

Pincement de polynômes

Peter Haïssinsky

Abstract. Let $f_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be a semi-hyperbolic polynomial in the sense of Carleson–Jones–Yoccoz with an attracting point. The goal of this paper is to show that one can define a semi-hyperbolic deformation $(f_t)_{t \geq 0}$ such that the attracting cycle becomes parabolic for the limit polynomial f_∞ and that f_0 and f_∞ are semi-conjugate. This deformation is defined by *pinching curves* in appropriate quotient spaces.

Mathematics Subject Classification (2000). Primaire 37F30; Secondaire 30C62.

Mots clés. Ensemble de Julia, déformation quasiconforme, point parabolique, polynôme semi-hyperbolique.

Soient $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme de degré $d \geq 2$ et J_f son ensemble de Julia, lieu des points pour lesquels la suite des itérés $(f^n)_{n \geq 1}$ n'est normale dans aucun voisinage. Supposons que f est semi-hyperbolique [4], *i.e.* f n'a aucun point parabolique et tout point critique de l'ensemble de Julia est non récurrent. On suppose aussi que f admet un cycle attractif α . On se propose de définir une *déformation par pincement* de ce polynôme afin de rendre α parabolique (voir aussi [12, 13, 14, 18, 5, 19]). Cette déformation admet une limite f_∞ polynomiale qui est semi-conjugue à f . Ce type de déformation a tout d'abord été introduit par P. Makienko pour montrer, par l'absurde, que des composantes stables de fractions rationnelles hyperboliques de degré fixé n'étaient pas relativement compactes.

A chaque point attractif, répulsif ou parabolique, on associe une surface de Riemann : soient f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$, et α un point k -périodique ; on note $\rho = (f^k)'(\alpha)$ son *multiplieur*.

▷ Si $0 < |\rho| < 1$, alors α est attractif : pour tout voisinage assez petit U de α , $f^k(U) \subset \subset U$, et $\mathbb{T}_\alpha = (U \setminus \{\alpha\})/(f^k)$ est un tore.

▷ Si $|\rho| > 1$, alors α est répulsif : pour tout voisinage assez petit U de α , $U \subset \subset f^k(U)$, et $\mathbb{T}_\alpha = (U \setminus \{\alpha\})/(f^{-k})$ est un tore.

▷ Si $\rho = e^{2i\pi(p/q)}$, alors α est parabolique ; il existe un multiple de q secteurs U disjoints issus de α , tel que tout point de U soit attiré par α , et $U/(f^k)$ est un cylindre isomorphe à \mathbb{C}/\mathbb{Z} . De même avec f^{-k} .

La déformation par pincement consiste à déformer un tore attractif et un tore

répulsif pour qu'ils deviennent des cylindres \mathbb{C}/\mathbb{Z} . Pour faire cela, on *pince* une courbe fermée simple non homotopiquement triviale sur les tores. En choisissant convenablement une normalisation, on montre que ces points sont attirés l'un vers l'autre et on finit par obtenir un point parabolique.

Le résultat principal de cet article peut s'énoncer comme suit (Théorème 4.1 donne un énoncé plus précis) :

Théorème. *Soit f un polynôme semi-hyperbolique ayant un point fixe attractif $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe des arcs $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ contenus dans le bassin immédiat du point α tels que $f(\gamma_i) = \gamma_{i+1 \bmod q}$; ces arcs sont disjoints des orbites critiques; ils relient α à un cycle q -répulsif et l'action de f sur ces arcs a pour nombre de rotation p/q .*

Alors il existe une application continue $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de degré 1 qui semi-conjugué f à un polynôme g de même degré tels que :

- (a) *les fibres de φ sont les réunions connexes des préimages de $\overline{\cup \gamma_i}$ et sinon des points;*
- (b) *l'image de $\overline{\cup \gamma_i}$ est un point parabolique de g .*

Dans la suite, il sera commode de considérer un polynôme avec un **ensemble de Julia connexe**.

Le plan des prochaines sections est le suivant :

- on définit la déformation par pincement localement et on montre que notre schéma fonctionne sur un modèle;
- on définit la déformation par pincement dans un cadre général en s'inspirant de celle de P. Makienko et en utilisant la construction *d'étoiles* dans un bassin attractif due à C. Petersen [17];
- on montre que pour les polynômes semi-hyperboliques, les limites possibles du pincement sont bien contrôlées par le polynôme de départ; on utilise à cet effet d'une part, que les bords des composantes connexes bornées de l'ensemble de Fatou sont des quasicerclles, et d'autre part, un modèle dû à C. T. McMullen qui estime le module de quadrilatères indépendamment de certaines déformations quasiconformes. On traite d'abord le cas des polynômes à allure monomiale. Nous avons choisi cette progression afin de traiter les difficultés techniques une à une.

Notes. – Cet article est une extension du Chap. 7 de ma thèse de doctorat [9].

- [6] et [15] contiennent les démonstrations des résultats classiques de dynamique holomorphe utilisés ici.
- D'autre part, nous aurons recours à la notion de modules d'anneaux et de longueur extrémale, ainsi que de la théorie des applications quasiconformes telles qu'elles sont exposées *e.g.* dans [1, 2, 20].

Remerciements. Ce travail n'a pu être effectué que grâce aux nombreuses discussions que j'ai eu le plaisir d'avoir avec J. H. Hubbard et K. Pilgrim dans un

premier temps, et A. Douady et M. Flexor ensuite. C. Petersen et M. Shishikura, qui étaient les rapporteurs de ma thèse, m'ont fait des commentaires avisés qui ont grandement clarifié l'exposition : je leur en suis très reconnaissant. Je tiens aussi à remercier Tan Lei pour avoir relu très soigneusement des parties du manuscrit et m'avoir signalé des erreurs. Enfin, je remercie le rapporteur pour ses suggestions et ses remarques.

1. Pincement d'une paire attractif/répulsif

Dans ce paragraphe, on montre comment, à partir de deux points fixes attractif et répulsif respectivement, on peut définir une déformation à l'aide de formes de Beltrami qui, à la limite, donne un germe parabolique.

On définit un modèle de la manière suivante.

Notons les bandes

$$\begin{cases} \mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} z| < \pi\}; \\ \mathcal{B}_0 = \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}; \\ \mathcal{B}_+ = \{z \in \mathbb{C}, \pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi\}; \\ \mathcal{B}_- = \{z \in \mathbb{C}, -\pi < \operatorname{Im} z < -\pi/2\}. \end{cases}$$

On définit alors l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x + iy \in \mathcal{B}_0 &\mapsto x + iy \\ x + iy \in \mathcal{B}_+ &\mapsto x + i(\pi/2 + \operatorname{tg}(y - \pi/2)) \\ x + iy \in \mathcal{B}_- &\mapsto x + i(-\pi/2 + \operatorname{tg}(y + \pi/2)). \end{aligned}$$

Cette application est localement quasiconforme et

$$\begin{cases} \mu_\Phi(x + iy) = -\operatorname{tg}^2(y \mp \pi/2)/(2 + \operatorname{tg}^2(y \mp \pi/2)) \\ K_\Phi(x + iy) = 1 + \operatorname{tg}^2(y \mp \pi/2) \end{cases}$$

sur \mathcal{B}_\pm . Soit $\sigma > 0$; on note $\tau : z \mapsto z + \sigma$.

On considère alors $\exp : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ et on conjugue τ par \exp afin d'obtenir $f(w) = e^\sigma w$ (modèle du *pincement*). Notons $\gamma = \overline{\exp(\mathbb{R} + i\pi)} = \overline{\mathbb{R}_-}$.

Définition du pincement. On définit d'abord sur \mathcal{B} la famille de formes de Beltrami (tronquées) $(\nu_t)_{t \geq 0}$ suivante (voir Fig. 1) :

- si $|\operatorname{Im} z| < 2\operatorname{arctg} t$, on pose $\nu_t(z) = \mu_\Phi(z)$;
- si $\pi > |\operatorname{Im} z| \geq 2\operatorname{arctg} t$, on pose $\nu_t(z) = \mu_\Phi(2i\operatorname{arctg} t)$.

De façon équivalente, on définit un champ d'ellipses, constant sur les horizontales, tel que le grand axe de chaque ellipse soit horizontal, le petit vertical, et leur rapport soit $K_\Phi(z)$ sur $\{|\operatorname{Im} z| \leq 2\operatorname{arctg} t\}$ et sinon, constant à $K_\Phi(2i\operatorname{arctg} t)$.

