Comment. Math. Helv. 78 (2003) 884–888
0010-2571/03/040884-5
DOI 10.1007/s00014-003-0782-9

Commentarii Mathematici Helvetici

Une remarque sur l'inégalité de McKean

Alain R. Veeravalli

Résumé. Pour une classe de variétés riemanniennes équipées de métriques *tordues*, nous donnons dans ce travail une borne inférieure optimale pour la première valeur propre du laplacien dans le problème de Dirichlet. L'inégalité présentée, qui est obtenue très simplement, étend celle de McKean à des variétés dont la courbure peut être de signe variable. C'est le principal intérêt de l'inégalité. Elle répond aussi partiellement à une question de Schoen et Yau.

Mathematics Subject Classification (2000). 53C20, 53C40, 53C42.

Keywords. Valeur propre du laplacien, problème de Dirichlet, formules d'O'Neill, inégalité de McKean, courbure moyenne, métriques tordues.

1. Notations et resultats

1. Soit M une variété riemannienne connexe, simplement connexe, complète et non-compacte (on dira *ouverte* pour simplifier), $B_p(\delta)$ sa boule ouverte de centre p et de rayon $\delta > 0$ et $\lambda_1(\delta)$ la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet associé, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 \text{ sur } & B_p(\delta) \\ \qquad \phi \quad = 0 \text{ sur } & \partial B_p(\delta) \end{cases},$$

où Δ désigne le laplacien sur M. Notons que $\lambda_1(\delta)$ est strictement positive et décroissante en la variable δ. La limite $\lim_{\delta\to+\infty} \lambda_1(\delta)$ existe donc dans $\mathbb{R}_+$ et on peut montrer qu'elle est indépendante du point p. Dans la suite, elle sera notée $\lambda_1(M)$ et appelée *première valeur propre* de M. La recherche de conditions conduisant à la non-nullité de $\lambda_1(M)$ est une importante question posée par Schoen and Yau ([5] p. 106).

A ce sujet, rappelons les résultats suivants :

Pour l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m(-\kappa^2)$ de dimension m et de courbure sectionnelle $-\kappa^2 < 0$, on a $\lambda_1(\mathbb{H}^m(-\kappa^2)) = (m-1)^2\kappa^2/4$. D'un autre côté, on a un résultat de comparaison, appelé inégalité de McKean ([2]) : si M est une variété ouverte de dimension m et de courbure sectionnelle majorée par une constante $-\kappa^2 < 0$, alors nous avons une borne inférieure optimale pour la première valeur propre de M :

$$\lambda_1(M) \geq \frac{(m-1)^2\kappa^2}{4}.$$

Nous présentons ci-dessous deux inégalités similaires qui étendent l'inégalité de McKean à une classe de variétés dont la courbure peut être positive en certains points.

2. Les résultats. Soit w une fonction lisse sur $\mathbb{R}$ de dérivée minorée par une constante strictement positive κ et $(Z, g_\star)$ une variéte riemannienne complète $(m-1)$-dimensionnelle arbitraire. On considère alors la variété $\mathfrak{M} = \mathbb{R} \times Z$ que l'on munit de la métrique tordue complète $g = \langle \cdot, \cdot \rangle = dt^2 + e^{2w(t)} g_\star$. La norme associée sera notée $|\cdot|$.

Contrastant avec la grande liberté de choix pour la variété Z, on a les résultats précis suivants :

Théorème 1. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a*

$$\lambda_1(\mathfrak{M}) \geq \frac{(m-1)^2\kappa^2}{4}.$$

De plus, cette borne est optimale.

Théorème 2. *Soit M une sous-variété ouverte orientable n-dimensionnelle de $\mathfrak{M}$, munie de la métrique induite, et H son vecteur de courbure moyenne (non-normalisée). On suppose que la norme uniforme de H sur M vérifie : $||H|| < (n-1)\kappa$. Alors*

$$\lambda_1(M) \geq \frac{1}{4}\left\{(n-1)\kappa - ||H||\right\}^2.$$

De plus, cette borne est optimale.

