Comment. Math. Helv. 76 (2001) 200–217
0010-2571/01/020200-18 $ 1.50+0.20/0

Commentarii Mathematici Helvetici

Un théorème de rigidité non-métrique pour les variétés localement symétriques hermitiennes

Bruno Klingler

Abstract. Let X be an irreducible Hermitian symmetric space of non-compact type of dimension greater than 1 and G be the group of biholomorphisms of X ; let $\mathrm{M} = \Gamma \setminus X$ be a quotient of X by a torsion-free discrete subgroup Γ of G such that M is of finite volume in the canonical metric. Then, due to the G-equivariant Borel embedding of X into its compact dual X_c , the locally symmetric structure of M can be considered as a special kind of a $(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, X_c)$-structure on M, a maximal atlas of X_c-valued charts with locally constant transition maps in the complexified group $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$. By Mostow's rigidity theorem the locally symmetric structure of M is unique. We prove that the $(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, X_c)$-structure of M is the unique one compatible with its complex structure. In the rank one case this result is due to Mok and Yeung.

Mathematics Subject Classification (2000). 53C35, 32M15, 22E40.

Keywords. Locally symmetric spaces, rigidity, projective structures, uniformization.

1. Introduction

Dans ce travail, on démontre un théorème de rigidité non-métrique pour les quotients lisses de volume fini d'espaces symétriques hermitiens irréductibles de type non-compact en dimension complexe $n \geq 2$.

Soit $X = \mathrm{G}/\mathrm{K}$ un espace symétrique hermitien irréductible de type non-compact, où G désigne un groupe de Lie réel simple connexe et K un sous-groupe compact maximal de G . Soit $\mathrm{M} = \Gamma \setminus X$ un quotient lisse de volume fini de X , où Γ désigne un réseau sans torsion de G . Il est bien connu que si X est de dimension $n \geq 2$, la variété M possède de nombreuses propriétés de rigidité liées à sa structure métrique. Dans la classe des variétés localement symétriques d'abord : le théorème de rigidité de Mostow [16] (pour le cas M compact, généralisé par Prasad et Margulis dans le cas de volume fini), affirme que M s'uniformise de façon unique comme quotient de X . Dans la classe des variétés kählériennes ensuite : dans [21], Siu montre que si M est compacte toute variété kählérienne compacte qui lui est homotope lui est biholomorphe (ou conjuguée-biholomorphe). Enfin en rang ≥ 2 , Mok montre dans [13] que toute métrique hermitienne à courbure semi-négative au sens de Griffiths sur M est un multiple constant de la métrique canonique de M.

Dans ce papier, on considère la structure localement symétrique hermitienne de M comme un cas particulier de structure localement homogène (non riemannienne) plus générale. Notons $X_c = G_{\mathbb{C}} / Q_-$ le dual compact de X, où $G_{\mathbb{C}}$ désigne le groupe de Lie complexifié de G et Q_- un sous-groupe parabolique maximal de $G_{\mathbb{C}}$ admettant le groupe $K_{\mathbb{C}}$ complexifié de K comme sous-groupe de Levi. On appelle $(G_{\mathbb{C}}, X_c)$-structure sur une variété N la donnée d'un atlas maximal de cartes pour N à valeur dans X_c, à changements de cartes localement constants dans le groupe $G_{\mathbb{C}}$. L'étude de telles structures a été initiée dans [17] et [10]. D'après le théorème de plongement de Borel, l'espace X se réalise comme G-orbite ouverte dans X_c. Ainsi, la structure localement symétrique hermitienne de $M = \Gamma \setminus X$ est un cas particulier de $(G_{\mathbb{C}}, X_c)$-structure sur M.

Exemples :

1. Structures projectives complexes sur les variétés hyperboliques complexes.

Soit $X = \mathbf{H}^n_{\mathbb{C}} = SU(n,1)/S(U(n) \times U(1))$ l'espace hyperbolique complexe de dimension n et $G = SU(n,1)$ son groupe d'isométries holomorphes. Le groupe $G_{\mathbb{C}}$ s'identifie au groupe spécial affine $SL(n+1, \mathbb{C})$, l'espace X_c à l'espace projectif $\mathbf{P}^n\mathbb{C}$ et le plongement de Borel est donné par la réalisation usuelle de l'espace hyperbolique complexe

$$\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}} = \{z = [z_0; \cdots ; z_n] \in \mathbf{P}^n\mathbb{C} \;/\; |z_0|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2 < |z_n|^2\} \;.$$

Une $(G_{\mathbb{C}}, X_c)$-structure est une structure projective complexe, c'est-à-dire la donnée d'un atlas de cartes à valeur dans $\mathbf{P}^n\mathbb{C}$, à changement de cartes localement constants dans $SL(n+1, \mathbb{C})$. En dimension $n = 1$, l'étude des structures projectives sur la surface de Riemann $M = \Gamma \setminus \mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ de genre $g \geq 2$ est un problème classique [8].

2. Structures conformes complexes.

Si $G = SO_0(n,2)$ et X désigne l'espace symétrique hermitien $SO_0(n,2)/(SO(n) \times SO(2))$, le groupe $G_{\mathbb{C}}$ s'identifie au groupe $SO(n+2, \mathbb{C})$ et l'espace X_c à la quadrique complexe de dimension n

$$X_c = \{z = [z_0; \cdots ; z_{n+1}] \in \mathbf{P}^{n+1}\mathbb{C} \;/\; \sum_{i=0}^{n+1} z_i^2 = 0\} \;.$$

Une $(G_{\mathbb{C}}, X_c)$-structure sur une variété N est la même chose qu'une structure conforme holomorphe sur N.

Dans [15, Theorem 2.1], Mok et Yeung démontrent le :

Théorème 1.1. ***[Mok-Yeung]*** *Soit $M = \Gamma \setminus \mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ un quotient hyperbolique complexe de dimension $n \geq 2$, de volume fini. Alors M n'admet pas d'autre structure projective complexe compatible avec sa structure holomorphe que sa structure canonique.*

Dans ce travail, nous généralisons le résultat de Mok et Yeung au rang supérieur et simplifions la preuve de leur résultat au passage.

Théorème 1.2. *Soit* $\mathrm{M} = \Gamma \setminus X$ *un quotient lisse de volume fini d'un espace symétrique hermitien irréductible de type non-compact* $X = \mathrm{G}/\mathrm{K}$ *, de dimension complexe* $n \geq 2$ *. Alors* M *n'admet pas d'autre* $(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, X_c)$ *-structure compatible avec sa structure holomorphe que sa* $(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, X_c)$ *-structure naturelle.*

Remarque. L'hypothèse consistant à travailler à structure holomorphe fixée est doublement raisonnable. D'une part la structure complexe de M est connue être localement rigide ([3], [1]). D'autre part cette hypothèse couvre tous les cas connus : l'existence sur M d'une structure complexe différant de sa structure naturelle ou de sa conjuguée est une question ouverte.
Le plan de ce papier est le suivant.

Après un rappel de notations (section 2), la courte section 3 montre que la $(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, X_c)$-structure naturelle d'un quotient $\mathrm{M} = \Gamma \setminus X$ de volume fini est localement rigide, *indépendamment de la structure holomorphe de* M. Le théorème 1.2 et cette remarque soutiennent la conjecture selon laquelle le quotient M admet une unique $(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, X_c)$-structure, indépendamment de sa structure complexe. Les sections 4 et 5 sont dévolues à la preuve du théorème 1.2.

A la section 4, on rappelle que le modèle X_c porte une Q_--structure d'ordre 2 et une $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$-structure d'ordre 1 naturelles (c.f. [17]). On caractérise alors les transformations locales de X_c provenant de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ en termes de jets : ce sont simplement les transformations préservant la Q_--structure d'ordre 2 de X_c (resp. la $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$-structure d'ordre 1 dès que X est de de rang > 1). On en déduit (proposition 4.8) que l'espace $\mathcal{T}_{(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, X_c)}(N)$ des $(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, X_c)$-structures sur une variété complexe N, compatibles avec sa structure holomorphe, s'injecte dans l'espace des Q_--structures d'ordre 2 sur N, c'est-à-dire dans l'espace des sections holomorphes du fibré $\mathrm{F}_2(N)/Q_-$, où $\mathrm{F}_2(N)$ désigne le fibré des 2-jets de N. En rang 1, le fibré $\mathrm{F}_2(N)/Q_-$ est vectoriel et s'identifie au fibré $\pi_* Hom(\mathrm{L}, \mathrm{S})$ construit par Mok et Yeung [15, prop.2.1]. Si X est de rang ≥ 2, on montre que l'espace $\mathcal{T}_{(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, X_c)}(N)$ s'injecte en fait dans l'espace des $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$-structures d'ordre 1 sur N, c'est-à-dire dans l'espace des sections holomorphes du fibré $\mathrm{F}_1(N)/\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ (où $\mathrm{F}_1(N)$ désigne le fibré des repères principaux holomorphes de N).

A la section 5, on montre l'unicité de la section holomorphe du fibré $\mathrm{F}_1(\mathrm{M})/\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ (resp. du fibré $\mathrm{F}_2(\mathrm{M})/Q_-$) quand M est de rang supérieur ou égal à deux (respectivement de rang 1). L'idée consiste à utiliser un résultat d'annulation pour les fibrés vectoriels automorphes sur M. Une difficulté notable apparaît en rang ≥ 2 : le fibré $\mathrm{F}_1(\mathrm{M})/\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ n'est pas vectoriel, contrairement au fibré $\mathrm{F}_2(\mathrm{M})/Q_-$ en rang 1. En utilisant la structure automorphe de $\mathrm{F}_1(\mathrm{M})/\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$, on arrive toutefois à le réaliser comme sous-fibré holomorphe d'un fibré vectoriel sur M dont on contrôle encore les sections.

