell(\gamma_k \cap U'_k) + n^2 \ell(\gamma_k \cap {}^c U'_k) \\ &\leq (1 + o(k)) \cdot d_g(x', x_k) + n^2 \delta \\ &\leq (1 + o(k)) \cdot d_g(x, x') + (1 + o(k) + n^2) \delta \end{aligned} \quad (21)$$

d'où (20) et (21) et un passage à la limite impliquent

$$d_{g_0}(h(x), h(x')) \leq d_g(x, x') + (1 + 2n^2) \delta.$$

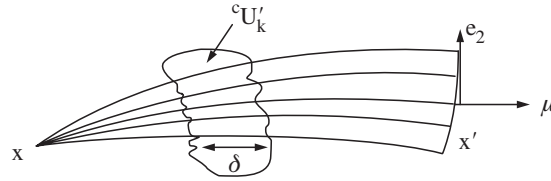
Comme δ est arbitraire, la proposition est prouvée, modulo le lemme.

Preuve du lemme 4.4. L'hypothèse cruciale est évidemment que $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}_g({}^c U'_k) = 0$. On raisonne par l'absurde et on cherche à la contredire.

On définit une δ -variation géodésique de γ comme suit. Le vecteur vitesse $u = \dot{\gamma}(1)$ de γ au point x' est complété en une base orthogonale (u, e_2, \dots, e_n) de $T_{x'} X$, les e_i étant normés. A chaque $(n-1)$ -uplet $t = (t_2, \dots, t_n) \in [-\delta, \delta]^{n-1}$, on associe le point $x^t = \exp_{x'}(t_2 e_2 + \dots + t_n e_n)$. Les géodésiques γ^t joignant x à x^t sont les δ -variations géodésiques de γ .

Supposons qu'il existe une sous-suite $\{k'\}$ d'entiers pour laquelle toute δ -variation géodésique de θ rencontre ${}^c U'_{k'}$ sur un ensemble de longueur $> \delta$. L'hypothèse est donc que

$$\ell(\gamma^t \cap {}^c U'_{k'}) > \delta$$



pour tout entier k' dans la sous-suite et tout $(n-1)$ -uplet $t \in [-\delta, \delta]^{n-1}$.

Les théorèmes de comparaison sont valables dans l'espace (X, g) . En particulier, le théorème de comparaison angulaire de Topogonov appliqué avec $K \geq -1$ implique que l'angle inférieur θ du cône géodésique est minoré par un $\theta_{\delta, D} > 0$ qui ne dépend que de δ et D . En comparant maintenant le cône géodésique avec son image dans $(N, g_{k'})$ par les difféomorphismes $f_{k'}$, le théorème de comparaison volumique appliqué avec $K \geq 1$ montre que

$$\text{vol}_g({}^cU'_k) \geq v(\delta, D) > 0$$

d'où la contradiction.

5. Vers l'isométrie locale

Le but de ce chapitre est de montrer la proposition suivante:

Proposition 5.1. *L'application $h : (X, g) \rightarrow (M, g_0)$ définie dans les chapitres précédents est une isométrie locale de classe C^1 .*

La démonstration comporte plusieurs étapes. On sait que h est contractante et que pour tout ensemble mesurable A de X , $\text{vol}_{g_0}(h(A)) \leq \text{vol}_g(A)$. On montre dans un premier temps que $\text{vol}_{g_0}(h(A)) \geq \frac{\text{vol}_g(A)}{p}$. On en déduit alors que tout point de M a au plus p antécédents. On se sert de ce résultat pour construire en chaque point $m = h(x)$ de $h(X)$ une boule ouverte $B_{g_0}(m, \eta')$ au dessus de laquelle la restriction de l'application h à une boule ouverte $B_g(x, \eta)$ est de degré > 0 et vérifie $\text{vol}_g(h|^{-1}(B_{g_0}(m, \eta'))) = (\deg h|) \cdot \text{vol}_{g_0}(B(m, \eta'))$. On applique alors la proposition de rigidité suivante:

Proposition 5.2 (de rigidité). *Soient U un ouvert de $B_g(0, D) \subset X$, V un ouvert de M et une application $F : U \rightarrow V$ contractante, propre, de degré $d \geq 1$. On suppose de plus que $\text{vol}_g(U) = d \cdot \text{vol}_{g_0}(V)$. Alors F est une isométrie locale de classe C^1 .*

On repousse la preuve de cette proposition à la fin du chapitre. On commence par montrer la proposition 5.1.

5.1. Preuve de l'isométrie locale

On commence par prouver:

Lemme 5.1.1. *Pour tout ensemble mesurable A de X , on a*

$$\text{vol}_{g_0}(hA) \geq \frac{\text{vol}_g(A)}{p}.$$

Preuve. Par construction h est limite uniforme sur les compacts d'applications h_k modifiant peu les volumes. On peut supposer que A est compact, le cas général se ramenant à une exhaustion de compacts. Soit $D > 0$ tel que $A \subset V_g(0, D)$.

Rappelons quelques notations. On note $W_k = \{m \in M, \text{card}(F_k^{-1}(m)) = p\}$ et $U_k = \{x \in N, |\text{Jac } F_k(x)| \geq 1 - 1/k\}$. Alors soit $U'_k = (f_k^D)^{-1}(U_k)$ dans $G_g(0, D)$ et $W'_k = (h_k^D)^{-1}(W_k)$ dans $B_g(0, D)$. Observons que $|\text{Jac } h_k| \geq 1 - o(k)$ sur U'_k et $\text{card}(h_k^{-1}(m) \cap W'_k) \geq p$ sur W_k . Les volumes des ensembles U'_k et W'_k dans $B_g(0, D)$ convergent vers le volume total de la boule.

