Comment. Math. Helv. 75 (2000) 255–270
0010-2571/00/020255-16 $ 1.50+0.20/0

Commentarii Mathematici Helvetici

Surfaces de la classe VII_0 admettant un champ de vecteurs

Georges Dloussky, Karl Oeljeklaus and Matei Toma

Résumé. Nous montrons qu'une surface de la classe VII_0 avec $b_2 > 0$ sur laquelle existe un champ de vecteurs non trivial contient exactement b_2 courbes rationnelles. Il s'ensuit par un théorème de I. Nakamura qu'une telle surface se déforme en une surface de Hopf primaire éclatée. Ce résultat contribue à la classification des surfaces complexes compactes avec champs de vecteurs.

Abstract. We prove that a compact complex surface of class VII_0 with $b_2 > 0$ admitting a non trivial holomorphic vector field contains exactly b_2 rational curves. A theorem of I. Nakamura then implies that such a surface is a deformation of a blown-up primary Hopf surface. This result contributes to the classification of compact complex surfaces with holomorphic vector fields.

Mathematics Subject Classification (2000). 32J15, 32L30, 32M05, 57R30.

Keywords. Surface complexe compacte, Champ de vecteurs holomorphe, Feuilletage holomorphe.

0. Introduction et Rappels

Si S est une surface compacte complexe non-kählerienne, il est bien connu que son premier nombre de Betti $b_1(S) := \dim_{\mathbb{R}} H^1(S,\mathbb{R})$ est impair (voir [1], [3], [16]). La classification de Kodaira ([1]) est actuellement incomplète pour les surfaces S non-kähleriennes avec $b_1(S) = 1$ et $b_2(S) > 0$ où $b_2(S) := \dim_{\mathbb{R}} H^2(S,\mathbb{R})$ désigne le deuxième nombre de Betti. Toutes ces surfaces font partie de la classe VII de Kodaira, c'est-à-dire qui vérifient $b_1 = 1$. La classe VII_0 désigne les surfaces de la classe VII qui sont minimales. Signalons que le modèle minimal d'une surface de la classe VII est unique (à un biholomorphisme près) et s'obtient par contraction successive des courbes rationnelles de première espèce. Si une surface de la classe VII admet un champ de vecteurs holomorphe non trivial, il en sera de même pour son modèle minimal.

Le but de cet article est d'apporter une contribution à la classification des surfaces compactes complexes admettant un champ de vecteurs holomorphe non trivial ou, ce qui est équivalent, une action holomorphe presque effective du groupe de Lie complexe $(\mathbb{C},+)$. Nous résumons d'abord les résultats connus. Dans [11], la classification des surfaces compactes complexes minimales admettant au moins un champ de vecteurs holomorphe θ non trivial est donnée. Le seul cas qui reste ouvert est le cas des surfaces S de la classe VII_0 dont le deuxième nombre de Betti $b_2(S)$ est strictement positif. Il est bien connu que la dimension algébrique $a(S)$ de S vaut 0. La classification des surfaces presque-homogènes (voir [20], [13]) montre qu'une telle surface a *au plus* un champ de vecteurs holomorphe non trivial (à une constante multiplicative non nulle près). Le flot de θ sur S induit alors soit une action effective de $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$, soit une action effective de $(\mathbb{C}, +)$. Le fait qu'un champ de vecteurs non trivial sur S doit s'annuler (voir par exemple [2]) et le théorème suivant nous montrent que seul le second cas reste à élucider.

Théorème 0.1. [13] *Soit S une surface compacte complexe minimale admettant une action holomorphe de $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$, qui a au moins un point fixe dans S. Alors S appartient à la liste suivante :*
1) Certaines surfaces algébriques.
2) Surfaces de Hopf diagonales presque homogènes.
3) Surfaces d'Inoue paraboliques.

Par conséquent, une surface S de la classe VII_0 pour laquelle $b_2 > 0$ et qui admet une action du groupe $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$ est une surface d'Inoue parabolique. Une telle surface admet exactement b_2 courbes rationnelles (voir Remarque 3.3). Nous étudions dans ce travail le cas restant, c'est-à-dire le cas d'une surface S de la classe VII_0, pour laquelle $b_2 > 0$ et admettant une action *effective* du groupe $(\mathbb{C}, +)$.

Nous rappelons que, tandis que la classification des surfaces de la classe VII_0 à $b_2 = 0$ est connue (voir [14], [24]), elle reste ouverte dans le cas $b_2 > 0$. De plus, on ne sait pas s'il existe des courbes sur de telles surfaces. Les seuls exemples dont on dispose sont les surfaces S admettant une *coquille sphérique globale*, c'est-à-dire un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ de la sphère $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ et une application $f : U \to S$ biholomorphe sur son image, tels que $S \setminus f(U)$ soit connexe. (Voir [6]). Dans ce cas le nombre de courbes rationnelles sur S est égal à $b_2(S)$. Comme sous-classes remarquables nous mentionons les surfaces d'Inoue-Hirzebruch (voir [15], [7]) et les surfaces d'Inoue paraboliques (voir [10]).

Dans [19], I. Nakamura introduit la notion de *surface spéciale* : Une surface S de la classe VII_0 avec $b_2 > 0$ est dite spéciale, s'il existe au moins b_2 courbes rationnelles sur S. Dans ce cas, d'après un théorème de Ma. Kato ([18]), il existe exactement b_2 courbes rationnelles sur S. De plus, le graphe dual des courbes sur S est le même que le graphe dual des courbes sur une surface contenant une coquille sphérique globale ([19]). En particulier, S contient *un cycle de courbes rationnelles* (pour la définition voir la section 2) et S est une déformation d'une surface de Hopf primaire éclatée ([19]). Dans le même article, I. Nakamura conjecture qu'une surface spéciale contient une coquille sphérique globale.

