Comment. Math. Helv. 79 (2004) 689–703
0010-2571/04/040689-15
DOI 10.1007/s00014-004-0815-z

Commentarii Mathematici Helvetici

Sur les puissances de l'idéal fondamental de l'anneau de Witt

Fabien Morel

Résumé. Nous reformulons un résultat récent de Arason et Elman en donnant une présentation très simple des puissances de l'idéal fondamental de l'anneau de Witt d'un corps de caractéristique $\neq 2$.

Abstract. We reformulate a recent result of Arason and Elman by giving a very simple presentation of the powers of the fundamental ideal of the Witt ring of a field of characteristic $\neq 2$.

Mathematics Subject Classification (2000). 19D45, 15A63.

Mots clés. Quadratic forms, Witt ring, Milnor K-theory.

Dans cet article, F désigne un corps commutatif qui est toujours supposé de caractéristique $\neq 2$.

Remerciements. Je tiens à remercier Mike Hopkins pour de nombreuses discussions sur des sujets directement liés ou non à ce travail.

1. Introduction

Cet article a deux objectifs. Le premier est de reformuler un résultat de Arason et Elman [1] donnant une présentation de la n-ième puissance $I^n(F)$ de l'idéal fondamental de l'anneau de Witt $W(F)$ d'un corps F de caractéristique $\neq 2$. Nous donnons deux telles présentations, très proches, l'une dans le Théorème 2.1, qui tient compte de la structure de $W(F)$-module des $I^n(F)$, et l'autre dans le théorème 2.4. Nous pensons que ces résultats présentent un intérêt propre, notamment en faisant clairement apparaitre l'anneau gradué $\oplus I^n(F)$ comme la "K-théorie de Witt de F".

Notre deuxième objectif est lié au problème du calcul des groupes d'homotopie motiviques stables [9, 13, 5] de la forme

$$[\mathbb{S}^0; (\mathbb{G}_m)^{\wedge n}]$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. Nous avions pour celà été ammené à introduire la K-théorie de Milnor–Witt de F

$$K_*^{MW}(F).$$

Récemment, en collaboration avec Mike Hopkins, nous avons considérablement simplifié la présentation de $K_*^{MW}(F)$ – voir la définition 5.1 ci-dessous – de sorte que l'on en a déduit (voir [5]) l'existence d'un homomorphisme canonique d'anneaux gradués

$$K_*^{MW}(F) \to [\mathbb{S}^0; (\mathbb{G}_m)^{\wedge *}] \tag{1}$$

Nous avons établi dans [8] (voir aussi [6, 5]) que cet homomorphisme est un isomorphisme.

Comme nous le verrons ci-après, l'anneau $K_0^{MW}(F)$ s'identifie à l'anneau de Grothendieck–Witt $GW(F)$ de k, si bien que l'on obtient, en degré 0, l'isomorphisme canonique

$$GW(F) \cong [\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^0]$$

conjecturé par l'auteur dans [4] en accord avec la preuve de la conjecture de Milnor sur le gradué de $W(F)$ donnée dans *loc. cit.*; c'est par ailleurs ce travail qui avait motivé nos travaux concernant les groupes $[\mathbb{S}^0; (\mathbb{G}_m)^{\wedge n}]$. Le présent article représente une des étapes clef de la preuve de l'isomorphisme (1) ci-dessus.

On peut comme dans [3] définir des "résidues" en K-théorie de Milnor–Witt et définir pour tout k-schéma lisse X le groupe de K-théorie de Milnor–Witt non-ramifié (voir [8]). Cependant, à moins de réécrire le travail de Rost [11] en remplaçant partout K-théorie de Milnor par K-théorie de Milnor–Witt, il n'est pas évident que ces faisceaux de K-théorie de Milnor–Witt non-ramifié ait leur cohomologie Zariski (ou Nisnevich) invariante par produit par la droite affine $\mathbb{A}^1$. Le Théorème 5.3 ci-dessous nous permettra dans [8] de parvenir à ce résultat d'une façon très détournée.

La K-théorie de Milnor [3] est le quotient de la K-théorie de Milnor–Witt par l'élément de Hopf η et la K-théorie de Witt est le quotient de la K-théorie de Milnor–Witt par le plan hyperbolique h. Le résultat principal de cet article (les théorèmes 2.1 et 2.4) est d'identifier la K-théorie de Witt à la somme des puissances de l'idéal fondamental.

Le résultat principal de [8] démontre le caractère fondamental de la K-théorie de Milnor–Witt des corps. Le Théorème 5.3 ci-dessous exprime que cet objet universel est le résultat du "mélange" d'objets de nature "motivique" et d'objets de nature "groupes de Witt". Ce mélange s'explique par le nécessaire mélange des deux intuitions topologiques présentes en géométrie algébrique : la géométrie complexe pour l'aspect motivique et la géométrie réelle pour l'aspect groupe de Witt. La K-théorie de Milnor–Witt est donc en quelque sorte l'objet universel ayant ces deux natures à la fois.

2. Énoncé des résultats

On note $W(F)$ l'anneau de Witt des formes quadratiques anisotropes sur F et $I(F) \subset W(F)$ son idéal fondamental.