La fonction indicatrice du $1/k$ -voisinage $B_{\frac{1}{k}}(h_k(A))$ converge vers la fonction indicatrice de $h(A)$. Par convergence dominée, on en déduit

$$\text{vol}_{g_0}(h(A)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}_{g_0}(B_{\frac{1}{k}}h_k(A)) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} (h_k(A)). \tag{22}$$

On a les inégalités

$$\begin{aligned} \text{vol}_{g_0}(h_k(A)) &= \int_{h_k(A)} 1\omega_0 \\ &\geq \int_{h_k(A) \cap W_k} \frac{\text{card}(h_k^{-1}(m))}{p} \omega_0(m) \end{aligned}$$

d'où avec la formule de l'aire

$$\begin{aligned} \text{vol}_{g_0}(h_k(A)) &\geq 1/p \int_{J_{k_k^{-1}}(h_k(A) \cap W_k)} |\text{Jac } h_k| \omega_g \\ &\geq 1/p \int_{J_{k_k^{-1}}(h_k(A) \cap W_k) \cap U'_k} |\text{Jac } h_k| \omega_g \\ &\geq 1/p \int_{A \cap W'_k \cap U'_k} (1 - o(k)) \omega_g \\ &\geq \frac{1 - o(k)}{p} \text{vol}_g(A \cap W'_k \cap U'_k). \end{aligned} \tag{23}$$

Par passage à la limite et utilisant l'inégalité (22), on obtient

$$\text{vol}_{g_0}(h(A)) \geq \frac{\text{vol}_g(A)}{p} \quad \square \tag{24}$$

On peut maintenant démontrer un premier résultat sur le degré absolu de h .

Lemme 5.1.2. *Le degré absolu de h vérifie*

$$\text{card}(h^{-1}(m)) \geq p$$

pour tout point $m \in M$.

Preuve. Pour tout mesurable $A \subset B_g(0, D)$, le lemme 5.1.1 et le fait que h soit contractante impliquent l'encadrement $\text{vol}(A) \geq \text{vol}(h(A)) \geq 1/p \text{vol}(A)$. On applique cet encadrement à l'image réciproque d'un ensemble de M pour majorer le nombre d'antécédents.

Supposons qu'un point $m \in M$ ait au moins $p + 1$ antécédents x_1, \dots, x_{p+1} dans $B_g(0, D)$. Choisissons $\eta > 0$ suffisamment petit pour que les $B_g(x_i, \eta)$ soient dans $B_g(0, D)$ et disjoints deux à deux. Comme h est contractante, $h(B_g(x_i, \eta)) \subset B_{g_0}(m, \eta)$ d'où $\bigcup_{i=1}^{p+1} B_g(x_i, \eta) \subset h^{-1}(B_{g_0}(m, \eta))$. Or le lemme 5.1.1 montre que $\text{vol}_g(h^{-1}(B_{g_0}(m, \eta))) \leq p \cdot \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta))$. On en déduit que

$$\bigcup_{i=1}^{p+1} \text{vol}_g(B_g(x_i, \eta)) \leq \text{vol}_g\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} B_g(x_i, \eta)\right) \leq p \cdot \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta)). \quad (25)$$

Le volume des boules $B_g(x, \eta) \subset B_g(0, D)$ est approximé par le volume des boules de même rayon dans $B_{g_k}(0_k, D) \subset (N, g_k)$. Le théorème de comparaison volumique de Gunther (cf. [GHL]) minore ce volume par le volume sphérique. Il existe des constantes $c_1, c_2, c_3, \varepsilon > 0$ telles que pour tout réel $0 < \eta < \varepsilon$, toute boule $B_g(x, \eta)$ dans $B_g(0, D)$, et toute boule $B_{g_0}(m, \eta)$ dans (M, g_0) ,

$$v_n \eta^n (1 - c_1 \eta^2) \leq \text{vol}_g(B_g(x, \eta)) \quad (26)$$

$$v_n \eta^n (1 - c_3 \eta^2) \leq \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta)) \leq v_n \eta^n (1 + c_2 \eta^2) \quad (27)$$

où v_n est le volume euclidien de la boule unité. L'inégalité (25) et les approximations (26) et (27) impliquent alors

$$(p + 1)v_n \eta^n (1 - c_1 \eta^2) \leq p \cdot v_n \eta^n (1 + c_2 \eta^2) \quad (28)$$

et on obtient une contradiction pour η suffisamment petit. □

On montre maintenant que h et h_k ont localement le même degré et on en déduit que h conserve localement les volumes.

Soit donc x un point de $B_g(0, D)$. D'après le lemme précédent, il existe un réel $\eta > 0$ suffisamment petit tel que x soit le seul antécédent de $m = h(x)$ dans $B_g(x, \eta)$. Notons h_B la restriction de h à $B_g(x, \eta)$. Elle est différentiable presque partout et le degré de h_B est bien défini, pour presque tout $m' \in B_g(m, \eta)$, par

$$\text{deg } h_B(m') = \sum_{y \in h^{-1}(m') \cap B} \text{sign Jac } h(y).$$

Le degré ainsi défini est constant (presque partout) sur chaque composante connexe de $B_{g_0}(m, \eta) \setminus h(\partial B_g(x, \eta))$, (cf. [Fed, 4.1.26] et [BCG]). On appelle C la composante connexe qui contient m . Considérons maintenant la suite d'applications restreintes, pour k assez grand.

$$h_{k|B} : B_g(x, \eta) \longrightarrow B_{g_0}(m, 2\eta)$$

qui converge uniformément vers h sur $B_g(x, \eta)$. Notons C_k la composante connexe de $B_{g_0}(m, 2\eta) \setminus h_k(\partial B_g(x, \eta))$ qui contient m . Avec ces conventions, on a le lemme suivant:

Lemme 5.1.3. *Soit un point $x \in B_g(0, D)$ et soit $m = h(x) \in M$. Il existe un réel $0 < \eta' < \eta$ tel que $\deg h_B = \deg h_{k|B} = d > 0$ sur $B_{g_0}(m, \eta') \subset C \cap C_k$, pour tout entier k suffisamment grand.*

Preuve. Par hypothèse, $m \notin h(\partial B_g(x, \eta))$ qui est compact, donc il existe un réel $\eta' > 0$ tel que la boule $B_{g_0}(m, \eta') \subset C$. Puisque $fr(C) \subset h(\partial B_g(x, \eta))$, on voit qu'on peut choisir η' de sorte que $d(B_{g_0}(m, \eta'), fr(C)) > \eta'$. On aura alors aussi $d(B_{g_0}(m, \eta), fr(C_k)) > \eta'$ pour k assez grand. On considère ensuite la projection radiale $q : B_{g_0}(m, 2\eta) \longrightarrow \partial B_{g_0}(m, \eta')$ qui est l'identité sur $B_{g_0}(m, \eta')$. Soient les applications composées

$$\left\{ \begin{array}{l} q \circ h_B : B_g(x, \eta) \longrightarrow B_{g_0}(m, \eta') \\ q \circ h_{k|B} : B_g(x, \eta) \longrightarrow B_{g_0}(m, \eta') \end{array} \right\}.$$