Dans [8], les deux premiers auteurs étudient les feuilletages singuliers et les champs de vecteurs holomorphes sur les surfaces contenant une coquille sphérique globale : Si une telle surface n'est pas d'Inoue-Hirzebruch, alors il existe un unique feuilletage singulier et, dans certains cas qui sont explicités, ce feuilletage est induit par une action effective de $(\mathbb{C}, +)$. Ici nous démontrons le théorème suivant.

Théorème Principal: *Soit S une surface de la classe VII_0 avec $b_2 > 0$ admettant une action de $(\mathbb{C}, +)$. Alors S est une surface spéciale.*

Vu ce résutat, la réponse positive à la conjecture de I. Nakamura impliquerait que toute surface de la classe VII_0 avec champ de vecteurs admet une coquille sphérique globale.

L'article est organisé comme suit. Dans la première section nous rappelons des résultats récents de E. Ghys et J. Rebelo concernant les singularités des champs de vecteurs semi-complets.

Dans la deuxième section nous montrons l'existence d'un cycle de courbes rationnelles et dans la troisième section la démonstration du théorème principal est achevée.

1. Singularités des flots holomorphes

Dans cette section nous rappelons des résultats récents dûs à E. Ghys et J. Rebelo ([21], [12], [22]) concernant les singularités des champs de vecteurs holomorphes *semi-complets* en dimension complexe deux. Nous renvoyons le lecteur à [21] ou [12] pour la définition et remarquons ici seulement que la semi-complétude est une condition locale nécessaire pour la complétude d'un champ de vecteurs.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe défini dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$ ayant 0 comme singularité isolée. On appelle *courbe invariante* une courbe γ irréductible contenant 0 telle que $\gamma \setminus \{0\}$ soit une feuille.

1.1. Champs de vecteurs dont le premier jet en un point singulier isolé est non nul

Soit θ un champ de vecteurs holomorphe sur une surface ayant une singularité isolée P et dont le premier jet ne s'annule pas. Dans un système local de coordonnées au voisinage de P la matrice M de la partie linéaire de θ est de l'un des quatre types suivants :

1. M a deux valeurs propres nulles i.e. M est nilpotente et on dira que la singularité P est nilpotente ;
2. M a exactement une valeur propre non nulle : on dira que P est une singularité col-nœud ;
3. M a deux valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2 telles que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{N}^\star$ et $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{N}^\star$;
4. M a deux valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2 et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{N}^\star$ ou $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{N}^\star$.

Les singularités des deux derniers types sont appelées *génériques*.

Nous faisons maintenant quelques remarques concernant les courbes invariantes pour ces quatre types.

Proposition 1.1. *Soit θ un germe de champ de vecteurs semi-complet au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$ et possédant une singularité isolée à l'origine. On suppose que le premier jet de θ est nilpotent non trivial. Alors θ est conjugué à $fY_{1,1,2}$ ou $fY_{1,2,3}$ ou $fZ_{1,2,3}$ ou fP, où f est une fonction holomorphe ne s'annulant pas à l'origine et :*

(a) $Y_{1,1,2} = (2y-x^2)\partial/\partial x + 2xy\partial/\partial y$ dont une intégrale première est $y(y-x^2)$ et les deux courbes invariantes sont $y=0$ et $y=x^2$.

(b) $Y_{1,2,3} = (3y-x^2)\partial/\partial x + 4xy\partial/\partial y$ dont une intégrale première est $y(y-x^2)^2$ et les deux courbes invariantes sont $y=0$ et $y=x^2$.

(c) $Z_{1,2,3} = 2y\partial/\partial x - 3x^2\partial/\partial y$ dont une intégrale première est x^3+y^2 et la courbe invariante est $x^3+y^2=0$.

(d) $P = (y-2x^2)\partial/\partial x - 2xy\partial/\partial y$ dont une intégrale première (méromorphe) est $(y-x^2)y^{-2}$ et les courbes $y-x^2 = cy^2$, $c \in \mathbb{C}$ sont invariantes.

Démonstration: [12] Proposition 3.16 et Remarque 2.4. □

Soit θ un champ de vecteurs holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$ à singularité isolée. Désignons par $\mathcal{F}$ le feuilletage holomorphe singulier associé à θ. Ce feuilletage est également défini par une forme différentielle holomorphe ω.

Dans le cas d'une singularité col-nœud, d'après un théorème de forme normale de Dulac (voir [9], [17]), il existe un système de coordonnées dans lequel ω s'écrit

$$\omega(x,y) = [x(1+\lambda y^p) + yR(x,y)]\, dy - y^{p+1}dx$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}^\star$ et l'ordre de R en $(0,0)$ est au moins $p+1$. Formellement on a une forme normale plus simple : il existe un changement formel de coordonnées $(x,y) \to (\phi(x,y), y)$ qui permet de conjuguer (en général de façon non convergente) ω à

$$\omega_{p,\lambda} = x(1+\lambda y^p)dy - y^{p+1}dx$$

et $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}^\star$ sont les invariants formels de ω. La forme normale *convergente* montre que $\{y=0\}$ est une courbe invariante, on dira que c'est la *variété forte* de ω ou du col-nœud. Il est facile de voir que l'indice de Camacho-Sad (voir [5], p.592) le long de la variété forte est égal à zéro. Par ailleurs $\{x=0\}$ est une courbe invariante formelle pour $\omega_{p,\lambda}$, elle sera appelée la *variété faible* de ω ou du col-nœud. En général, elle ne correspond pas à une courbe holomorphe. (En fait J.Rebelo montre dans [23] que la variété faible converge si et seulement si θ est semi-complet.)

Remarque 1.2. Si la variété faible d'un col-nœud converge, alors le champ de vecteurs le long de cette courbe invariante s'annule à l'ordre au moins deux au point singulier P.