L'idée de ce travail revient à Cheung et Leung ([1]) qui ont récemment démontré le théorème 2 pour l'espace hyperbolique. Le matériel utilisé dans les preuves ci-dessous est très réduit : on utilisera à plusieurs reprises les formules d'O'Neill ([3], p. 206) et la très simple proposition suivante :

Proposition 1. *Soient $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une variété riemannienne ouverte et h une fonction lisse sur N dont le gradient et le laplacien vérifient $|\nabla h| \leq s$ et $\Delta h \geq t$ où s et t sont deux constantes strictement positives. Alors $\lambda_1(N) \geq \frac{t^2}{4s^2}$.*

La preuve est immédiate : soient $f \in C^1$ et $h \in C^2$ deux fonctions sur N où f est à support compact. La formule de Green permet d'écrire

$$\int_N \{f^2 \Delta h + \langle \nabla(f^2), \nabla h \rangle\} \cdot d\nu = 0.$$

Des inégalités de Cauchy–Schwarz et arithmético-géométrique, on déduit que :

$$|\langle \nabla(f^2), \nabla h\rangle| \leq 2s|f| \cdot |\nabla f| \leq tf^2/2 + 2s^2|\nabla f|^2/t.$$

La précédente formule entraîne alors que $\int_N |\nabla f|^2 \cdot d\nu \geq \frac{t^2}{4s^2} \cdot \int_N f^2 \cdot d\nu$ et la conclusion découle alors du principe *min-max* de Rayleigh. □

Remarques. 1. L'inégalité de McKean est habituellement prouvée en utilisant la formule de la co-aire ou la constante de Cheeger. Il y a aussi un moyen très simple de la déduire de la proposition ci-dessus : si p est un point de M et d la distance de M, le théorème de comparaison de Bishop ([4]) affirme que $\Delta d_p \geq (m-1)\kappa \coth(\kappa d_p)$ qui est minorée par $(m-1)\kappa$. Comme le gradient de d_p est de norme 1, l'inégalité de McKean est prouvée.

2. Si σ est un 2-plan au point (t_0, x_0) de $\mathfrak{M}$ et engendré par la base orthonormale (b.o.n. en abrégé) $\{(t,u),\ (\tau,v)\}$, si K et $K_\star$ sont les courbures sectionnelles de $\mathfrak{M}$ et Z respectivement, les formules d'O'Neill pour la courbure des produits tordus nous permettent d'écrire

$$K(\sigma) = \frac{K_{\star x_0}(u,v)}{e^{2w(t_0)}} - \left(\frac{K_{\star x_0}(u,v)}{e^{2w(t_0)}} + \ddot{w}(t_0)\right) \cdot (t^2+\tau^2) - \dot{w}^2(t_0).$$

3. En particulier, si on choisit pour Z l'espace $\mathbb{R}^{m-1}$ avec sa métrique standard plate et la fonction $w(t) = kt$, on observe que $\mathfrak{M}$ est à courbure sectionnelle constante $-\kappa^2$, c'est-à-dire que $\mathfrak{M}$ n'est autre que l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m(-\kappa^2)$. La borne inférieure du théorème 1 est donc optimale.

4. Comme l'espace hyperbolique admet des sous-variétés totalement géodésiques de toute dimension et que ces sous-variétés sont elles-mêmes isométriques à des espaces hyperboliques, la borne inférieure du théorème 2 est aussi optimale.

5. Si l'on choisit pour Z la sphère $\mathbb{S}^{m-1}(r)$ de rayon $r < 1/\kappa$, de dimension $m-1 \geq 2$ avec sa métrique standard de courbure sectionnelle $1/r^2$, si $w(t) = \kappa t$ avec $t_0 = 0$ et si enfin σ est un 2-plan dans Z (i.e. engendré par une b.o.n. de la forme $\{(0,u),\ (0,v)\}$, alors la formule ci-dessus montre que $K(\sigma) = 1/r^2 - \kappa^2 > 0$. Ceci montre que les résultats de McKean et Cheung-Leung peuvent donc être étendus à certaines variétés de signe de courbure variable.

2. Preuves

2.1. La connexion, le gradient de $\mathfrak{M}$ seront désignés par la même lettre $\bar{\nabla}$ et le laplacien par $\bar{\Delta}$. Nous considérons alors l'application première projection $\Pi : \mathfrak{M} \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto t$ dont le gradient est un champ unitaire noté ∂_t. Le théorème 1 découle de la proposition 1 et de la suivante :

Proposition 2. $\bar{\Delta}\Pi = (m-1)\dot{w} \quad (\geq (m-1)\kappa\,)$.