D'après le choix de η' , on a $q \circ h(\partial B_g(x, \eta)) \subset \partial B_{g_0}(m, \eta')$ et $q \circ h_k(\partial B_g(x, \eta)) \subset \partial B_{g_0}(m, \eta')$, ce qui signifie que $q \circ h_B$ et $q \circ h_{k|B}$ sont des applications propres. On montre qu'elles sont proprement homotopes comme suit. On définit l'homotopie géodésique G_k entre $q \circ h_B$ et $q \circ h_{k|B}$ par

$$G_k : B_g(x, \eta) \times [0, 1] \longrightarrow M$$

$$G_k(u, s) = q \circ \alpha_u(s)$$

où α_u est le segment géodésique de $h(u)$ à $h_k(u)$ contenu dans $B_{g_0}(m, 2\eta)$. Lorsque k est assez grand, pour tout $u \in \partial B_g(x, \eta)$ ce segment est inclus dans ${}^c B_{g_0}(m, \eta')$ car $h(u) \subset {}^c B_{g_0}(m, 2\eta')$ et h_k converge uniformément vers h sur $B_g(0, D)$. L'homotopie G_k est donc propre. Alors $q \circ h_B$ et $q \circ h_{k|B}$ sont des applications lipschitziennes de même degré. On a donc d'une part $(\deg h_B) = (\deg q \circ h_B)$ sur $B_{g_0}(m, \eta')$ puisque $\forall m' \in B_{g_0}(m, \eta')$, $h_B^{-1}(m') = (q \circ h_B)^{-1}(m')$ et $h_B = q \circ h_B$ au voisinage de $h_B^{-1}(m')$. D'autre part, pour les mêmes raisons, on a $(\deg h_{k|B}) = (\deg q \circ h_{k|B})$ sur $B_{g_0}(m, \eta')$ d'où $\deg h_B = \deg h_{k|B}$ sur $B_{g_0}(m, \eta')$.

On montre maintenant que ce degré est strictement positif. L'inégalité (23) p. 470, appliquée à l'ensemble $A = B_g(x, \eta')$ montre que

$$\text{vol}_{g_0}(h_k(B_g(x, \eta') \cap W'_k \cap U'_k)) \geq \frac{1 - o(k)}{p} \text{vol}_g(B_g(x, \eta) \cap W'_k \cap U'_k)$$

donc est non nul $> \delta$ pour tout k assez grand. Or $\text{Jac } h_k > 0$ presque partout sur les antécédents de $h_k(B_g(x, \eta) \cap W'_k \cap U'_k)$ puisque $h_k = F_k \circ f_k$ et $\text{Jac } F_k > 0$ d'après 3.3 (7). Donc $\text{Jac } h_{k|B} > 0$ presque partout sur les antécédents de $h_k(B_g(x, \eta') \cap W'_k \cap U'_k)$ inclus dans $B_g(x, \eta)$. D'où $h_{k|B}$ est de degré strictement positif sur un ensemble de mesure non nulle dans $B_{g_0}(m, \eta')$, pour tout k grand. Comme le degré de $h_{k|B}$ est constant sur $B_{g_0}(m, \eta')$, on a bien montré que $\text{deg } h_{k|B} > 0$ sur $B_{g_0}(m, \eta')$, pour tout entier k grand. D'où $\text{deg } h_B > 0$ sur $B_{g_0}(m, \eta')$. \square

Lemme 5.1.4. *Avec les notations du lemme précédent, on a*

$$\text{vol}_g(h_B^{-1}(B_{g_0}(m, \eta'))) = d \cdot \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta')).$$

Preuve. On établit l'inégalité dans les deux sens.

On a une première inégalité

$$\begin{aligned} \text{vol}_g(h_B^{-1}(B_{g_0}(m, \eta'))) &\geq \int_{h_B^{-1}(B_{g_0}(m, \eta'))} |\text{Jac } h| \omega_g \\ &= \int_{B_{g_0}(m, \eta')} \text{card}(h_B^{-1}(t)) \omega_0(t) \\ &\geq d \cdot \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta')). \end{aligned}$$

Pour montrer l'inégalité inverse, on approxime h par les applications h_k et on utilise les propriétés de $\text{Jac } h_k$. Avec les notations rappelées précédemment, on a les inégalités

$$\begin{aligned} d \cdot \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta')) &\geq d \cdot \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta') \cap W_k) \\ &= \int_{B_{g_0}(m, \eta') \cap W_k} \text{card}(h_{k|B}^{-1}(t)) \omega_0(t) \\ &= \int_{h_{k|B}^{-1}(B_{g_0}(m, \eta')) \cap W'_k} |\text{Jac } h_k| \omega_g \\ &\geq \int_{h_{k|B}^{-1}(B_{g_0}(m, \eta')) \cap W'_k \cap U'_k} |\text{Jac } h_k| \omega_g \\ &\geq (1 - o(k)) \text{vol}_g(h_{k|B}^{-1}(B_{g_0}(m, \eta')) \cap W'_k \cap U'_k). \end{aligned} \tag{29}$$

D'autre part

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \text{vol}_g(h_{k|B}^{-1}(B_{g_0}(m, \eta'))) \geq \text{vol}_g(h_B^{-1}(B_{g_0}(m, \eta'))). \tag{30}$$

En effet, fixons un réel $\varepsilon > 0$. Pour tout entier k suffisamment grand, on a

$$h_B^{-1}(B_{g_0}(m, \eta' - \varepsilon)) \subset h_{k|B}^{-1}(B_{g_0}(m, \eta'))$$

d'où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}_g(h_{k|B}^{-1}(B_{g_0}(m, \eta'))) \geq \text{vol}_g(h_B^{-1}(B_{g_0}(m, \eta' - \varepsilon))).$$

Comme la constante ε est arbitraire, l'affirmation (30) est prouvée. En combinant (29) et (30), on obtient

$$d \cdot \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta')) \geq \text{vol}_g(h_B^{-1}(B_{g_0}(m, \eta')))$$

ce qui termine la preuve du lemme 5.1.4 □

Fin de la preuve de la proposition 5.1. Pour $m \in h(X)$, soit $m = h(x)$, les lemmes 5.1.3, 5.1.4 et la proposition de rigidité 5.2 montrent que $h : h_B^{-1}(B_{g_0}(m, \eta')) \rightarrow B_{g_0}(m, \eta')$ est une isométrie locale de classe C^1 . Comme $B_g(x, \eta') \subset h^{-1}(B_{g_0}(m, \eta'))$, cela montre que h est une isométrie locale de classe C^1 en tout point de X . □