Démonstration: Si on prend un système de coordonnées (x, y) tel que les deux variétés invariantes soient les axes de coordonnées, alors ω s'écrit

$$\omega = xA(x, y)dy - yB(x, y)dx,$$

avec $A(0, 0) \neq 0$ et $B(0, 0) = 0$. $\square$

Pour le type (3), il y a exactement deux courbes invariantes. Elles sont lisses et tangentes aux espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ de M. Leurs indices de Camacho-Sad sont $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ respectivement. Cela se voit en utilisant la forme normale de Dulac

$$\omega = \lambda_1 xA(x, y)dy - \lambda_2 yB(x, y)dx$$

avec $A(0, 0) = B(0, 0) = 1$.

Enfin pour le dernier type, il existe une forme normale de Dulac (voir [17])

$$\omega = (nx + \mu y^n)dy - ydx$$

avec $n \in \mathbb{N}^\star$. On voit alors que $\{y = 0\}$ est une courbe invariante dont l'indice de Camacho-Sad est égal à $\frac{1}{n}$. Lorsque $\mu \neq 0$, la variété $\{y = 0\}$ est la seule courbe invariante. Sinon il y en a une infinité donnée par les équations $x = cy^n$, $c \in \mathbb{C}$.

1.2. Champs de vecteurs avec point singulier isolé dont le premier jet s'annule

Théorème 1.3. (Théorème B, [12]) *Soit θ un champ de vecteurs holomorphe sur une surface complexe compacte S. Si θ possède une singularité isolée où le premier jet de θ s'annule, alors S est isomorphe à l'une des surfaces de Hirzebruch F_n, $n \geq 0$. De plus, à automorphisme de F_n près, le champ θ est unique et donné en coordonnées locales autour de la singularité par*

$$x^2\partial/\partial x - y(nx - (n+1)y)\partial/\partial y.$$

1.3. Champs de vecteurs avec point singulier non isolé

Théorème 1.4. ([22], Théorème A) *Soit θ un germe de champ de vecteurs holomorphe défini et semi-complet au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$. Supposons que l'origine ne soit pas une singularité isolée de θ et que le feuilletage $\mathcal{F}$ associé soit singulier. Alors, à changement de coordonnées près, θ est de l'une des formes suivantes :*

Cas A: *L'origine est une singularité isolée de $\mathcal{F}$ d'ordre 2.*
1. $\theta = f(x, y)[xy(x - y)]^a[x(x - 2y)\partial/\partial x + y(y - 2x)\partial/\partial y]$;
2. $\theta = f(x, y)[xy(x - y)^2]^a[x(x - 3y)\partial/\partial x + y(y - 3x)\partial/\partial y]$;

3. $\theta = f(x,y)[xy^2(x-y)^3]^a[x(2x-5y)\partial/\partial x + y(y-4x)\partial/\partial y]$
où $f(0,0) \neq 0$ *et* $a \in \mathbb{N}^\star$.

Cas B*: L'origine est une singularité isolée de* $\mathcal{F}$ *d'ordre 1 avec partie linéaire nilpotente non triviale.*
1. $\theta = f(x,y)[x^3+y^2]^a[2y\partial/\partial x - 3x^2\partial/\partial y]$ *;*
2. $\theta = f(x,y)[y(y-x^2)]^a[(2y-x^2)\partial/\partial x + 2xy\partial/\partial y]$ *;*
3. $\theta = f(x,y)[y(y-x^2)^2]^a[(3y-x^2)\partial/\partial x + 4xy\partial/\partial y]$
où $f(0,0) \neq 0$ *et* $a \in \mathbb{N}^\star$.

Cas C*: L'origine est une singularité isolée de* $\mathcal{F}$ *d'ordre 1 avec deux valeurs propres non nulles.*
1. $\theta = f(x,y)x^ny^m\bar\theta$ *où* $\bar\theta$ *est un champ dont la partie linéaire s'écrit* $mx\partial/\partial x - ny\partial/\partial y$*,* $f(0,0)\neq 0$ *et* $m,n \in \mathbb{N}^\star$ *;*
2. $\theta = x^ay^bf(x,y)[mx\partial/\partial x - ny\partial/\partial y]$*, avec* $m,n\in\mathbb{N}^\star$*,* $f(0,0)\neq 0$ *et* $am-bn = \pm 1$ *;*
3. $\theta = xf(x,y)[x\partial/\partial x + ny\partial/\partial y]$*, avec* $n\in\mathbb{N}^\star$ *et* $f(0,0)\neq 0$.
4. $\theta = (xy)^l(x-y)f(x,y)[x\partial/\partial x - y\partial/\partial y]$*, avec* $l \geq 0$ *et* $f(0,0)\neq 0$.

2. Champs de vecteurs sur les surfaces de la classe VII_0

On suppose dans la suite que S est une surface compacte complexe minimale telle que les nombres de Betti vérifient les conditions $b_1(S) = 1$ et $b_2(S) \geq 1$. Pour une telle surface, l'espace vectoriel des champs de vecteurs holomorphes est de dimension au plus 1. En outre, s'il existe un champ non trivial dont le flot induit une $\mathbb{C}^\star$-action, alors S est une surface d'Inoue parabolique (voir [13]). Comme ces surfaces sont bien connues, **on suppose dans la suite qu'un champ de vecteurs non trivial sur** S **induit une action** *effective* **de** $(\mathbb{C},+)$**.**

On rappelle d'abord la

Définition 2.1. *Un diviseur* Γ *sur une surface* S *est appelé un cycle de courbes rationnelles, si* $\Gamma = \sum_{i=0}^{p-1} D_i$*, où* D_i*,* $i = 0,\dots,p-1$ *est une courbe rationnelle et*
si $p=1$ *:* D_0 *a un point double ordinaire,*
si $p=2$ *:* D_0, D_1 *sont régulières et* $D_0.D_1 = 2$*,*
si $p\geq 3$ *:* D_i *est régulière,* $D_0.D_1 = D_1.D_2 = \dots = D_{p-1}.D_0 = 1$ *et* $D_i.D_j = 0$ *dans les autres cas.*