Pour tout entier $n \geq 0$ notons $I^n(F)$ la n-ième puissance de $I(F)$. On note $I^*_+(F)$ l'anneau commutatif gradué égal en degré $n \geq 0$ à $I^n(F)$ et muni du produit évident.

Pour tout $u \in F^\times$ on note $< u > \in W(F)$ la classe de la forme quadratique de rang un $u.X^2$ et l'on note $<< u >> := 1- < u > = 1+ < -u > \in W(F)$ la forme de Pfister associée.

Soit $\mathrm{Tens}_{W(F)}(I(F))$ la $W(F)$-algèbre tensorielle sur le $W(F)$-module $I(F)$, graduée en posant

$$\mathrm{Tens}_{W(F)}(I(F))_n := I(F) \otimes_{W(F)} \ldots \otimes_{W(F)} I(F) \ \ (n \text{ copies}).$$

Le groupe abélien $I(F)$ est engendré par les $<< u >>$ et l'homomorphisme canonique de $W(F)$-algèbres graduées $\mathrm{Tens}_{W(F)}(I(F)) \to I^*(F)$ est donc surjectif. D'autre part, pour tout $u \in F^\times - \{1\}$ on a la relation de Steinberg

$$<< u >> . << 1 - u >> = 0 \ \in I^2(F)$$

qui découle de l'égalité $1+ < u(1-u) > = < u > + < 1 - u >$ dans $W(F)$.

On note $K^W_+(F)$, le quotient de l'algèbre $\mathrm{Tens}_{W(F)}(I(F))$ par l'idéal bilatère engendré par les produits tensoriels $<< u >> \otimes << 1-u >>$, avec $u \in F^\times - \{1\}$. On dispose donc d'un épimorphisme canonique

$$K^W_+(F) \to I^*_+(F).$$

Théorème 2.1. *L'homomorphisme canonique*

$$K^W_+(F) \to I^*_+(F)$$

est un isomorphisme.

Remarque 2.2. Il est clair que l'anneau gradué $K^W_+(F) \otimes_{W(F)} \mathbb{Z}/2$ s'identifie à la K-théorie de Milnor modulo 2, $k_*(F) := K^M_*(F)/2$, (voir [3]) et que l'anneau gradué $I^*_+(F) \otimes_{W(F)} \mathbb{Z}/2$ s'identifie quant à lui à la somme directe $\oplus_{n \in \mathbb{N}} I^n(F)/I^{n+1}(F)$.

Si l'on tensorise l'homomorphisme $K^W_+(F) \to I^*_+(F)$ précédent par $\mathbb{Z}/2$ au dessus de $W(F)$ on obtient donc l'homomorphisme défini par Milnor dans [3]

$$k_*(F) \to \oplus_n I^n(F)/I^{n+1}(F).$$

Le théorème précédent ne peut donc pas être élémentaire puisqu'il implique la conjecture de Milnor sur la filtration de l'anneau de Witt par les puissances de l'idéal fondamental, et en effet, le travail de Arason et Elman utilise l'affirmation de cette conjecture [10, 4, 7].

Pour tout entier $n \leq 0$ on pose $I^n(F) := W(F)$. On note $I^*(F)$ l'anneau commutatif $\mathbb{Z}$-gradué égal en degré $n \geq 0$ à $I^n(F)$ et muni du produit évident.

L'anneau $I^*_+(F)$ précédemment considéré s'identifie au sous-anneau constitué des éléments de degré ≥ 0. On note $\eta \in I^{-1}(F)$ l'élément correspondant à $1 \in W(F)$. Observons que le produit par η est exactement l'inclusion $I^n(F) \subset I^{n-1}(F)$, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Le lemme suivant est immédiat :

Lemme 2.3. *Les symboles* $<< a >> \in I(F)$ *et* $\eta \in I^{-1}(F)$ *satisfont les* 4 *relations suivantes (dans* $I^*_+(F)$*) :*

(1) *pour chaque paire* $(a, b) \in (F^\times)^2$ *:*

$$<< ab >>=<< a >> + << b >> -\eta << a >><< b >>$$

(2) *pour tout* $a \in F^\times - \{1\}$ *:*

$$<< a >> . << 1 - a >>= 0$$

(3)

$$\eta. << -1 >>= 2$$

(4) *pour tout* $a \in F^\times$

$$\eta << a >>=<< a >> \eta.$$

Ces relations sont en fait "les seules" :

Théorème 2.4. *Le lemme précédent donne une présentation de l'anneau* $\mathbb{Z}$*-gradué* $I^*(F)$.

3. K-théorie de Witt

Ce qui précède nous conduit très naturellement à introduire la définition suivante :

Définition 3.1. On note $K^W_*(F)$ l'anneau $\mathbb{Z}$-gradué librement engendré par les symboles de degré 1 :

$$\{a\}$$

pour chaque $a \in F^\times$ et le symbole de degré -1

$$\eta$$

et soumis aux relations suivantes :

(1) pour chaque paire $(a, b) \in (F^\times)^2$:

$$\{ab\} = \{a\} + \{b\} - \eta.\{a\}.\{b\}$$

(2) pour tout $a \in F^\times - \{1\}$:

$$\{a\}.\{1 - a\} = 0$$

(3)

$$\eta.\{-1\} = 2$$

(4) pour tout $a \in F^\times$

$$\eta.\{a\} = \{a\}.\eta.$$

Cet anneau $K_*^W(F)$ s'appelle la K-théorie de Witt de F.