5.2. Preuve de la proposition de rigidité

On rappelle l'énoncé de cette proposition: *Soient U un ouvert de $B_g(0, D) \subset X$, V un ouvert de M et une application $F : U \rightarrow V$ contractante, propre, de degré $d \geq 1$. On suppose de plus que $\text{vol}_g(U) = d \cdot \text{vol}_{g_0}(V)$. Alors F est une isométrie locale.*

La preuve s'inspire de l'appendice C de [BCG]. Elle comporte plusieurs étapes. On montre d'abord (cf. 5.2.1) que pour presque tout $m \in V$, le nombre d'antécédents est égal à d et que pour tout $m \in V$, il est inférieur ou égal à d . On montre ensuite que pour les points $m \in V$ ayant exactement d antécédents, il existe un voisinage de chaque antécédent sur lequel F est une isométrie locale (cf. 5.2.2). Pour cela on construit des voisinages dans V sur lequel F est bijective, puis on montre que les applications réciproques sont lipschitziennes et finalement que F est une isométrie locale sur ces voisinages. Dans la dernière partie, on montre que l'ensemble des points de ramification $K = \{m \in V, \text{card}(F^{-1}(m)) < d\}$ est vide, c'est à dire que tous les points ont exactement d antécédents. La métrique g étant seulement $C^{1+\alpha}$, il est alors nécessaire d'utiliser les propriétés de la métrique g rappelées dans la proposition 2.2, notamment l'unicité locale du prolongement des géodésiques.

On établit les premiers résultats sur le degré absolu en utilisant la formule de l'aire et les arguments du lemme 5.1.2.

Lemme 5.2.1.

1. Pour presque tout $m \in V$, $\text{card}(F^{-1}(m)) = d$ et pour presque tout $x \in U$, $d_x F$ est une isométrie positive de $T_x X$ sur $T_{F(x)} M$.
2. pour tout $m \in V$, $\text{card}(F^{-1}(m)) \leq d$.

Preuve. 1. Soit $\{e_i\}_{i=1}^n$ une base g -orthonormée de $T_x X$ on a

$$|\text{Jac } F(x)| = |\omega_0(d_x F \cdot e_1, \dots, d_x F \cdot e_n)| \leq \|d_x F \cdot e_1\|_{g_0} \dots \|d_x F \cdot e_n\|_{g_0} \leq 1.$$

Le corollaire 4.1.26 de Federer montre que

$$\text{vol}_g(U) \geq \int_U \text{Jac } F(x) \omega_g(x) = \int_V \text{deg } F(m) \omega_0(m) = d \cdot \text{vol}_{g_0}(V)$$

et l'égalité $\text{vol}_g(U) = d \cdot \text{vol}_{g_0}(V)$ entraîne $\text{Jac } F(x) = 1$ presque partout d'où $\text{card}(F^{-1}(m)) = d$ presque partout.

L'égalité $1 = \|\text{Jac } F(x)\| \leq \|d_x F \cdot e_1\|_{g_0} \dots \|d_x F \cdot e_n\|_{g_0} \leq 1$ vraie presque partout implique que $\|d_x F \cdot e_i\|_{g_0} = 1$ presque partout et donc que $d_x F$ est presque partout une isométrie.

Remarque. Si F était de classe C^1 , la continuité de dF impliquerait que $d_x F$ est une isométrie en tout point, et on pourrait démontrer la proposition en utilisant le théorème d'inversion locale.

On montre la partie 2, par l'absurde. Soient x_1, \dots, x_{d+1} , $d+1$ antécédents de m dans U . Choisissons un réel $\eta > 0$ suffisamment petit pour que les boules $B_g(x_i, \eta)$ soient deux à deux disjointes dans U . Comme F est contractante, $F(B_g(x_i, \eta)) \subset B_{g_0}(m, \eta)$ d'où $\bigcup_{i=1}^{d+1} B_g(x_i, \eta) \subset F^{-1}(B_{g_0}(m, \eta))$. La partie 1 du lemme permet de calculer

$$\begin{aligned} \text{vol}_g(F^{-1}(B_{g_0}(m, \eta))) &= \int_{F^{-1}(B_{g_0}(m, \eta))} \text{Jac } F(x) \omega_g(x) \\ &= \int_{B_{g_0}(m, \eta)} \text{deg } F(t) \omega_0(t) \\ &= d \cdot \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta)). \end{aligned}$$

Donc

$$\text{vol}_g\left(\bigcup_{i=1}^{d+1} B_g(x_i, \eta)\right) \leq d \cdot \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta))$$

et

$$\sum_{i=1}^{d+1} \text{vol}_g(B_g(x_i, \eta)) \leq d \cdot \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta)).$$

Le même argument qu'en (28) montre que

$$(d+1)v_n \eta^n (1 - c_1 \eta^2) \leq d \cdot v_n \eta^n (1 + c_2 \eta^2)$$

et on obtient une contradiction en prenant η suffisamment petit. \square

Remarque. Si $d = 1$, cela suffit pour conclure que F est bijective. En effet, la propriété 2 prouve dans ce cas que F est injective et la surjectivité vient de la

non trivialité de degré de F . Si $d > 1$ alors $\text{card}(F^{-1}(m))$ est presque partout égal à d et partout inférieur mais il peut exister des points où $\text{card}(F^{-1}(m))$ est strictement plus petit que d (mais non nul).

Proposition 5.2.2. *Soit $m \in V$ tel que $F^{-1}(m) = \{x_1, \dots, x_d\}$. Alors*

1. *il existe un voisinage W de m et des voisinages U_i des x_i deux à deux disjoints tels que F soit bijective de U_i sur W .*
2. *Pour chaque $i = 1, \dots, d$ l'application réciproque de F_i est localement 2-lipschitzienne de W dans U_i .*
3. *Pour chaque $i = 1, \dots, d$ l'application F_i est une isométrie locale.*

On commence par montrer l'affirmation suivante.