Cette famille est invariante par translations réelles, et définit un chemin dans l'espace de Teichmüller réduit de l'anneau $A = \mathcal{B}/\tau$: soit $\overline{\Phi}_t : A \rightarrow A_t = \overline{\Phi}_t(A)$

une famille continue de solutions de l'équation de Beltrami. Le module de A_t tend vers l'infini avec t , et A_t tend vers $\mathbb{C}/\sigma\mathbb{Z}$ car une solution de ν_t est

$$\begin{aligned} \Phi_t : \mathcal{B} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \Phi(z) && \text{si } |\operatorname{Im}z| < 2\operatorname{arctg}t, \\ z &\mapsto \operatorname{Re}z + \Phi(2i\operatorname{arctg}t) \\ &\quad + i.K_\Phi(2i\operatorname{arctg}t).(|\operatorname{Im}z| - 2\operatorname{arctg}t)) && \text{si } \pi > |\operatorname{Im}z| \geq 2\operatorname{arctg}t, \end{aligned}$$

et ces solutions commutent avec τ .

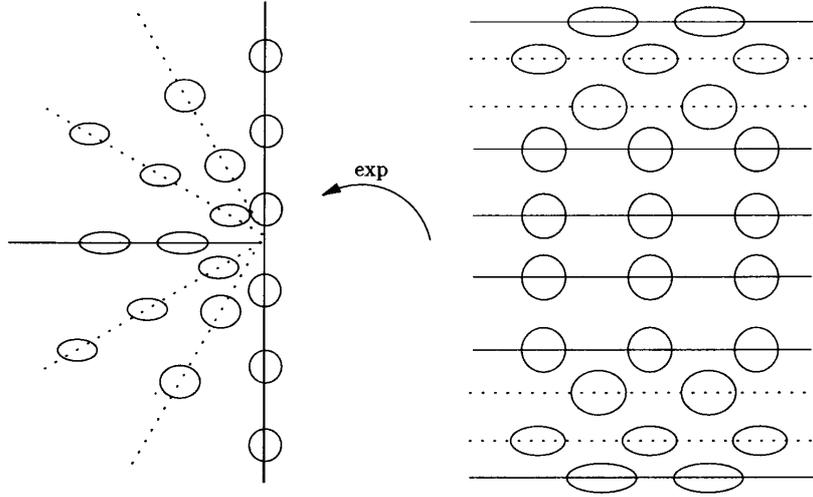


Figure 1. Modèle du pincement.

On définit $(\mu_t)_{t \geq 0}$ en transportant par \exp la famille $(\nu_t)_{t \geq 0}$. Soit ϕ_t la solution de l'équation de Beltrami de μ_t qui fixe le triplet $(\infty, 1, e^\sigma)$ (théorème d'intégration des formes de Beltrami, [1]). Le conjugué f_t de f par ϕ_t est aussi une homographie. La famille $(f_t, \phi_t)_{t \geq 0}$ représente un *pincement* du germe f .

Convergence du pincement. Le but de cette fin de paragraphe est de montrer la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Les familles $(f_t)_{t \geq 0}$ et $(\phi_t)_{t \geq 0}$ admettent des limites f_∞ et ϕ_∞ pour la convergence uniforme dans la métrique sphérique, qui vérifient les propriétés suivantes :*

- (a) $f_\infty(z) = z + e^\sigma - 1$ est une translation,
- (b) ϕ_∞ est localement quasiconforme de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ sur \mathbb{C} , et $\phi_\infty(\gamma) = \{\infty\}$,
- (c) $f_\infty \circ \phi_\infty = \phi_\infty \circ f$.

On utilise le lemme suivant.

Lemme 1.2. Notons $Q = [-1, 1] \times [-\pi/4, \pi/4]$ et considérons $\mathcal{A} = \mathcal{B} \setminus Q$. On a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{mod}_{\nu_t} \mathcal{A} = \infty.$$

Démonstration du Lemme 1.2. En normalisant les Φ_t par des homothéties h_t centrées à l'origine pour que $h_t \circ \Phi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, il est clair que le diamètre de $Q_t = h_t \circ \Phi_t(Q)$ tend vers zéro avec t , donc $\text{mod}_{\nu_t}(\mathcal{A}) \rightarrow \infty$. \square

Démonstration de la Prop. 1.1. Comme $(\phi_t)_t$ est une famille localement uniformément quasiconforme et normalisée sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$, on peut extraire une suite $t_n \rightarrow \infty$ telle que $(\phi_{t_n})_n$ converge uniformément sur tout compact de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ vers une application injective localement quasiconforme $\phi_\infty : \overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{C}$, car $\infty \in \gamma$ et $\phi_t(\infty) = \infty$ (compacité des applications quasiconformes normalisées à distorsion uniformément bornée, voir [1]).

D'après le Lemme 1.2, on en déduit que ϕ_∞ est surjective sur \mathbb{C} , car $\Phi_t \circ \exp \circ \phi_t^{-1} : \phi_t(\overline{\mathbb{C}} \setminus (\exp(Q) \cup \gamma)) \rightarrow \Phi_t(\mathcal{A})$ est conforme. En fait, la convergence est uniforme sur $\overline{\mathbb{C}}$ car $\phi_t(\gamma)$ tend vers ∞ d'après le Lemme 1.2 et le fait que ϕ_∞ est non constante. Donc (b) est satisfait.

On pose $f_\infty = \phi_\infty \circ f \circ \phi_\infty^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est bien définie, conforme et sans point fixe; donc f_∞ est une translation et la normalisation implique que $f_\infty(z) = z + e^\sigma - 1$. Par suite, (a) et (c) en découlent.

On a donc montré que de toute suite $t_n \rightarrow \infty$, on peut extraire une sous-suite (t_{n_k}) telle que :

- $f_{t_{n_k}}$ a pour limite f_∞ ;
- $\phi_{t_{n_k}}$ a une limite ϕ_∞ ;
- et $\phi_\infty \circ f = f_\infty \circ \phi_\infty$.

Supposons que l'on ait deux limites (f_∞, ϕ_∞) et $(f_\infty, \hat{\phi})$. Alors l'application $\hat{\phi} \circ \phi_\infty^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est bien définie : c'est un automorphisme du plan qui fixe deux points : du coup, on a unicité de la limite. \square

2. Définition générale du pincement

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. On suppose qu'il existe un point périodique α attractif non critique. On se propose dans ce paragraphe de définir une déformation par pincement f liée au point α . *Grosso modo*, le pincement consiste à produire une collision entre points périodiques afin d'obtenir un point parabolique (voir Fig. 2). Après avoir donné la définition de la convergence d'un pincement, on montrera un résultat partiel de convergence (Prop. 2.2). Commençons par un modèle.

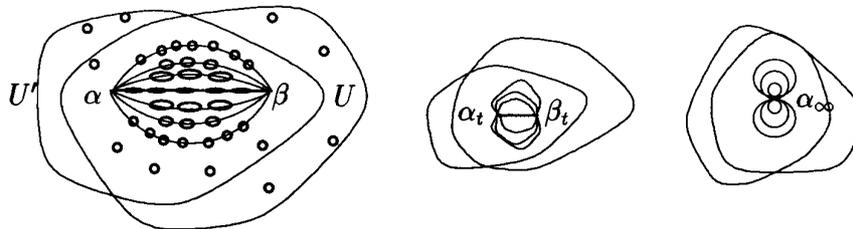


Figure 2. Un pincement où $f : U' \rightarrow U$ est conforme, et α et β sont des points fixes attractif et répulsif respectivement.

Modèle floral p/q . Considérons notre translation $\tau : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. On conjugue τ par

$$z \mapsto w = \frac{e^z}{e^z + 1}$$

afin d'obtenir une application de Moebius $w \mapsto F(w)$ qui fixe 0 et 1. Pour tout $q \geq 1$ (entier) et tout $(p/q) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $p \wedge q = 1$, on peut relever de manière unique F au voisinage de \mathbb{D} par l'application $\zeta \mapsto w = \zeta^q$ en $F_{p/q}$ de manière à ce que $F_{p/q}(1) = e^{2i\pi(p/q)}$. L'origine a pour multiplicateur $e^{\sigma/q} \cdot e^{2i\pi(p/q)}$ et 1 devient un cycle q -périodique de nombre de rotation p/q et de multiplicateur $e^{-q\sigma}$. Quitte à renverser les rôles de $\pm\infty \subset \mathcal{B}$, l'origine est attractive ou répulsive.

On peut alors définir la déformation par pincement de $F_{p/q}$ en transportant la famille ν_t du premier paragraphe. L'analogie de la Proposition 1.1 est vraie, en normalisant les solutions pour qu'elles fixent l'origine et qu'elles soient tangentes à l'identité à l'infini.

Étoiles d'un bassin attractif. Soit Ω un domaine attractif d'une fraction rationnelle f . Nous donnons ici une description plutôt sommaire de la construction de ces étoiles. Pour des justifications, nous invitons le lecteur à se reporter à [17], §3.

Soit $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ l'application linéarisante de Koenigs qui semi-conjugué f à $z \mapsto \lambda z$. Les points critiques de κ sont les points précritiques de f . Si L est une détermination de $\log \lambda$, l'application \exp est un revêtement de \mathbb{C}^* et notre application linéaire se relève en la translation de vecteur L . Les points critiques de κ différents de l'origine se relèvent en un demi-réseau

$$\Lambda = \{-nL + 2im\pi + \omega_j, (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$$

où les ω_j (en nombre fini) sont des logarithmes des points critiques de f qui ont une orbite infinie (dans Ω).