2.1. Singularités isolées

Lemme 2.2. *Soit* θ *un champ de vecteurs holomorphe non trivial sur* S*,* $\mathcal{F}$ *le feuilletage (réduit) associé et* $P \in S$ *un point singulier (isolé) de* $\mathcal{F}$*. Alors pour toute courbe invariante* γ *de* $\mathcal{F}$ *dans un voisinage de* P*, il existe une courbe rationnelle* C *de* S *invariante pour* $\mathcal{F}$ *contenant* γ*.*

Démonstration: Soit $\Phi : \mathbb{C} \times S \to S$ le flot associé à θ. On note $I(z) \subset \mathbb{C}$ le groupe d'isotropie d'un point z. On remarque que les groupes d'isotropie de deux points d'une même orbite sont égaux. Soit $z \in \gamma$.
1) Supposons d'abord que θ s'annule sur γ. Soit C la courbe irréductible qui contient γ. D'après [18], (2.2.2), la courbe C est soit une courbe rationnelle non singulière, soit une courbe rationnelle avec un point double ordinaire, soit une courbe elliptique régulière. Or, si C est elliptique, S est une surface d'Inoue parabolique ([18], (10.2)) et S admet une action de $\mathbb{C}^\star$ ([13]), ce qui a été exclu.
2) Si θ n'est pas identiquement nul sur γ on a $I = I(z) \neq \mathbb{C}$.
Nous avons les trois cas suivants :
a) $I = I(z)$ est réduit à l'identité. L'orbite $\mathbb{C}(z)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ et donc $C = \mathbb{C}(z) \cup \{P\}$ est une courbe rationnelle régulière.
b) I est isomorphe à $\mathbb{Z}$. L'ensemble des points fixes $\{y \in S \mid \forall u \in I,\ u(y) = y\}$ est un sous-ensemble analytique de S qui est propre puisque S n'admet pas d'action de $\mathbb{C}^\star$, ce qui prouve comme précédemment le résultat.
c) I est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{C}(z)$ est une courbe elliptique ce qui est impossible. □

Nous allons voir dans la suite que θ n'admet pas de point singulier isolé. Nous commençons par montrer que si des singularités isolées existent ce sont les singularités d'un cycle de courbes rationnelles. D'après le résultat principal de [21], nous savons que le jet d'ordre 2 de θ en P est non nul. D'après le théorème 1.3 s'il existe sur S un point singulier isolé de θ où le premier jet s'annule, alors S est une surface de Hirzebruch F_n où $n \geq 0$. **Nous pouvons donc supposer dans la suite que le jet d'ordre 1 est non nul**.

Lemme 2.3. *Supposons que le point P soit une singularité isolée de θ. Alors le premier jet de θ en P n'est pas nilpotent.*

Démonstration: Considérons un champs θ dont le premier jet est nilpotent. La Proposition 1.1 nous permet de supposer que θ est donné localement par une des quatre formes normales que nous allons successivement exclure :

(a), (b) et (d) : Les deux courbes invariantes $\gamma_1 = \{y = 0\}$ et $\gamma_2 = \{y = x^2\}$ sont tangentes, donc d'après le Lemme 2.2, il existerait sur S deux courbes rationnelles tangentes, ce qui est impossible par [18] (2.2.4).

(c) La courbe invariante $\gamma = \{x^3 + y^2 = 0\}$ et donc la courbe rationnelle de S contenant γ admettraient une singularité que l'on ne peut trouver sur une courbe d'une surface de la classe VII_0 ([18] (2.2.2)). □

On rappelle que le support d'un diviseur $\Delta = \sum \delta_i D_i$, noté $Supp(\Delta)$, est le sous-ensemble analytique réduit de S qui est la réunion des composantes D_i dont le coefficient δ_i est non nul. Dans la suite on notera D_θ le diviseur *effectif* associé à θ.

Lemme 2.4. *Supposons $D_\theta \neq 0$. Soit $P \in Supp(D_\theta)$ un point singulier de $\mathcal{F}$. S'il existe en P une courbe invariante $C \not\subset Supp(D_\theta)$, alors la restriction de θ à C a un point singulier d'ordre 2 en P. En outre, P est un point régulier de $Supp(D_\theta)$ et $\mathcal{F}$ n'a aucune autre singularité sur C.*

Démonstration: Soit $f = 0$ l'équation locale définissant D_θ en P. Au voisinage de P, on a $\theta = f\theta'$. Comme P est une singularité de $\mathcal{F}$, $\theta'(P) = 0$, donc le champ θ tangent à C, s'annule à l'ordre au moins deux en P. On rappelle qu'un champ de vecteurs non-trivial sur une courbe rationnelle a au plus deux zéros en comptant les multiplicités. Par hypothèse la restriction de θ à C est non identiquement nulle, donc elle s'annule exactement à l'ordre deux en P et n'a pas d'autres zéros. En plus il s'ensuit que f est de multiplicité 1 en P, donc P est un point régulier de D_θ. $\square$

Proposition 2.5. *1) Si P est une singularité isolée d'un champ de vecteurs θ sur S, alors le premier jet a deux valeurs propres non nulles dont aucun des rapports n'est un entier positif.*
2) Si θ a des singularités isolées elles sont exactement les singularités d'un cycle de courbes rationnelles.

