REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 119 (2008)

Représentations Cristallines et F-Cristaux : le Cas d'un Corps Résiduel Imparfait.

OLIVIER BRINON (*) - FABIEN TRIHAN (**)

1. Introduction

Soit K un corps de valuation discrète complet, de caractéristique 0, à corps résiduel k de caractéristique p. On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau de ses entiers. Soient ϖ une uniformisante de K, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Supposons k parfait. Soient $W = \mathrm{W}(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, σ l'endomorphisme de Frobenius sur W et $\mathfrak{S} = W[\![u]\!]$. On prolonge σ à $\mathfrak{S}$ en posant $\sigma(u) = u^p$. On note $E(u) \in W[u]$ le polynôme minimal de ϖ sur $K_0 = W[p^{-1}]$, et $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi)$ la catégorie dont les objets sont les $\mathfrak{S}$-modules libres de rang fini $\mathfrak{M}$ munis d'un opérateur de Frobenius $\sigma^*\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ de conoyau tué par une puissance de $E(u)$, et dont les morphismes sont les applications $\mathfrak{S}$-linéaires compatibles aux Frobenius.

À la suite des travaux de Breuil (*cf* [4], [5]), Kisin prouve (entre autres) les résultats suivants.

THÉORÈME 1.1 ([15, Theorem 0.1]). *Il existe un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des représentations cristallines de $\mathcal{G}_K$ à poids de Hodge-Tate positifs dans la catégorie $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi) \otimes_{\boldsymbol{Z}_p} \boldsymbol{Q}_p$.*

Il donne en outre une caractérisation de l'image essentielle.

(*) Indirizzo dell'A.: Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément 93430 Villetaneuse, France
E-mail: brinon@math.univ-paris13.fr
(**) Indirizzo dell'A.: School of Mathematical Sciences, University of Nottingham, University Park, Nottingham, NG7 2RD, United Kingdom
E-mail: fabien.trihan@nottingham.ac.uk

THÉORÈME 1.2 ([15, Theorem 0.3]). *Toute représentation cristalline à poids de Hodge-Tate dans* $\{0,1\}$ *provient d'un groupe p-divisible sur* $\mathcal{O}_K$.

Il donne aussi une classification des groupes p-divisibles à isogénies près et des schémas en groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_K$ en termes $\mathfrak{S}$-modules munis d'une structure de Frobenius.

Signalons au passage la conséquence suivante du théorème 1.2 :

COROLLAIRE 1.3 (*cf* [6, Corollaire 5.3.4]). *Soient A une variété abélienne définie sur K et* $\mathrm{V}_p(A)$ *son module de Tate tensorisé par* $\boldsymbol{Q}_p$. *Alors A a bonne réduction sur* $\mathcal{O}_K$ *si et seulement si* $V_p(A)$ *est une représention cristalline.*

Le but de cette note est d'expliquer comment on peut déduire des résultats de Kisin des énoncés analogues lorsque le corps résiduel k est seulement supposé avoir une p-base finie. La théorie des représentations cristallines a été décrite dans [7], et fait l'objet de rappels dans la section 3. On construit des anneaux et des foncteurs analogues à ceux de Kisin. Dans la plupart des cas, les propriétés de ces derniers peuvent se prouver en plongeant simplement K dans un corps $\mathbb{K}$ de même uniformisante, mais de corps résiduel parfait. Cela est possible grâce au fait qu'il n'y a pas d'hypothèse sur le corps résiduel dans les travaux de Kedlaya (*cf* [13], [14]), qui sont utilisés par Kisin, ainsi que par le fait que la théorie de Dieudonnée sur un corps admettant une p-base finie «marche» aussi bien que dans le cas parfait en vertu d'un résultat de de Jong (*cf* [8, Theorem 4.1.1]). Les théorèmes 1.1 et 1.2 se généralisent alors en le corollaire 4.18 et le théorème 6.10 respectivement. Remarquons que pour le corollaire 4.18, la catégorie $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi)$ doit être remplacée par la catégorie $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi, \nabla)$ (*cf* définition 4.16) : la réduction modulo u des objets est munie d'une connexion, c'est là un phénomène nouveau par rapport au cas où k est parfait.

La rédaction de ce travail a eu lieu à la Graduate School of Mathematical Sciences à l'Université de Tokyo : les auteurs remercient T. Saito de son accueil. Le premier auteur a en outre bénéficié du soutien du Marie Curie Resarch Training Network, dans le cadre du Réseau Européen de Géométrie Algébrique et d'Arithmétique, tandis que le deuxième auteur a bénéficié du soutien du FNRS. Le deuxième auteur souhaite enfin remercier Mark Kisin pour avoir bien voulu répondre à quelques questions concernant son article.

2. Notations

On suppose que k admet une p-base finie. On note v la valuation de $\overline{K}$, normalisée par $v(p) = 1$. On note C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique. C'est un corps algébriquement clos. La valuation v et l'action de $\mathcal{G}_K$ s'étendent à C par continuité. Pour tout sous-corps F de C, on note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F et $\mathcal{G}_F = \mathrm{Gal}(\overline{K}/F)$ si $K \subseteq F \subseteq \overline{K}$.

Choisissons $t_1, \ldots, t_d \in \mathcal{O}_K$ des relèvements d'une p-base de k. On note $e \in \boldsymbol{N}_{>0}$ l'indice de ramification absolu de K : on a $v(\varpi) = 1/e$.

Soit $\mathcal{O}_{K_0}$ le sous-anneau de $\mathcal{O}_K$ tel que :

(1) $\mathcal{O}_{K_0}$ est un anneau de Cohen pour k ;
(2) $t_1, \ldots, t_d \in \mathcal{O}_{K_0}$.

On pose $K_0 = \mathcal{O}_{K_0}[p^{-1}]$: on a alors $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{K_0}[\varpi]$ et le polynôme minimal de ϖ sur K_0 est un polynôme d'Eisenstein $E(u) \in \mathcal{O}_{K_0}[u]$ de degré e. On se donne $\widetilde{\varpi} = \big(\varpi^{(n)}\big)_{n \in \boldsymbol{N}} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{\boldsymbol{N}}$ une suite cohérente de racines p^n-ièmes de ϖ : on a $\varpi^{(0)} = \varpi$ et $\big(\varpi^{(n+1)}\big)^p = \varpi^{(n)}$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$. On pose $K_\infty = K\big[\varpi^{(n)}\big]_{n \in \boldsymbol{N}}$. C'est une extension totalement ramifiée de K.