Considérons les droites passant par Λ et parallèles à $q \cdot L - 2ip\pi$. Par \exp , elles sont transformées en $kq (< \infty)$ spirales ou droites disjointes joignant 0 à l'infini et formant k cycles par la multiplication par λ . Ces courbes contiennent donc l'image

de tous les points précritiques de f qui ne tombent pas sur le point attractif, ainsi que leurs orbites. Notons \hat{U}_j le complémentaire de ces courbes dans \mathbb{C}^* et \tilde{U}_j des représentants dans le plan (par \exp). Ceux-ci sont des bandes invariantes par la translation de vecteur $qL - 2ip\pi$. On considère enfin $\tilde{\gamma}_j$ les droites “centrales” de \tilde{U}_j . Posons $\hat{\gamma}_j = \exp \tilde{\gamma}_j$. Ces kq courbes se regroupent en k cycles. Par construction, ces cycles ont pour *nombre de rotation* p/q , *i.e.* l’action de $z \mapsto \lambda \cdot z$ sur ces courbes est une rotation d’angle $2i\pi(p/q)$.

Nous pouvons enfin définir l’étoile associée à (f, L) . On note U_j^f l’unique composante connexe de $\kappa^{-1}(\hat{U}_j)$ qui contient le point attractif dans sa fermeture, et γ_j^f les courbes leur correspondant.

Définitions. La $(L, p/q)$ étoile $\mathcal{E}_{L, p/q, f}$ associée à f est l’intérieur de

$$\bigcup_{0 \leq j < kq} \overline{U}_j^f.$$

L’ouvert U_j^f est la j -ème bande et la courbe γ_j^f sa vertèbre. On notera enfin la réunion des fermetures des vertèbres γ .

Par construction, cette étoile est un voisinage du point α et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est univalente ; les vertèbres sont disjointes des orbites critiques.

Par extension, on appellera aussi étoile tout cycle de U_j^f extrait.

On définit le bout d’une vertèbre par $\overline{U}_j \setminus \Omega$. En ce qui nous concerne, on a le lemme suivant :

Lemme 2.1. (C. Petersen). *Si f^q est définie et holomorphe au voisinage d’un point “ x_j ” de chaque bout de l’étoile alors ces x_j sont ces bouts, et forment des cycles. La période de ces points est ou bien 1, ou bien q .*

En particulier, si f est une fraction rationnelle alors il s’agit de cycles q -périodiques de nombre de rotation p/q .

Remarque. Si Ω est simplement connexe, notons $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ sa représentation conforme qui envoie le point attractif α (de multiplicateur λ) sur l’origine et B le produit de Blaschke conjugué à f . Si $\beta \in \mathbb{S}^1$ est un point q -périodique de B , on dit qu’il a pour *nombre de rotation de Poincaré* p/q si la restriction de B à ce cycle peut être prolongée en un homéomorphisme du cercle de nombre de rotation p/q (ceci n’est pas toujours le cas : voir [3]). Pour chaque nombre de rotation rationnel, il existe au moins un cycle répulsif ayant ce nombre de rotation (voir entre autres [3, 8]). En degré deux, il n’existe qu’un seul cycle sur le cercle unité de nombre de rotation de Poincaré donné ; en revanche, dès le degré trois, L. Goldberg [8] montre qu’il y en a toujours plus. Il n’est de plus pas clair que l’on puisse définir une étoile par cycle accessible.

Définition d’un pincement de f . Sans perte de généralité, supposons que α est un point fixe attractif.

À p/q fixé, on considère une étoile $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{L,p/q,f}$. D'après le Lemme 2.1, à chaque cycle est associé un point β au bout, q -répulsif ou parabolique au bord du bassin immédiat de α . Il est de nombre de rotation p/q .

Par la suite, on **suppose** que β est **répulsif**.

Au niveau des tores quotients de ces deux cycles, la projection $\bar{\gamma}$ dans le tore \mathbb{T}_β (associé à f^q) de γ est fermée, simple, située dans la trace de la composante de α , et disjointe des grandes orbites critiques. Sur le tore \mathbb{T}_α (associé à f), $\bar{\gamma}$ devient une courbe simple de nombre de rotation p/q , correspondant à l'ordre cyclique de l'orbite de β . Par suite, $\mathbb{T}_\alpha \setminus \bar{\gamma}$ est un anneau.

On considère un revêtement universel $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{T}_\alpha \setminus \bar{\gamma}$ tel que l'équateur de l'anneau se relève en \mathbb{R} , et on pose $\bar{\mu}_t = \pi_* \nu_t$. Cette famille est ensuite relevée dans le plan dynamique, puis prolongée par zéro sur le reste afin qu'elle soit f -invariante sur toute la sphère.

Soient φ_t les solutions de l'équation de Beltrami ayant une normalisation fixée, et f_t les conjuguées de f par φ_t : ce sont des fractions rationnelles. La famille $(f_t, \varphi_t)_{t \geq 0}$ ainsi définie représente un *pincement* de f .

Remarque. Si β est parabolique, on construit un pincement en remplaçant le tore répulsif par des cylindres \mathbb{C}/\mathbb{Z} associés aux pétales répulsifs qui intersectent l'étoile.

Définitions. (i) On appelle *support du pincement* $S = \cup_{n \geq 0} f^{-n}(\gamma)$.

(ii) On dit qu'un pincement (f_t, φ_t) est *convergent* si :

(a) (f_t, φ_t) convergent uniformément sur \mathbb{C} vers $(f_\infty, \varphi_\infty)$;

(b) chaque composante connexe du support du pincement est une fibre de φ_∞ dont l'image est un point préparabolique, et les autres fibres sont des points.

En particulier, si le pincement est convergent, alors $\varphi_\infty \circ f = f_\infty \circ \varphi_\infty$, $J_{f_\infty} = \varphi_\infty(J_f)$ et $\varphi_\infty(\gamma)$ est un point parabolique de bassin l'image de celui du point α .

Pincement dans un bassin. Soit f une fraction rationnelle ayant un point fixe attractif α de bassin immédiat Ω ; on considère le pincement $(f_t, \varphi_t)_{t \geq 0}$ associé à une étoile $\mathcal{E}_{L,p/q}$. Par construction, la restriction $f : \Omega \setminus S \rightarrow \Omega \setminus S$ est propre. On considère $\hat{\Omega}$ une composante connexe de $\Omega \setminus S$ qui contient α dans son bord. L'application de premier retour $f^q : \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$ est propre de degré $d \geq 2$. En effet, si on note V l'intérieur de $\cup_{0 \leq j < q} f^j(\hat{\Omega})$, alors $f : V \rightarrow V$ serait une isométrie pour la métrique de Poincaré, mais $f(\alpha) = \alpha$ et $|f'(\alpha)| < 1$; donc on a un point critique de f qui ne peut être sur S par construction. Soit donc c un point critique de $f^q|_{\hat{\Omega}}$. On note T la trace dans $\hat{\Omega}$ du bord d'un disque linéarisable du point α ; par suite, $\{f^{qn}(T)\}_{n \geq 0}$ détermine le bout premier associé à α dans $\hat{\Omega}$ (voir [2]).

Sans hypothèse de convergence du pincement, on a :

Proposition 2.2. (Pincement dans un bassin). *Avec les notations précédentes, si on normalise φ_t par $\varphi_t(c, f^q(c), \alpha) = (c, f^q(c), \alpha)$ alors, pour toute suite $t_n \rightarrow \infty$, et quitte à en extraire une sous-suite,*

(i) $\varphi_{t_n} : \hat{\Omega} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ convergent uniformément sur les compacts vers un homéomorphisme localement quasiconforme $\varphi_\infty : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_\infty = \varphi_\infty(\hat{\Omega})$;

(ii) les applications $f_{t_n}^q$ convergent uniformément sur les compacts de Ω_∞ vers une application $g : \Omega_\infty \rightarrow \Omega_\infty$ propre de degré d ;

(iii) l'application g est la restriction d'une fraction rationnelle et Ω_∞ est une composante de Fatou parabolique de g dont le point est déterminé par $\{\varphi_\infty(f^{qn}(T))\}_n$.

La paire limite (Ω_∞, g) est unique à application conforme près.

Remarque. La normalisation seule ne permet pas *a priori* de montrer la convergence de tout le chemin, ni de montrer que le point parabolique est α . Mais si $\alpha \in \partial\Omega_\infty$, alors la Proposition 2.2 montre que le point parabolique est bien α .

Démonstration. Soit (t_n) une suite qui tend vers l'infini. Comme les $\varphi_{t_n} : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ sont localement uniformément quasiconformes et normalisés, on peut extraire par un procédé diagonale une sous-suite (t_{n_k}) telle que $(\varphi_{t_{n_k}})$ converge uniformément sur les compacts de $\hat{\Omega}$ vers un homéomorphisme $\varphi_\infty : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_\infty$. Par suite, $(f_{t_{n_k}}^q)$ converge vers une application $g : \Omega_\infty \rightarrow \Omega_\infty$.