Preuve. Soit (t,x) un point de $\mathfrak{M}$ et $\{\bar{\nabla}\Pi = \partial_t, v_1, \dots, v_{m-1}\}$ une b.o.n. de $T_{(t,x)}\mathfrak{M}$. Les formules d'O'Neill nous permettent d'écrire

$$\bar{\Delta}\Pi = \langle \bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_t\rangle + \sum_{i=1}^{m-1} \langle \bar{\nabla}_{v_i}\partial_t, v_i\rangle = 0 + \sum_{i=1}^{m-1} \langle \frac{\partial_t e^{w(t)}}{e^{w(t)}} v_i, v_i\rangle = (m-1)\dot{w}. \quad \square$$

2.2. Soit M une sous-variété ouverte n-dimensionnelle de $\mathfrak{M}$. On munit M de la métrique induite encore notée $\langle\cdot,\cdot\rangle$. La connexion, le gradient et le laplacien de M seront désignés par les lettres ∇ et Δ. On considérera aussi la restriction $\pi = \Pi_{|M}$ de Π à M. Le théorème 2 découle de la proposition 1 et de la suivante :

Proposition 3. *La fonction π vérifie $|\nabla\pi| \leq 1$ et*

$$\Delta\pi = (n - |\nabla\pi|^2)\dot{w} + g(\partial_t, H) \quad (\geq (n-1)\kappa - ||H||\,).$$

Preuve. Soient $\{e_i\}_{i=1}^n$ et $\{\nu_j\}_{j=1}^{p=m-n}$ deux b.o.n. locales (pour la métrique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $\mathfrak{M}$) de TM et $TM^\perp$ respectivement. Les gradients de Π et π sont reliés par la relation :

$$\bar{\nabla}\Pi = \nabla\pi + \sum_{j=1}^p \langle\bar{\nabla}\Pi, \nu_j\rangle\nu_j = \nabla\pi + \sum_{j=1}^p \langle\partial_t, \nu_j\rangle\nu_j.$$

Notons $\mathfrak{h} : TM \times TM \to TM^\perp : (X,Y) \mapsto \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ la seconde forme fondamentale de M et A l'opérateur de forme associé. Alors

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}\Pi - \sum_{j=1}^p \bar{\nabla}^2\Pi(\nu_j,\nu_j) &= \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}^2\Pi(e_i,e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i}\Big\{\nabla\pi + \sum_{j=1}^p \langle\partial_t,\nu_j\rangle\nu_j\Big\}, e_i\right\rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla\pi + \mathfrak{h}(e_i,\nabla\pi), e_i\rangle \\
&\quad + \sum_i\sum_j \langle (\bar{\nabla}_{e_i}\langle\partial_t,\nu_j\rangle)\nu_j + \langle\partial_t,\nu_j\rangle\bar{\nabla}_{e_i}\nu_j, e_i\rangle \\
&= \Delta\pi - \sum_i\sum_j \langle\partial_t,\nu_j\rangle\langle A^{\nu_j}e_i, e_i\rangle \\
&= \Delta\pi - \langle\partial_t, H\rangle.
\end{aligned}$$

Décomposons chaque ν_j sous la forme $\nu_j = \alpha_j\partial_t + w_j$ où α_j est réel et w_j un vecteur tangent de Z. Les formules d'O'Neill nous permettent d'écrire

$$\sum_{j=1}^{p} \bar{\nabla}^2 \Pi(\nu_j, \nu_j) = \dot{w} \sum_{j=1}^{p} |w_j|^2 = \dot{w}(p - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^2) = \dot{w}(p + |\nabla \pi|^2 - 1)$$

et ceci prouve la proposition. □

Remerciements. Il m'est agréable de remercier Lamiae Jabri et Lucas Zakaria pour de fructueuses discussions.

Références

[1] L. F. Cheung and P. F. Leung, Eigenvalue estimates for submanifolds with bounded mean curvature in the hyperbolic space, *Math. Z.* **236** (2001), 525–530.

[2] H. P. McKean, An upper bound to the spectrum on a manifold of negative curvature, *J. Differ. Geom.* **4** (1970), 359–366.

[3] B. O' Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and applied Mathematics **103**, Academic Press, 1983.

[4] T. Sakai, *Riemannian geometry*, Translations of Mathematical Monographs **149**, American Mathematical Society, 1996.

[5] R. Schoen and S.-T. Yau, *Lectures in differential geometry*, International Press, 1994.

Alain R. Veeravalli
Département de Mathématiques
Université d'Evry-Val d'Essonne
Boulevard des Coquibus
91025 Evry cedex
France
e-mail: Alain.Veeravalli@maths.univ-evry.fr

(Received: December 10, 2002)