On se fixe un relèvement $\sigma \colon \mathcal{O}_{K_0} \to \mathcal{O}_{K_0}$ du Frobenius de k. D'après [3, Corollaire 1.2.7 (ii)], cela équivaut à la donnée d'éléments $x_1, \ldots, x_d \in \mathcal{O}_{K_0}$ tel que $x_i \equiv t_i^p \bmod p\mathcal{O}_{K_0}$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$.

On note $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_0}$ le séparé complété, pour la topologie p-adique, de la limite inductive du système

$$\mathcal{O}_{K_0} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{K_0} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{K_0} \xrightarrow{\sigma} \cdots$$

C'est un anneau isomorphe à l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans la clôture radicielle k^{rad} de k. Quitte à changer $\overline{K}$, on peut supposer que $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_0} \subseteq C$. On dispose de l'inclusion $i_\sigma : \mathcal{O}_{K_0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{K}_0}$, de sorte que l'application σ sur $\mathcal{O}_{K_0}$ est induite par le Frobenius des vecteurs de Witt sur $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_0}$ (qu'on note encore σ). On pose $\mathbb{K}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{K}_0}[p^{-1}]$ et $\mathbb{K} = K\mathbb{K}_0$. Ce sont des corps de valuation discrète complets de caractéristique 0, de mêmes uniformisantes que K_0 et K respectivement, et de corps résiduel k^{rad} parfait. On note $\overline{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{K}$ dans C. On a donc la situation suivante

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & C \arrow[d, dash] \\
 & \overline{\mathbb{K}} \arrow[dd, dash] \\
\overline{K} \arrow[ur, dash] \arrow[dd, dash] & \\
 & \mathbb{K} \arrow[dd, dash] \\
K \arrow[ur, dash] \arrow[dd, dash] & \\
 & \mathbb{K}_0 \\
K_0 \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

On note $\widehat{\Omega}$ le module des différentielles continues de $\mathcal{O}_{K_0}$ relativement à $\boldsymbol{Z}$:

$$\widehat{\Omega} = \varprojlim_{n>0} \Omega^1_{\mathcal{O}_{K_0}/\boldsymbol{Z}}/p^n\Omega^1_{\mathcal{O}_{K_0}/\boldsymbol{Z}}.$$

et $\mathrm{d}\colon \mathcal{O}_{K_0} \to \widehat{\Omega}$ la différentielle canonique. Le $\mathcal{O}_{K_0}$-module $\widehat{\Omega}$ est libre de base $(\mathrm{d}\,t_i)_{1\le i\le d}$.

On note $\mathbf{Rep}_{\boldsymbol{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$ la catégorie des représentations p-adiques de $\mathcal{G}_K$, dont les objets sont les $\boldsymbol{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_K$, et dont les morphismes sont les applications $\boldsymbol{Q}_p$-linéaires $\mathcal{G}_K$-équivariantes. On note $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\boldsymbol{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$ constituée par les représentations cristallines, et $\mathbf{Rep}^{\mathbf{BT}}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\boldsymbol{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$ constituée par les représentations cristallines à poids de Hodge-Tate dans $\{0,1\}$ (cf. section 3).

Si R est un anneau, on note $\mathbf{BT}(R)$ la catégorie des (p-)groupes de Barsotti-Tate (= groupes p-divisibles) sur $\mathrm{Spec}(R)$. Rappelons que ses objets sont les ind-schémas en groupes G sur $\mathrm{Spec}(R)$ tels que G est de p-torsion, p-divisible et $G(1) = \mathrm{Ker}(p\colon G \to G)$ est fini localement libre, et que ses morphismes sont les homomorphismes de groupes sur $\mathrm{Spec}(R)$. Si $n \in \boldsymbol{N}_{>0}$ et $G \in \mathbf{BT}(X)$, on note $G(n)$ le noyau de la multiplication par p^n sur G. C'est un schéma en groupes fini et localement libre sur X de rang p^{nh} où h est une fonction localement constante sur $\mathrm{Spec}(R)$ (la hauteur de G).

Si $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$, on note $\mathrm{T}_p(G) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(\mathcal{O}_{\overline{K}})}(\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p, G\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_{\overline{K}})$ son module de Tate. C'est un $\boldsymbol{Z}_p$-module libre de rang h (où h est la hauteur de G), muni d'une action linéaire continue de $\mathcal{G}_K$. On définit ainsi un foncteur de $\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ dans la catégorie des $\boldsymbol{Z}_p$-modules munis d'une action linéaire continue de $\mathcal{G}_K$. Comme $\mathcal{O}_K$ est un anneau de valuation discrète dont le corps des fractions est de caractéristique 0, ce foncteur est pleinement fidèle (cf. [19, Corollary 1 of Theorem 4]).

On pose alors $\mathrm{V}_p(G) = \boldsymbol{Q}_p \otimes_{\boldsymbol{Z}_p} \mathrm{T}_p(G)$: on a $\mathrm{V}_p(G) \in \mathbf{Rep}_{\boldsymbol{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$. D'après ce qui précède, on obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$\mathrm{V}_p\colon \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)\otimes_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Q} \to \mathbf{Rep}_{\boldsymbol{Q}_p}(\mathcal{G}_K).$$

3. Rappels sur les représentations cristallines.

DÉFINITION 3.1. Un (φ,∇)-module filtré sur K relativement à K_0 est un K_0-espace vectoriel de dimension finie D muni des structures supplémentaires suivantes :

(1) un opérateur de Frobenius $\varphi_D: D \to D$ qui est σ-linéaire et dont le linéarisé $\sigma^* D \to D$ est un isomorphisme;

(2) une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla: D \to D \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ pour laquelle le Frobenius est horizontal;

(3) une filtration decroissante séparée exhaustive $\mathrm{Fil}^\bullet D_K$ sur $D_K := K \otimes_{K_0} D$ telle qu'on a la transversalité de Griffith pour ∇.

Les (φ, ∇)-modules filtrés sur K relativement à K_0 forment une catégorie additive $\boldsymbol{Q}_p$-linéaire qu'on dénote par $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$.

REMARQUE 3.2. Cette catégorie ne dépend pas du choix de σ (*i.e.* de K_0), parce qu'elle est équivalente à la catégorie des F-isocristaux sur k dont l'évaluation en un $(\mathcal{O}_K, p\mathcal{O}_K)$ est munie d'une filtration décroissante séparée exhaustive.

DÉFINITION 3.3. Soit $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$. On dit que D est *effectif* si $\mathrm{Fil}^0 D_K = D_K$. On note $\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ constituée des (φ, ∇)-modules filtrés sur K relativement à K_0 qui sont effectifs.