2. Notations

Pour tous ces rappels sur les espaces symétriques hermitiens, on pourra consulter [23].

Les plongements de Borel et Harish-Chandra.

Notons $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$) l'algèbre de Lie du groupe G (resp. K) et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée. Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$) l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (resp. $\mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) du groupe complexifié $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$), on a la décomposition $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ induite de la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$. Le $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ -module $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ se décompose en somme directe $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ de deux $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ -modules irréductibles, sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Notons P_+ (resp. P_- , resp. Q_+ , resp. Q_-) le sous-groupe du groupe $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_+$ (resp. $\mathfrak{p}_-$, resp. $\mathfrak{q}_+ = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_+$, resp. $\mathfrak{q}_- = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_-$). Le groupe Q_- est un produit semi-direct $Q_- = \mathrm{K}_{\mathbb{C}}\,\mathrm{P}_-$. Le produit $\mathrm{P}_+ \times Q_-$ est un ouvert de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ contenant G et l'intersection $\mathrm{G} \cap Q_-$ est égale à K . L'espace symétrique hermitien de type non-compact $X = \mathrm{G}/\mathrm{K}$ se plonge ainsi dans son dual compact $X_c = \mathrm{G}_{\mathbb{C}}/Q_-$ (plongement de Borel) et la structure complexe de X est induite par celle de X_c . L'espace $\mathfrak{p}_+$ (resp. $\mathfrak{p}_-$) s'identifie à l'espace tangent holomorphe (resp. antiholomorphe) de X au point $e\mathrm{K}$. Si $\exp : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ désigne l'application exponentielle, on notera $\mathrm{E} : \mathfrak{p}_+ \longrightarrow X_c$ l'application qui à $x \in \mathfrak{p}_+$ associe le point $\exp x.(eQ-)$ de X_c . C'est un biholomorphisme de $\mathfrak{p}_+$ sur un ouvert de X_c d'après le théorème de plongement de Harish-Chandra.

Racines compactes et non compactes.

Soit $H \subset \mathrm{K}$ un sous-groupe de Cartan de G , d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, d'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Soit $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, on a alors la décomposition radicielle

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

où l'on note $\mathfrak{g}_\alpha = \{Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \ / \ \forall X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, \ \ [X,Y] = \alpha(X).Y\}$. Chaque espace radiciel $\mathfrak{g}_\alpha$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1 , contenu soit dans $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ soit dans $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$. Dans le premier cas la racine α est dite compacte, dans le deuxième cas non-compacte. On notera $\Delta_{\mathfrak{k}}$ (resp. $\Delta_{\mathfrak{p}}$) le sous-ensemble des racines compactes (resp. non-compactes), l'ensemble des racines Δ est la réunion disjointe de $\Delta_{\mathfrak{k}}$ et $\Delta_{\mathfrak{p}}$. On peut alors choisir un système positif de racines $\Delta^+ \subset \Delta$ compatible avec la structure holomorphe de X , c'est-à-dire tel que si $\Delta^+_{\mathfrak{p}}$ (resp. $\Delta^+_{\mathfrak{k}}$) désigne l'intersection $\Delta_{\mathfrak{p}} \cap \Delta^+$ (resp. $\Delta_{\mathfrak{k}} \cap \Delta^+$) on a l'égalité :

$$\mathfrak{p}_\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{g}_{\pm\alpha} \ .$$

On notera $< .,. >$ le produit scalaire sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ induit par la forme de Killing de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

$(\,\mathrm{G}_{\mathbb{C}}\,,\ X_c\,)$ **-structures.**

Rappelons une définition équivalente de la notion de $(\,\mathrm{G}_{\mathbb{C}}\,,\ X_c\,)$ -structure (cf. [5]).

Définition 2.1. *Soit* M *une variété lisse de revêtement universel* $\tilde{\mathrm{M}}$ *, de groupe fondamental* Γ *. Une* $(\,\mathrm{G}_{\mathbb{C}}\,,\ X_c\,)$ *-structure sur* M *est la donnée d'un difféomorphisme local* Γ *-équivariant* $\mathrm{D}\colon \tilde{\mathrm{M}} \longrightarrow X_c$ *, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de groupe* $h : \Gamma \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ *tel que :*

$$\forall\, \gamma \in \Gamma,\ \mathrm{D} \circ \gamma = h(\gamma) \circ \mathrm{D}\ \ .$$

L'application D *est appelée développante, le morphisme* h *morphisme d'holonomie.*

Si M désigne une variété complexe, une $(\,\mathrm{G}_{\mathbb{C}}\,,\ X_c\,)$ -structure sur M définie par une application développante D est compatible avec la structure complexe de M si et seulement si D est une application holomorphe.

3. Rigidité locale

Dans cette section on montre un résultat de rigidité locale indépendant de la structure holomorphe de M. Notons $\mathcal{D}(\mathrm{M})$ l'ensemble des développantes (non nécessairement holomorphes) de $(\,\mathrm{G}_{\mathbb{C}}\,,\ X_c\,)$ -structures sur M muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, et $\mathrm{D}iff^0(\mathrm{M})$ la composante connexe du groupe des difféomorphismes de $\tilde{\mathrm{M}}$ commutant à Γ. Le groupe produit $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \times \mathrm{D}iff^0(\mathrm{M})$ agit naturellement sur l'espace $\mathcal{D}(\mathrm{M})$, le premier facteur agissant par composition à gauche sur les développantes, le deuxième facteur par composition à droite.

Définition 3.1. *Une* $(\,\mathrm{G}_{\mathbb{C}}\,,\ X_c\,)$ *-structure de développante* $\mathrm{D} : \tilde{\mathrm{M}} \longrightarrow X_c$ *est dite localement rigide si l'orbite de* D *sous l'action du groupe* $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \times \mathrm{D}iff^0(\mathrm{M})$ *est ouverte dans l'espace* $\mathcal{D}(\mathrm{M})$ *.*

Proposition 3.2. *Soit* $\mathrm{M} = \Gamma \setminus X$ *un quotient lisse de volume fini de* X *, de dimension complexe* $n \geq 2$ *. Alors la* $(\,\mathrm{G}_{\mathbb{C}}\,,\ X_c\,)$ *-structure naturelle de* M *est localement rigide.*

Preuve. Notons $\mathrm{D}_0 : X \hookrightarrow X_c$ la $(\,\mathrm{G}_{\mathbb{C}}\,,\ X_c\,)$ -structure naturelle de M, d'holonomie $h_0 : \Gamma \overset{i}{\hookrightarrow} \mathrm{G} \subset \mathrm{G}_{\mathbb{C}}$, où i désigne l'injection canonique du réseau Γ dans le groupe G. D'après un théorème de déformation de Thurston ([5]), l'application $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ -équivariante

$$hol : \mathcal{D}(\mathrm{M})/\mathrm{D}iff^0(\mathrm{M}) \longrightarrow Hom(\Gamma, \mathrm{G}_{\mathbb{C}})$$

qui à une développante associe son morphisme d'holonomie est un homéomorphisme local (le terme de gauche est muni de la topologie quotient, le terme de droite de

la topologie compacte ouverte). La rigidité locale de D_0 dans $\mathcal{D}(M)$ équivaut donc à la rigidité locale du morphisme h_0 dans $Hom(\Gamma, G_{\mathbb{C}})$ pour l'action par conjugaison au but du groupe $G_{\mathbb{C}}$.
D'après un théorème de Weil [19, th. 6.7], l'annulation de la cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ implique la rigidité locale du morphisme h_0 dans $Hom(\Gamma, G_{\mathbb{C}})$, où $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est un Γ-module sous l'action $Ad_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} \circ h_o$ et $Ad_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ dénote la représentation adjointe du groupe $G_{\mathbb{C}}$. Remarquons que le Γ-module $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ s'identifie au Γ-module $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, où $\mathfrak{g}$ est un Γ-module sous $Ad_{\mathfrak{g}} \circ i$. Donc

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 0$$

d'après le théorème de rigidité de Weil [19, th.7.63]. D'où le résultat.

4. Un critère de rigidité globale

4.1. Fibrés de jets

Dans cette section nous rappelons des résultats sur les fibrés de jets ([9]). Soit M une variété complexe de dimension n et z un point de M. Etant donnés deux germes de biholomorphismes f et g de $(\mathbb{C}^n, 0)$ dans (M, z), on dira que f et g ont même k-jet s'ils ont mêmes dérivées partielles en zéro jusqu'à l'ordre k inclus. La classe d'équivalence de f ainsi définie est notée $j_k f$ et est appelée k-repère en z. On notera $F_k(M)_z$ la réunion des k-repères en z et $F_k(M)$ l'union disjointe $\amalg_{z\in M} F_k(M)_z$. L'ensemble $F_k(M)$ est naturellement muni d'une structure de variété complexe induite de celle de $\mathbb{C}^n$ et M.