Soit $\kappa : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application linéarisante de α . Il existe une constante $a \in \mathbb{C}^*$ et une détermination du logarithme telles que $a \log \kappa(\hat{\Omega}) = \mathcal{B}$, et il existe $\sigma > 0$ tel que $a \log \kappa(f^q(z)) = a \log \kappa(z) + \sigma$. L'application $h = \Phi_\infty \circ a \log \kappa \circ \varphi_\infty^{-1} : \Omega_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et surjective par définition, et $h \circ g(z) = h(z) + \sigma$. Ceci montre l'existence de coordonnées de Fatou dans Ω_∞ , donc Ω_∞ est parabolique et $\partial\Omega_\infty \subset J_g$. Si ce n'était pas le cas, h ne serait pas surjective sur tout \mathbb{C} , car g est propre sur Ω_∞ .

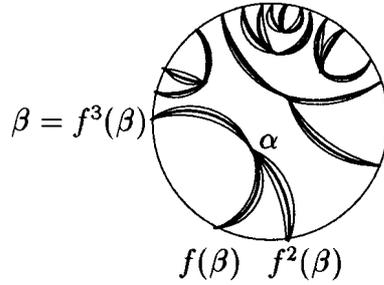
Les limites des φ_t sont localement quasiconformes et satisfont la même équation de Beltrami, d'où l'unicité. \square

3. Cas à allure monomiale

On considère maintenant un polynôme $f : z \mapsto z^d + c(\lambda)$, $0 < |\lambda| < 1$, où $c(\lambda)$ est une constante telle que f admette un point fixe de multiplicateur λ .

L'ensemble de Julia de f est un quasicerle, et il existe une application quasiconforme qui conjugue f à $z \mapsto z^d$ au voisinage de leurs ensembles de Julia, *i.e.* J_f est transformé en \mathbb{S}^1 .

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{L,p/q}$ une étoile qui joint α à un cycle β q -répulsif et de nombre de rotation p/q . On considère le pincement (f_t, φ_t) associé à cette étoile que l'on normalise par les conditions suivantes : $\varphi_t(0) = 0$ et $\varphi_t(z) = z + O(1)$ au voisinage de l'infini (voir Fig. 3).

Figure 3. Support du pincement avec $p/q = 1/3$.

Le résultat principal de ce paragraphe est :

Théorème 3.1. *Le pincement (f_t, φ_t) est convergent.*

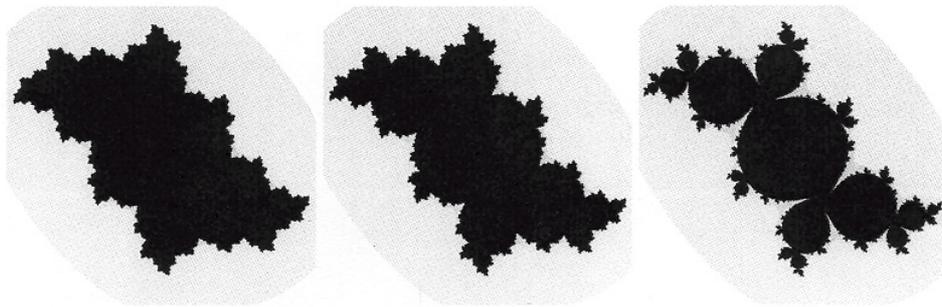
Comme dans la Proposition 2.2, pour tout $z \in \mathbb{C}$ qui n'est pas dans la fermeture du support, le pincement a une dilatation localement bornée, donc, par compacité, on montre que le pincement est équicontinu en z .

Pour montrer que les φ_t sont équicontinues au voisinage de J_f , nous utiliserons le critère suivant :

Lemme 3.2. (Critère d'équicontinuité). *Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ un système fondamental de voisinages-disques de l'origine dans le disque unité tel que $A_n = \mathbb{D} \setminus U_n$ soit un anneau ; soit \mathcal{F} une famille d'applications continues et injectives $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\cup_{f \in \mathcal{F}} f(\mathbb{D})$ soit bornée. S'il existe une suite (η_n) qui tend vers l'infini telle que*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall n \geq 0, \text{ mod } f(A_n) \geq \eta_n,$$

alors \mathcal{F} est équicontinue en zéro.

Figure 4. Pincement vers le *lapin gras*.

L'équicontinuité découle des deux propositions suivantes.

Proposition 3.3. *Pour tout $z \in J_f \setminus S$, il existe deux domaines de Jordan $U_z \subset\subset V_z$ contenant z et disjoints de l'ensemble postcritique de f et du cycle de β , et il existe $m_z > 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$, $\text{mod } \varphi_t(V_z \setminus U_z) \geq m_z$.*

Proposition 3.4. *Dans tout voisinage de γ , il existe deux domaines de Jordan $U_\gamma \subset\subset V_\gamma$ qui contiennent γ et il existe $m_\gamma > 0$ tels que*

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \text{ mod } \varphi_t(V_\gamma \setminus \overline{U_\gamma}) &\geq m_\gamma, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \text{ mod } \varphi_t(V_\gamma \setminus \gamma) &= \infty. \end{aligned}$$

Montrons tout de suite comment déduire :

Corollaire 3.5. *La famille d'homéomorphismes (φ_t) est équicontinue.*

Démonstration du Cor. 3.5. On considère le recouvrement de \overline{S} obtenu en considérant pour chaque point $z \in J_f \setminus S$ l'ouvert U_z de la Proposition 3.3, et si $z \in S$, alors on considère la préimage de U_γ qui contient z . On extrait alors un sous-recouvrement fini (U_i) ; on note aussi $V_i, A_i = V_i \setminus \overline{U_i}$ les ouverts associés et $m > 0$ le minimum atteint par le module de ces anneaux dans les propositions ci-dessus.

L'équicontinuité aux points de S est une conséquence immédiate de la Proposition 3.4 et du Lemme 3.2.

Pour tout $z \notin S$, on construit une suite d'anneaux emboîtés comme suit : pour tout $n \geq 1$, on considère l'indice i_n tel que $f^n(z) \in U_{i_n}$ et l'image réciproque $A'_n(z) = f^{-n}(A_{i_n})$ qui entoure z . Comme f est hyperbolique, on peut extraire une sous-suite (A_k) telle que les anneaux soient disjoints deux à deux. On définit alors l'anneau $B_k(z)$ bordé par la composante intérieure de A'_k avec la composante extérieur de A'_1 . Par l'inégalité de Grötzsch, on en déduit que, pour tout $t \geq 0$, on a $\text{mod } \varphi_t(B_k) \geq k \cdot m$. Donc on obtient l'équicontinuité en z en vertu du Lemme 3.2. \square

Montrons maintenant comment déduire le Théorème 3.1.

Démonstration du Théorème 3.1. D'après le Corollaire 3.5, la famille est équicontinue en tout point relativement à la métrique sphérique et un voisinage de J_f reste borné par la déformation (par le théorème de Koebe appliqué à $\varphi_t : \overline{\mathbb{C}} \setminus K_f \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, qui est une famille d'applications univalentes normalisées), donc d'après le théorème d'Ascoli, on peut extraire une suite convergente (φ_{t_n}) vers une application φ_∞ continue.

On a vu que si deux points étaient dans la même composante de S , alors le module d'un anneau les entourant tendait vers l'infini avec t , *i.e.* à la limite, ces deux points ont même image car leurs images restent à distance bornée par la déformation. Maintenant, si deux points ne sont pas dans une même composante de S , alors on peut trouver un anneau les séparant de module uniformément minoré par rapport au pincement. Il reste à vérifier que la limite n'est pas constante pour avoir l'injectivité. Pour cela, il suffit de remarquer que la composante bornée du

complémentaire de cet anneau, ayant une partie dans le bassin de l'infini, a une aire strictement minorée.

Au voisinage de l'infini, φ_∞ est univalente, donc les polynômes f_{t_n} convergent uniformément vers un polynôme f_∞ de même degré.

Supposons que l'on ait deux limites $(f_\infty, \varphi_\infty)$ et $(\hat{f}, \hat{\varphi})$. Alors, pour des raisons topologiques, l'application $\hat{\varphi} \circ \varphi_\infty^{-1}$ est bien définie : c'est un homéomorphisme qui conjugue f_∞ à \hat{f} , conforme sur l'ensemble de Fatou. Par le théorème principal de [10], cette application est en fait une application globalement conforme (parce que ces polynômes sont critiquement non récurrents), tangente à l'identité à l'infini et qui fixe l'origine : il s'agit de l'identité. On a donc unicité de la limite. \square

Le reste de ce paragraphe est voué à la démonstration des Propositions 3.3 et 3.4. Les anneaux seront définis sur le modèle $z \mapsto z^d$, et les estimations seront obtenues par la méthode de longueur extrémale.