On désigne par $\mathbf{MF}^{\mathbf{BT}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ constituée des (φ, ∇)-modules D tels que $\mathrm{Fil}^2 D_K = 0$.

3.4. Si $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ est de dimension 1, on a $D = K_0 x$ et il existe $\alpha \in K_0$ et $i \in \boldsymbol{Z}$ tels que $\varphi(x) = \alpha x$, $\mathrm{Fil}^i D_K = D_K$ et $\mathrm{Fil}^{i+1} D_K = 0$. On pose $t_N(D) = v(\alpha)$ (cela ne dépend pas du choix de x) et $t_H(D) = i$. Si $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ est de dimension h, on a une structure de (φ, ∇)-module filtré sur K relativement à K_0 sur le K_0 espace vectoriel $\det(D) = \bigwedge^h D$, et on pose $t_N(D) = t_N(\det(D))$ et $t_H(D) = t_H(\det(D))$. On définit ainsi des fonctions additives sur la catégorie $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$.

DÉFINITION 3.5. Soit $D \in \mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$. On dit que D est *faiblement admissible* si

(1) $t_N(D) = t_H(D)$;
(2) $t_N(D') \geq t_H(D')$ pour tout sous-objet D' de D dans $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$.

On note $\mathbf{MF}^{\mathrm{fa}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ (resp. $\mathbf{MF}^{\mathrm{fa,eff}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$, resp. $\mathbf{MF}^{\mathrm{fa},\mathbf{BT}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ (resp. $\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$, resp. $\mathbf{MF}^{\mathbf{BT}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$) constituée des (φ, ∇)-modules filtrés sur K relativement à K_0 faiblement admissibles.

3.6. Rappelons la construction des anneaux $\mathrm{A_{cris}}$ et $\mathrm{B_{cris}}$, et l'équivalence de catégories entre la catégorie des représentations cristallines de $\mathcal{G}_K$ et celle des F-isocristaux filtrés sur K faiblement admissibles.

On note $\mathcal{R}$ la limite projective du système

$$\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \leftarrow \cdots$$

les morphismes de transition étant donnés par le Frobenius. On a une bijection (compatible à la multiplication)

$$\left\{x = \left(x^{(n)}\right)_{n\in\boldsymbol{N}} \in \mathcal{O}_C^{\boldsymbol{N}},\ (\forall n \in \boldsymbol{N})\ \left(x^{(n+1)}\right)^p = x^{(n)}\right\} \to \mathcal{R}$$

donnée par la réduction modulo p. Par exemple, la suite $\widetilde{\varpi} = \left(\varpi^{(n)}\right)_{n\in\boldsymbol{N}}$ définit un élément de $\mathcal{R}$. L'anneau $\mathcal{R}$ est une $\boldsymbol{F}_p$-algèbre parfaite, valuée par $v_{\mathcal{R}}(x) = v\left(x^{(0)}\right)$ et munie d'une action de $\mathcal{G}_K$.

On dispose d'un homomorphisme surjectif et $\mathcal{G}_K$-équivariant d'anneaux

$$\begin{aligned} \theta\colon \mathrm{W}(\mathcal{R}) &\to \mathcal{O}_C \\ (x_0, x_1, \dots) &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n^{(n)}. \end{aligned}$$

admettant pour noyau l'idéal principal engendré par $\xi = [\widetilde{p}] - p$ où $\widetilde{p} \in \mathcal{R}$ est tel que $\widetilde{p}^{(0)} = p$. Il induit un homomorphisme de $\mathcal{O}_{K_0}$-algèbres

$$1 \otimes \theta\colon \mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\boldsymbol{Z}} \mathrm{W}(\mathcal{R}) \to \mathcal{O}_C.$$

L'anneau $\mathrm{A_{cris}}$ est alors le séparé complété, pour la topologie p-adique, de l'enveloppe à puissances divisées de $\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\boldsymbol{Z}} \mathrm{W}(\mathcal{R})$ relativement à l'idéal $\mathrm{Ker}(1 \otimes \theta)$, compatibles aux puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p. C'est une $\mathcal{O}_{K_0}$-algèbre munie d'une action de $\mathcal{G}_K$, d'un opérateur de Frobenius φ et d'une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla\colon \mathrm{A_{cris}} \to \mathrm{A_{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ pour laquelle φ est horizontal. Le Frobenius et la connexion commutent à l'action de $\mathcal{G}_K$. En outre, $1 \otimes \theta$ induit un homomorphisme surjectif $\theta\colon \mathrm{A_{cris}} \to \mathcal{O}_C$ dont le noyau admet des puissances divisées. Enfin, on dispose de $t = \log([\varepsilon]) \in \mathrm{A_{cris}}$ où $\varepsilon \in \mathcal{R}$ est tel que $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$. On a $\varphi(t) = t^p$ et $\nabla(t) = 0$.

On pose $\mathrm{B_{cris}} = \mathrm{A_{cris}}[t^{-1}]$, c'est une K_0-algèbre munie d'une action de $\mathcal{G}_K$, d'un opérateur de Frobenius φ et d'une connexion $\nabla\colon \mathrm{B_{cris}} \to$ $\to \mathrm{B_{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ pour laquelle φ est horizontal.

On note $\mathrm{A_{inf}}$ le séparé complété de $\mathcal{O}_K \otimes_{\boldsymbol{Z}} \mathrm{W}(\mathcal{R})$ pour la topologie $(1 \otimes \theta)^{-1}(p\mathcal{O}_C)$-adique. L'homomorphisme $1 \otimes \theta$ induit un homomorphisme de K-algèbres $\theta\colon \mathrm{A_{inf}}[p^{-1}] \to C$ et on note $\mathrm{B_{dR}^+}$ le séparé complété de $\mathrm{A_{inf}}[p^{-1}]$ pour la topologie $\mathrm{Ker}(\theta)$-adique. C'est une K-algèbre (et même une

$\overline{K}$-algèbre) munie d'une action de $\mathcal{G}_K$, et d'une connexion intégrable $\nabla\colon \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ qui commute à l'action de $\mathcal{G}_K$. Si $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ désigne le sous-anneau des sections horizontales, on a $t \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[\![u_1, \ldots, u_d]\!]$ où $u_i = t_i - [\widetilde{t}_i]$ avec $\widetilde{t}_i \in \mathcal{R}$ défini par $\widetilde{t}_i^{(0)} = t_i$. On pose $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}[t^{-1}]$ que l'on filtre par $\mathrm{Fil}^i \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = t^i \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\left[\frac{u_1}{t}, \ldots, \frac{u_d}{t}\right]$. L'action de $\mathcal{G}_K$ et la connexion s'étendent à B_{dR} (on a la transversalité de Griffith).