On dispose donc d'un homomorphisme canonique :

$$K_*^W(F) \to I^*(F)$$

d'anneaux $\mathbb{Z}$-gradués et le Théorème 2.4 affirme précisément que c'est un isomorphisme.

Dans cette partie nous allons établir de façon élémentaire, comme la notation le suggère, que l'algèbre $K_+^W(F)$ définie au paragraphe précédent s'identifie à la sous-algèbre des éléments de degré positifs ou nuls de $K_*^W(F)$.

Lemme 3.2. *Pour chaque entier $n \geq 1$ il existe un unique homomorphisme de $W(F)$-modules :*

$$\eta : K_{+,n}^W(F) \to K_{+,n-1}^W(F)$$

tel que

$$\eta(<< u_1 >> \ldots\ldots << u_n >>) = (1- < u_1 >). << u_2 >> \ldots\ldots << u_n >>$$

pour chaque n-uplet d'unité de F.

Démonstration. Par construction de $K_+^W(F)$, le noyau de l'épimorphisme :

$$I(F) \otimes_{W(F)} \cdots \otimes_{W)(F)} I(F) \to K_{+,n}^W(F)$$

est le sous-groupe engendré par les $<< u_1 >> \otimes \cdots \otimes << u_n >>$ avec $(u_1, \ldots, u_n) \in (F^\times)^n$ tel qu'il existe $i < j$ avec $u_i + u_j = 1$. Il s'agit donc de montrer qu'alors le produit $(1- < u_1 >). << u_2 >> \ldots\ldots << u_n >>$ est nul dans $K_{+,n-1}^W(F)$. Si $i > 1$ c'est trivial. Sinon, on a, en utilisant la définition du produit tensoriel au dessus de $W(F)$:

$$(1- < u_1 >). << u_2 >> \ldots\ldots << u_n >>$$

$$= << u_2 >> \ldots\ldots \big((1- < u_1 >). << u_j >> \big) \ldots\ldots << u_n >>$$

$$= 0$$

puisque $(1- < u_1 >). << u_j >>= 0 \in I(F)$. $\square$

On note $K_\bullet^W(F)$ le $W(F)$-module $\mathbb{Z}$-gradué égal en degré $n \in \mathbb{Z}$ à $K_n^W(F)$ si $n \geq 0$ et à $W(F)$ si $n < 0$. On note $\eta \in K_{\bullet,-1}^W(F)$ l'élément 1. On déduit très facilement du lemme précédent qu'il existe une unique structure de $W(F)$-algèbre associative unitaire graduée sur $K_\bullet^W(F)$ telle que le produit $K_{\bullet,n}^W(F) \otimes K_{\bullet,m}^W(F) \to K_{\bullet,n+m}^W(F)$ est celui de $K_+^W(F)$ dans le cas où n et m sont positifs où nuls, et telle que le produit par η est l'homomorphisme défini par le lemme.

Lemme 3.3. *Les symboles* $<< a >> \in K^W_{\bullet,1}(F)$ *et* $\eta \in K^W_{\bullet,-1}(F)$ *vérifient les quatre relations de la définition précédente. On en déduit un homomorphisme canonique d'algèbres :*

$$\Phi : K^W_*(F) \to K^W_\bullet(F)$$

qui envoie le symbole $\{u\} \in K^W_1(F)$ *sur la forme de Pfister* $<< u >> \in I(F)$.

Notre objectif ici est d'établir qu'en fait :

Théorème 3.4. *L'homomorphisme*

$$K^W_*(F) \to K^W_\bullet(F)$$

est un isomorphisme.

Pour chaque $u \in F^\times$ posons :

$$< u >:= 1 - \eta\{u\} \in K^W_0(F).$$

Autrement dit $\eta\{u\} = 1 - < u >$. On peut vérifier que $\Phi(< u >) = < u > \in W(F)$.

Il n'est pas difficile d'établir :

Lemme 3.5. 1) *Pour tout* $n \geq 1$, *le groupe* $K^W_n(F)$ *est engendré par les produits*

$$\{u_1\}.\ldots.\{u_n\}$$

avec les $u_i \in F^\times$.

2) *Pour tout* $n \leq 0$, *le groupe* $K^W_n(F)$ *est engendré par les*

$$\eta^n. < u >$$

avec $u \in F^\times$.

On en déduit en particulier que Φ est surjectif, puisque $I(F)$ est engendré comme groupe par les $<< u >>$.

Lemme 3.6. *Pour toute paire* $(a, b) \in (F^\times)^2$ *on a dans* $K^W_*(F)$ *:*

1) $\{ab\} = \{a\} + < a > .\{b\} = \{a\}. < b > + \{b\}$ *;*

2) $< ab > = < a > . < b >$ *;*

3) $\{1\} = 0$, $< 1 >= 1$ *et* $< -1 >= -1 \in K^W_0(F)$ *;*

4) $< a >$ *est une unité de l'anneau* $K^W_0(F)$ *dont l'inverse est* $< a^{-1} >$ *;*

5) $\{\frac{a}{b}\} = \{a\} - < \frac{a}{b} > .\{b\}$. *En particulier pour tout* $a \in F^\times$ *on a :* $\{a^{-1}\} = - < a^{-1} > .\{a\}$.