Longueur extrémale: définition et notations. D'après L. Ahlfors et A. Beurling [2], on définit *la longueur extrémale* d'une famille de courbes rectifiables Γ du plan comme suit : considérons Ω un ouvert connexe contenant toutes les courbes de Γ , ainsi que toutes les métriques conformes $\rho(z)|dz|$ vivant sur Ω , où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une application mesurable, telle que

$$0 < \text{Aire}(\Omega, \rho) = \int_{\Omega} \rho^2(z) dx dy < \infty.$$

Posons

$$\text{pour } \gamma \in \Gamma, L(\gamma, \rho) = \int_{\gamma} \rho |dz|,$$

et

$$L(\Gamma, \rho) = \inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, \rho).$$

La *longueur extrémale* de Γ dans Ω est :

$$\Lambda_{\Omega}(\Gamma) = \sup \frac{L^2(\Gamma, \rho)}{\text{Aire}(\Omega, \rho)},$$

où le "sup" est pris sur toutes les métriques conformes pour lesquelles l'aire de Ω est finie et strictement positive.

Nous noterons aussi $\Lambda(\Gamma, \rho) = \frac{L^2(\Gamma, \rho)}{\text{Aire}(\Omega, \rho)}$. Si μ est une forme de Beltrami, alors $\Lambda_{\mu}(\Gamma)$ désignera la longueur extrémale de Γ par rapport aux métriques conformes à $|dz + \mu d\bar{z}|$.

Estimation sur un modèle. Notre démarche sera de se ramener au modèle qui suit, proposé par C. T. McMullen, pour montrer la connexité locale de l'ensemble de Mandelbrot en certains points du bord (cf [11]).

Soit $R = [0, 1] \times [0, 3/2]$. On définit une famille de sous-carrés $(Q_{i,j})_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ 1 \leq j \leq 2^i}}$

par récurrence :

- $Q_0 = [0, 1] \times [1/2, 3/2]$;

- si, à $i \geq 0$ fixé, tous les $Q_{i,j}, 1 \leq j \leq 2^i$, sont construits, on définit le rang supérieur $Q_{i+1,j}$ comme suit : on considère un carré Q_{i,j_0} dont on découpe le côté horizontal le plus bas en trois. On recolle alors deux carrés $Q_{i+1,2j_0-1}$ et $Q_{i+1,2j_0}$, de côté $(1/3)$ celui de $Q_{i,j}$, aux deux segments contenant un sommet de ce dernier. Les $Q_{i,j}$ ainsi définis s'accroissent sur l'axe réel en l'ensemble triadique de Cantor (voir Fig. 5). Notons $T_{i,j}$ la composante connexe du complémentaire dont un côté horizontal est contenu dans un côté horizontal de $Q_{i,j}$.

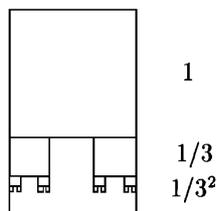


Figure 5. Modèle de McMullen.

Proposition 3.6. (C. T. McMullen). *Soit Γ la famille de courbes joignant les côtés verticaux de R . Pour toute forme de Beltrami dont le support est disjoint de $\bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ 1 \leq j \leq 2^i}} Q_{i,j}$,*

$$(3/2)\Lambda(\Gamma) \geq \Lambda_\mu(\Gamma) \geq \Lambda(\Gamma)/3.$$

Démonstration. Comme R est un rectangle, $\Lambda(\Gamma) = 2/3$.

Soit μ une forme de Beltrami supportée dans le complémentaire des $Q_{i,j}$.

Comme Q_0 est un carré qui joint les deux côtés verticaux et disjoint du support de μ , et d'après l'inégalité de Groetzsch, il vient $\Lambda_\mu(\Gamma) \leq \Lambda(Q_0) = 1$.

Notons $\{x_n\}_{n \geq 1}$ l'ensemble dénombrable des points de $[0, 1]$ qui sont au bord d'un $T_{i,j}$. On note Γ_n l'ensemble des courbes de Γ qui passent par x_n si $n \geq 1$, et Γ_0 les courbes qui évitent $\{x_n\}$. Par la règle en parallèle $1/\Lambda_\mu(\Gamma) \leq \sum 1/\Lambda_\mu(\Gamma_n)$. D'après le paragraphe §7.9 de [20], on a $1/\Lambda_\mu(\Gamma_n) = 0$ pour $n \geq 1$. Donc, pour obtenir une minoration indépendante de μ , il suffit de trouver une métrique admissible $\rho|dz|$ telle que $\text{supp } \mu \subset \{\rho = 0\}$ et $\Lambda(\Gamma_0, \rho) > 0$.

- Sur le bord de R , on pose $\rho = +\infty$.
- Sur le complémentaire des $Q_{i,j}$, on pose $\rho = 0$.
- Sur $Q_{i,j}$, on pose $\rho|dz| = (3/2)^i|dz|$.

Évaluons $\Lambda(\Gamma, \rho)$: ρ est bien admissible car $\text{Aire}(R, \rho) = \sum_{n \geq 0} 1/2^n = 2$.

Soit $\gamma : [0, \ell] \rightarrow R$ une courbe rectifiable de Γ_0 paramétrée par longueur d'arc qui traverse R de gauche à droite. Quitte à réduire sa ρ -longueur, on peut supposer que γ est injective et ne passe au plus qu'une seule fois dans chaque trou $T_{i,j}$; par conséquent, γ traverse les trous dans l'ordre induit par l'axe réel. On peut aussi supposer que chaque composante connexe de $Q_{i,j} \cap \gamma$ ou de $T_{i,j} \cap \gamma$ est formée d'un segment. Si $\text{Re } \gamma(t)$ n'est pas croissante, on peut aussi transformer γ afin que ce soit vrai. Enfin, chaque γ qui traverse un $Q_{i,j}$ verticalement peut être remplacé par un segment horizontal qui joint γ au trou à droite le plus proche. On se ramène donc à une courbe, affine par morceaux, telle que $\text{Re } \gamma(t)$ est strictement croissante et $Q_{i,j} \cap \gamma$ est un segment horizontal.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; comme $\rho = \infty$ sur $[0, 1]$, il existe $n \geq 1$ tel que $\ell(\gamma \cap (\cup_{i \leq n} Q_{i,j})) \geq \ell - \varepsilon$. Là où γ est tronquée, on la remplace par un segment horizontal reliant les extrémités. Du fait que $\gamma \in \Gamma_0$, chaque trou traversé force de la longueur car la courbe ne peut ressortir par un point de $[0, 1]$.

On constate que la plus petite ρ -longueur d'une courbe qui traverse un $Q_{i,j}$ est $(2/3) \cdot (1/2^i)$. Les courbes qui s'en approchent sont de deux types : celles qui longent $\partial Q_{i,j}$ par le bas en passant par $T_{i,j}$, et celles qui longent $\partial Q_{i,j}$ dans le $Q_{i-1,j'}$ correspondant. Comme γ reste éloignée de $[0, 1]$, on peut remonter la courbe grâce à la remarque ci-dessus afin d'obtenir que $L(\gamma \cap (\cup_{i \leq n} Q_{i,j}), \rho) \geq 2/3 - \varepsilon$.

On trouve alors $L(\Gamma_0, \rho) = 2/3$.

Au total, on obtient

$$\Lambda_\mu(\Gamma) \geq \Lambda(\Gamma_0, \rho) = 2/9 = \Lambda(\Gamma)/3. \quad \square$$

Partition du bassin associée à une étoile. Nous allons définir une partition en "rectangles" au voisinage du bord du bassin, qui nous servira à appliquer la Proposition 3.6 (cf Fig. 6).

On note Ω l'intérieur de K_f et $\hat{\Omega}$ l'intérieur de la composante connexe de $\{z \in \Omega, \forall t \geq 0, \mu_t(z) = 0\}$ qui contient l'origine. Enfin, on considère la composante connexe \hat{R}_0 de $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ qui contient α dans son bord, \hat{R}'_0 celles qui sont bordées par $f^{-q}(\partial \hat{R}_0)$, et \hat{R}_n la réunion des composantes connexes de $\Omega \setminus \hat{\Omega}$ telles que $f^{nq} : \hat{R}_n \rightarrow \hat{R}'_0$ est un revêtement de degré d^n (cf Proposition 2.2).

Redressement de la partition. On identifie $(\mathbb{C}^*, 0)$ à $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}, -i\infty)$ et on définit une conjugaison quasiconforme $\chi : (\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}, \Omega) \rightarrow (\mathbb{C}/\mathbb{Z}, \mathbb{H}/\mathbb{Z})$ entre f^q et $z \mapsto d^q \cdot z$ comme suit. Sur $\mathbb{C} \setminus K_f$, on définit χ par $(-i) \log$ de la coordonnée de Böttcher. Le bord de \hat{R}_n se transporte sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} en une réunion finie d'intervalles I_n .