Notons $G_k(\mathbb{C}^n)$ l'ensemble $F_k(\mathbb{C}^n)_0$, il est naturellement muni d'une structure de groupe de Lie complexe : si $j_k f$ et $j_k g$ sont deux k-repères de $G_k(\mathbb{C}^n)$, on définit le produit $j_k f \,.\, j_k g = j_k(f \circ g)$. Le groupe $G_k(\mathbb{C}^n)$ agit holomorphiquement à droite sur $F_k(M)$ selon : $\forall\, j_k f \in F_k(M)$, $\forall\, j_k g \in G_k(\mathbb{C}^n)$, $j_k f \,.\, j_k g = j_k(f \circ g)$. La projection naturelle de $F_k(M)$ dans M qui au k-repère $j_k f$ associe $f(0)$ fait alors de $F_k(M)$ un $G_k(\mathbb{C}^n)$-fibré principal holomorphe de base M. Etant donné une application holomorphe $f : M \longrightarrow N$ on notera $f_{(k)} : F_k(M) \longrightarrow F_k(N)$ le morphisme de fibré induit défini par :

$$\forall\, j_k f \in F_k(M), \;\; f_{(k)}(j_k g)) = j_k(f \circ g) \;\; .$$

Pour $k = 1$, le groupe $G_1(\mathbb{C}^n)$ s'identifie au groupe $GL(\mathbb{C}^n)$ et $F_1(M)$ est le $GL(n, \mathbb{C})$-fibré principal des repères holomorphes de M. Pour $k = 2$, le groupe $G_2(\mathbb{C}^n)$ s'identifie au produit semi-direct $G_1(\mathbb{C}^n) \ltimes (S^2(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathbb{C}^n)$.

Suivant [9], on définit une 1-forme canonique λ sur $F_1(M)$ à valeur dans $\mathbb{C}^n$ par :

$$\forall\, X \in TF_1(M)_{j_1 f}, \;\; \lambda(X) = (df)^{-1}_{f(0)}.(d\pi)_{j_1 f}.X$$

où $\pi : \mathrm{F}_1(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{M}$ désigne la projection canonique. De même on définit une 1-forme canonique θ sur $\mathrm{F}_2(\mathrm{M})$ à valeur dans $\mathrm{T}_e\mathrm{F}_1(\mathbb{C}^n) \simeq \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n) \oplus \mathbb{C}^n$:

$$\forall\, X \in \mathrm{TF}_2(\mathrm{M})_{j_2 f}, \quad \theta(X) = (df_1)^{-1}_{j_1 f}.(dp)_{j_2 f}.X$$

où $p : \mathrm{F}_2(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{F}_1(\mathrm{M})$ désigne la projection canonique.

4.2. Structures d'ordre 1 et 2 sur X_c [17]

Rappelons la

Définition 4.1. *Soit H un sous-groupe de $\mathrm{G}_k(\mathbb{C}^n)$. On appelle H-structure d'ordre k sur une variété complexe M de dimension n la donnée d'un H-fibré principal sous-fibré du $\mathrm{G}_k(\mathbb{C}^n)$-fibré principal $\mathrm{F}_k(\mathrm{M})$.*

L'espace homogène $X_c = \mathrm{G}_{\mathbb{C}}/Q_-$ est alors muni naturellement d'une $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$-structure F d'ordre 1 et d'une Q_--structure d'ordre 2. D'une part, on réalise $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ comme sous-groupe de $\mathrm{G}_1(\mathfrak{p}_+)$ en associant à l'élément g de $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ l'élément $j_1(\mathrm{E}^{-1} \circ g \circ \mathrm{E}) = \mathrm{A}d\, g_{|\,\mathfrak{p}_+}$ de $\mathrm{G}_1(\mathfrak{p}_+)$, où $\mathrm{A}d$ désigne la représentation adjointe de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$. L'application $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{F}_1(X_c)$ qui à l'élément g associe le repère $j_1(g \circ \mathrm{E})$ identifie alors le $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$-fibré principal $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}/\mathrm{P}_-$ à un sous-fibré du fibré $\mathrm{F}_1(X_c)$. D'autre part, Ochiai [17, lemma 9.1] montre le :

Lemme 4.2. ***[Ochiai]*** *L'application $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{F}_2(X_c)$ qui à g associe $j_2(g \circ \mathrm{E})$ et le morphisme de groupe $Q_- \longrightarrow \mathrm{G}_2(\mathfrak{p}_+)$ qui à g associe $j_2(\mathrm{E}^{-1} \circ g \circ \mathrm{E})$ sont injectifs.*

On réalise ainsi $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ comme Q_--structure d'ordre 2 sur X_c et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G}_{\mathbb{C}} & \hookrightarrow & \mathrm{F}_2(X_c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{G}_{\mathbb{C}}/\mathrm{P}_- & \hookrightarrow & \mathrm{F}_1(X_c) \end{array}$$

Remarque. Dans le cas où X_c est l'espace projectif $\mathbf{P}^n\mathbb{C}$, le fibré $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}/\mathrm{P}_- \longrightarrow X_c$ (resp. le fibré $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \longrightarrow X_c$) s'identifie au fibré des repères $\mathrm{F}_1(X_c)$ (resp. au fibré des 2-repères projectifs sur X_c).

4.3. Caractérisation locale des éléments de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$

Dans cette section, on caractérise les transformations locales de X_c provenant de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$:

Proposition 4.3. *Soit X_c un espace symétrique hermitien compact irréductible de dimension $n \geq 2$. Soient U et V deux ouverts de X_c et $\phi : U \longrightarrow \mathrm{V}$ un biholomorphisme. Il existe un élément g de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ tel que $\phi = g_{|U}$ si et seulement si le biholomorphisme $\phi_2 : \mathrm{F}_2(X_c)_{|U} \longrightarrow \mathrm{F}_2(X_c)_{|\mathrm{V}}$ préserve la Q_--structure $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ d'ordre 2 sur X_c.*

Proposition 4.4. *Sous les hypothèses de la proposition 4.3 et l'hypothèse supplémentaire que X_c n'est pas l'espace projectif $\mathbf{P}^n\mathbb{C}$, il existe un élément g de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ tel que $\phi = g_{|U}$ si et seulement si le biholomorphisme $\phi_1 : \mathrm{F}_1(X_c)_{|U} \longrightarrow \mathrm{F}_1(X_c)_{|\mathrm{V}}$ préserve la $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$-structure $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}/\mathrm{P}_-$ d'ordre 1 sur X_c.*

Remarque. Ces propositions ne sont pas valables pour $X_c = \mathbf{P}^1\mathbb{C}$: le fait qu'une transformation locale de $\mathbf{P}^1\mathbb{C}$ soit projective se caractérise par une équation différentielle d'ordre 3 (annulation de la dérivée schwartzienne) et non d'ordre 2.

Notons $\mathrm{A}^{\cdot}(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, \mathrm{V})$ l'espace des formes différentielles sur $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ à valeur dans un espace vectoriel V. Soit $\omega \in \mathrm{A}^1(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ la forme de Maurer-Cartan de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$: si $\mathrm{L}g$ désigne la translation à gauche par g sur $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$, la 1-forme ω est définie par : $\forall X \in \mathrm{T}_g(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}),\ \omega(X) = d(\mathrm{L}g^{-1}).X$.

Lemme 4.5. *Sous les hypothèses de la proposition 4.3, l'application ϕ_2 préserve la forme de Maurer-Cartan.*

Preuve. Notons $\tilde{U}$ (resp. $\tilde{\mathrm{V}}$) la restriction du Q_--fibré $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ au dessus de U (resp. V). Soit α la forme de $\mathrm{A}^1(\tilde{U}, \mathrm{G}_{\mathbb{C}})$ tel que $\phi_2^*(\omega_{|\tilde{\mathrm{V}}}) = \omega_{|\tilde{U}} + \alpha$, on veut montrer que α est nulle. Notons $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ la forme de $\mathrm{A}^2(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ courbure de ω, par définition $\Omega = 0$. Décomposons ω (resp. Ω) en somme directe $\omega_{\mathfrak{p}_-} \oplus \omega_{\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}} \oplus \omega_{\mathfrak{p}_+}$ (resp. $\Omega_{\mathfrak{p}_-} \oplus \Omega_{\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}} \oplus \Omega_{\mathfrak{p}_+}$) relativement à la décomposition triangulaire $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_- \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_+$. On vérifie facilement que la forme $\omega_{\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}} \oplus \omega_{\mathfrak{p}_+}$ de $\mathrm{A}^1(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_+)$ s'identifie à la restriction à $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ de la forme canonique θ de $\mathrm{A}^1(\mathrm{F}_2(X_c), \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}_+) \oplus \mathfrak{p}_+)$. En particulier par fonctorialité $\phi_2^*(\omega_{\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}} \oplus \omega_{\mathfrak{p}_+})) = (\omega_{\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}} \oplus \omega_{\mathfrak{p}_+})$ et donc la forme $\alpha = \phi_2^*(\omega_{\mathfrak{p}_-}) - \omega_{\mathfrak{p}_-}$ appartient à $\mathrm{A}^1(\tilde{U}, \mathfrak{p}_-)$. La nullité de $\phi_2^*(\Omega_{\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}})$ implique alors l'égalité :

$$\forall (X, Y) \in (\mathrm{T}\tilde{U})^2,\ \ [\omega_{\mathfrak{p}_+}(X), \alpha(Y)] + [\alpha(X), \omega_{\mathfrak{p}_+}(Y)] = 0 \ . \tag{1}$$

On en déduit d'abord :

$$\forall\, g \in \tilde{U},\ \forall\, x \in \mathfrak{p}_+,\ \forall\, y \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_-,\ \ [x, \alpha_{(g)}(d\mathrm{L}g.y)] = 0 \ .$$

Comme le crochet $[\ ,\ ] : \mathfrak{p}_+ \times \mathfrak{p}_- \longrightarrow \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ est non-dégénéré, la 1-forme α est nulle sur la distribution de plans de $\mathrm{T}\tilde{U}$ translatés à gauche de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_-$. Pour g dans $\tilde{U}$, notons alors $\alpha_g : \mathfrak{p}_+ \longrightarrow \mathfrak{p}_-$ l'application linéaire $\alpha_{(g)} \circ d\mathrm{L}g_{|\,\mathfrak{p}_+}$.