Affirmation 5.2.3. *Soit x un point de U , alors pour toute boule $B_g(x, \eta)$ de rayon assez petit, la restriction de F à $B_g(x, \eta)$ est surjective sur un voisinage de $m = F(x)$.*

Preuve de l'affirmation. On choisit un réel $\eta > 0$ tel que x soit le seul antécédent de m par F dans $B_g(x, \eta)$. On a $F(B_g(x, \eta)) \subset B_{g_0}(m, \eta)$. Notons F_B la restriction de F à $B_g(x, \eta)$. La théorie du degré implique que sur les composantes connexes de $B_{g_0}(m, \eta) \setminus F(\partial B_g(x, \eta))$, le degré de F_B est presque partout constant et sa calculé pour presque tout point comme suit

$$(\deg F_B)(t) = \sum_{y \in B_g(x, \eta) \cap F^{-1}(t)} \text{sign Jac } F(y).$$

Soit C la composante connexe de $B_{g_0}(m, \eta) \setminus F(\partial B_g(x, \eta))$ qui contient m . La composante C contient l'image d'un ouvert O par F_B . Cette image est de mesure non nulle car d'après 5.2.2. $\text{card}(F_B^{-1}(t)) \leq d$ sur V d'où

$$\begin{aligned} \text{vol}_g(F_B(O)) &\geq \int_{F_B(O)} \frac{\text{card}(F_B^{-1}(t))}{d} \omega_0(t) \\ &\geq \frac{1}{d} \int_O |\text{Jac } F_B(y)| \omega_g(y) \\ &= \frac{\text{vol}_g(O)}{d}. \end{aligned}$$

Le fait que $\text{Jac } F(Y) =$ presque partout implique que $\deg F_B > 0$ sur C . On en déduit que tout point de C a au moins un antécédent dans $B_g(x, \eta)$.

Preuve la proposition 5.2.2.

1. Considérons les boules $B_i = B_g(x_i, \eta) \subset U$, avec η suffisamment petit pour que ces boules soient deux à deux disjointes. Notons F_i la restriction de F

à $B_g(x_i, \eta)$. L'application F_i est de degré presque partout constant sur la composante connexe C_i de $B_{g_0}(m, \delta) \setminus F(\partial B_g(x_i, \delta))$ qui contient M . D'après l'affirmation 5.2.3, F_i est surjective sur C_i . Soit $W = B_{g_0}(m, \eta') \subset \bigcap_{i=1}^d C_i$. C'est une boule convexe contenant m , tel que tout point $m' \in W$ a au moins un antécédent dans chaque boule B_i . Comme $\text{card}(F^{-1}(m')) \leq d$, il y a exactement un antécédent dans chaque B_i . Donc $F^{-1}(W)$ est un ouvert $\subset \bigcup_{i=1}^d B_i$. On pose finalement $U_i = F^{-1}(W) \cap B_i$, alors $x_i \in U_i$ et F_i est une bijection de U_i sur W .

2. On note encore F_i la restriction de F de U_i dans W . Supposons que l'application réciproque $F_i^{-1} : W \rightarrow U_i$ ne soit pas localement 2-lipschitzienne. Quitte à restreindre W en W' (resp. U_i en U'_i) en préservant la bijectivité de F_i , on peut supposer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout point $m' \in W'$ (resp. $x' \in U'_i$), on ait $B_{g_0}(m, \varepsilon) \subset W$ (resp. $B_g(x', \varepsilon) \subset U_i$). Puisqu'on suppose que F_i^{-1} n'est pas localement 2-lipschitzienne, il existe deux points y, y' dans U'_i tels que $\eta = d_{g_0}(F_i(y), F_i(y')) < \varepsilon$ et $d_g(y, y') > 2\eta$. Soit m' le milieu du segment géodésique $[F_i(y), F_i(y')]$. Alors

$$(B_{g_0}(F_i(y), \eta) \cap B_{g_0}(F_i(y'), \eta)) \supset B_{g_0}(m', \eta/2).$$

D'où

$$\begin{aligned} & \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(F_i(y), \eta) \cup B_{g_0}(F_i(y'), \eta)) \\ & \leq \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(F_i(y), \eta)) + \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(F_i(y'), \eta)) \\ & \quad - \text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(F_i(y), \eta) \cap B_{g_0}(F_i(y'), \eta)) \\ & \leq v_n \eta^n (2(1 + c_2 \eta^2) - 1/2^n (1 - c_3 \eta^2/4)) \end{aligned}$$

où c_2 et c_3 sont les constantes introduites dans le lemme 5.1.2. Comme $B_g(y, \eta) \cup B_g(y', \eta) \subset U'_i$ et F_i est bijective sur U_i de jacobien presque partout égal à 1, la formule de l'aire montrent que:

$$\begin{aligned} \text{vol}_{g_0}(F_i(B_g(y, \eta) \cup B_g(y', \eta))) &= \text{vol}_g(B_g(y, \eta) \cup B_g(y', \eta)) \\ &\geq 2v_n \eta^n (1 - c_1 \eta^2). \end{aligned}$$

D'autre part, le fait que F soit contractante implique

$$F_i(B_g(y, \eta) \cup B_g(y', \eta)) \subset B_{g_0}(F_i(y), \eta) \cup B_{g_0}(F_i(y'), \eta).$$

D'où

$$2v_n \eta^n (1 - c_1 \eta^2) \leq v_n \eta^n (2(1 + c_2 \eta^2) - 1/2^n (1 - c_3 \eta^2/4))$$

et donc

$$1/2^n \leq 2c_2 \eta^2 + 2c_1 \eta^2 + 1/2^n c_3 \eta^2/4$$

et on a la contradiction en prenant η suffisamment petit.

3. L'application réciproque de F_i, F_i^{-1} , est localement lipschitzienne donc presque partout différentiable. Sa différentielle $d_x F_i$ est presque partout une isométrie positive sur un ensemble P de mesure pleine dans W . S'il existe une courbe γ dans W telle que l'intersection avec P est de mesure pleine, alors

$$\begin{aligned} \ell(F_i^{-1} \circ \gamma) &= \int_{[0, \ell(\gamma)]} \left\| dF_i^{-1}(\gamma(s)) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\|_g ds \\ &= \int_{[0, \ell(\gamma)]} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\|_{g_0} ds \\ &= \ell(\gamma). \end{aligned}$$

Affirmation 5.2.4. Soit un point $m \in V$, et un réel $0 < \eta < \text{inj}(m)$ tel que $B_{g_0}(m, \eta) \subset V$. Alors presque tout géodésique de $B_{g_0}(m, \eta)$ issue de m rencontre P et un ensemble de mesure pleine.