Si $q = 1$, alors I_n est une réunion de points, et on prolonge χ de manière à ce que chaque \hat{R}_n soit envoyée dans une réunion de secteurs verticaux tronqués à la hauteur h/d^{qn} , où $h > 0$ fixé. On s'arrange pour que ces secteurs soient contenus dans des secteurs S_n d'ouverture plus importante et tels que deux secteurs de $\cup S_n$ soient deux à deux disjoints.

Si $q > 1$, on érige des rectangles dans \mathbb{H}/\mathbb{Z} de base I_n : on se fixe $h > 0$, et on

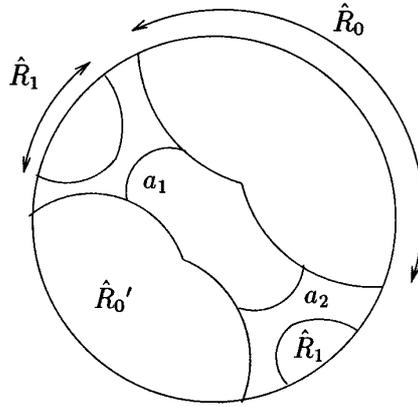


Figure 6. "Rectangles".

associe R_n la réunion des rectangles de hauteur h/d^{nq} . On peut alors définir χ en transformant $\partial(\hat{R}_0 \cup \hat{R}'_0)$ sur ∂R_0 de manière \mathcal{C}^1 par morceaux. On relie les images réciproques des sommets de R_0 dans $\hat{\Omega}$ par des courbes lisses $\{a_i\}_{1 \leq i \leq d}$ afin de former une chaîne cyclique. On étend χ à ces courbes de manière à ce qu'elles s'envoient sur l'horizontale de hauteur h . Ensuite, on prolonge χ à $f^{-q}(\cup a_i) \cap \hat{\Omega}$ pour que $\chi \circ f^q = d^q \cdot \chi$. Puis, on considère une extension quasiconforme aux quadrilatères bordés par ces courbes dans $\hat{\Omega}$. On prolonge alors χ à $\hat{\Omega}$ par un argument de *pull back*. Enfin, on considère un prolongement quasiconforme à \hat{R}_0 que l'on transporte sur \hat{R}_n par images réciproques (voir Fig. 7).

L'application globale est bien quasiconforme car J_f est un quasicercle, donc effaçable.

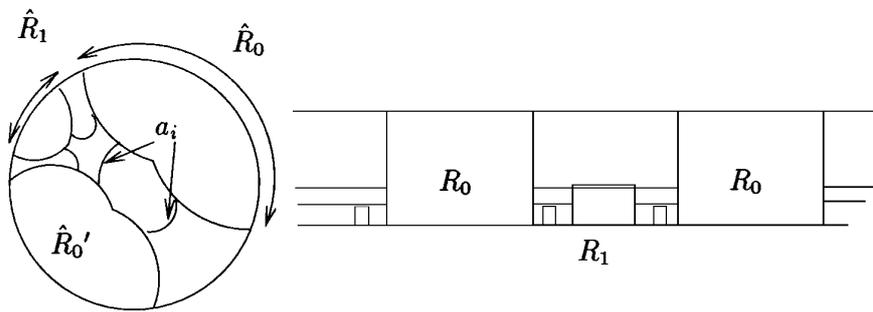


Figure 7. Définition de l'application.

Estimation sur un anneau type. Pour n assez grand, on numérote les composantes connexes $\{Q_j\}_j$ de $\cup_{0 \leq i \leq n} R_i$ dans l'ordre cyclique et on considère deux indices $i < j$. Soit $A \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ un anneau symétrique par rapport à \mathbb{R}/\mathbb{Z} , dont les bords sont parallèles aux axes et tel que : les bords verticaux extérieurs contiennent le côté droit de Q_i et le côté gauche de Q_{j+1} ; le bord intérieur contient le côté gauche de Q_{i+1} et le côté droit de Q_j ; les bords horizontaux dans \mathbb{H}/\mathbb{Z} sont assez hauts pour être contenus dans $\chi(\hat{\Omega})$ (voir Fig. 8).

Lemme 3.7. *Il existe $m > 0$, tel que si μ est une forme de Beltrami nulle sur $A \setminus (\cup_n R_n)$ alors*

$$\text{mod}_\mu A \geq m.$$

Démonstration. Si $q = 1$, on considère la métrique euclidienne tronquée par 0 sur

$$\cup_{t \geq 0} \{z, \mu_t(z) \neq 0\}.$$

On vérifie sans mal que l'on obtient une borne sur le module de A indépendante de t (voir aussi le Lemme 4.5).

Si $q > 1$, $A \cap \mathbb{H}/\mathbb{Z}$ se découpe en trois rectangles dont un seul est horizontal. On définit une métrique ρ comme suit : sur les rectangles verticaux, on est dans la situation de la Proposition 3.6, donc on considère la métrique qui borne la longueur extrémale des courbes qui joignent les côtés verticaux ; sur le rectangle horizontal, on considère la métrique euclidienne. On prolonge à A par réflexion. Soit Γ la famille des courbes rectifiables qui joignent les composantes connexes de ∂A tout en évitant les points de \mathbb{R}/\mathbb{Z} qui sont au bord d'un R_n . Les métriques se recollent bien au bord des rectangles par symétrie et car elles sont proportionnelles à la métrique euclidienne. Donc on a

$$\text{mod}_\mu A \geq \Lambda(\Gamma, \rho) > 0.$$

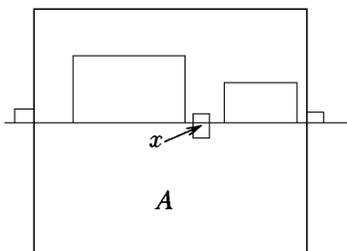
□

Montrons maintenant la Proposition 3.3.

Démonstration de la Proposition 3.3. Soient $z \in J_f$ et U un voisinage de z . Quitte à rétrécir U pour que $f^n : (U, z) \rightarrow (f^n U, f^n z)$ soit propre de degré 1, on itère f jusqu'à ce qu'il existe un *cross-cut* γ de Ω , $\gamma \subset \hat{\Omega} \cap f^n(U)$, qui sépare $f^n(z)$ de 0. Dans la carte \mathbb{C}/\mathbb{Z} , on peut donc trouver un anneau du type du Lemme 3.7. On retransporte cet anneau par χ^{-1} , qui ne change le module que par un facteur uniforme ; enfin, on le tire en arrière jusqu'à ce qu'il entoure z dans U . □

Démonstration de la Proposition 3.4. On définit un anneau A au voisinage de γ comme suit : le bord intérieur est constitué de γ . Le bord extérieur contient les bords verticaux de $\hat{R}_0 \cup \hat{R}'_0$ les plus proches.

Le modèle floral vient naturellement avec une étoile, qui est quasiconformément équivalente à celle de f (et qui conjugue les dynamiques). Cette application peut

Figure 8. Anneau autour de x .

être prolongée de manière à conjuguer les dynamiques sur un voisinage des points périodiques. Il existe donc une application quasirégulière qui transforme notre anneau (ou un sous-anneau) en l'anneau \mathcal{A} du modèle – *i.e.* la bande \mathcal{B} privé d'un rectangle Q (cf le Lemme 1.2) – tel que les rectangles soient de hauteur inférieure à celle de Q . Ces rectangles sont invariants par la translation τ . On considère une exhaustion de \mathcal{A} en anneaux \mathcal{P}_n définis comme suit. Il existe $t_n > 0$ tel que, pour tout $t \geq t_n$, le carré Q_n centré à l'origine qui contient exactement n périodes soit contenu dans $\Phi_t(\mathcal{B})$ et $\Phi_t \circ \Phi_{t_n}^{-1}|_{Q_n} = id^{t \text{ é}}$. On pose alors $\mathcal{P}_n = \Phi_{t_n}^{-1}(Q_n \setminus \overline{Q})$. Notons h_n la distance euclidienne de Q à ∂Q_n .

À n et $t \geq t_n$ fixés, on définit la métrique $\rho_n(t)$ provenant :

– d'une part, de la métrique $|dz|/|z|$ définie sur $\Phi_t(\mathcal{B}_\pm)$ (avec les notations du paragraphe précédent) ;

– d'autre part, de la métrique de la Proposition 3.6, normalisée de manière avoir même aire. Soit γ une courbe qui joint les deux bords de \mathcal{P}_n . On a $L(\gamma, \rho_n(t)) \geq C \cdot \log(h_n/C)$.