On a une inclusion $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ compatible à l'action de $\mathcal{G}_K$ et à la connexion. Il induit un homomorphisme de K-algèbres $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Ce dernier est injectif, et on a $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\mathcal{G}_K} = K_0$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_K} = K$.

3.7. Si $V \in \mathbf{Rep}_{\boldsymbol{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$, on pose

$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K}.$$

D'après ce qui précède, $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est un K_0-espace vectoriel muni d'un opérateur de Frobenius σ-linéaire et d'une connexion intégrable quasi-nilpotente, et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est muni dune filtration (décroissante séparée exhaustive) et d'une connexion intégrable qui vérifie la transversalité de Griffith. En outre, on a une application K-linéaire injective

$$K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V).$$

Cela munit $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ d'une structure de (φ, ∇)-module filtré sur K relativement à K_0 (en munissant $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)_K$ de la filtration induite par celle de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$).

On dispose des applications de périodes

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathrm{cris}}(V)\colon \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) &\to \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} V \\ \alpha_{\mathrm{dR}}(V)\colon \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{K} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) &\to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} V \end{aligned}$$

dont on montre qu'elles sont toujours injectives ([7, Proposition 3.22]), de sorte que $\dim_{K_0}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)) \le \dim_{\boldsymbol{Q}_p}(V)$ et $\dim_K(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)) \le \dim_{\boldsymbol{Q}_p}(V)$. On dit que V est *cristalline* (resp. de *de Rham*) lorsque $\alpha_{\mathrm{cris}}(V)$ (resp. $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$) est un isomorphisme (*i.e.* lorsque $\dim_{K_0}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)) = \dim_{\boldsymbol{Q}_p}(V)$ (resp. $\dim_K(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)) = \dim_{\boldsymbol{Q}_p}(V)$)). On peut montrer que la notion de représentation cristalline ne dépend pas des choix de K_0 et de σ ([7, § 3.6]). La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\boldsymbol{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$ dont les objets sont les représentations cristallines (resp. de de Rham) est notée $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{G}_K)$). Si V est une représentation cristalline, alors V est de de Rham et l'homomorphisme $K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est un isomorphisme ([7, Proposition 3.30]).

On peut en outre montrer ([7, Proposition 4.27 & Corollaire 4.37]) que si

$V \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \in \mathbf{MF}^{\mathrm{fa}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$, et que la restriction du foncteur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ à $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$ induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}} \colon \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K) \xrightarrow{\sim} \mathbf{MF}^{\mathrm{fa}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla),$$

dont un quasi-inverse est donné par

$$\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D) = (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}_{\nabla=0} \cap \mathrm{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K)^{\nabla=0}.$$

PROPOSITION 3.8 (*cf* [15, Corollary 2.1.14]). *Le foncteur d'oubli*

$$\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K) \to \mathbf{Rep}(\mathcal{G}_{K_\infty})$$

est pleinement fidèle.

DÉMONSTRATION. Soient V_1 et V_2 deux représentations cristallines de $\mathcal{G}_K$, et $f \colon V_1 \to V_2$ une application $\boldsymbol{Q}_p$-linéaire $\mathcal{G}_{K_\infty}$-équivariante. Il s'agit de montrer que f est en fait $\mathcal{G}_K$-équivariante.

On dispose des sous-groupes $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{G}_{K_\infty}$ de $\mathcal{G}_K$. Comme l'homomorphisme $\mathbb{K} \otimes_K K_\infty \to \mathbb{K}K_\infty = \mathbb{K}_\infty$ est un isomorphisme (cela se voit avec la ramification), on a $\mathbb{K} \cap K_\infty = K$, et $\mathcal{G}_K$ est engendré par $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{G}_{K_\infty}$. Il suffit donc de vérifier que f est $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$-équivariante. Les représentations V_1 et V_2 étant cristallines, leurs restrictions à $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$ le sont *a fortiori*, et comme f est $\mathcal{G}_{\mathbb{K}_\infty}$-équivariante, il suffit d'appliquer [15, Corollary 2.1.14]. □

4. (φ, ∇)-modules filtrés sur K et (φ, ∇)-modules sur $\mathfrak{S}$

Soit $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$) l'anneau des fonctions holomorphes sur le disque unité à coefficients dans K_0 (resp. $\mathbb{K}_0$) :

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n,\ a_n \in K_0,\ (\forall r \in \boldsymbol{R}_{>0})\ \lim_{n\to\infty} nr + v(a_n) = +\infty \right\}.$$

On le munit d'un opérateur de Frobenius σ prolongeant σ sur K_0 (resp. $\mathbb{K}_0$) en posant $\sigma(u) = u^p$. L'injection $i_\sigma \colon K_0 \to \mathbb{K}_0$ se prolonge alors en une injection $i_\sigma \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ compatible aux Frobenius.

REMARQUE 4.1. Comme $\mathcal{O}_{K_0}$ est un $\mathcal{O}_{K_0}$-module libre (de rang p^d) via σ, l'anneau $\mathcal{A}$ est $\mathcal{A}$-module libre (de rang p^{d+1}) via σ. En particulier, le morphisme $\sigma \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est plat, si bien que l'extension des scalaires $\mathcal{M} \rightsquigarrow \sigma^*\mathcal{M}$ est exacte, fait qu'on va utiliser implicitement dans la suite.

DÉFINITION 4.2. On note $\boldsymbol{M}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$ (resp. $\boldsymbol{M}_{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}}(\varphi)$) la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{A}$-modules (resp. $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$-modules) $\mathcal{M}$ libres de rang fini, munis d'un opérateur de Frobenius σ-linéaire $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ tel que $\mathrm{Coker}(1 \otimes \varphi\colon \sigma^* \mathcal{M} \to \mathcal{M})$ est tué par une puissance de $E(u)$, et tels que le $\mathcal{O}_{K_0}$-module $\mathcal{M}/u\mathcal{M}$ est muni d'une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla\colon \mathcal{M}/u\mathcal{M} \to (\mathcal{M}/u\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ pour laquelle l'opérateur induit par φ est horizontal (resp. rien).

Les morphismes sont les applications $\mathcal{A}$-linéaires (resp. $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$-linéaires) compatibles aux Frobenius et aux connexions.