Démonstration. 1) est évident. On obtient 2) en appliquant η à la relation (1) (et en utilisant (4)). D'après la relation (3) on a bien $< -1 >= -1$. On en déduit $< 1 >= 1$ car d'après le point 2) on a $< -1 >=< 1 > . < -1 >$. Le point 1) ci-dessus démontre que

$$\{1\} = \{1\} + < 1 > .\{1\}$$

d'où $\{1\} = 0$. Le point 4) résulte clairement de 2) et 3) et le point 5) est une conséquence facile de 1) 2) 3) et 4). □

Proposition 3.7. *Pour tout $a \in F^\times$ et pour tout $b \in F^\times$ on a :*
1) $\{a\}.\{-a\} = 0$ *in* $K_2^W(F)$.
2) $< a > .\{b\} = \{b\}. < a >$.
3) $\{a\}.\{a\} = \{a\}.\{-1\}$ *in* $K_2^W(F)$.

Démonstration. On adapte [3, Lemma 1.1].

1) On part de l'égalité $-a = \frac{1-a}{1-a^{-1}}$ pour $a \in F^\times - \{1\}$ (pour $a = 1$ la formule résulte de $\{1\} = 0$). Le lemme précédent implique

$$\{-a\} = \left\{\frac{1-a}{1-a^{-1}}\right\} = \{1-a\} - < -a > .\{1-a^{-1}\}$$

et donc

$$\{-a\}.\{a\} = \{1-a\}.\{a\} - < -a > .\{1-a^{-1}\}.\{a\} = - < -a > .\{1-a^{-1}\}.\{a\}.$$

D'après le lemme 3.6 (et le fait que $< a >$ commute avec $\{a\}$) on trouve bien

$$\{-a\}.\{a\} = < -a > .\{1-a^{-1}\}.\{a^{-1}\}. < a^{-1} > = 0$$

par la relation de Steinberg.

2) On a $\{ab\} = \{a\} + < a > .\{b\} = \{ba\} = \{b\}. < a > + \{a\}$ d'après le point 1) du lemme 3.6 ce qui implique $< a > .\{b\} = \{b\}. < a >$.

3) On a d'après ce qui précède $\{-a\} = \{a\}. < -1 > + \{-1\} = \{-1\} - \{a\}$. Ainsi $0 = \{a\}.\{-a\} = \{a\}.\{-1\} - \{a\}.\{a\}$. □

On pourrait en déduire tout de suite en adaptant *loc. cit.* que l'algèbre $K_*^W(F)$ est bien commutative.

Corollaire 3.8. *Pour tout couple $(u, v) \in (F^\times)^2$ on a :*
1) $\{v^2\} = 0$;
2) $< u(v^2) > = < u >$;
3) *lorsque* $u + v \neq 0$: $< u > + < v > = < u + v > + < uv(u + v) >$.

Démonstration. On a $\{v^2\} = 2\{v\} - \eta\{v\}.\{v\} = 2\{v\} - \eta\{v\}.\{-1\} = 2\{v\} - \{v\}.\eta\{-1\} = 2\{v\} - 2\{v\} = 0$.

On en déduit que $\{u(v^2)\} = 0$ et $< u(v^2) > = < u >$.

Enfin d'après la relation de Steinberg à laquelle on applique η, on a :

$$< a > + < 1-a > = 1 + < a(1-a) > .$$

Pour $a = \frac{u}{u+v}$ on obtient la formule souhaitée. □

On reconnait dans le précédent corollaire la présentation standard de l'anneau de Grothendieck–Witt $GW(F)$ [12] et l'on obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux

$$GW(F) \to K_0^W(F).$$

On observe enfin que l'image de h est $1+ < -1 >= 2 - \eta\{-1\} = 0$ d'où en fait un homomorphisme d'anneaux

$$W(F) \to K_0^W(F).$$

Lemme 3.9. *L'homomorphisme précédent*

$$W(F) \to K_0^W(F)$$

est un isomorphisme et le produit par η^n, $n \in \mathbb{N}$,

$$K_0^W(F) \to K_{-n}^W(F)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On a déjà observé plus haut que les groupes $K_{-n}^W(F)$ pour $n \geq 0$ sont engendrés par les $\eta^n. < u >$. Les homomorphismes

$$W(F) \to K_{-n}^W(F), < u > \mapsto \eta^n. < u >$$

sont donc tous surjectifs.

Mais ils sont injectifs car le composé

$$W(F) \to K_{-n}^W(F) \to I^{-n}(F)$$

est un isomorphisme (évident). □

Ce lemme démontre le Théorème 3.4 en degré ≤ 0.

Lemme 3.10. *Le groupe abélien $I(F)$ est le quotient du groupe abélien libre sur les symboles $<< u >> \in I(F)$, $u \in F^\times$ par les relations :*

1) $<< 1 >>= 0$
2) $<< u(v)^2 >>=<< u >>$ *pour tout* $(u, v) \in (F^\times)^2$ *et*
3) $<< u >> + << 1 - u >>=<< u(1-u) >>$ *pour* $u \in F^\times - \{1\}$.