Par suite,

$$\text{mod } \Phi_t(\mathcal{A}) \geq \text{mod } \Phi_t(\mathcal{P}_n) \geq C \cdot \frac{\log^2 h_n}{\log h_n} \asymp \log h_n.$$

Donc

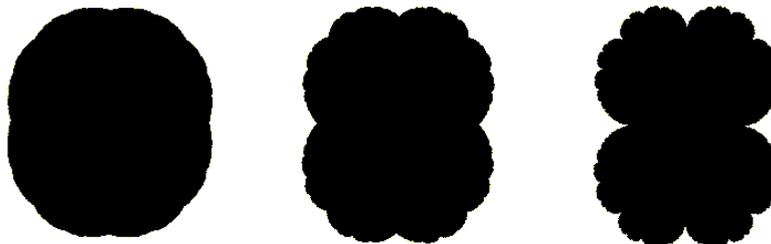
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{mod } \Phi_t(\mathcal{A}) = \infty.$$

Comme les anneaux sont homéomorphes par une application quasiconforme de dilatation bornée,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{mod } \varphi_t(\mathcal{A}) = \infty.$$

La borne m_γ provient de l'estimation sur un des \mathcal{P}_n . □

Remarque. Si le pincement se situe en un point fixe répulsif β , alors J_{f_∞} est une courbe de Jordan et φ_∞ est un homéomorphisme restreint aux ensembles de Julia.

Figure 9. Pincement vers le *chou-fleur*.

4. Pincement d'un polynôme semi-hyperbolique

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme monique centré semi-hyperbolique, *i.e.* sans point parabolique et tel que tout point critique $c \in J_f$ n'est pas récurrent. Nous allons démontrer dans ce paragraphe le résultat principal de cet article :

Théorème 4.1. *Soit f un polynôme semi-hyperbolique. On suppose qu'il existe un point attractif α et que K_f est connexe. Alors, pour tout p/q , le pincement (f_t, φ_t) associé à une étoile $\mathcal{E}_{L,p/q}$ formé d'un seul cycle est convergent.*

Comme au paragraphe précédent, la démonstration du Théorème 4.1 se réduit aux analogues des Propositions 3.3 et 3.4. Nous utiliserons le même procédé pour les démontrer. Les anneaux considérés seront obtenus en recollant ensemble 4 types de quadrilatères que l'on va préalablement étudier.

4.1. Préliminaires

Pour de tels polynômes, on sait :

Théorème 4.2. (L. Carleson, P. Jones & J.-C. Yoccoz, [4].) *Si f est semi-hyperbolique,*

- (i) $\mathbb{C} \setminus K_f$ est de John et toute composante connexe de l'intérieur de K_f est un quasidisque ;
- (ii) pour toute paire de points x, y dans la même composante connexe de J_f , il existe un quasiarc $\delta \subset J_f$ (appelé arête par la suite) qui les relie ;
- (iii) il existe $\varepsilon > 0$, $D < \infty$, $c > 0$ et $\eta \in (0, 1)$ tels que, pour tout $x \in J_f$ et pour toute composante connexe B_n de $f^{-n}\{|z - x| < \varepsilon\}$, l'application $f^n : B_n \rightarrow \{|z - x| < \varepsilon\}$ a un degré majoré par D et $\text{diam } B_n \leq c \cdot \eta^n$.

Domaines de John. On dit qu'un ouvert $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ est un disque de John si Ω est simplement connexe, hyperbolique, contient le point à l'infini et s'il existe une

constante $c = c(\Omega) > 0$ telle que, pour tout $z \in \Omega \cap \mathbb{C}$, il existe une courbe γ_z joignant z à l'infini telle que, pour tout $w \in \gamma_z$, $\delta(w) \geq c \cdot |z - w|$, où $\delta(w)$ représente la distance euclidienne de w à $\partial\Omega$. D'après [7], on peut choisir le segment géodésique hyperbolique joignant z à l'infini pour γ_z .

Lemme 4.3. *Soient $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un homéomorphisme quasiconforme et Ω un disque de John. Alors $\varphi(\Omega)$ est aussi de John, et on peut choisir $\varphi(\gamma_z)$ comme courbe pour $\varphi(z)$.*

Démonstration. Une application quasiconforme est aussi quasisymétrique, i.e. il existe une application croissante $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\eta(0) = 0$ telle que, pour tous $z, w, w' \in \Omega$ deux à deux distincts, on ait

$$\left| \frac{\varphi(z) - \varphi(w)}{\varphi(z) - \varphi(w')} \right| \leq \eta \left(\left| \frac{z - w}{z - w'} \right| \right).$$

On se fixe $z \in \Omega$, $w \in \gamma_z$ et $\zeta \in \partial\Omega$. On a $|w - \zeta| \geq c \cdot |w - z|$; par suite,

$$\left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(w)}{\varphi(z) - \varphi(w)} \right| \geq 1/\eta(1/c)$$

et $|\varphi(\zeta) - \varphi(w)| \geq (1/\eta(1/c)) \cdot |\varphi(z) - \varphi(w)|$. □

Pour plus de propriétés des domaines de John, on peut se reporter à [16].

Membres et sillages. Si U est une composante connexe de l'intérieur de K_f , un *membre* de U est la fermeture d'une composante connexe de $K_f \setminus \overline{U}$, attaché à ∂U par sa *racine*; son *sillage* est l'ouvert bordé par les rayons aboutissant à la racine contenant tous les membres de même racine. Étant donnée U , le support de la déformation se situe dans U et dans ses membres. On réunit les membres et les sillages qui ont même racine. Ces racines sont ou bien des points prépériodiques, ou bien des points précritiques. Si $\delta \subset J_f$ est une arête, on parlera aussi de membres et de sillages.

Notons Ω le bassin immédiat du point α et d' le degré de $f|_{\Omega}$.

Redressement de Ω . Notre objectif présent est d'obtenir un "bon" redressement du bassin immédiat Ω du point α . On se fixe un potentiel $h > 0$; on note c_1, \dots, c_p les points critiques de f sur $\partial\Omega$, et S_i les sillages associés tronqués au potentiel h . Notons $B : \mathbb{C} \setminus K_f \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ la coordonnée de Böttcher de f , et $\theta_i^- < \theta_i^+$ les arguments des rayons qui définissent S_i .

Soit $a > 0$ une constante que l'on déterminera ultérieurement; posons, pour chaque $i = 1, \dots, p$, $\hat{S}_i = \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \arg B(z) - \theta_i^+ < a \cdot \log |B(z)|, |B(z)| < \exp h\} \cup S_i \cup \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \theta_i^- - \arg B(z) < a \cdot \log |B(z)|, |B(z)| < \exp h\}$.

Proposition 4.4. *Il existe une application quasiconforme $\chi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et un voisinage U de $\overline{\Omega}$ telle que, pour tout $z \in U \setminus (\cup \hat{S}_i)$, $\chi \circ f(z) = (\varphi(z))^{d'}$.*

Démonstration. L'idée principale de la démonstration est de se débarrasser des points critiques de $\partial\Omega$ par chirurgie. Nous traitons d'abord le cas de c_1 . Comme il n'est pas récurrent, si $a > 0$ est assez petit, alors \hat{S}_1 et toutes ses préimages dont les racines appartiennent à $\partial\Omega$ sont disjointes deux à deux. L'application $f|_{\partial\hat{S}_1} : \partial\hat{S}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ est injective et borde un "secteur" $S' \subset \mathbb{C} \setminus K_f$ issu de $f(c_1)$. On considère une extension quasiconforme $F : \hat{S}_1 \rightarrow S'$ de cette restriction. On construit une forme de Beltrami μ_1 comme suit :

- si $z \in \hat{S}_1$, on pose $\mu_1(z) = \partial_{\bar{z}}F(z)/\partial_zF(z)$;
- si z est dans un secteur issu de $\partial\Omega$ qui s'envoie sur \hat{S}_1 par f^n , alors on pose $\mu_1(z) = \mu_1 \circ f^n(z) \cdot \overline{(f^n)'(z)}/(f^n)'(z)$;
- sinon, on pose $\mu_1(z) = 0$.

Comme les secteurs sont deux à deux disjoints, on a $\|\mu_1\|_\infty < 1$, et le théorème d'intégration des formes de Beltrami nous construit un homéomorphisme quasiconforme $\chi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\chi_1(z) = z + o(1)$ à l'infini. Par construction, l'application g_1 définie par $\chi_1 \circ F \circ \chi_1^{-1}$ sur \hat{S}_1 , et $\chi_1 \circ f \circ \chi_1^{-1}$ sur le complémentaire, est holomorphe au voisinage de $\chi_1(\overline{\Omega})$. Le point critique c_1 a donc été "supprimé".

Le même procédé permet donc de supprimer les autres points critiques c_2, \dots, c_p en construisant une application quasiconforme $\chi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et une application holomorphe g définie au voisinage de $\chi(\overline{\Omega})$, qui est conjuguée à f sur un ensemble comprenant $\overline{\Omega}$. Cette application g est maintenant un revêtement de degré d' strictement dilatant d'un voisinage de $\chi(\partial\Omega)$. Par suite, g est quasiconformément conjugué à $z \mapsto z^{d'}$. \square

4.2. Estimations d'anneaux

Dans un premier temps, nous donnerons des estimations de modules de quadrilatères qui nous serviront pour estimer les modules d'anneaux.

Quadrilatères de type "arête". On se donne une arête $\hat{\gamma} \subset J_f$ d'extrémités x et y , qui n'intersecte la fermeture de chaque composante connexe du bassin $A(\alpha)$ qu'en au plus un point.