D'après l'équation (1), l'application α_g vérifie l'équation :

$$\forall\, x,y \in \mathfrak{p}_+,\ \ [x,\alpha(y)] + [\alpha(x),y] = 0$$

c'est-à-dire que α_g est un 1-cocycle pour la cohomologie de Spencer $H^1(\mathfrak{p}_+, ad_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}|\,\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$, où la décomposition $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{p}_- \oplus \mathfrak{k}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{p}_+$ induit une décomposition naturelle de la cohomologie $H^q(\mathfrak{p}_+, ad_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}|_{\mathfrak{p}_+})$ en somme directe $H^q(\mathfrak{p}_+, ad_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}|_{\mathfrak{p}_+}, \mathfrak{p}_-) \oplus H^q(\mathfrak{p}_+, ad_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}|_{\mathfrak{p}_+}, \mathfrak{k}_\mathbb{C}) \oplus H^q(\mathfrak{p}_+, ad_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}|_{\mathfrak{p}_+}, \mathfrak{p}_+)$ (cf. [12], [17]). D'après un théorème de Borel [1] (cf. aussi [11]), cette cohomologie est nulle. Donc α_g est un cobord, donc nulle. Finalement $\alpha = 0$ et $\phi_2^*(\omega) = \omega$.

La proposition 4.3 est alors une conséquence immédiate du lemme suivant dû à Ochiai [17, lemma 11.10 p.188], dont nous donnons une démonstration simple par souçi de complétude :

Lemme 4.6. ***[Ochiai]*** *Si l'application ϕ_2 préserve la forme de Maurer-Cartan ω, alors il existe un élément g de $\mathrm{G}_\mathbb{C}$ tel que $\phi = g_{|U}$.*

Preuve. Quitte à composer ϕ à droite et à gauche par des éléments de $\mathrm{G}_\mathbb{C}$, on peut supposer que U et V sont des voisinages du point eQ_- de X_c, que ϕ fixe eQ_- et que ϕ_2 fixe l'identité de $\mathrm{G}_\mathbb{C}$. On veut en déduire que ϕ est l'identité. Notons $U(\mathfrak{p}_+)$ (resp. $\mathrm{V}(\mathfrak{p}_+)$) l'ouvert de $\mathfrak{p}_+$ image réciproque de U (resp V) par l'application E, on peut supposer que $\mathrm{E} : U(\mathfrak{p}_+) \longrightarrow U$ (resp. $\mathrm{E} : \mathrm{V}(\mathfrak{p}_+) \longrightarrow \mathrm{V}$) est un biholomorphisme. Soit alors $\varphi : U(\mathfrak{p}_+) \longrightarrow \mathrm{V}(\mathfrak{p}_+)$ l'unique biholomorphisme tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{p}_+) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{V}(\mathfrak{p}_+) \\ \downarrow \mathrm{E} & & \downarrow \mathrm{E} \\ U & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{V} \end{array} \tag{2}$$

commute. Remarquons que $\varphi(0) = 0$. Comme l'application ϕ_2 est un biholomorphisme de $\tilde{U}$ dans $\tilde{\mathrm{V}}$ et que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P}_+ \times \mathrm{K}_\mathbb{C} \times \mathrm{P}_- & \longrightarrow & \mathrm{G}_\mathbb{C} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xyz \end{array}$$

est un biholomorphisme de $\mathrm{P}_+ \times \mathrm{K}_\mathbb{C} \times \mathrm{P}_-$ sur un ouvert de $\mathrm{G}_\mathbb{C}$ (théorème de Harish-Chandra, [23]), il existe des applications holomorphes $\psi : U(\mathfrak{p}_+) \longrightarrow \mathfrak{k}_\mathbb{C}$ et $\tau : U(\mathfrak{p}_+) \longrightarrow \mathfrak{p}_-$ s'annulant en zéro telles que :

$$\forall\, y \in U(\mathfrak{p}_+),\ \ \phi_2(e^y) = e^{\varphi(y)} e^{\psi(y)} e^{\tau(y)} \ .$$

Comme ϕ_2 préserve la forme de Maurer-Cartan, ϕ_2 préserve la distribution $\mathrm{K}er(\omega_{\mathfrak{p}_-} \oplus \omega_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}})$. Cette distribution est intégrable de feuille P_+ en l'identité de $\mathrm{G}_\mathbb{C}$. En particulier ϕ_2 envoie P_+ dans P_+, donc $\psi = \tau = 0$ et

$$\forall\, y \in U(\mathfrak{p}_+),\ \ \phi_2(e^y) = e^{\varphi(y)} \ . \tag{3}$$

Calculons ϕ_2 à partir de l'expression de ϕ donnée par (2) et réécrivons l'équation (3). Comme la sous-algèbre $\mathfrak{p}_+$ est abélienne il vient :

$$\forall\, y \in \tilde{U},\ \ j_2(x \mapsto \mathrm{E}(\varphi(y+x))) = j_2(x \mapsto \mathrm{E}(\varphi(y)+x)) \ \ .$$

On en déduit : $\forall\, y \in \tilde{U}$, $\mathrm{D}^2\varphi_{(y)} = 0$. L'application φ est donc affine, puis linéaire car $\varphi(0)=0$. Ecrivons que ϕ_2 préserve $\omega_{\mathfrak{p}_+}$, on en déduit que φ est l'identité. D'où le résultat.

Preuve de la proposition 4.4 :
D'après la proposition 4.3, il suffit de montrer que $\phi_2 : \mathrm{F}_2(X_c)_{|U} \longrightarrow \mathrm{F}_2(X_c)_{|\mathrm{V}}$ préserve la Q_--structure $\mathrm{G}_\mathbb{C}$. Quitte à composer ϕ à droite et à gauche par des éléments de $\mathrm{G}_\mathbb{C}$, on peut supposer que U et V sont des voisinages du point eQ_- de X_c, que ϕ fixe eQ_- et que ϕ_1 fixe le point $e\mathrm{P}_-$ de la $\mathrm{K}_\mathbb{C}$-structure $\mathrm{G}_\mathbb{C}/Q_-$ sur X_c. Comme l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P}_+ \times \mathrm{K}_\mathbb{C} \times \mathrm{P}_- & \longrightarrow & \mathrm{G}_\mathbb{C} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xyz \end{array}$$

est un biholomorphisme de $\mathrm{P}_+ \times \mathrm{K}_\mathbb{C} \times \mathrm{P}_-$ sur un ouvert de $\mathrm{G}_\mathbb{C}$, on peut définir une section holomorphe i du fibré $\mathrm{G}_\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{G}_\mathbb{C}/\mathrm{P}_-$ sur un voisinage de $e\mathrm{P}_-$ contenant U et V par $xy.\mathrm{P}_- \longmapsto xy$.

Lemme 4.7. $\phi_1^*(i^*(\omega_{\mathfrak{p}_+} \oplus \omega_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}})) = i^*(\omega_{\mathfrak{p}_+} \oplus \omega_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}})$

Preuve. Remarquons que $i^*\omega_{\mathfrak{p}_+}$ s'identifie à la restriction à $\mathrm{G}_\mathbb{C}/\mathrm{P}_-$ de la forme canonique λ de $\mathrm{A}^1(\mathrm{F}_1(X_c), \mathfrak{p}_+)$ définie à la section 4.1. Par fonctorialité, $\phi_1^*(i^*\omega_{\mathfrak{p}_+}) = i^*\omega_{\mathfrak{p}_+}$. Soit alors β la forme de $\mathrm{A}^1(\tilde{U}/\mathrm{P}_-, \mathfrak{k}_\mathbb{C})$ définie par $\phi_1^*(i^*\omega_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}}) = i^*\omega_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}} + \beta$. Comme sur $\mathrm{G}_\mathbb{C}$ on a l'égalité $\Omega_{\mathfrak{p}_+} = d\omega_{\mathfrak{p}_+} + \frac{1}{2}([\omega_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}}, \omega_{\mathfrak{p}_+}] + [\omega_{\mathfrak{p}_+}, \omega_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}}])$, il vient

$$\phi_1^*(i^*\Omega_{\mathfrak{p}_+}) = i^*\Omega_{\mathfrak{p}_+} + \frac{1}{2}([\beta, i^*\omega_{\mathfrak{p}_+}] + [i^*\omega_{\mathfrak{p}_+}, \beta]) \ \ .$$

Mais $\Omega_{\mathfrak{p}_+} = 0$ d'où l'égalité :

$$\forall\, X, Y \in \mathrm{T}(\tilde{U}/\mathrm{P}_-),\ \ [\beta(X), i^*\omega_{\mathfrak{p}_+}(Y)] + [i^*\omega_{\mathfrak{p}_+}(X), \beta(Y)] \ = \ 0 \tag{4}$$