Démonstration. On utilise la suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \to I(F) \to GW(F) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

La présentation standard du groupe Grothendieck–Witt rappelée ci-dessus et la section canonique $\mathbb{Z} \to GW(F)$, $1 \mapsto 1$ donne immédiatement le lemme. □

On vérifie ensuite immédiatement que l'application

$$u \mapsto \{u\} \in K_1^W(F)$$

satisfait les trois relations précédentes et l'on en déduit un homomorphisme

$$I(F) \to K_1^W(F).$$

Lemme 3.11. *L'homomorphisme*

$$I(F) \to K_1^W(F)$$

est un isomorphisme de $W(F) = K_0^W(F)$-modules.

Démonstration. On sait déjà qu'il est surjectif et de plus l'injectivité résulte du fait que le composé $I(F) \to K_1^W(F) \to I(F)$ est l'identité. On vérifie très facilement que c'est bien un isomorphisme de $W(F)$-modules. □

Démonstration du théorème 3.4. Puisque les symboles $\{u\} \in K_1^W(F)$ vérifie la relation de Steinberg on déduit finalement du Lemme précdent que les isomorphismes $W(F) = K_0^W(F)$ et $I(F) = K_1^W(F)$ induisent un homomorphisme de $W(F)$-algèbres :

$$K_+^W(F) \to K_*^W(F)$$

qui est de toute évidence surjectif en degrés ≥ 0 et dont le composé avec $K_*^W(F) \to K_\bullet^W(F)$ est l'inclusion évidente. Ceci implique cette fois le théorème 3.4 en degrés ≥ 1. □

4. La méthode de Arason et Elman

On se propose de déduire le théorème 2.1 du théorème 3.1 de [1]. Rappelons-en l'énoncé. Pour chaque n-uplet $(u_1,\dots,u_n) \in (F^\times)^n$ on note simplement $<< u_1,\dots,u_n >> \in I^n(F)$ le produit $<< u_1 >> \cdots << u_n >>$, que l'on appelle la n-forme de Pfister associée au symbole $(u_1,\dots,u_n)$.

Théorème 4.1 ([1, 3.1])**.** *Pour chaque entier $n \geq 1$ notons $\underline{I}^n(F)$ le quotient du groupe abélien $\mathbb{Z}[(F^\times)^n]$ librement engendré par l'ensemble $(F^\times)^n$ par le sous groupe abélien engendré par les éléments de la forme suivante :*

(0) *$(u_1,\dots,u_n)$ pour tout $(u_1,\dots,u_n) \in (F^\times)^n$ tel que la n-forme de Pfister $<< u_1,\dots,u_n >>$ est nulle dans $W(F)$.*

(1) *$(a,u_2,\dots,u_n)+(b,u_2,\dots,u_n)-(a+b,u_2,\dots,u_n)-(a.b.(a+b),u_2,\dots,u_n)$ pour tout $(a,b,u_2,\dots,u_n) \in (F^\times)^{n+1}$ tel que $a+b \neq 0$.*

(2) *$(a.b,c,u_3,\dots,u_n)+(a,b,u_3,\dots,u_n)-(a.c,b,u_3,\dots,u_n)-(a,c,u_3,\dots,u_n)$ pour tout $(a,b,c,u_3,\dots,u_n) \in (F^\times)^{n+1}$, lorsque $n \geq 2$.*

Alors l'homomorphisme évident $\mathbb{Z}[(F^\times)^n] \to I^n(F)$ induit un isomorphisme

$$\underline{I}^n(F) \cong I^n(F).$$

Remarque 4.2. En fait d'après [1], pour $n \geq 2$, la relation (1) est conséquence de (0) et (2).

On observe que le groupe abélien $\mathbb{Z}[(F^\times)^n]$ s'identifie au produit tensoriel $\mathbb{Z}[F^\times] \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[F^\times]$ (n facteurs). Notons $R_*(F)$ le sous-groupe abélien gradué de $\mathrm{Tens}_{\mathbb{Z}}(F^\times)$ engendré par les relations (0), (1) et (2), autrement dit le noyau de la projection $\mathrm{Tens}_{\mathbb{Z}}(F^\times) \to \underline{I}^*(F)$.

On introduit l'homomorphisme d'anneaux gradués

$$\mathrm{Tens}_{\mathbb{Z}}(F^\times) \to K_*^W(F)$$

déterminé par l'homomorphisme (correspondant au degré 1) $\mathbb{Z}(F^\times) \to I(F)$, $(a) \mapsto << a >>$.