Démonstration: 1) Nous avons déjà prouvé dans le Lemme 2.3 qu'il n'existe pas de singularité isolée nilpotente. S'il existe une singularité col-nœud ou une singularité avec deux valeurs propres non nulles dont l'un des rapports est un entier positif, on la note P_1. Si P_1 est un col-nœud, on note C_1 sa variété forte. Si P_1 est une singularité de type (4), on note par C_1 la seule courbe invariante passant par P_1. (Voir section 1.1. et noter que le cas d'une infinité de courbes invariantes est exclu d'après le Lemme 2.2.) Dans les deux cas on a $CS(\mathcal{F}, C_1, P_1) \geq 0$ (voir section 1.1) et C_1 admet une deuxième singularité $P_2 \neq P_1$ du feuilletage, d'après la formule de Camacho-Sad, qui affirme que la somme des indices de Camacho-Sad le long d'une courbe compacte est égale à l'auto-intersection de cette courbe. D'après le Lemme 2.4, P_2 n'appartient pas à $Supp(D_\theta)$, c'est-à-dire P_2 est encore une singularité isolée de θ. D'après la formule de Camacho-Sad

$$(*) \qquad CS(\mathcal{F}, C_1, P_2) = C_1^2 - CS(\mathcal{F}, C_1, P_1) < -1.$$

Le point P_2 n'est pas une singularité col-nœud, sinon C_1 serait sa courbe invariante faible et celle-la n'admet qu'une singularité de multiplicité deux, d'après la Remarque 1.2. Donc, en utilisant le Lemme 2.3 on voit qu'en P_2 le jet d'ordre 1 a deux valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2. D'après $(*)$ et la section 1.1, les rapports $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ et $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ sont strictement négatifs, en particulier ne sont pas dans $\mathbb{N}^\star$. On en déduit qu'en P_2 existe une seconde courbe invariante C_2 et

$$CS(\mathcal{F}, C_2, P_2) = \frac{1}{CS(\mathcal{F}, C_1, P_2)} \in]-1, 0[.$$

Par conséquent on a un seul autre point singulier P_3 sur C_2 et $CS(\mathcal{F}, C_2, P_3) = C_2^2 - CS(\mathcal{F}, C_2, P_2) < -1$, donc le premier jet en P_3 admet deux valeurs propres non nulles et on obtient par récurrence une suite infinie de courbes C_i avec deux singularités P_i et $P_{i+1} \neq P_1$, chacune ayant deux valeurs propres non nulles avec des rapports strictement négatifs pour $i \geq 2$. Comme il ne peut exister sur S qu'un nombre fini de courbes, nous obtenons une contradiction. Cela montre que les singularités isolées du champ θ sont toutes du type (3), ce qu'il fallait démontrer.
2) On vient de voir que les singularités isolées sont toutes du type (3). Les courbes invariantes passant par ces singularités ne rencontrent pas D_θ (d'après le Lemme 2.4). Elles doivent donc se refermer en un cycle (d'une ou plusieurs courbes rationnelles), puisque chacune d'elles admet exactement deux zéros simples de θ. □

Corollaire 2.6. *Soit θ un champ de vecteurs holomorphe non trivial sur une surface minimale S avec $b_1(S) = 1$ et $b_2(S) > 0$. On suppose que l'action induite par θ est une action effective de $(\mathbb{C}, +)$. Alors, il existe sur S au moins une courbe rationnelle sur laquelle θ s'annulle.*

Démonstration: Si toutes les singularités de θ sont isolées, elles sont toutes génériques, d'après la Proposition 2.5. D'après [4], S serait rationnelle ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc il existe une courbe C sur laquelle θ s'annule. Cette courbe est rationnelle ou elliptique et dans le second cas la surface S est une surface d'Inoue parabolique (voir [18]). Une telle surface n'admet pas d'action effective de $(\mathbb{C}, +)$ (cf. Théorème 0.1). □

2.2. Singularités non-isolées

Lemme 2.7. *Soit C une courbe rationnelle de S. Alors il existe une feuille L de $\mathcal{F}$ telle que $C = \bar{L}$.*

Démonstration: Si la restriction de θ sur C n'est pas identiquement nulle, θ est tangent à C : sinon il y aurait une infinité de translatées de C sur S, ce qui n'est pas le cas.
Supposons alors que θ s'annule sur C. Soit $P \in C$ un point qui ne soit ni un point singulier de $\mathcal{F}$ ni un point singulier de C. Supposons que la feuille L_P de $\mathcal{F}$ passant par P soit transverse à C. Il existe alors au voisinage de P un système de coordonnées dans lequel $C = \{y = 0\}$, $L_P = \{x = 0\}$, $\theta = yf(x,y)\partial/\partial y$ et les feuilles ont pour équation $x = constante$. Comme x ne divise pas f, l'action de $\mathbb{C}$ sur toutes les feuilles $L_{P'}$ proches de L_P est non triviale. On montrerait alors comme dans le lemme 2.2 qu'il existe une infinité de courbes compactes. □

Lemme 2.8. *Soit θ un champ de vecteurs sur S et $\mathcal{F}$ le feuilletage réduit associé. Alors les singularités de $\mathcal{F}$ sur D_θ ont toutes deux valeurs propres non nulles dont* *les quotients sont des rationnels strictement négatifs. Par une telle singularité passent localement exactement deux courbes invariantes.*

Démonstration: Le Théorème 1.4 nous donne les formes normales du champ θ au voisinage d'une singularité située sur D_θ. On donne trois arguments qui écartent le cas A :
i) Le champ θ s'annule sur trois courbes invariantes transverses ce qui donne une courbe rationnelle avec un point double et une courbe rationelle régulière, ou trois courbes rationnelles régulières se coupant au même point. Cela est impossible sur une surface de la classe VII_0 ([18], (2.2.4)).
ii) D'après le Lemme 2.7, il y aurait trois courbes invariantes du feuilletage, ce qui est impossible vu les formes explicites données.
iii) D'après [22] Lemme 5.2, il y aurait sur S une infinité de courbes.
Le cas B est également écarté par [18] puisque les courbes d'une surface de la classe VII_0 n'ont pas de point de rebroussement et ne sont pas tangentes entre elles.
Cas C : 3) est exclu car le feuilletage est défini par le champ $\theta' = x\partial/\partial x + ny\partial/\partial y$ dont le flot est $\Phi_t(x,y) = (e^t x, e^{nt} y)$. On aurait alors une infinité de courbes invariantes ce qui est exclu.
4) Dans ce cas, le champ admet trois courbes invariantes, ce qui est exclu ([18], (2.2.4)). Restent les deux formes normales qui correspondent à la situation annoncée. $\square$