On en déduit d'abord que

$$\forall\, g\mathrm{P}_- \in \tilde{U}/\mathrm{P}_-,\ \forall\, x \in \mathfrak{p}_+,\ \forall\, y \in \mathfrak{k}_\mathbb{C},\ \ [x, \beta_{(g\mathrm{P}_-)}(d(\pi \circ \mathrm{L}g)_e.y] = 0$$

où π désigne la projection $\mathrm{G}_\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{G}_\mathbb{C}/\mathrm{P}_-$. Mais la représentation $ad : \mathfrak{k}_\mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}_+)$ est fidèle, donc la 1-forme β est nulle sur la distribution de plans de $\mathrm{T}(\tilde{U}/\mathrm{P}_-)$ translatée à gauche de $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$. Pour tout point $g\mathrm{P}_-$ de $\tilde{U}/\mathrm{P}_-$, notons $\beta_{g\mathrm{P}_-} : \mathfrak{p}_+ \longrightarrow \mathfrak{k}_\mathbb{C}$ l'application $\beta_{(g\mathrm{P}_-)} \circ d(\pi \circ \mathrm{L}g)_{(e),|\,\mathfrak{p}_+}$. D'après l'équation (4), l'application $\beta_{g\mathrm{P}_-}$ vérifie l'équation

$$\forall\, x, y \in \mathfrak{p}_+,\ \ [\beta_{g\mathrm{P}_-}(x), y] + [x, \beta_{g\mathrm{P}_-}(y)] = 0$$

c'est-à-dire que $\beta_{g\mathrm{P}_-}$ définit un cocycle pour la cohomologie de Spencer $H^1(\mathfrak{p}_+, ad_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}|_{\mathfrak{p}_+}, \mathfrak{k}_\mathbb{C})$. Comme $X_c \neq \mathbf{P}^n\mathbb{C}$, cette cohomologie est nulle d'après [1], [11]. Donc $\beta_{g\mathrm{P}_-}$ est un cobord, donc nul. Finalement $\beta = 0$.
□

Considérons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F}_2(X_c)_{|U} & \xrightarrow{\phi_2} & \mathrm{F}_2(X_c)_{|\mathrm{V}} \\ i_U \uparrow & & \uparrow i_\mathrm{V} \\ \tilde{U}/\mathrm{P}_- & \xrightarrow{\phi_1} & \tilde{\mathrm{V}}/\mathrm{P}_- \end{array} .$$

On définit une section $s_\mathrm{V} : \tilde{\mathrm{V}}/\mathrm{P}_- \longrightarrow \mathrm{F}_2(X_c)_{|\mathrm{V}}$ par $s_\mathrm{V} = \phi_2 \circ i_U \circ \phi_1^{-1}$. Soit θ la 1-forme canonique sur $\mathrm{F}_2(\mathrm{M})$ définie à la section 4.1. Comme $\phi_2^*(\theta) = \theta$ par fonctorialité et que la restriction de θ à $\mathrm{G}_\mathbb{C}$ s'identifie à $\omega_{\mathfrak{p}_+} \oplus \omega_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}}$, on déduit du lemme précédent l'égalité :

$$s_\mathrm{V}^*\theta = \phi_1^{-1*}(i_U^*(\omega_{\mathfrak{p}_+} \oplus \omega_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}})) = i_\mathrm{V}^*(\omega_{\mathfrak{p}_+} \oplus \omega_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}}) = i_\mathrm{V}^*\theta$$

Au vu de la définition de θ, l'égalité $s_\mathrm{V}^*\theta = i_\mathrm{V}^*\theta$ implique l'égalité $s_\mathrm{V} = i_\mathrm{V}$. Le diagramme précédent est donc commutatif et $\phi_2(i_U(\tilde{U}/\mathrm{P}_-)) = i_\mathrm{V}(\tilde{\mathrm{V}}/\mathrm{P}_-))$. Par extension de groupe structural de $\mathrm{K}_\mathbb{C}$ à Q_-, $\phi_2(\tilde{U}) = \tilde{\mathrm{V}}$, ce qui achève la preuve de la proposition 4.4.

4.4. Critère de rigidité globale

On déduit des propositions 4.3 et 4.4 la

Proposition 4.8. *Soit X_c un espace symétrique hermitien compact irréductible de dimension $n \geq 2$. Soit M une variété complexe de dimension n. L'espace de module $\mathcal{T}_{(\mathrm{G}_\mathbb{C}, X_c)}(\mathrm{M})$ des $(\mathrm{G}_\mathbb{C}, X_c)$-structures sur M compatibles avec sa structure holomorphe s'injecte dans l'espace des sections holomorphes du fibré $\mathrm{F}_2(\mathrm{M})/Q_-$ de fibre la variété affine $\mathrm{G}_2(\mathfrak{p}_+)/Q_-$. Si de plus $X_c \neq \mathbf{P}^n\mathbb{C}$, l'espace $\mathcal{T}_{(\mathrm{G}_\mathbb{C}, X_c)}(\mathrm{M})$ s'injecte dans l'espace des sections holomorphes du fibré $\mathrm{F}_1(\mathrm{M})/\mathrm{K}_\mathbb{C}$ de fibre la $\mathrm{K}_\mathbb{C}$-variété affine $\mathrm{GL}(\mathfrak{p}_+)/\mathrm{K}_\mathbb{C}$.*

Preuve. Soit $\mathrm{D} : \tilde{\mathrm{M}} \longrightarrow X_c$ la développante holomorphe d'une $(\mathrm{G}_\mathbb{C}, X_c)$-structure compatible sur M, d'holonomie $h : \pi_1\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{G}_\mathbb{C}$. Comme D est un biholomorphisme local, le pull-back $\mathrm{D}^*(\mathrm{F}_2(X_c))$ (resp. $\mathrm{D}^*(\mathrm{F}_1(X_c))$ s'identifie à $\mathrm{F}_2(\tilde{\mathrm{M}})$ (resp. à $\mathrm{F}_1(\tilde{\mathrm{M}})$) et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}^*(\mathrm{G}_\mathbb{C}) \subset \mathrm{F}_2(\tilde{\mathrm{M}}) & \longrightarrow & \mathrm{G}_\mathbb{C} \subset \mathrm{F}_2(X_c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{D}^*(\mathrm{G}_\mathbb{C}/\mathrm{P}_-) \subset \mathrm{F}_1(\tilde{\mathrm{M}}) & \longrightarrow & \mathrm{G}_\mathbb{C}/\mathrm{P}_- \subset \mathrm{F}_1(X_c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\mathrm{M}} & \xrightarrow{\mathrm{D}} & X_c \end{array}$$

est naturellement $\pi_1\mathrm{M}$-équivariant.

On obtient ainsi une flèche $\mathcal{T}_{(\mathrm{G}_{\mathbb{C}},X_c)}(\mathrm{M}) \longrightarrow H^0(\mathrm{M}, \mathrm{F}_2(\mathrm{M})/Q_-)$ qui à la développante D associe la section holomorphe s_2^{D} de $\mathrm{F}_2(\mathrm{M})/Q_-$ définie par la Q_--structure d'ordre 2 $\pi_1(\mathrm{M}) \setminus \mathrm{D}^*(\mathrm{G}_{\mathbb{C}})$ sur M. Cette flèche est injective : si D et D' sont deux développantes telles que les sections s_2^{D} et $s_2^{\mathrm{D}'}$ coïncident, pour tout ouvert U de $\tilde{\mathrm{M}}$ sur lequel les restrictions $\mathrm{D}_{|U}$ et $\mathrm{D}'_{|U}$ sont injectives la transformation locale $\mathrm{D}'_{|U} \circ \mathrm{D}_{|U}^{-1}$ de X_c préserve alors la Q_--structure $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ d'ordre 2 sur X_c. D'après la proposition 4.3, il existe alors un élément g de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ tel que $\mathrm{D}'_{|U} = g \circ \mathrm{D}_{|U}$, c'est-à-dire que les développantes D et D' sont équivalentes.

De même on obtient une flèche $\mathcal{T}_{(\mathrm{G}_{\mathbb{C}},X_c)}(\mathrm{M}) \longrightarrow H^0(\mathrm{M}, \mathrm{F}_1(\mathrm{M})/\mathrm{K}_{\mathbb{C}})$ qui à la développante D associe la section holomorphe s_1^{D} de $\mathrm{F}_1(\mathrm{M})/\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ définie par la $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-structure d'ordre 1 $\pi_1(\mathrm{M}) \setminus \mathrm{D}^*(\mathrm{G}_{\mathbb{C}}/\mathrm{P}_-)$ sur M. Quand $X_c \neq \mathbf{P}^n\mathbb{C}$, cette flèche est injective comme précédemment d'après la proposition 4.4.