On construit un quadrilatère Q qui contient $\hat{\gamma}$, tel que $\hat{\gamma}$ coupe le quadrilatère en deux quadrilatères et tel que $K_f \cap Q$ est connexe et $J_f \cap \partial Q = \{x, y\}$ (voir Fig. 10).

Lemme 4.5. *Il existe une constante $m > 0$ telle que $\Lambda_{\mu_t}\Gamma \geq m$ pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration. Par une application quasiconforme du plan, on transforme Q en $\{z, 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$ et $\hat{\gamma}$ en $[0, 1]$. D'après le Lemme 4.3, on en déduit

que l'image L des membres est encore de John. On sépare L en l'incluant dans la réunion de ses sillages, *i.e.* bordés par l'image des géodésiques qui aboutissent sur $\hat{\gamma}$.

Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in Q$ au bord d'un sillage, la distance de z au membre de ce sillage est au moins c fois la distance de z à la racine. Par suite, si on considère ρ la métrique euclidienne de Q tronquée par 0 sur L , et que l'on considère une courbe rectifiable $\gamma : [0, \ell] \rightarrow Q$ qui traverse Q de gauche à droite, alors on peut supposer que γ est injective et ne passe dans un sillage au plus qu'une fois. Si γ traverse un membre M de sillage S et de racine r , on note $\delta(z) = d(z, M)$ et $[t_1, t_2] = \gamma^{-1}(\bar{S})$. On a

$$L(\gamma[t_1, t_2], \rho) \geq \delta(\gamma(t_1)) + \delta(\gamma(t_2)) \geq c \cdot (|\gamma(t_1) - r| + |\gamma(t_2) - r|) \geq c \cdot |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|.$$

Par suite, $L(\Gamma, \rho) \geq c$ et il existe $m > 0$ telle que $\text{mod}_{\mu_t} Q \geq m$. □

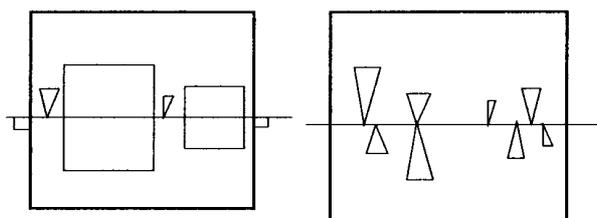


Figure 10. Quadrilatères de type bassin et arête.

Partition au voisinage de Ω associée à une étoile. On se fixe une constante $h > 0$ et on redéfinit les domaines $\hat{R}_i \subset \Omega$ du cas monomial. Puisque le cas $q = 1$ se traite comme le cas précédent, on suppose $q > 1$. À chaque composante connexe Q de \hat{R}_n , on construit un domaine symétrique Q^* dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$: on note x, y les extrémités de $Q \cap \partial\Omega$; Q^* est bordé par l'équipotentielle de hauteur h/d^{qn} et les rayons qui aboutissent à x et y de telle manière que Q^* intersecte tous les autres rayons qui aboutissent à ces points.

Par la Proposition 4.4, cette partition se transporte au voisinage de \mathbb{R}/\mathbb{Z} par une application quasiconforme χ , et les "rectangles" s'envoient les uns sur les autres par $z \mapsto (d')^q \cdot z$. Par suite, on peut définir une nouvelle application quasiconforme qui redressera ces faux rectangles en véritables rectangles à l'instar du cas monomial.

Quadrilatère de type "bassin". Il s'agit de rectangles verticaux Q , symétriques par rapport à \mathbb{R}/\mathbb{Z} , et construit comme à la page 16 (voir Fig. 10).

Lemme 4.6. *Il existe $m > 0$ tel que, pour tout $t \geq 0$, $\text{mod}_{\mu_t} Q \geq m$.*

Démonstration. On définit une métrique ρ sur le demi-plan correspondant à Ω comme pour la Proposition 3.3. On la prolonge par réflexion à l'autre demi-plan. On considère aussi la métrique $\hat{\rho}$ obtenue en tronquant ρ par 0 sur l'image L des membres de Ω par le redressement quasiconforme, afin que la métrique soit bien définie pour tout $t \geq 0$. Il reste à vérifier que la longueur des courbes qui joignent les côtés verticaux est minorée. Pour cela, il suffit de montrer que $\hat{\rho}$ ne fait pas trop chuter les ρ -longueurs des courbes.

La métrique ρ découpe le complémentaire des R_j (et de leur symétrique) en générations sur lesquelles $\rho \asymp (d')^{(q-1)n}$. Soit γ une courbe rectifiable qui traverse un sillage S de z_1 à z_2 , avec z_i dans la génération n_i , $n_1 \leq n_2$. On note $\delta(z)$ la distance euclidienne de z au membre de S . On a

$$L(\gamma \cap S, \hat{\rho}) \geq \text{Cste} \cdot (d')^{(q-1)n_1} (\delta(z_1) + \delta(z_2)) \geq \text{Cste} \cdot (d')^{(q-1)n_1} \cdot |z_1 - z_2|.$$

Mais, $(d')^{(q-1)n_1} \cdot |z_1 - z_2| \geq \text{Cste} \cdot d_\rho(z_1, z_2)$ donc $L(\Gamma, \hat{\rho}) \geq \text{Cste} \cdot L(\Gamma, \rho) > 0$. \square

Estimations d'anneaux. Pour tout point $z \in J_f \setminus S$, il existe un anneau A qui l'entoure tel que son bord est constitué d'un nombre fini de quadrilatères de type arête et bassin, et les autres sont contenus dans $\cap_{t \geq 0} \{z, \mu_t(z) = 0\}$. Les estimations précédentes (Lemmes 4.5 et 4.6) permettent de minorer $\text{mod}_{\mu_t} A$ indépendamment de t .

Quant aux points de S , on obtient l'analogie de la Proposition 3.4 de la même manière.

Démonstration du Théorème 4.1. La condition (iii) du Théorème 4.2 permet de montrer l'analogie du Corollaire 3.5 grâce aux estimations d'anneaux. Par suite, les φ_t sont équicontinus. Le reste de la démonstration suit celle du Théorème 3.1. \square

Références

- [1] L. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand, 1966.
- [2] L. Ahlfors, *Conformal invariants*, McGraw-Hill, 1973.
- [3] S. Bullett and P. Sentenac, Ordered orbits of the shift, square roots and the devil's staircase, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **115** (1994), no. 3, 451–481.
- [4] L. Carleson, P. Jones and J. C. Yoccoz, Julia & John, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **25** (1994), no. 1, 1–30.
- [5] G. Cui, Geometrically finite rational maps with given combinatorics, *preprint*, 1997.
- [6] A. Douady et J. H. Hubbard, *Etude dynamique des polynômes complexes I & II*, Pub. Math. d'Orsay 84-02 et 85-05, 1984/85.
- [7] F. W. Gehring, K. Hag and O. Martio, Quasihyperbolic geodesics in John domains, *Math. Scand.* **65** (1989), no. 1, 75–92.

- [8] L. R. Goldberg, Fixed points of polynomial maps. I Rotation subsets of the circle, *Ann. Sci. ENS Paris (4)* **25** (1992), no. 6, 679–685.
- [9] P. Haïssinsky, *Applications de la chirurgie holomorphe, notamment aux points paraboliques*, Thèse de l'Université de Paris-Sud, Orsay, 1998.
- [10] P. Haïssinsky, Expansion and rigidity for rational maps, *J. London Math. Soc. (2)* **63** (2001), no. 1, 128–140.
- [11] J. H. Hubbard, Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci : three theorems of J. C. Yoccoz, *Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991)*, 467–511, *Publish or Perish, Houston, TX*, 1993.
- [12] P. Makienko, Unbounded components in parameter space of rational maps, *Conform. Geom. Dyn.* **4** (2000), 1–21.
- [13] P. Makienko, Pinching and Plumbing, *ICTP Trieste preprint*, 1993.
- [14] P. Makienko, Totally disconnected Julia sets, *Berkeley preprint 1995-042*, 1995.
- [15] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable : Introductory lectures*, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1999.
- [16] R. Näkki and J. Väisälä, John disks, *Exposition. Math.* **9** (1991), no. 1, 3–43.
- [17] C. L. Petersen, No elliptic limits for quadratic maps, *Erg. Th. & Dyn. Sys.* **19** (1999), no. 1, 127–141.
- [18] K. Pilgrim, Noncompactness of hyperbolic components, *preprint*, 1993.
- [19] L. Tan, On pinching deformations of rational maps, *prépublication no. 28/2000*, Université de Cergy, 2000, à paraître aux *Ann. Sci. ENS Paris*.
- [20] J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.

Peter Haïssinsky
LATP/CMI
Université de Provence
39, rue Frédéric Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13
France
e-mail: phaissin@cmi.univ-mrs.fr

(Received: September 11, 1998)



To access this journal online:
<http://www.birkhauser.ch>