Lemme 4.3. *Le sous groupe abélien gradué $R_*(F)$ de* $\mathrm{Tens}_{\mathbb{Z}}(F^\times)$ *est dans le noyau de l'homomorphisme d'anneaux gradués*

$$\mathrm{Tens}_{\mathbb{Z}}(F^\times) \to K_*^W(F).$$

Démonstration du théorème 2.1 à partir du théorème 4.1. Nous commençons par observer que le lemme précédent et le Théorème 4.1 permettent d'établir le théorème 2.1 : en effet, puisque $I(F)$ est engendré comme groupe abélien par les $<< a >>$ on en déduit que l'homomorphisme induit

$$\mathrm{Tens}_{\mathbb{Z}}(F^\times)/R_*(F) = \underline{I}^*(F) \to K_+^W(F)$$

est surjectif en degrés ≥ 1. Comme de plus le composé avec l'homomorphisme du théorème 2.1

$$\underline{I}^*(F) \to K_+^W(F) \to I^*(F)$$

est un isomorphisme (en degrés ≥ 1) d'après 4.1 on en déduit bien le théorème 2.1. $\square$

Démonstration du Lemme 4.3. Il est clair par construction que $R_*(F)$ est un idéal à droite. Le symbole $(1) \in \mathbb{Z}[F^\times]$ est dans $R_1(F)$ d'après la relation (0) du théorème 4.1. D'autre part pour tout couple $(b, c) \in (F^\times)^2$, la relation (2) appliquée au triplet $(1, b, c)$ donne $(b)\otimes(c)+(1)\otimes(b)-(c)\otimes(b)-(1)\otimes(c) \in R_2(F)$. Comme on a déja $(1)\otimes(b) \in R_2(F)$ et $(1)\otimes(c) \in R_2(F)$ on en déduit que $(b)\otimes(c)-(c)\otimes(b) \in R_2(F)$. De la, il résulte que $R_*(F)$ est un idéal bilatère (et que le quotient est commutatif !).

Notons $\mathrm{Ker}_*(F)$ le noyau de $\mathrm{Tens}_{\mathbb{Z}}(F^\times) \to K_+^W(F)$. On va établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_N(F) \subset \mathrm{Ker}_n(F)$.

Il est clair que $R_1(F) = \mathrm{Ker}_1(F)$ puisque $K_1^W(F) = I(F)$ par définition et $\underline{I}^1(F) = I(F)$ d'après le téorème 4.1. Bien sûr, ici, la démonstration est élémentaire et n'utilise que la présentation de $I(F)$ rappelée en 3.10.

D'après la remarque ci-dessus, il nous suffit maintenant de vérifier que pour $n \geq 2$ les éléments de la forme $bf(0)$ et $bf(2)$ sont dans $\mathrm{Ker}_3(F)$.

Supposons tout d'abord $n = 2$. Supposons que $(a, b) \in R_2(F)$, c'est à dire que la forme $<< a, b >>$ est nulle dans $W(F)$. On sait que celà signifie qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (F^\times)^2$ avec

$$b = \alpha^2 - a\beta^2.$$

Montrons qu'alors $<< a >> . << b >>= 0$ dans

$$K_2^W(F) := I(F) \otimes_{W(F)} I(F)/ << u >> \otimes << 1-u >> .$$

On a (dans $K_2^W(F)$) :

$$<< a >> . << b >>=<< a >> . << \alpha^2 - a\beta^2 >>$$

$$=<< a >> .(<< \alpha^2 >> + < \alpha^2 > . << 1 - a.(\frac{\beta}{\alpha})^2 >>$$

$$=<< a.(\frac{\beta}{\alpha})^2 >> . << 1 - a.(\frac{\beta}{\alpha})^2 >>= 0$$

car dans $I(F)$ on a $<< \alpha^2 >>= 0$ et $<< a.(\frac{\beta}{\alpha})^2 >>=<< a >>$. On a donc bien $(a, b) \in \mathrm{Ker}_2(F)$.

Supposons maintenant que $(a, b, c) \in (F^\times)^3$ est un triplet quelconque. Montrons que l'élément de type (2) associé :

$$(a.b, c) + (a, b) - (a.c, b) - (a, c)$$

appartient à $\mathrm{Ker}_2(F)$. Autrement dit vérifions que

$$<< a.b >> . << c >> + << a >> . << b >>$$
$$=<< a.c >> . << b >> + << a >> . << c >>$$

dans $K_2^W(F)$. Or

$$<< a.b >> . << c >> + << a >> . << b >>$$
$$= (<< a >> + < a > . << b >>). << c >> + << a >> . << b >>$$
$$=<< a >> . << c >> + < a > . << c >> . << b >> + << a >> . << b >>$$

(car $K_*^W(F)$ est commutative)

$$=<< a >> . << c >> + << a.c >> . << b >> .$$

On a donc bien $R_2(F) \subset \mathrm{Ker}_2(F)$. Le même argument démontre en fait que tout élément de type (2) (quelque soit n) appartient à $\mathrm{Ker}_n(F)$.

Supposons finalement que $(u_1, \ldots, u_n) \in (F^\times)^n$, avec $n > 2$, est tel que la forme de Pfister $<< u_1, \ldots, u_n >>$ est nulle dans $W(F)$ Un théorème classique [12, Chap 4 Thm 1.2] affirme que si deux n-formes de Pfister $<< a_1, \ldots, a_n >>$ et $<< b_1, \ldots, b_n >>$ sont isomorphes dans $W(F)$ c'est qu'il existe une "p-chaîne" passant de la première à la seconde. Ainsi on peut passer de $(u_1, \ldots, u_n)$ à $(1, \ldots, 1)$ par une suite de permutations de deux éléments et de relations du type $(a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n) \sim (a'_1, a'_2, a_3 \ldots, b_n)$ avec $<< a_1, a_2 >>=<< a'_1, a'_2 >>$ dans $W(F)$. Comme l'étape précédente (pour $n = 2$) établit que $K_2^W(F) = I^2(F)$ on en déduit bien que $<< u_1 >> \ldots.. << u_n >>= 0 \in K_n^W(F)$.