Le théorème 1.2 est alors une conséquence des

Proposition 4.9. *Soit* $\mathrm{M} = \Gamma \setminus X$ *un quotient lisse de volume fini d'un espace symétrique hermitien irréductible de type non-compact* $X = \mathrm{G}/\mathrm{K}$*, de dimension complexe* $n \geq 2$*. Alors le fibré (non-vectoriel) holomorphe* $\mathrm{F}_1(\mathrm{M})/\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ *admet une unique section holomorphe.*

Proposition 4.10. *Soit* $\mathrm{M} = \Gamma \setminus \mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ *un quotient lisse de volume fini de l'espace hyperbolique complexe* $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ *de dimension complexe* $n \geq 2$*. Alors le fibré holomorphe* $\mathrm{F}_2(\mathrm{M})/Q_-$ *admet une unique section holomorphe.*

5. Preuve des proposition 4.9 et 4.10

5.1. Fibrés automorphes

Commençons par des rappels sur les fibrés automorphes. Etant donnée une Q_--variété Z, on note $\mathrm{F}_{\mathrm{Z},X_c}$ le fibré holomorphe $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$-équivariant $\mathrm{G}_{\mathbb{C}} \times_{Q_-} \mathrm{Z}$ de fibre Z de base X_c et $\mathrm{F}_{\mathrm{Z},X}$ le fibré holomorphe G-équivariant restriction de $\mathrm{F}_{\mathrm{Z},X_c}$ à l'ouvert X de X_c. Si $\mathrm{M} = \Gamma \setminus X$ est un quotient compact lisse de X, on note F_{Z} le fibré holomorphe $\Gamma \setminus \mathrm{F}_{\mathrm{Z},X}$ de fibre Z sur M. Si l'action de Q_- sur Z est induite d'une action de $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ étendue trivialement sur le radical unipotent P_- de Q_-, le fibré F_{Z} s'identifie topologiquement au fibré $(\Gamma \setminus \mathrm{G}) \times_{\mathrm{K}} \mathrm{Z}$. On pose alors la

Définition 5.1. *Soit* Z *une* $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$*-variété et* $\mathrm{M} = \Gamma \setminus X$ *un quotient compact de* X*, on appelle fibré automorphe de base* M *associé à* Z *le fibré holomorphe* F_{Z}.

Exemples :
Le fibré tangent holomorphe TM (resp. cotangent holomorphe $\mathrm{T^*M}$) de $\mathrm{M} = \Gamma \setminus X$ s'identifie au fibré *vectoriel* automorphe $\mathrm{F}_{\mathfrak{p}_+}$ (resp. $\mathrm{F}_{\mathfrak{p}_-}$, où l'on identifie $\mathfrak{p}_-$ au dual $\mathfrak{p}_+^*$ de $\mathfrak{p}_+$ par la forme de Killing de $\mathrm{G}_\mathbb{C}$). Le fibré des repères $\mathrm{F}_1(\mathrm{M})$ s'identifie au fibré automorphe $\mathrm{F}_{\mathrm{GL}(\mathfrak{p}_+)}$, le fibré $\mathrm{F}_1(\mathrm{M})/\mathrm{K}_\mathbb{C}$ au fibré automorphe $\mathrm{F}_{\mathrm{GL}(\mathfrak{p}_+)/\mathrm{K}_\mathbb{C}}$. Par contre le fibré $\mathrm{F}_2(\mathrm{M})$, qui s'identifie au fibré $\mathrm{F}_{\mathrm{G}_2(\mathfrak{p}_+)}$, n'est pas automorphe : l'action de P_- sur $\mathrm{G}_2(\mathfrak{p}_+)$ par multiplication à gauche n'est pas triviale.

5.2. Un résultat d'annulation pour les fibrés vectoriels automorphes

La stratégie pour démontrer la proposition 4.9 consiste à réaliser le fibré automorphe $\mathrm{F}_1(\mathrm{M})/\mathrm{K}_\mathbb{C} = \mathrm{F}_{\mathrm{GL}(\mathfrak{p}_+)/\mathrm{K}_\mathbb{C}}$ comme sous-fibré d'un fibré *vectoriel* automorphe F_N dont on contrôle les sections holomorphes.

Commençons par donner un critère d'annulation pour un fibré vectoriel automorphe associé à une représentation irréductible de $\mathrm{K}_\mathbb{C}$. Avec les notations de 2.2, soit λ un poids entier dominant de $\mathrm{K}_\mathbb{C}$ relativement à $\Delta^+_{\mathfrak{k}}$ et soit $\mathrm{F}(\lambda)$ le $\mathrm{K}_\mathbb{C}$-module de plus haut poids associé. Si $\alpha \in \Delta$ et $\lambda \in {\mathfrak{h}_\mathbb{C}}^*$, on note $\lambda_\alpha = 2 < \lambda, \alpha > / < \alpha, \alpha >$. Soit β l'unique racine maximale non-compacte de Δ^+ (c'est-à-dire le plus haut poids de $\mathfrak{p}_+$ relativement à $\Delta^+_{\mathfrak{k}}$). Remarquons que la condition $\lambda_\beta < 0$ équivaut facilement à la positivité stricte au sens de Griffiths de $\mathrm{F}_{\mathrm{F}(\lambda)}$. On a alors le résultat dû à Mok [14, p.211] :

Théorème 5.2. *[Mok] Si $\lambda_\beta \geq 0$ alors $H^0(\mathrm{M}, \mathrm{F}_{\mathrm{F}(\lambda)}) = 0$, sauf si $\lambda = 0$ (i.e. $\mathrm{F}(\lambda)$ est le fibré trivial et $H^0(\mathrm{M}, \mathcal{O}_\mathrm{M}) = \mathbb{C}$).*

Ce théorème de Mok est un corollaire de son théorème de rigidité pour les métriques à courbure semi-négative sur M [13]. Nous en donnons ici une démonstration simple dans le cas où Γ est cocompact, comme cas particulier d'un résultat plus précis de théorie des représentations.

Preuve dans le cas Γ cocompact :

Notons $N(\lambda)$ le $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$-module $N(\lambda) = U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_+)} \mathrm{F}(\lambda)$, où $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ (resp. $U(\mathfrak{q}_+)$) désigne l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ (resp. de $\mathfrak{q}_+$). Le $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$-module $N(\lambda)$ est un module de plus haut poids et admet un unique quotient irréductible, noté $\mathrm{L}(\lambda)$ ([7]). Rappelons que le $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$-module $\mathrm{L}(\lambda)$ est dit *unitarisable* s'il est équivalent au $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$-module des vecteurs $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$-finis d'une représentation unitaire de G.

Proposition 5.3. *Si le $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$-module $\mathrm{L}(\lambda)$ n'est pas unitarisable, alors* $H^0(\mathrm{M}, \mathrm{F}_{\mathrm{F}(\lambda)}) = 0$.

Preuve. L'espace des sections lisses de $\mathrm{F}_{\mathrm{F}(\lambda)}$ s'identifie évidemment aux $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ -invariants $(\mathcal{C}^{\infty}(\Gamma \setminus \mathrm{G}) \otimes \mathrm{F}(\lambda))^{\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}}$, où l'action de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ sur $\mathcal{C}^{\infty}(\Gamma \setminus \mathrm{G})$ est induite par la multiplication à droite de K sur G et l'action sur $\mathrm{F}(\lambda)$ est donnée par la structure de $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ -module de $\mathrm{F}(\lambda)$. L'espace des sections holomorphes de $\mathrm{F}_{\mathrm{F}(\lambda)}$ s'identifie alors aux $\mathfrak{q}_-$ -invariants $(\mathcal{C}^{\infty}(\Gamma \setminus \mathrm{G}) \otimes \mathrm{F}(\lambda))^{\mathfrak{q}_-}$, où l'action de $\mathfrak{q}_-$ sur $\mathcal{C}^{\infty}(\Gamma \setminus \mathrm{G})$ est induite par la multiplication à droite de G sur G et l'action de $\mathfrak{p}_-$ sur $\mathrm{F}(\lambda)$ est triviale ([12], [20]). C'est-à-dire :

$$H^0(\mathrm{M}, \mathrm{F}_{\mathrm{F}(\lambda)}) = Hom_{\mathfrak{q}_-}(\mathrm{F}(\lambda)^*, \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma \backslash \mathrm{G})) \ ,$$

où $\mathrm{F}(\lambda)^*$ désigne le $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -module dual de $\mathrm{F}(\lambda)$. Comme le réseau Γ de G est cocompact, la représentation unitaire $\mathrm{L}^2(\Gamma \setminus \mathrm{G})$ de G se décompose en somme hilbertienne dénombrable de représentations irréductibles unitaires de multiplicités finies :

$$\mathrm{L}^2(\Gamma \backslash \mathrm{G}) = \bigoplus_{\pi \in \hat{\mathrm{G}}} m_\pi(\Gamma) \ . \ \pi$$

où $\hat{\mathrm{G}}$ désigne le dual unitaire de G et $m_\pi(\Gamma)$ la multiplicité de π dans $\mathrm{L}^2(\Gamma \setminus \mathrm{G})$. D'après un théorème de Matsushima et Murakami ([12]) on a alors :

$$H^0(\mathrm{M}, \mathrm{F}_{\mathrm{F}(\lambda)}) = \sum_{\pi \in \hat{\mathrm{G}}} m_\pi(\Gamma) \ . \ Hom_{\mathfrak{q}_-}(\mathrm{F}(\lambda)^* \, , \, \pi) \ .$$

D'après le théorème de réciprocité de Frobenius :

$$Hom_{\mathfrak{q}_-}(\mathrm{F}(\lambda)^* \, , \, \pi) = Hom_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_-)} \mathrm{F}(\lambda)^* \, , \, \pi) \ .$$

Soit alors σ une involution de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ valant -1 sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ et envoyant $\mathfrak{g}_\alpha$ sur $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ (une telle involution, dite de Chevalley, existe d'après [2, prop.5, p.103]). En particulier l'involution σ préserve $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ et échange $\mathfrak{p}_+$ et $\mathfrak{p}_-$. Pour tout $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -module (resp. $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ -module) V , notons ${}^\sigma\mathrm{V}$ le $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -module (resp. $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ -module) obtenu en tordant l'action de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$) par σ . Si V est un $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -module unitarisable, alors ${}^\sigma\mathrm{V}$ l'est aussi. Si V désigne un $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ -module, on a l'égalité

$${}^\sigma(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_-)} \mathrm{V}) \simeq U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_+)} {}^\sigma\mathrm{V} \ .$$