Lemme 2.9. *Si θ s'annule sur une courbe irréductible C, le feuilletage $\mathcal{F}$ admet sur C au moins une singularité.*

Démonstration: D'après le Lemme 2.7 la courbe C est invariante pour le feuilletage $\mathcal{F}$. Si C est singulière, sa singularité est une singularité de $\mathcal{F}$. Sinon on a $C^2 \leq -2$ (voir [18]). Par la formule de Camacho-Sad, on en déduit l'existence d'au moins une singularité de $\mathcal{F}$ sur C. $\square$

Proposition 2.10. *Chaque composante connexe du support de D_θ contient un cycle de courbes rationnelles.*

Démonstration: Considérons une composante connexe Γ_0 de D_θ et appelons Γ la composante connexe du diviseur maximal de S contenant Γ_0. D'après le Lemme 2.4, les points singuliers du feuilletage $\mathcal{F}$ sur Γ se trouvent déja sur Γ_0 et un cycle contenu dans Γ est déja contenu dans Γ_0.

Supposons maintenant Γ sans cycle. On va en déduire une contradiction. D'après [18] (2.2.2), cette composante ne contient que des courbes rationnelles régulières et deux courbes ne se coupent qu'en un point au plus. On va construire un $\mathbb{Q}$-diviseur positif Z tel que pour toute courbe C de S, on ait $Z.C = 0$. En particulier pour un entier m convenable tel que $Z' = mZ$ soit un diviseur on aura $(Z')^2 = 0$. D'après [10], S contiendra exactement un cycle de courbes rationnelles avec $b_2(S)$ courbes, ce qui donne une contradiction. Pour construire Z on commence par choisir une courbe irréductible C_1 de Γ et on pose $a_1 = 1$. D'après les Lemmes 2.9 et 2.8, C_1 doit couper (au moins) une autre courbe ; choisissons en une C_2 et soit $P_2 = C_1 \cap C_2$. D'après le Lemme 2.8, si λ_1^i et λ_2^i sont les deux valeurs propres en la singularité P_i, leurs rapports sont des rationnels strictement négatifs, donc l'indice de Camacho-Sad [5] du feuilletage au point P_2 le long de C_1 vérifie $CS(\mathcal{F}, P_2, C_1) < 0$. On pose

$$a_2 = -a_1 CS(\mathcal{F}, P_2, C_1).$$

Supposons $C_1, \dots, C_i$ et $a_1, \dots, a_i > 0$ déja définis. On choisit une courbe C_{i+1} qui rencontre une des courbes C_j $(1 \leq j \leq i)$ en exactement un point P_{i+1} et on pose

$$a_{i+1} = -a_j CS(\mathcal{F}, P_{i+1}, C_j).$$

Si Γ ne contient aucun cycle on peut définir par récurrence (finie) les coefficients a_i pour toutes les courbes de Γ. On pose $Z = \sum_i a_i C_i$. Si C n'est pas une courbe de Γ, on a évidemment $Z.C = 0$. Si C_j est l'une des courbes de Γ,

$$\begin{aligned} Z.C_j &= \sum_i a_i C_i.C_j = a_j C_j^2 + \sum_{i \neq j, C_j \cap C_i \neq \emptyset} a_i \\ &= a_j \left(C_j^2 + \sum_{i \neq j, C_j \cap C_i \neq \emptyset} \frac{a_i}{a_j} \right) \\ &= a_j \left(C_j^2 - \sum_{i \neq j, C_j \cap C_i \neq \emptyset} CS(\mathcal{F}, P_i, C_j) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après la formule de Camacho-Sad. □

3. Surfaces spéciales

La définition suivante a été introduite par I. Nakamura. Un théorème dû à Ma.Kato ([18], (3.4)) affirme que lorsque $b_2(S) > 0$, le nombre de courbes rationnelles sur une surface de la classe VII_0 est au plus égal à $b_2(S)$. Il y a égalité pour les surfaces contenant une coquille sphérique globale (voir [6]).

Définition 3.1. ([19]) *Soit S une surface compacte minimale telle que $b_1(S) = 1$ et $b_2(S) > 0$. On dira que S est une surface spéciale si S contient exactement $b_2(S)$ courbes rationnelles.*

Théorème 3.2. *Soit S une surface compacte de la classe VII_0 et $b_2 = b_2(S) > 0$. On suppose qu'il existe sur S une action holomorphe effective de $(\mathbb{C}, +)$ induite par* *un champs de vecteurs θ. Alors S est une surface spéciale, le champ de vecteurs θ n'a aucun point singulier isolé et les singularités du feuilletage induit sont exactement les b_2 singularités du diviseur maximal.*