Le lemme est ainsi établi. □

La méthode de Arason et Elman. On pourrait établir le théorème 2.1 directement à l'aide de la méthode suivante dégagée par Arason et Elman. On suppose que F est de type fini sur son corps premier, et on se donne une $W(F)$-algèbre commutative $\mathbb{N}$-graduée, A_*, et une application

$$F^\times \to A_1, u \mapsto \{u\}.$$

On suppose :

1) que l'homomorphisme

$$\mathrm{Tens}_{W(F)}(F^\times) \to A_*$$
$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mapsto \{u_1\}.\ldots.\{u_n\}$$

est surjectif ;

2) que l'application $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mapsto << u_1, \ldots, u_n >> \in I^n(F)$ induit un homomorphisme de $W(F)$-algèbres $\mathbb{N}$-graduées (forcément surjectif)

$$A_* \to I_+^*(F).$$

3) Qu'il existe pour chaque $n > 0$ un homomorphisme (nécessairement unique) de $W(F)$-modules

$$\eta : A_n \to A_{n-1}$$

tel que $\eta(\{u_1\}.\ldots.\{u_n\}) = (1- < u_1 >).\{u_2\}.\ldots.\{u_n\}$;

4) Que l'anneau $\mathbb{N}$-gradué quotient

$$A_*/\eta(A_*)$$

s'identifie à la K-théorie de Milnor modulo 2 (via le symbole $u \mapsto \{u\} \in A_1/\eta(A_2)$) ;

5) Que si $<< u_1, u_2 >>=<< v_1, v_2 >>$ dans $W(F)$ alors $\{u_1\}.\{u_2\} = \{v_1\}.\{v_2\}$ dans A_2 ;

6) Que l'homomorphisme $s_F : k_*(F) \to \oplus_n I^n(F)/I^{n+1}(F)$ est un isomorphisme et que l'homomorphisme $k_*(F) \to H^*(F; \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme en degré suffisament grand ;

Alors l'homomorphisme

$$A_* \to I_+^*(F)$$

est un isomorphisme.

Leur méthode de démonstration s'adapte en effet à ce cadre. D'après 3), 4) et 6) on dispose de diagrammes commutatifs de suites exactes pour $n > 0$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A_n & \to & A_{n-1} & \to & I^{n-1}(F)/I^n(F) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & I^n(F) & \to & I^{n-1}(F) & \to & I^{n-1}(F)/I^n(F) & \to & 0. \end{array}$$

Il suffit donc d'établir l'isomorphisme en grand degré. Leur lemme 2.1 établit que pour un certain n_0, $I^n(F)$ est sans torsion et que la filtration par les $I^n(F)$, $n \geq n_0$ est la filtration 2-adique. Enfin 5) implique que l'on dispose d'un homomorphisme canonique pour tout $n \geq 0$ du groupe abélien libre sur les symboles $(u_1, \ldots, u_n)$ modulo les isomorphismes en forme de Pfister associées. On peut donc appliquer leur corollaire 3.4 pour conclure.

5. K-théorie de Milnor–Witt

La définition suivante a été trouvée en collaboration avec Mike Hopkins :

Définition 5.1. On note $K_*^{MW}(F)$ l'anneau $\mathbb{Z}$-gradué associatif unitaire librement engendré par les symboles de degré 1 :

$$[a]$$

pour chaque $a \in F^\times$ et le symbole de degré -1

$$\eta$$

et soumis aux relations suivantes :

(1) pour chaque paire $(a,b) \in (F^\times)^2$:

$$[ab] = [a] + [b] + \eta.[a].[b]$$

(2) pour tout $a \in F^\times - \{1\}$:

$$[a].[1-a] = 0$$

(3)

$$\eta.(\eta.[-1] + 2) = 0$$

(4) pour tout $a \in F^\times$

$$\eta.[a] = [a].\eta.$$

Cet anneau $K_*^{MW}(F)$ s'appelle la K-théorie de Milnor–Witt de F.

Remarque 5.2. Posons $h := \eta.[-1] + 2 \in K_0^{MW}(F)$. On observera que la relation (3) se réécrit :

$$\eta.h = 0.$$

Si l'on "tue" l'élément h on obtient exactement la K-théorie de Witt précédemment définie, en posant $\{u\} := -[u]$. Autrement dit $K_*^{MW}(F)/h = K_*^W(F)$.

Si l'on tue cette fois l'élément η on obtient clairement la K-théorie de Milnor de F : $K_*^{MW}(F)/\eta = K_*^M(F)$ (Bien sûr, si l'on tue les deux on trouve la K-théorie de Milnor modulo 2).