Comme le $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ -module ${}^\sigma(\mathrm{F}(\lambda)^*)$ est équivalent à $\mathrm{F}(\lambda)$, on a en particulier l'équivalence de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -modules

$${}^\sigma(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_-)} \mathrm{F}(\lambda)^*) \simeq N(\lambda) \ .$$

Finalement,

$$\begin{aligned} H^0(\mathrm{M}, \mathrm{F}_{\mathrm{F}(\lambda)}) &= \textstyle\sum_{\pi \in \hat{\mathrm{G}}} m_\pi(\Gamma) \ . \ Hom_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}({}^\sigma(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_-)} \mathrm{F}(\lambda)^*) \, , \, {}^\sigma\pi) \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in \hat{\mathrm{G}}} m_\pi(\Gamma). \ Hom_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(N(\lambda) \, , \, {}^\sigma\pi) \\ &= \textstyle\sum_{\pi \in \hat{\mathrm{G}}} m_{{}^\sigma\pi}(\Gamma) \ . \ Hom_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(N(\lambda) \, , \, \pi) \ . \end{aligned}$$

Dire que le $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -module $\mathrm{L}(\lambda)$ n'est pas unitarisable, c'est dire que pour tout π dans $\hat{\mathrm{G}}$, $Hom_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(N(\lambda), \pi)) = 0$. D'où le résultat.

Le théorème 5.2 dans le cas cocompact est alors un corollaire de la classification par Enright, Howe et Wallach [4] des modules de plus haut poids unitarisables pour les paires hermitiennes. On déduit des lemmes 7.4 , 8.4 , 9.4 , 10.4 , 11.4 . 12.4 et 13.4 de [4] que si $\lambda_\beta \geq 0$ alors le G-module $L(\lambda)$ n'est pas unitarisable, sauf si $\lambda = 0$.
Etant donné maintenant un $K_{\mathbb{C}}$ -module N de dimension finie, non-nécessairement irréductible, la mise en oeuvre du résultat précédent nécessite de connaitre la décomposition en modules irréductibles de N . Lorsqu'on cherche à plonger la $K_{\mathbb{C}}$ -variété affine $GL(\mathfrak{p}_+)/K_{\mathbb{C}}$ de façon $K_{\mathbb{C}}$ -équivariante dans un $K_{\mathbb{C}}$ -module N , il semble difficile en général de déterminer cette décomposition. Ainsi, dans le cas où $G = SU(p,q)$, l'espace $\mathfrak{p}_+$ s'identifie naturellement au produit tensoriel $\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q$, le groupe $K_{\mathbb{C}}$ au produit $S(GL(\mathbb{C}^p) \times GL(\mathbb{C}^q))$ des matrices de $GL(\mathbb{C}^p) \times GL(\mathbb{C}^q)$ de déterminant 1 ; le quotient $GL(\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q)/S(GL(\mathbb{C}^p) \times GL(\mathbb{C}^q))$ se réalise naturellement dans $\bigwedge^i S^2(\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q)$, où i désigne un entier convenable. Sauf pour des cas simples, je ne sais pas décomposer ce module en $S(GL(\mathbb{C}^p) \times GL(\mathbb{C}^q))$ -modules irréductibles.

Définissons alors une classe de $K_{\mathbb{C}}$ -modules pour lesquels nous obtenons un théorème simple d'annulation. Soit V un $K_{\mathbb{C}}$ -module de dimension finie, le centre $Z(K_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C}^*$ de $K_{\mathbb{C}}$ agit réductivement sur V . Un poids de cette action sera dit positif s'il a même signe que le poids de $Z(K_{\mathbb{C}})$ sur $\mathfrak{p}_+$. On pose alors la

Définition 5.4. *Soit* V *un* $K_{\mathbb{C}}$ *-module de dimension finie. L'action de* $Z(K_{\mathbb{C}})$ *sur* V *est dite positive si tous ses poids sont positifs ou nuls.*

Remarque:
Une action triviale de $Z(K_{\mathbb{C}})$ sur un $K_{\mathbb{C}}$ -module V de dimension finie est positive. D'autre part l'action de $Z(K_{\mathbb{C}})$ sur V est positive si et seulement si elle l'est pour chacune des $K_{\mathbb{C}}$ -composantes irréductibles de V .

On obtient alors le

Théorème 5.5. *Soit* V *un* $K_{\mathbb{C}}$ *-module de dimension finie tel que le centre* $Z(K_{\mathbb{C}})$ *de* $K_{\mathbb{C}}$ *agit positivement sur* V *et* $V^{K_{\mathbb{C}}} = 0$. *Alors* $H^0(M, F_V) = 0$.

Preuve. On peut supposer V irréductible de la forme $F(\lambda)$. D'après la proposition 5.2, il suffit de montrer que λ_β est strictement positif. Soit $\mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}^*$ l'hyperplan vectoriel de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}{}^*$ engendré par $\Delta_{\mathfrak{k}}$. Soit ζ l'élément de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}{}^*$ défini par $< \zeta, \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}^* >= 0$ et $\zeta_\beta = 1$. Le poids λ de $K_{\mathbb{C}}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\lambda = \mu + y\zeta$, où $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}}^*$ désigne un plus haut poids de la partie semi-simple $[K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}]$ de $K_{\mathbb{C}}$ relativement à $\Delta_{\mathfrak{k}}^+$ et y désigne un nombre réel (poids relatif du centre $Z(K_{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C}^*$ sur $F(\lambda)$). On a alors l'égalité $\lambda_\beta = \mu_\beta + y$. Dire que le centre $Z(K_{\mathbb{C}})$ agit positivement sur $F(\lambda)$, c'est dire que $y \geq 0$. D'autre part on vérifie aisément que β est strictement dominant pour $\Delta_{\mathfrak{k}}^{+}$. Comme μ est $\Delta_{\mathfrak{k}}^{+}$-dominant, on en déduit l'inégalité $\mu_\beta \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\mu = 0$. Finalement $\lambda_\beta \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\mathrm{F}(\lambda)$ est la représentation triviale. Comme $\mathrm{V}^{\mathrm{K}_\mathbb{C}} = 0$, on en déduit que $\lambda_\beta > 0$ et donc $\mathrm{L}(\lambda)$ n'est pas unitarisable.

5.3. Preuve de la proposition 4.9

Lemme 5.6. *Soit* L *un groupe algébrique complexe linéaire réductif connexe et* (ρ, W) *un* L*-module rationnel irréductible de dimension finie. Il existe un* $\mathrm{GL}(\mathrm{W})$*-module* N *de dimension finie et un point* f *de* N *tels que :*
1. La $\mathrm{GL}(\mathrm{W})$*-orbite de* f *dans* N *s'identifie à l'espace homogène* $\mathrm{GL}(\mathrm{W})/\rho(\mathrm{L})$.
2. Le centre $\mathrm{Z}(\mathrm{L})$ *de* L *agit trivialement sur* N.

Preuve. Comme le groupe L est réductif, l'image $\rho(\mathrm{L})$ est un sous-groupe réductif de $\mathrm{GL}(\mathrm{W})$ et le quotient $\mathrm{GL}(\mathrm{W})/\rho(\mathrm{L})$ est une $\mathrm{GL}(\mathrm{W})$-variété affine. D'après un théorème classique de Chevalley [18, th.1.5], il existe un $\mathrm{GL}(\mathrm{W})$-module rationnel N de dimension finie et un point f de N tel que la $\mathrm{GL}(\mathrm{W})$-orbite de f dans N s'identifie à l'espace homogène $\mathrm{GL}(\mathrm{W})/\rho(\mathrm{L})$. Comme W est L-irréductible, l'image $\rho(\mathrm{Z}(\mathrm{L}))$ est contenue dans le centre de $\mathrm{GL}(\mathrm{W})$. En particulier l'action de $\mathrm{Z}(\mathrm{L})$ sur l'orbite $\mathrm{GL}(\mathrm{W}).f \simeq \mathrm{GL}(\mathrm{W})/\rho(\mathrm{L})$ est triviale. Quitte à remplacer N par le sous-espace vectoriel de N engendré par $\mathrm{GL}(\mathrm{W}).f$, l'action de $\mathrm{Z}(\mathrm{L})$ sur N est triviale.