Preuve de l'affirmation. Soit un vecteur unitaire $w \in U_m M$. On définit la géodésique $\gamma_w(s) = \exp_m sw$. L'application $\phi :]0, \eta[\times U_m M \rightarrow B_{g_0}(m, \eta) \setminus \{m\}$ définie par $\phi(s, w) = \exp_m sw$ est un difféomorphisme, et une isométrie si on munit $]0, \eta[\times U_m M$ de la métrique pull-back. D'après le théorème de Fubini,

$$\text{vol}(\phi^{-1}(B_{g_0}(m, \eta) \setminus P)) = \int \text{mes} (]0, \eta[\cap \gamma_w^{-1}(B_{g_0}(m, \eta) \setminus P)) dw.$$

Or $\text{vol}_{g_0}(B_{g_0}(m, \eta) \setminus P) = 0$ donc $\text{mes} (]0, \eta[\cap \gamma_w^{-1}(B_{g_0}(m, \eta) \setminus P)) = 0$ presque partout, d'où P est de mesure pleine sur $\gamma_w \cap B_{g_0}(m, \eta)$, pour presque tout vecteur w dans $U_m M$. \square

Fin de la preuve de la proposition 5.2.2. Soient maintenant deux points m_1, m_2 proches dans W . D'après l'affirmation, il existe un point m arbitrairement proche de m_2 tel que la géodésique γ joignant m_1 à m rencontre P en un ensemble de mesure pleine sur γ . On a donc

$$d_g(F_i^{-1}(m_1), F_i^{-1}(m)) \leq \ell(F_i^{-1} \circ \gamma) = \ell(\gamma) = d_{g_0}(m_1, m)$$

d'autre part

$$d_{g_0}(m_1, m) = d_{g_0}(F_i \circ F_i^{-1}(m_1), F_i \circ F_i^{-1}(m)) \leq d_g(F_i^{-1}(m_1), F_i^{-1}(m))$$

d'où l'égalité. Comme m est arbitrairement proche de m_2 , par passage à la limite on obtient

$$d_{g_0}(m_1, m_2) = d_g(F_i^{-1}(m_1), F_i^{-1}(m_2))$$

ce qui termine la preuve de la proposition 5.2.2. \square

La proposition 5.2.2 montre que $\{m \in V, \text{card}(F^{-1}(m)) = d\}$ est un ouvert. Il reste donc à montrer que $\{m \in V, \text{card}(F^{-1}(m)) < d\}$, qui est un fermé, est vide.

Lemme 5.2.5. *L'ensemble $K := \{m \in V, \text{card}(F^{-1}(m)) < d\}$ est vide.*

Preuve. D'après la proposition 5.2.2, K est un fermé de mesure nulle. On suppose K non vide et on considère $m \in K$. On établit l'affirmation suivante, qui nous fournit une contradiction.

Affirmation 5.2.6. *Toute g_0 géodésique passant par m rencontre K en un ensemble de mesure non nulle.*

Preuve de l'affirmation. Par l'absurde. Supposons qu'il existe une géodésique γ , telle que $\gamma([0, \ell]) \cap K$ soit un fermé de mesure nulle dans $\gamma([0, \ell])$. Soit $m' \in \gamma([0, \ell]) \cap K$ tel que $\text{card}(F^{-1}(m')) = q < d$ et tel que

$$q = \sup_{t \in \gamma([0, \ell]) \cap K} \{\text{card}(F^{-1}(t))\}.$$

Dans une première étape, on montre que m' est isolé.

Notons x_1, \dots, x_q les antécédents de m' par F . Soit un réel $\eta > 0$ tel que les boules $B_g(x_i, \eta)$ soient disjointes deux à deux. Notons F_i la restriction de F à $B_i = B_g(x_i, \eta)$. Puisque $\text{deg } F_i \geq 1$ presque partout sur la composante connexe C_i de $V \setminus F(\partial B_g(x_i, \eta))$ qui contient m' , F_i est surjective. Sur C_i tout point $t \in \gamma([0, \ell]) \cap K$ proche de m' a donc au moins un antécédent dans chaque C_i pour $i = 1, \dots, q$. D'après le choix de q , $\text{card}(F^{-1}(t)) \leq q$ donc t a exactement un antécédent dans chaque boule B_i .

Soit $W = \bigcap_{i=1}^q C_i$. On peut supposer qu'il existe un entier i_0 tel que $\text{deg } F_{i_0} \geq 2$ sur W , car si $\text{deg } F_i = 1$ pour tout $i = 1, \dots, q$, on peut trouver une suite de points réguliers dans C (i.e. ayant exactement d antécédents), convergeant vers m' et dont les antécédents en dehors des B_i convergeant vers un point y de U tel que $F(y) = m'$, contredisant $\text{card}(F^{-1}(m')) \leq q$. Supposons maintenant que m' est un point d'accumulation de $\gamma([0, \ell]) \cap K$: il existe une suite de points dans $\gamma([0, \ell]) \cap K$ arbitrairement proches de m' . Comme $\gamma([0, \ell]) \setminus K$ est un ouvert de mesure pleine dans $\gamma([0, \ell])$, il existe une suite de segments ouverts s'accumulant en m' : on peut choisir $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ dans $\gamma([0, \ell]) \cap K$ arbitrairement proches tels que $\gamma(]a, b[)$ soit un segment ouvert de $\gamma([0, \ell]) \setminus K$ arbitrairement petit. Comme $\gamma(]a, b[)$ n'intersecte pas K et que $\text{deg } F_{i_0} \geq 2$, ces segments se relèvent dans B_{i_0} , en r segments géodésiques distincts de même longueur (où $\text{deg } F_{i_0} = r \geq 2$) joignant les antécédents uniques de $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$. Cela contredit l'unicité locale des géodésiques obtenue dans la proposition 2.1. Le point m' est donc isolé dans $\gamma([0, \ell]) \cap K$.

Quitte à raccourcir la géodésique γ , on peut supposer que c'est le point de K dans $\gamma([0, \ell])$ tel que $\gamma(s_0) = m'$. $\gamma([0, s_0])$ et $\gamma(]s_0, \ell])$ ne rencontrent pas K . Si

on note y_1, \dots, y_r et y'_1, \dots, y'_r les antécédents des points $\gamma(0)$ et $\gamma(\ell)$ dans B_{i_0} alors les intervalles $\gamma([0, s_0])$ et $\gamma(]s_0, \ell])$ se relèvent par F dans B_{i_0} en r segments géodésiques distincts, joignant y_k à x_{i_0} et x_{i_0} à y'_k (k et k' variant entre 1 et r), de longueur $\ell(\gamma([0, s_0])$) et $\ell(\gamma(]s_0, \ell])$). De plus $d(y_k, y'_k) = l\forall k, k' \in \{1, \dots, r\}$ et comme $\deg F_{i_0} = r \geq 2$, il existe donc au moins deux segments $(y_k x_{i_0} y'_k)$ et $(y_{k'} x_{i_0} y'_{k'})$, ce qui contredit l'unicité du prolongement des géodésiques pour la métrique g (prop. 2.2 p. 448). L'affirmation est donc prouvée. \square

6. Preuve du théorème de rigidité

On utilise tous les résultats précédents pour montrer que la suite de variétés riemanniennes (N, g_k) converge à diamètre borné et est difféomorphe à N . On en déduit que l'isométrie locale entre X et M est un revêtement fini (localement difféomorphe).