Démonstration: On a vu à la Proposition 2.5 que si θ a des singularités isolées il existe un cycle de courbes rationnelles. De plus, il existe au moins un cycle de courbes rationnelles dans $Supp(D_\theta)$ (Proposition 2.10). S'il existe deux cycles, S est une surface d'Inoue-Hirzebruch ([18] (8.1)) (lorsque une surface d'Inoue-Hirzebruch a deux cycles, I. Nakamura l'appelle *surface d'Inoue hyperbolique*). On sait que ces surfaces n'admettent aucun champ de vecteurs non trivial ([7], (2.5)). Donc θ n'a aucun point singulier isolé, le support de D_θ est connexe et contient exactement un cycle de courbes rationnelles. On note N le nombre de courbes rationnelles sur S. D'après le Lemme 2.8, chaque singularité de $\mathcal{F}$ est située sur exactement deux courbes (locales) invariantes. De plus, si θ ne s'annule pas identiquement sur une courbe rationnelle, alors d'après le Lemme 2.4 elle ne porte qu'une singularité (cette courbe rationnelle est le sommet d'un arbre). On en déduit que le feuilletage $\mathcal{F}$ a exactement N singularités. On note $D_0, \dots, D_{N-1}$ les N courbes rationnelles, $D = \sum D_i$ le diviseur maximal et $M(S)$ la matrice d'intersection de D. La matrice $M(S)$ est définie négative : Sinon il existe un diviseur effectif D' avec $(D')^2 = 0$. D'après [10] (Main Theorem et la démonstration de la Proposition 8.5, (8.6)), S est une surface admettant une coquille sphérique globale de trace non nulle (voir [6], Thm. I.3.33, p.45). Encore d'après [6] (Thm. II.1.31, p.77), les seules surfaces de trace non nulle avec un champ de vecteurs non trivial sont les surfaces d'Inoue paraboliques et ce champ induit une action de $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$. Ce cas est exclu.

Par conséquent le système linéaire

$$M(S)\big(k_i\big)_{0\le i\le N-1} = \big(D_i^2 + 2 - 2g(D_i)\big)_{0\le i\le N-1}$$

où $g(D_i)$ est le genre de D_i, admet une solution rationnelle. Le $\mathbb{Q}$-diviseur

$$D_{-K} := \sum_{0\le i\le N-1} k_i D_i$$

vérifie d'après la formule d'adjonction

$$D_{-K}.D_j = -K.D_j, \quad \text{pour tout } 0 \le j \le N-1.$$

Assertion 1: *Le diviseur $D_\theta = \sum_{0\le i\le N-1} t_i D_i$ vérifie*

$$M(S)\begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_j \\ \vdots \\ t_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2g(D_0) - Z(D_0,\mathcal{F}) \\ \vdots \\ 2-2g(D_i) - Z(D_i,\mathcal{F}) \\ \vdots \\ 2-2g(D_{N-1}) - Z(D_{N-1},\mathcal{F}) \end{pmatrix}.$$

où

$$2-2g(D_i)-Z(D_i,\mathcal{F})=\begin{cases} 2-Card\{Sing(\mathcal{F})\cap D_i\} & \text{si } D_i \text{ est régulière} \\ 1-Card\{Sing(\mathcal{F})\cap D_i\} & \text{si } D_i \text{ est singulière} \end{cases}.$$

Démonstration de l'assertion 1: Soit C une courbe invariante compacte de $\mathcal{F}$, $P\in C$ une singularité de $\mathcal{F}$ et Y un champ de vecteurs, avec une singularité isolée en P, qui définit $\mathcal{F}$. Dans [2], Brunella définit un indice $Z(P,C,\mathcal{F})$. Si C est régulière, cet indice coïncide avec l'ordre d'annulation en $P\in C$ de la restriction $Y_{|C}$.

Soit

$$Z(C,\mathcal{F})=\sum_{P\in Sing(\mathcal{F})\cap C} Z(P,C,\mathcal{F})$$

et

$$\chi(C):=-KC-C^2=2-2g(C)$$

la caracteristique d'Euler. Alors, d'après [2], on a

$$c_1(N_{\mathcal{F}})\cdot C=C^2+Z(C,\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad c_1(T_{\mathcal{F}})\cdot C=\chi(C)-Z(C,\mathcal{F}).$$

a) D'après le Lemme 2.8, pour une courbe rationnelle régulière C, le champ de vecteurs Y définissant $\mathcal{F}$ dans un voisinage de $P=0$ est de la forme $Y(x,y)=x\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y\frac{\partial}{\partial y}$, avec $\lambda\neq 0$.

Alors $Z(P,C,\mathcal{F})=1$ et

$$(\star) \qquad c_1(T_{\mathcal{F}})\cdot C=2-\mathrm{Card}\{Sing(\mathcal{F})\cap C\}$$

b) Si C est une courbe rationnelle avec un point double P, on éclate une fois en P et en utilisant le cas a) on trouve

$$(\star\star) \qquad c_1(T_{\mathcal{F}})\cdot C=1-\mathrm{Card}\{Sing(\mathcal{F})\cap C\}$$

La formule de Brunella avec $(\star)$, $(\star\star)$ et le fait que $T_{\mathcal{F}}=[D_\theta]$ impliquent l'assertion 1. □

Assertion 2 : On a

i) $D_\theta.D=0$

et

ii) $D_{-K}=D_\theta+D$.

Démonstration de l'assertion 2 :

i) Se vérifie en utilisant l'assertion 1.

ii) La matrice $M(S)$ est définie négative et

$$D_i^2+Z(D_i,\mathcal{F})=D\cdot D_i$$

pour $i = 0, \cdots, n-1$.
Les deux systèmes de Cramer donnent pour $i = 0, \cdots, n-1$

$$\det M(S)(k_i - t_i) = det \begin{pmatrix} D_0^2 & \dots & D_0 \cdot D & \dots & D_0 D_{n-1} \\ D_0 D_1 & \dots & D_1 \cdot D & \dots & D_1 D_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ D_0 D_{n-1} & \dots & D_{n-1} \cdot D & \dots & D_{n-1}^2. \end{pmatrix}$$

$$= \det M(S),$$

où $(D_j.D)_{0 \le j \le n-1}$ est la i-ième colonne.
Donc $k_i - t_i = 1$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$. □