Preuve de la proposition 4.9 :
Notons Z la $\mathrm{GL}(\mathfrak{p}_+)$-variété $\mathrm{GL}(\mathfrak{p}_+)/\mathrm{K}_\mathbb{C}$, le fibré automorphe $\mathrm{F}_1(\mathrm{M})/\mathrm{K}_\mathbb{C} = \mathrm{F}_\mathrm{Z}$ admet une section holomorphe canonique induite par l'application constante de G dans Z de valeur $e\,\mathrm{K}_\mathbb{C}$. Soit N et f comme dans le lemme précédent appliqué à $\mathrm{L} = \mathrm{K}_\mathbb{C}$ et $\mathrm{W} = \mathfrak{p}_+$. La réalisation de Z comme sous-variété de N induit la réalisation du fibré automorphe F_Z comme sous-fibré du fibré vectoriel automorphe F_N. Notons V un $\mathrm{K}_\mathbb{C}$-module supplémentaire du $\mathrm{K}_\mathbb{C}$-module des invariants $N^{\mathrm{K}_\mathbb{C}}$ dans N (un tel module existe puisque $\mathrm{K}_\mathbb{C}$ est réductif). La décomposition $N = N^{\mathrm{K}_\mathbb{C}} \oplus \mathrm{V}$ induit la décomposition de fibrés holomorphes $\mathrm{F}_N = \mathrm{F}_{N^{\mathrm{K}_\mathbb{C}}} \oplus \mathrm{F}_\mathrm{V}$. D'une part $H^0(\mathrm{M}, \mathrm{F}_\mathrm{V}) = 0$ d'après le théorème 5.5. D'autre part, le fibré $\mathrm{F}_{N^{\mathrm{K}_\mathbb{C}}}$ s'identifie holomorphiquement au fibré trivial sur M de fibre $N^{\mathrm{K}_\mathbb{C}}$, ses section holomorphes sont induites par les applications constantes de G à valeur dans $N^{\mathrm{K}_\mathbb{C}}$. Soit alors s une section holomorphe de F_Z, elle est donc induite par une application constante de G à valeur dans $N^{\mathrm{K}_\mathbb{C}} \cap \mathrm{Z}$. Mais le point $e\,\mathrm{K}_\mathbb{C}$ est le seul point fixe de $\mathrm{Z} = H/\mathrm{K}_\mathbb{C}$ sous $\mathrm{K}_\mathbb{C}$, la section s est donc la section canonique de F_Z.

5.4. Preuve de la proposition 4.10

Nous redémontrons ici le résultat de Mok-Yeung. Notons $X = \mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 2$. Rappelons que le groupe $\mathrm{G}_2(\mathfrak{p}_+)$ s'identifie au produit semi-direct $\mathrm{GL}(\mathfrak{p}_+) \ltimes (\mathrm{S}^2\mathfrak{p}_+^* \otimes \mathfrak{p}_+)$. Considérons $\mathrm{S}^2\mathfrak{p}_+^* \otimes \mathfrak{p}_+$ comme sous-GL($\mathfrak{p}_+$)-module de $\mathfrak{p}_+^* \otimes \mathrm{E}nd\,\mathfrak{p}_+$, et notons $(\mathrm{S}^2\mathfrak{p}_+^* \otimes \mathfrak{p}_+)_0$ l'intersection de $\mathrm{S}^2\mathfrak{p}_+^* \otimes \mathfrak{p}_+$ avec $\mathfrak{p}_+^* \otimes \mathrm{E}nd_0\,\mathfrak{p}_+$, où $\mathrm{E}nd_0\,\mathfrak{p}_+$ désigne le $\mathrm{GL}(\mathfrak{p}_+)$-module des endomorphismes de $\mathfrak{p}_+$ de trace nulle. On a alors la décomposition en $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ -modules irréductibles : $\mathrm{S}^2\mathfrak{p}_+^* \otimes \mathfrak{p}_+ = (\mathrm{S}^2\mathfrak{p}_+^* \otimes \mathfrak{p}_+)_0 \oplus \mathfrak{p}_+^*$. En particulier le radical unipotent P_- agit trivialement sur la Q_- -variété $\mathrm{G}_2(\mathfrak{p}_+)/Q_-$, qui s'identifie alors au $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$ -module $(\mathrm{S}^2\mathfrak{p}_+^* \otimes \mathfrak{p}_+)_0$. Un équivalent de la proposition 4.8 est alors la

Proposition 5.7. *Soit* M *une* $(\mathbf{P}\,\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C}),\ \mathbf{P}^n\,\mathbb{C})$ *-variété compacte. L'espace* $\mathcal{T}_{(\mathbf{P}\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{C}),\mathbf{P}^n\mathbb{C})}(\mathrm{M})$ *des structures projectives complexes sur* M *compatibles avec sa structure holomorphe s'injecte dans l'espace des sections holomorphes* $H^0(\mathrm{M}, (\mathrm{S}^2\mathrm{T}^*\mathrm{M} \otimes \mathrm{TM})_0)$.

Remarque. Le fibré $(\mathrm{S}^2\mathrm{T}^*\mathrm{M} \otimes \mathrm{TM})_0$ n'est autre que le fibré $\pi_* Hom(\mathrm{L}, \mathrm{S})$ de Mok et Yeung [15, prop.2.1].

Pour conclure la preuve de la proposition 4.10, nous appliquons le théorème 5.2. Choisissons comme sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ la sous-algèbre des matrices diagonales de $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$, notons α_i , $1 \leq i \leq n$, la forme linéaire définie sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ par $\alpha_i(x_1, \cdots, x_{n+1}) = x_i - x_{i+1}$ et choisissons

$$\begin{array}{rcl} \Delta^+ & = & \{\beta_{i,j} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j,\ \ 1 \leq i \leq j \leq n\} \\ \Delta^+_{\mathfrak{k}} & = & \{\beta_{i,j},\ \ 1 \leq i \leq j < n\} \\ \Delta^+_{\mathfrak{p}} & = & \{\beta_{i,n},\ \ 1 \leq i \leq n\} \end{array} .$$

On vérifie immédiatement que le $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ -module irréductible $(\mathrm{S}^2\mathfrak{p}_+^* \otimes \mathfrak{p}_+)_0$ a pour plus haut poids $-\alpha_n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_1$ relativement à $\Delta^+_{\mathfrak{k}}$. Ainsi, pour $n > 2$ on a $< \lambda, \alpha_i >= 0$ pour $2 \leq i \leq n-2$, $< \lambda, \alpha_1 >= 1$, $< \lambda, \alpha_{n-1} >= 2$ et $< \lambda, \alpha_n >= -3$. Pour $n = 2$, on a $< \lambda, \alpha_1 >= 3$ et $< \lambda, \alpha_2 >= -3$. Comme $\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, on a finalement $\lambda_\beta = 0$: le fibré $\mathrm{F}_{\mathrm{V}} = \mathrm{F}_{\mathrm{F}(\lambda)}$ n'a que la section constante nulle comme section holomorphe.

References

[1] A. Borel, On the curvature tensor of the Hermitian symmetric manifolds, *Ann. of Math.* **71** (1960), 508–521.
[2] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, chap.7 et 8, éd. Hermann, 1975.
[3] E. Calabi, E. Vesentini, On compact, locally symmetric Kähler manifolds, *Ann. of Math.* **71** (1960), 472–507.
[4] T. Enright, R. Howe, N. Wallach, A classification of unitary highest weight modules. Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982), 97–143, *Progr. Math.* **40**, Birkhäuser Boston, 1983.

[5] W. Goldman, Geometric Structures on manifolds and varieties of representations, *Contemporary Mathematics* **74** (1988).

[6] J.-M. Hwang, N. Mok, Uniruled projective manifolds with irreducible reductive G-structures, *J. Reine Angew. Math.* **490** (1997), 55–64.

[7] J. C. Jantzen, Moduln mit einem höchsten Gewicht. (German) [Modules with a highest weight] *Lecture Notes in Mathematics* **750**, Springer-Verlag, 1979.

[8] M. Kapovich, On monodromy of complex projective structures, *Invent.Math.* **119** (1995), 243-265.

[9] S. Kobayashi, Canonical forms on frame bundles of higher order contact, (1961) Proc. Sympos. Pure Math. Vol. III, pp. 186–193.

[10] S. Kobayashi, T. Ochiai, Holomorphic structures modeled after compact Hermitian symmetric spaces. Manifolds and Lie groups (Notre Dame, Ind., 1980), pp. 207–222, *Progr. Math.*, **14**, Birkhäuser, Boston, 1981.

[11] B. Kostant, Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem, *Ann. of Math.* **74** (1961), 329–387.

[12] Y. Matsushima, S. Murakami, On certain cohomology groups attached to Hermitian symmetric spaces *Osaka J. Math.* **2** (1965), 1–35.

[13] N. Mok, Uniqueness theorems of Hermitian metrics of seminegative curvature on quotients of bounded symmetric domains, *Ann. of Math.* **125** (1987), 105–152.

[14] N. Mok, *Metric rigidity theorem on Hermitian Symmetric Manifolds*, World Science Publishing, Singapore 1989.

[15] N. Mok, S. K. Yeung, *Geometric realizations of uniformization of conjugates of hermitian locally symmetric manifolds* in Complex Analysis and Geometry, ed. V. Ancona and A.Silva, New York, Plenum Press 1992, 253-270.

[16] G. D. Mostow, Strong rigidity of locally symmetric spaces, *Annals of Mathematics Studies*, **78**. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1973.

[17] T. Ochiai, Geometry associated with semisimple flat homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **152** (1970), 159–193.

[18] V. L. Popov, E. B. Vinberg, Invariant theory, in Algebraic Geometry IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1994.

[19] M. S. Raghunathan, Discrete subgroups of Lie groups, *Ergeb. der Math.* **68** (1972).

[20] C. S. Rajan, Vanishing theorems for cohomologies of automorphic vector bundles, *J. Differential Geom.* **43** (1996), 376–409.

[21] Y. T. Siu, The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds *Ann. of Math.* **112** (1980), 73–111.

[22] A. Weil, Remarks on the cohomology of groups, *Ann. of Math.* **80** (1964), 149-157.

[23] J. A. Wolf, Fine structure of Hermitian symmetric spaces. Symmetric spaces (Short Courses, Washington Univ., St. Louis, Mo., 1969–1970), pp. 271–357. *Pure and App. Math.* **8**, Dekker, New York, 1972.

Bruno Klingler
Centre de Mathématiques - CNRS UMR 7640
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex
France
e-mail: klingler@math.polytechnique.fr

(Received: September 23, 1999)