On note $\boldsymbol{M}_{\mathcal{A}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{M}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$ constituée des $\mathcal{M}$ tels que $\mathrm{Coker}(1 \otimes \varphi\colon \sigma^* \mathcal{M} \to \mathcal{M})$ est tué par $E(u)$ (et pas seulement une puissance de $E(u)$).

4.3. Rappelons qu'on dispose de l'élément

$$\lambda = \prod_{n=0}^{\infty} \sigma^n \left(\frac{E(u)}{E(0)} \right) \in \mathcal{A}$$

(le produit converge bien dans $\mathcal{A}$ car $E(u)/E(0) \in 1 + u\mathcal{O}_{K_0}[u] + \mathcal{O}_{K_0} u^e/p$ et donc $\sigma^n(E(u)/E(0)) \in 1 + u^{p^n} \mathcal{O}_{K_0}[u] + \mathcal{O}_{K_0} u^{ep^n}/p$. Remarquons en outre que $\lambda = \frac{E(u)}{E(0)} \sigma(\lambda)$, si bien que $\sigma(\lambda) \in \frac{\lambda}{E(u)} \mathcal{A}^\times$. En particulier, le Frobenius σ se prolonge à $\mathcal{A}[\lambda^{-1}]$, et on a $\sigma\big(\lambda^{-r}\big)\mathcal{A} = \frac{E(u)^r}{\lambda^r} \mathcal{A}$.

Rappelons par ailleurs que Kisin a construit (cf. [15, 1.2, Theorem 1.2.15]) un foncteur pleinement fidèle

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}}\colon \mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}(\varphi) \to \boldsymbol{M}_{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}}(\varphi)$$

de la façon suivante.

Posons $\mathbb{W} = \mathcal{O}_{\mathbb{K}_0}$, $\mathfrak{S}_{\mathbb{K}} = \mathbb{W}[\![u]\!]$ et pour $n \in \boldsymbol{N}$, notons $\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}$ le séparé complété de $\mathbb{K}\big[\varpi^{(n)}\big] \otimes_{\mathbb{W}} \mathfrak{S}_{\mathbb{K}}$ en l'idéal (maximal) engendré par $u - \varpi^{(n)}$. On filtre le corps $\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\big[\big(u - \varpi^{(n)}\big)^{-1}\big]$ par $\mathrm{Fil}^i \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\big[\big(u - \varpi^{(n)}\big)^{-1}\big] = \big(u - \varpi^{(n)}\big)^i \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}$ pour $i \in \boldsymbol{Z}$.

On a les inclusions $\mathfrak{S}_{\mathbb{K}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \subseteq \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\big[\big(u - \varpi^{(n)}\big)^{-1}\big]$ (la deuxième correspondant au developpement de Taylor en $\varpi^{(n)}$).

Si $\mathbb{D} \in \mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}(\varphi)$, on dispose d'une application (de localisation)

$$\imath_n\colon \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{D} \xrightarrow{\sigma_{\mathbb{W}}^{-n} \otimes \varphi_{\mathbb{D}}^{-n}} \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{D} \to \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{D}_{\mathbb{K}}$$

où $\sigma_{\mathbb{W}}\colon \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \to \mathcal{A}_{\mathbb{K}}$ est l'application qui agit par σ sur $\mathbb{K}_0$ et telle que $\sigma_{\mathbb{W}}(u) = u$ et $\varphi_{\mathbb{D}}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est l'opérateur de Frobenius de $\mathbb{D}$. Comme le corps résiduel de $\mathbb{K}_0$ est parfait, les applications $\sigma_{\mathbb{W}}$ et $\varphi_{\mathbb{D}}$ sont bijectives, si bien que $\imath_n$ est bien définie. Elle se prolonge en une application

$$\imath_n\colon \mathcal{A}_{\mathbb{K}}[\lambda^{-1}]\otimes_{\mathbb{K}_0}\mathbb{D}\to\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\big[\big(u-\varpi^{(n)}\big)^{-1}\big]\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{D}_{\mathbb{K}}$$

et on pose

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{D})=\big\{x\in\mathcal{A}_{\mathbb{K}}[\lambda^{-1}]\otimes_{\mathbb{K}_0}\mathbb{D},\ (\forall n\in\boldsymbol{N})\ \imath_n(x)\in\mathrm{Fil}^0\big(\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\big[\big(u-\varpi^{(n)}\big)^{-1}\big]\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{D}_{\mathbb{K}}\big)\big\}$$

où le module $\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\big[\big(u-\varpi^{(n)}\big)^{-1}\big]\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{D}_{\mathbb{K}}$ est muni de la filtration du produit tensoriel, définie par

$$\mathrm{Fil}^i\big(\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\big[\big(u-\varpi^{(n)}\big)^{-1}\big]\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{D}_{\mathbb{K}}\big)=\sum_{j\in\boldsymbol{Z}}\mathrm{Fil}^j\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\big[\big(u-\varpi^{(n)}\big)^{-1}\big]\otimes_{\mathbb{K}}\mathrm{Fil}^{i-j}\mathbb{D}_{\mathbb{K}}$$

et où l'opérateur de Frobenius $\varphi\colon\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{D})\to\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{D})$ est induit par $\sigma\otimes\varphi_{\mathbb{D}}$ sur $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}[\lambda^{-1}]\otimes_{\mathbb{K}_0}\mathbb{D}$.

Remarque 4.4. Soit $\mathbb{D}\in\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}(\varphi)$ et

$$r_{\mathbb{D}}=\max\big\{i\in\boldsymbol{N},\ \mathrm{Fil}^i\mathbb{D}_{\mathbb{K}}\neq 0\big\}$$

alors comme

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{D})\subseteq\big\{x\in\mathcal{A}_{\mathbb{K}}[\lambda^{-1}]\otimes_{\mathbb{K}_0}\mathbb{D},\ x\in\mathrm{Fil}^0\big(\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0}\big[(u-\varpi)^{-1}\big]\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{D}_{\mathbb{K}}\big)\big\},$$

on a

$$\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathbb{K}_0}\mathbb{D}\subseteq\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{D})\subseteq\lambda^{-r_{\mathbb{D}}}\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathbb{K}_0}\mathbb{D}.$$

Cela résulte de ce que $\sigma_{\mathbb{W}}^{-n}(\lambda)\in\mathrm{Fil}^1\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0}\setminus\mathrm{Fil}^2\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0}$ (car E a une racine simple en ϖ).

En outre, $\mathrm{Coker}(1\otimes\varphi\colon\sigma^*\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{D})\to\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{D}))$ est tué par $E(u)^{r_{\mathbb{D}}}$ (*cf* [15, Lemma 1.2.2]).