Par conséquent $D_{-K} = D_\theta + D$ est également un diviseur effectif, qu'on appelera le diviseur numériquement anticanonique. On en déduit

$$K.D_\theta + D_\theta^2 = (-D_{-K}).D_\theta + D_\theta^2 = -(D_\theta + D).D_\theta + D_\theta^2 = -D.D_\theta = 0.$$

Ici le fibré linéaire tangent au feuilletage est $T_{\mathcal{F}} = [D_\theta]$; en appliquant l'une des formules de Baum-Bott (voir [2], Proposition 1) on obtient,

$$\begin{aligned} N = Det(\mathcal{F}) &= c_2(S) - c_1(T_{\mathcal{F}})c_1(S) + c_1(T_{\mathcal{F}})^2 = c_2(S) + KD_\theta + D_\theta^2 \\ &= c_2(S) = b_2(S). \qquad \square \end{aligned}$$

Remarque 3.3. Si un champ de vecteurs θ sur une surface de la classe VII_0 induit une action de $\mathbb{C}^\star$, alors S est une surface d'Inoue parabolique ([13]). Une telle surface contient une coquille sphérique globale et elle est donc une surface spéciale. Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 3.4. *Soit S une surface minimale de la classe VII_0 avec $b_2 > 0$ admettant une action de $(\mathbb{C}, +)$. Alors il existe une déformation holomorphe de S en une surface de Hopf primaire éclatée b_2 fois.*

Démonstration: D'après la proposition 2.10 et le théorème (1.5) de [19], on a le résultat. □

Remerciements

Les auteurs remercient J.C. Rebelo, qui leur a envoyé ses preprints [22] et [23], A.T. Huckleberry pour des discussions enrichissantes et E. Ghys pour l'intérêt porté à ce travail.
Ce travail a évolué pendant un séjour du troisième auteur à l'Université de Provence. Il tient à remercier cette institution pour son hospitalité.

Références

[1] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, Compact complex surfaces, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* 3. Folge. Band 4., Springer-Verlag, Berlin 1984.

[2] M.Brunella, Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes, *Ann. scient. ENS*, 4^e série, **30** (1997), 569-594.

[3] N. Buchdahl, On compact Kähler surfaces, *Ann. Inst. Fourier* **49**1 (1999), 287-302.

[4] J. Carrell, A. Howard and C. Kosniowski, Holomorphic vector fields on complex surfaces. *Math. Ann.* **204** (1973), 73-81.

[5] C. Camacho and P. Sad, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Annals of Math.* **115** (1982), 579-595.

[6] G. Dloussky, Structure des surfaces de Kato. *Mémoire de la S.M.F* 112. $n^\circ 14$ (1984).

[7] G. Dloussky, Une construction élémentaire des surfaces d'Inoue-Hirzebruch. *Math. Ann.* **280** (1988), 663-682.

[8] G. Dloussky and K. Oeljeklaus, Vector fields and foliations on surfaces of class VII_0. *Ann. Inst. Fourier* **49** 4 (1999), 1503–1545.

[9] H. Dulac, Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. *Ecole Polytechnique* **9** (1904), 1-125.

[10] I. Enoki, Surfaces of class VII_0 with curves. *Tôhoku Math. J.* **33** (1981), 453-492.

[11] C. Gellhaus and P. Heinzner, Komplexe Flächen mit holomorphen Vektorfeldern. *Abh. Math. Sem. Hamburg* **60** (1990), 37-46.

[12] E. Ghys and J. Rebelo, Singularités des flots holomorphes II. *Ann. Inst. Four.* **47** 4 (1997), 1117-1174.

[13] J. Hausen, Zur Klassifikation glatter kompakter $\mathbb{C}^\star$-Flächen. *Math. Ann.* **301** (1995), 763-769.

[14] M. Inoue, On surfaces of class VII_0, *Invent. Math.* **24** (1974), 269-310.

[15] M. Inoue, New surfaces with no meromorphic functions II. *Complex Analysis and Alg. Geom.* 91-106. Iwanami Shoten Pb. 1977.

[16] A. Lamari, Courant kähleriennes et surfaces compactes. *Ann. Inst. Fourier* **49** 1 (1999), 263-285.

[17] J. Martinet and J.-P. Ramis, Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. *Pub. Math. IHES* **55** (1982), 63-164.

[18] I. Nakamura, On surfaces of class VII_0 with curves. *Invent. Math.* **78** (1984), 393-443.

[19] I. Nakamura, On surfaces of class VII_0 with curves II. *Tohôku Math. Jour.* **42** (1990), 475-516.

[20] J. Potters, On almost homogeneous compact complex analytic surfaces. *Inv. Math.* **8** (1969), 244-266.

[21] J. Rebelo, Singularités des flots holomorphes I. *Ann. Inst. Fourier* **46** 2 (1996), 411-428.

[22] J. Rebelo, Singularités des flots holomorphes III. *Bol. Soc. Math. Mex.* (à paraître).

[23] J. Rebelo, Singularités des flots holomorphes IV. *Prépublication.*

[24] A. Teleman, Projectively flat surfaces and Bogomolov's theorem on class VII_0 surfaces, *Int. J. Math.* **5** 2 (1994), 253-264.

Georges Dloussky and Karl Oeljeklaus
LATP-UMR(CNRS) 6632
CMI-Université d'Aix-Marseille I
39, rue Joliot-Curie
F-13453 Marseille Cedex 13
France
e-mail: dloussky@gyptis.univ-mrs.fr
karloelj@gyptis.univ-mrs.fr

Matei Toma
Fachbereich Mathematik-Informatik
Universität Osnabrück
49069 Osnabrück
Allemagne
et
Institut de Mathématiques
de l'Académie Roumaine
Bucarest
Roumanie
e-mail: Matei.Toma@mathematik.Uni-Osnabrueck.DE

(Received: August 6, 1998)