Proposition 6.1. *Avec les hypothèses de la proposition 3.3, N est difféomorphe à la variété limite X .*

Preuve. Cela découle des deux affirmations suivantes.

Affirmation 6.2. *Soient 2 points, $x, x' \in X$ vérifiant l'inégalité*

$$d_g(x, x') = d_g(x, h^{-1}(h(x')))$$

avec par définition

$$d_g(x, h^{-1}(h(x'))) = \inf_{y \in h^{-1}(h(x'))} d_g(x, y).$$

Alors

$$d_g(x, x') = d_{g_0}(h(x), h(x')).$$

Preuve de l'affirmation. Comme h est contractante, on a $d_g(x, x') \geq d_{g_0}(h(x), h(x'))$. Supposons que $d_g(x, x') > d_{g_0}(h(x), h(x'))$ et appelons γ une géodésique minimisante joignant $h(x)$ à $h(x')$. Alors on a $\ell(\gamma) = d_{g_0}(h(x), h(x')) < d_g(x, x')$. Grace à l'isométrie locale h , on peut relever localement γ dans un voisinage de x . Tant que le chemin γ reste dans $h(X)$, on peut continuer à relever γ en un segment géodésique β . On vérifie alors que l'ensemble C des $t \in [0, +\infty[$, tels que $\gamma(t) \in h(X)$, est un ouvert et un fermé, donc que γ reste toujours dans $h(X)$. Comme h est une isométrie locale, $h(X)$ est un ouvert, d'où C est ouvert. Si $(t_n)_{n \in \mathcal{N}}$, est une suite de points convergeant vers t_∞ , alors $h^{-1}(\gamma(t_n))$ converge dans X car $d(\gamma(t_0), \gamma(t_n))$ est borné et que le segment β est prolongeable en t_∞ puisque X est complet. On a évidemment $h(\beta(t_\infty)) = \gamma(t_\infty)$. D'où $T_\infty \in C$.

On peut donc relever γ en un segment géodésique β joignant x à un point $\beta(t)$, où $t = d_{g_0}(h(x), h(x'))$ et $\beta(t)$ est un antécédent de $h(x')$. On a $\ell(\beta) = \ell(\gamma) = d_{g_0}(h(x), h(x'))$. D'après le choix de x' , $d_g(x, x') \leq d_g(x, \beta(t)) = \ell(\beta) = d_{g_0}(h(x), h(x')) < d_g(x, x')$ d'où la contradiction. \square

Remarque. Dans le cas $p = 1$, la condition $d_g(x, x') = d_g(x, h^{-1}(h(x')))$ est automatiquement vérifiée puisque le lemme 5.1.2 implique que h est injective. Dans ce cas, l'affirmation 6.2 montre déjà que h est une isométrie sur son image.

Affirmation 6.3. *La variété (X, g) est de diamètre borné. En fait*

$$X \subset B_g(0.2p \cdot \text{diam}_{g_0}(M))$$

où $p = \deg f$.

Preuve de l'affirmation. Notons $x_1, \dots, x_q \in X$ les antécédents par h d'un point $h(x)$ et rappelons que $q \leq p$. Soit x' un point quelconque de X . Il existe un entier $i_0 \in \{1, \dots, q\}$ tel que

$$d_g(x', x_{i_0}) = \inf_{j \in \{1, \dots, q\}} d_g(x', x_j) = d_g(x', h^{-1}(h(x))).$$

L'affirmation précédente montre que $d_g(x', x_{i_0}) = d_{g_0}(h(x'), h(x_{i_0})) \leq \text{diam}_{g_0} M$. On a ainsi montré que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^q B_g(x_i \text{diam}_{g_0}(M)) \subset B_g(0.2p \cdot \text{diam}_{g_0}(M))$$

ce qui termine la preuve de l'affirmation.

Fin de la preuve. La variété limite X est de diamètre borné si et seulement si la convergence de (N, g_k) se fait à diamètre borné, d'où X est difféomorphe à N . \square

Proposition 6.4. *L'application $f : N \rightarrow M$ est homotope à un revêtement C^1 de degré p .*

Preuve. La proposition précédente montre que N est difféomorphe à X . L'application h est homotope aux applications h_k de X dans M , qui sont de degré $p = \deg f > 0$. Donc h est de degré p et comme c'est une isométrie locale, h est un revêtement localement isométrique de degré p . De plus le corollaire B de C. Plaut [Pl] assure que cette isométrie locale est de classe C^1 . L'application $h \circ (f_k)^{-1}$ est donc un revêtement différentiable de degré p de N sur M , homotope à f . \square

7. Applications

On présente dans ce chapitre des applications du théorème 1.1.

La première conséquence est que le volume minimal “repère” les sphères exotiques.

Corollaire 7.1. *Soit M une variété hyperbolique fermée orientée stablement-parallélisable de dimension $n \neq 4$ et Σ une variété fermée, de même dimension. Alors on a l'inégalité*

$$\text{Minvol}(M\sharp\Sigma) \geq \text{Minvol}(M)$$

et l'égalité est atteinte si et seulement si Σ est difféomorphe à S^n .

Remarques.

1. D'après un résultat de D. Sullivan [Su], toute variété hyperbolique fermée admet un revêtement fini stablement-parallélisable.
2. Si on ne suppose pas M stablement-parallélisable, alors $\text{Minvol}(M\sharp\Sigma) > \text{Minvol}(M)$ si Σ n'est pas homéomorphe à une sphère, y compris pour $n = 4$. Par contre dans le cas où Σ est une sphère exotique, la question de savoir si $\text{Minvol}(M\sharp\Sigma) > \text{Minvol}(M)$ reste ouverte si $n = 4$ ou si M n'est pas stablement-parallélisable.