4.5. Par ailleurs, on a un foncteur (*cf* [15, 1.2.5])

$$\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}\colon\boldsymbol{M}_{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}}(\varphi)\to\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}(\varphi)$$

défini par $\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M})=\mathcal{M}/u\mathcal{M}$ (c'est un $\mathbb{K}_0$-espace vectoriel vu que $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}/u\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\simeq\mathbb{K}_0$), muni de l'opérateur de Frobenius induit par $\varphi_{\mathcal{M}}$. La filtration de $\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M})_{\mathbb{K}}$ est plus délicate à construire (*cf* [15, 1.2.7]). En outre, ce foncteur est un «quasi-inverse» à gauche de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$ (*i.e.* $\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}\circ\mathcal{M}_{\mathbb{K}}\simeq\mathrm{Id}_{\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}(\varphi)}$ *cf* [15, Proposition 1.2.8]).

4.6. Soit $D\in\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$. On pose $D_{\mathbb{K}_0}=\mathbb{K}_0\otimes_{K_0}D$. Cela définit un objet de $\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}(\varphi)$, le Frobenius étant induit par $\sigma\otimes\varphi_D$ et la filtration par

$\mathrm{Fil}^i D_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \otimes_K \mathrm{Fil}^i D_K$ pour $i \in \boldsymbol{Z}$ (bien sûr, on tue la connexion). On pose

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(D) &= \left\{x \in \mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D,\ (\forall n \in \boldsymbol{N}),\ \imath_n(x) \in \mathrm{Fil}^0\left(\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\left[\left(u - \varpi^{(n)}\right)^{-1}\right] \otimes_{\mathbb{K}} D_{\mathbb{K}}\right)\right\} \\ &= \left(\mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D\right) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})\end{aligned}$$

l'intersection étant prise dans $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D$. Il est clair que $\mathcal{M}(D)$ est un $\mathcal{A}$-module, car c'est le cas de $\mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D$ et $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ est un $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$-module.

Notons que si $r_D = \max\{i \in \boldsymbol{N},\ \mathrm{Fil}^i D_K \neq 0\}$, on a

$$(*) \qquad \mathcal{A} \otimes_{K_0} D \subseteq \mathcal{M}(D) \subseteq \lambda^{-r_D} \mathcal{A} \otimes_{K_0} D$$

(cf. remarque 4.4).

Lemme 4.7. *Pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, la $\mathcal{A}$-algèbre $\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}$ est plate.*

Démonstration. On écrit l'application $\mathcal{A} \to \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}$ comme le composé des homomorphismes

$$\mathcal{A} \to \mathbb{K}_n \otimes_{K_0} \mathcal{A} \to \left(\mathbb{K}_n \otimes_{K_0} \mathcal{A}\right)_{(u - \varpi^{(n)})} \to \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}$$

le premier est plat car libre, le deuxième est une localisation et le troisième la complétion d'un anneau de valuation discrète. □

Lemme 4.8 (*cf* [15, Lemma 1.2.1]). *Si on considère $\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}$ comme une $\mathcal{A}$-algèbre via le composé*

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\sigma_{\mathbb{W}}^{-n}} \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}$$

alors

(1) *l'homomorphisme*

$$\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n} \otimes_{\mathcal{A}} \left(\mathcal{A} \otimes_{K_0} D\right) \to \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n} \otimes_{\mathbb{K}} D_{\mathbb{K}} \simeq \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n} \otimes_K D_K$$

induit par $\imath_n$ est un isomorphisme ;

(2) *l'isomorphisme précédent induit un isomorphisme*

$$\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(D) \xrightarrow{\sim} \sum_{j \geq 0} E(u^{p^n})^{-j} \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n} \otimes_K \mathrm{Fil}^j D_K$$

(3) *l'homomorphisme $\mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(D) \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ déduit de l'inclusion $\mathcal{M}(D) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ par $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$-linéarité est un isomorphisme.*

Démonstration. L'assertion (1) est évidente. Pour (2), on écrit $\mathcal{M}(D) = = \bigcap_{m \in \boldsymbol{N}} \mathcal{M}_m(D)$ avec

$$\mathcal{M}_m(D) = \left\{x \in \mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D,\ \imath_m(x) \in \mathrm{Fil}^0\left(\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},m}\left[\left(u - \varpi^{(n)}\right)^{-1}\right] \otimes_{\mathbb{K}} D_{\mathbb{K}}\right)\right\}.$$

Par platitude de $\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}$ sur $\mathcal{A}$ (lemme 4.7) et platitude de $\sigma_{\mathbb{W}}\colon \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ (remarque 4.1), on a

$$\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}(D)=\bigcap_{m\in\boldsymbol{N}}\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_m(D).$$

Il suffit donc de voir que

(a) $\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_n(D)=\sum_{j\geq 0}E(u^{p^n})^{-j}\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\otimes_K \mathrm{Fil}^j D_K$;

(b) pour tout $m\in\boldsymbol{N}$ avec $m\neq n$, on a

$$\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_m(D)=\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\big[\big(u-\varpi^{(n)}\big)^{-1}\big]\otimes_K D_K.$$

L'égalité (a) résulte de la définition de la filtration de $\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}\big[\big(u-\varpi^{(n)}\big)^{-1}\big]\otimes_{\mathbb{K}} D_{\mathbb{K}}$, sachant que $E(u^{p^n})\in\big(u-\varpi^{(n)}\big)\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}^{\times}$ (car $\varpi^{(n)}$ est racine simple de $E(u^{p^n})$). L'égalité (b) résulte du fait que $E(u^{p^m})\in\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},n}^{\times}$ (car $\varpi^{(n)}$ n'est pas racine de $E(u^{p^m})$).

Pour l'assertion (3), on a déjà les inclusions (1), qui induisent des inclusions

$$\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{K_0}D\subseteq\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}(D)\subseteq\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})\subseteq\lambda^{-r_D}\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{K_0}D.$$

L'homomorphisme $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}(D)\to\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ est donc injectif, de conoyau tué par une puissance de λ. Pour voir que c'est un isomorphisme, il suffit de vérifier la surjectivité en localisant en les zéros de λ, ce qui résulte de l'assertion (2). $\square$

Proposition 4.9. *On définit ainsi un foncteur*

$$\mathcal{M}\colon \mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)\to\boldsymbol{M}_{\mathcal{A}}(\varphi,\nabla).$$

En outre, on a $D\in\mathbf{MF}^{\mathbf{BT}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)\Rightarrow\mathcal{M}(D)\in\boldsymbol{M}^{\mathbf{BT}}_{\mathcal{A}}(\varphi,\nabla)$.