Il en résulte que le produit par $\eta : K_{*+1}^{MW}(F) \to K_*^{MW}(F)$ induit un homomorphisme (de $K_*^{MW}(F)$-modules)

$$K_{*+1}^W(F) \to K_*^{MW}(F) \to K_*^M(F) \to 0.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $i^n(F) := I^n(F)/I^{n+1}(F)$. Les $i^n(F)$ tous ensembles forment un anneau commutatif $\mathbb{Z}$-gradué noté $I^*(F)$. On note $J^*(F)$ l'anneau $\mathbb{Z}$-gradué produit fibré de $I^*(F)$ et de $K_*^M(F)$ au dessus de $i^*(F)$ *via* les morphismes évidents $I^*(F) \to i^*(F)$ et $K_*^M(F) \to i^*(F)$. Ces groupes furent introduits dans [2]. Pour $n < 0$ on a $K_n^M(F) = I^n(F)/I^{n+1}(F) = 0$ et donc $J^n(F) = W(F)$. Posons $\eta = 1 \in W(F) = J^{-1}(F)$.

Pour tout $u \in F^\times$, posons[1]

$$[u] := (- << u >>, u) \in I(F) \times_{I(F)/I^2(F)} F^\times.$$

[1] C'est le point de vue "homotopique" rappelé ci-dessus qui justifie le choix du signe.

On vérifie sans peine que les éléments $[u] \in J^1(F)$ et $\eta = 1 \in J^{-1}(F)$ satisfont les 4 relations de la définition précédente. On obtient donc un homomorphisme canonique d'anneaux $\mathbb{Z}$-gradués :

$$K_*^{MW}(F) \to J^*(F).$$

Théorème 5.3. *L'homomorphisme précédent*

$$K_*^{MW}(F) \to J^*(F)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on dispose d'un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} & & K_{n+1}^W(F) & \to & K_n^{MW}(F) & \to & K_n^M(F) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & || & & \\ 0 & \to & I^{n+1}(F) & \to & I^n(F) & \to & K_n^M(F)(F) & \to & 0. \end{array}$$

Mais l'homomorphisme vertical de gauche est un isomorphisme car il s'identifie (à la multiplication par un signe près) à l'isomorphisme du théorème 2.4. $\square$

La démonstration en degré ≤ 0 est tout à fait élémentaire. L'auteur ignore s'il existe une démonstration élémentaire en tout degré du résultat précédent, c'est à dire n'utilisant pas la preuve par Voevodsky des conjectures de Milnor.

Corollaire 5.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on dispose d'une suite exacte fonctorielle en F*

$$0 \to I^{n+1}(F) \to K_n^{MW}(F) \to K_n^M(F) \to 0.$$

Remarque 5.5. On peut maintenant préciser les idées mentionnées dans l'introduction. L'homomorphisme

$$K_*^{MW}(F) \to [S^0, (\mathbb{G}_m)^{\wedge *}]$$

envoie le symbole $[a]$ sur la classe de l'application pointée $\mathrm{Spec}(F)_+ \to \mathbb{G}_m$ correspondant à a. L'image de η est la classe de l'application de Hopf algébrique, c'est à dire le morphisme canonique

$$\mathbb{A}^2 - \{0\} \to \mathbb{P}^1.$$

L'élément $< a > \in K_0^{MW}(F)$ a pour image quant à lui la classe de l'application

$$f_a : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, \quad [x, y] \mapsto [ax, y].$$

Pour plus de détails voir [5, 6, 8].

Références

[1] J. K. Arason et R. Elman, Powers of the fundamental ideal in the Witt ring, *Journal of Algebra* **239** (2001), 150–160.

[2] J. Barge et F. Morel, Cohomologie des groupes linéaires, K-théorie de Milnor et groupes de Witt, *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I* (1999), 191–196.

[3] J. Milnor, Algebraic K-theory and Quadratic Forms, *Inventionnes math.* **9** (1970), 318–344.

[4] F. Morel, Suite spectrale d'Adams et invariants cohomologiques des formes quadratiques, *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I* (1999), 963–968.

[5] F. Morel, An introduction to $\mathbb{A}^1$-homotopy theory, in : *Contemporary Developments in Algebraic K-theory*, Karoubi, Kuku and Pedrini (eds), ICTP Lecture notes 15, 2003.

[6] F. Morel, On the motivic π_0 of the sphere spectrum, in : J.P.C. Greenlees (ed.), *Axiomatic, Enriched and Motivic Homotopy Theory*, 219–260, Kluwer Academic Publishers, 2004.

[7] F. Morel, Milnor's conjecture on quadratic forms and mod 2 motivic complexes, preprint, Available at http ://www.math.jussieu.fr/ morel/listepublications.html.

[8] F. Morel, On the $\mathbb{A}^1$-homotopy and $\mathbb{A}^1$-homology sheaves of algebraic spheres, in preparation.

[9] F. Morel and V. Voevodsky, $\mathbb{A}^1$*-homotopy theory*, Publications Mathématiques de l'IHES, volume 90.

[10] D. Orlov, A. Vishik and V. Voevodsky, An exact sequence for Milnor's K-theory with applications to quadratic forms, http ://www.math.uiuc.edu/K-theory/0454/

[11] M. Rost, Chow groups with coefficients, Doc. Math. **1** (1996), No. 16, 319–393 (electronic).

[12] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian forms*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **270**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[13] V. Voevodsky. The $\mathbb{A}^1$-homotopy theory, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998)*, Doc. Math. 1998, Extra Vol. I, 579–604 (electronic).

Fabien Morel
Institut de Mathématiques
Université Paris 7
2 place Jussieu
75251 Paris
France
e-mail : morel@math.jussieu.fr

(Received: February 3, 2003)