Preuve du corollaire 7.1. Il existe toujours une application de degré 1 de $M\sharp\Sigma$ dans M , qui consiste à pincer Σ sur la sphère S^n . D'après le corollaire 1.2, on a $\text{Minvol}(M\sharp\Sigma) \geq \text{Minvol}(M)$, avec égalité si et seulement si $M\sharp\Sigma$ est difféomorphe à M .

En dimension $n = 3$, l'unicité de la décomposition des variétés en facteurs premiers (cf. le résultat de J. Milnor dans [He]) montre que cette condition est équivalente à Σ difféomorphe à S^3 .

En dimension $n \geq 5$, les méthodes de la topologie algébrique classique montrent que si $M\sharp\Sigma$ est difféomorphe à Σ , alors Σ a le type d'homotopie de la sphère S^n . D'après le théorème de Smale [Sma] (cf. [Mi]), Σ est homéomorphe à S^n . Comme M est stablement-parallélisable par hypothèse, la proposition 1.2 de [FJ] montre que $M\sharp\Sigma$ est difféomorphe à M si et seulement si Σ est difféomorphe à S^n . \square

Corollaire 7.2. *Pour une structure différentiable fixée sur M , le volume minimal n'est pas un invariant topologique.*

Preuve de corollaire 7.2. Avec les hypothèses du corollaire 7.1, $\text{Minvol}(M\sharp\Sigma) > \text{Minvol}(M)$ dès que Σ est une sphère exotique, bien que $M\sharp\Sigma$ soit homéomorphe à M . \square

Pour une variété topologique N , on peut alors définir son volume minimal topologique par $\text{Minvol}_{\text{top}}(N) = \inf\{\text{Minvol}(N_i)\}$, pour toutes les structures diffé-

rentiables N_i sur N }. Avec les hypothèses du corollaire 7.1, on a en particulier $\text{Minvol}_{\text{top}}(M\sharp\Sigma) < \text{Minvol}(M\sharp\Sigma)$ dès que Σ est une sphère exotique.

On peut alors donner une version topologique du théorème 1.1 en appliquant le théorème à la structure différentiable sur N réalisant le volume minimal topologique.

Une autre application surprenante du théorème 1.1 est la suivante:

Corollaire 7.3. *Soit M une variété de dimension $n \geq 3$, fermée, orientée, admettant une métrique hyperbolique réelle g_0 . Alors*

$$\text{Minvol}(M\sharp M) > 2 \cdot \text{Minvol}(M) = 2 \cdot \text{vol}_{g_0}(M).$$

Le volume minimal n'est donc pas additif par somme connexe.

Preuve du corollaire 7.3. Il existe clairement une application de degré 2 de $M\sharp M$ dans M . Or $M\sharp M$ n'est pas hyperbolique, donc, cette application ne peut pas être homotope à un revêtement de degré 2 de M . \square

Bibliographie

- [ABN] A. D. Alexandrov, V. N. Berestovskii et I. G. Nikolaev, Generalized Riemannian spaces, *Russian Mathematical Surveys* **41** (1986), 1–54.
- [Bab] Y. Babenko, Asymptotic invariants of smooth manifolds, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.* **41** (1993), 1–38.
- [Be] M. Berger, Sur les variétés pincées juste au-dessous de $1/4$, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **33** (1983), 135–150.
- [BCG] G. Besson, G. Courtois et S. Gallot, Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative, *GAF* **5** (1995), 731–799.
- [BGP] Yu. Burago, M. Gromov et G. Perelman, A. D. Alexandrov spaces with curvature bounded below, *Russian Mathematical Surveys* **47** (1992), 1–58.
- [BGS] W. Ballman, M. Gromov et V. Shroeder, *Manifolds of negative curvature*, Birkhäuser, 1985.
- [CE] J. Cheeger et D. Ebin, *Comparisons theorems in Riemannian geometry*, North Holland Math. Library, 1975.
- [EG] L. Evans et R. Gariepy, *Measure theory and fine property of fonctions*, CRC Press.
- [Fed] H. Federer, *Geometric measure theory*, Grundlehren **153**, Springer, 1969.
- [FJ] F. T. Farrell et L. E. Jones, Negatively curved manifolds with exotic smooth structures, *Journal of the American Mathematical Society* **2** (1989), 899–908.
- [GHL] S. Gallot, Hulin et J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer Verlag.
- [GLP] M. Gromov, J. Lafontaine et P. Pansu, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic, 1981.
- [GP] K. Grove et P. Petersen, Manifolds near the boundary of existence, *J. Differential Geometry* **33** (1991), 379–394.
- [Gr] M. Gromov, Volume and bounded cohomology, *IHES* **56** (1981).
- [He] J. Hempel, *3-manifolds*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press.
- [Ka] A. Kasue, A convergence theorem for riemannian manifolds and some applications, *Nagoya Math. J.* **114** (1989), 21–51.

- [Kat] A. Katsuda, Gromov's convergence theorem and its application, *Nagoya Math. J.* **100**, (1985), 11–48.
- [Ma] A. Manning, Topological entropy for geodesic flow, *Ann. Math.* **110** (1979), 567–573.
- [Mi] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton Mathematical Notes, 1965.
- [Mo] K. Morgan, *Geometric measure theory*, Academic Press.
- [Ni] I. G. Nikolaev, Bounded curvature closure of the set of compact riemannian manifolds, *Bulletin of the American Mathematical Society* **24** (1991), 171–177.
- [Pan] P. Pansu, Effondrement des variétés riemanniennes d'après J. Cheeger et M. Gromov, *Séminaire BOURBAKI 1983/84 n 618, Astérisque* (1985), 121–122.
- [Pe] S. Peters, Convergence of riemannian manifolds, *Composition Mathematica*, **62** (1987), 3–16.
- [Pl] C. Plaut, Metric curvature, convergence and topological finiteness, *Duke Mathematical Journal* **66** (1992), 43–57.
- [Sa] T. Sakai, On continuity of injectivity radius fonction, *Math. J. Okayama Univ.*, **25** (1983).
- [Su] D. Sullivan, Hyperbolic geometry and homeomorphisms. In: J. Cantrell (Ed.), *Geometric Topology*, Academic Press, New York, 1979, 543–555.
- [Sma] S. Smale, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than 4, *Annals of Math.* **64** (1956), 399–405.
- [Thu] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Press, Princeton 1978.

Laurent Bessières
Laboratoire Emile Picard
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
F-31062 Toulouse
e-mail: bessiere@picard.ups-tlse.fr

(Received: April 1, 1997)