Démonstration. Posons $r=r_D\in\boldsymbol{N}$. On a les inclusions suivantes

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0}) \arrow[r, hook] & \lambda^{-r}\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{K_0}D \\
\mathcal{M}(D) \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \lambda^{-r}\mathcal{A}\otimes_{K_0}D \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

où l'inclusion $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})\subseteq\lambda^{-r}\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{K_0}D$ est fermée en vertu de [15, Lemma 1.1.4] car $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ est libre de rang fini (cf. [15, Lemma 1.2.2]). Par ailleurs l'inclusion $\lambda^{-r}\mathcal{A}\otimes_{K_0}D\subseteq\lambda^{-r}\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{K_0}D$ est fermée parce que $\mathcal{A}$ l'est dans $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$. Il en résulte que $\mathcal{M}(D)$ est fermé dans le $\mathcal{A}$-module libre $\lambda^{-r}\mathcal{A}\otimes_{K_0}D$, donc libre de rang fini d'après [15, Lemma 1.1.4] (qui s'applique aussi dans le cas d'un corps résiduel imparfait).

Par ailleurs, le $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}(D)$ est muni d'un opérateur de Frobenius σ-linéaire, induit par $\sigma \otimes \varphi_D$ sur $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D$. En effet, $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ et $\mathcal{A}[\lambda^{-1}] \otimes_{K_0} D$ sont stables par $\sigma \otimes \varphi_D$: il en est de même de $\mathcal{M}(D)$.

On a une application $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}$-linéaire

$$1 \otimes \varphi : \sigma^* \big(\lambda^{-r} \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{K_0} D\big) \to \lambda^{-r} \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{K_0} D.$$

Comme elle est induite par l'isomorphisme $1 \otimes \varphi : \sigma^* D \xrightarrow{\sim} D$, et comme $\sigma(\lambda^{-r})\mathcal{A}_{\mathbb{K}} = E(u)^r \lambda^{-r} \mathcal{A}_{\mathbb{K}}$, elle est injective d'image $E(u)^r\big(\lambda^{-r}\mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{K_0} D\big)$. On a un énoncé identique avec $\lambda^{-r}\mathcal{A} \otimes_{K_0} D$. Mais d'après [15, Lemma 1.2.2], le conoyau de la restriction de $1 \otimes \varphi$ à $\sigma^* \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0}) \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ est tué par $E(u)^r$. Si $y \in \mathcal{M}(D)$, il existe donc $x \in \sigma^* \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ tel que $(1 \otimes \varphi)(x) = E(u)^r y$, et comme $y \in \lambda^{-r}\mathcal{A} \otimes_{K_0} D$, on a aussi $x \in \sigma^*\big(\lambda^{-r}\mathcal{A} \otimes_{K_0} D\big)$ par injectivité de $1 \otimes \varphi$: on a en fait $x \in \sigma^* \mathcal{M}(D)$ et $\mathrm{Coker}(1 \otimes \varphi : \sigma^* \mathcal{M}(D) \to \mathcal{M}(D))$ est tué par $E(u)^r$.

En particulier, si $D \in \mathbf{MF}^{\mathbf{BT}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$, on a $r \leq 1$, et donc $\mathcal{M}(D) \in$ $\in \boldsymbol{M}^{\mathbf{BT}}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$.

Finalement, on a les inclusions

$$\mathcal{A} \otimes_{K_0} D \subseteq \mathcal{M}(D) \subseteq \lambda^{-r}\mathcal{A} \otimes_{K_0} D. \tag{1}$$

L'image de $E(u)$ dans $\mathcal{A}/u\mathcal{A} \simeq K_0$ est $E(0)$, de sorte que l'image de λ est 1 : si on tensorise les inclusions (1) par $\mathcal{A}/u\mathcal{A}$ on a des applications $D \to \mathcal{M}(D)/u\mathcal{M}(D) \to D$ dont le composé est l'identité : on a $\mathcal{M}(D)/u\mathcal{M}(D) = D$, et ce dernier est muni d'une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla : D \to D \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ pour laquelle l'opérateur induit par $\varphi_{\mathcal{M}(D)}$ (qui n'est autre que φ_D) est horizontal. □

4.10. Si $\mathcal{M} \in \boldsymbol{M}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$, on pose

$$\boldsymbol{D}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}/u\mathcal{M}.$$

C'est un K_0-espace vectoriel (on a $\mathcal{A}/u\mathcal{A} = K_0$) et on a $\boldsymbol{D}(\mathcal{M})_{\mathbb{K}_0} :=$ $:= \boldsymbol{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} \mathbb{K}_0 = \mathcal{M}_{\mathbb{K}_0}/u\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0} = \boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0})$ où $\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0} = \mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$. Il est naturellement muni d'un opérateur de Frobenius déduit $\varphi_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ et (par définition) d'une connexion intégrable quasi-nilpotente telle que le Frobenius est horizontal. Par ailleurs, on a $\boldsymbol{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} K \subseteq \boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0}) \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{K}$: on munit $\boldsymbol{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} K$ de la filtration induite par celle sur $\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0}) \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{K}$. La connexion vérifie la transversalité de Griffith sur $\boldsymbol{D}(\mathcal{M}) \otimes_{K_0} K$, et le linéarisé du Frobenius est un isomorphisme parce que c'est le cas sur $\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0}) \otimes_{\mathbb{K}_0} \mathbb{K}$ (resp. $\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0})$).

On définit ainsi un foncteur

$$\boldsymbol{D} : \boldsymbol{M}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla) \to \mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$$

(le (φ,∇)-module $\boldsymbol{D}(\mathcal{M})$ est effectif parce que c'est le cas de $\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0})\otimes_{\mathbb{K}_0}\mathbb{K}$).

PROPOSITION 4.11. *Le foncteur $\boldsymbol{D}$ est un quasi-inverse à gauche du foncteur $\mathcal{M}$, c'est-à-dire*

$$\boldsymbol{D}\circ\mathcal{M}\simeq \mathrm{Id}_{\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)}.$$

En outre, on a $\mathcal{M}\in\boldsymbol{M}^{\mathbf{BT}}_{\mathcal{A}}(\varphi,\nabla)\Rightarrow\boldsymbol{D}(\mathcal{M})\in\mathbf{MF}^{\mathbf{BT}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$.

DÉMONSTRATION. Soit $D\in\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$. On a un homomorphisme de φ-modules sur K_0

$$f\colon\boldsymbol{D}(\mathcal{M}(D))\to D$$

déduit de $\big(\mathcal{A}[\lambda^{-1}]\otimes_{K_0}D\big)/u\big(\mathcal{A}[\lambda^{-1}]\otimes_{K_0}D\big)=D$. Mais l'inclusion $D\subseteq \subseteq\mathcal{A}\otimes_{K_0}D\subseteq\mathcal{M}(D)$ composée avec la projection sur $\boldsymbol{D}(\mathcal{M}(D))$ fournit un inverse de f : ce dernier est un isomorphisme. Bien sûr, elle est compatible aux Frobenius et aux connexions. Reste à voir la compatibilité aux filtrations. Par définition de la filtration sur $\boldsymbol{D}(\mathcal{M}(D))$, cela se vérifie après extension des scalaires à $\mathbb{K}$. On a $\boldsymbol{D}(\mathcal{M}(D))_{\mathbb{K}_0}=\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}(D)_{\mathbb{K}_0})$. Par ailleurs, l'inclusion $\mathcal{M}(D)\subseteq\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ induit une application $\mathcal{M}(D)_{\mathbb{K}_0}\to \to\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ qui est un isomorphisme modulo u : on a

$$\boldsymbol{D}(\mathcal{M}(D))_{\mathbb{K}}\simeq\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0}))$$

et par définition, la filtration sur $\boldsymbol{D}(\mathcal{M}(D))_{\mathbb{K}}$ est celle induite par la filtration sur $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})_{\mathbb{K}}/u\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})_{\mathbb{K}}$. Mais $D_{\mathbb{K}_0}=D\otimes_{K_0}\mathbb{K}_0\in\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}(\varphi)$: d'après [15, Proposition 1.2.8], on a un isomorphisme naturel de φ-modules filtrés sur $\mathbb{K}$:

$$\widetilde{f}\colon\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0}))\xrightarrow{\sim}D_{\mathbb{K}_0}$$

la filtration en question n'est donc autre que la filtration induite par celle de $D_{\mathbb{K}}$ via $\widetilde{f}\otimes\mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$.

La dernière assertion résulte de ce que si $\mathcal{M}\in\boldsymbol{M}^{\mathbf{BT}}_{\mathcal{A}}(\varphi,\nabla)$, alors $\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0}\in\boldsymbol{M}^{\mathbf{BT}}_{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}}(\varphi)$ et donc $\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0})\in\mathbf{MF}^{\mathbf{BT}}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}(\varphi)$ (*cf* [15, Lemma 1.2.2 & Proposition 1.2.13]). Ainsi $\mathrm{Fil}^2\boldsymbol{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{\mathbb{K}_0})_{\mathbb{K}}=0$ et *a fortiori* $\mathrm{Fil}^2\boldsymbol{D}(\mathcal{M})_K=0$ *i.e.* $\boldsymbol{D}(\mathcal{M})\in\mathbf{MF}^{\mathbf{BT}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$. □

REMARQUE 4.12. On peut aussi montrer (*cf* [15, Lemma 1.2.6 & Proposition 1.2.13]) que pour tout $\mathcal{M}\in\boldsymbol{M}^{\mathbf{BT}}_{\mathcal{A}}(\varphi,\nabla)$, on a un morphisme naturel

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{D}(\mathcal{M}))\to\mathcal{M}\tag{2}$$

(il faut pour cela réécrire soigneusement [15, Lemma 1.2.6]), qui induit un isomorphisme lorsqu'on inverse λ. L'image essentielle du foncteur $\mathcal{M}$ est alors constituée par les objets $\mathcal{M}$ tels que (2) est un isomorphisme. Cela peut aussi être caractérisée de la façon suivante. Il existe sur $\mathcal{M}[\lambda^{-1}]$ un opérateur différentiel canonique N_∇, et $\mathcal{M}$ est dans l'image essentielle si et seulement si il est stable par N_∇ (*cf* [15, Lemma 1.3.10]).

4.13. Rappelons (*cf* [13, Theorem 6.10]) qu'étant donné un φ-module sur l'anneau de Robba (associé à K disons), on dispose d'une notion de pentes et qu'il existe une filtration canonique (par les pentes) dont les gradués successifs sont isoclines. On étend la notion de pente aux φ-modules sur $\mathcal{A}$ en étendant les scalaires de $\mathcal{A}$ à l'anneau de Robba.

Proposition 4.14 (*cf* [15, Theorem 1.3.8]). *Soit* $D \in \mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$. *Si* D *est faiblement admissible alors* $\mathcal{M}(D)$ *est pur de pente* 0.

Démonstration. Rappelons que le choix de σ fournit une injection $i_\sigma\colon K \to \mathbb{K}$. On choisit $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{K}$ contenant $\overline{K}$. Par restriction, $\mathcal{G}_{\mathbb{K}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathcal{G}_K$. En outre, l'homomorphisme i_σ induit un homomorphisme surjectif $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ où $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ est l'anneau de périodes associé à $\mathbb{K}$ (*idem* avec B_{dR}).

Si D est faiblement admissible (donc admissible), il correspond à une représentation cristalline V de $\mathcal{G}_K$. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \arrow[d] \\ \mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{K}_0} D_{\mathbb{K}_0} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \end{tikzcd}$$

les flèches verticales étant induites par i_σ. Comme celle de gauche est surjective, il en est de même de α : la restriction de V au sous-groupe $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$ est cristalline et le φ-module $D_{\mathbb{K}_0}$ est faiblement admissible.

D'après le lemme 4.8 (3), on a un isomorphisme $\mathcal{A}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}(D) \to$ $\to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$. Mais d'après [15, Theorem 1.3.8], le φ-module $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})$ est pur de pente 0 si et seulement si $D_{\mathbb{K}_0}$ est faiblement admissible. $\square$

4.15. On note $\boldsymbol{M}^0_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$ (resp. $\boldsymbol{M}^{0,\mathbf{BT}}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$) la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{M}^0_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$ (resp. $\boldsymbol{M}^{\mathbf{BT}}_{\mathcal{A}}(\varphi, \nabla)$) constituée des objets purs de pente 0. D'après les propositions 4.9, 4.11 et 4.14, le foncteur $\mathcal{M}$ induit des foncteurs

$$\mathbf{MF}^{\mathrm{fa,eff}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla) \to \boldsymbol{M}^0_{\mathcal{A}}(\varphi,\nabla)$$
$$\mathbf{MF}^{\mathrm{fa,\mathbf{BT}}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla) \to \boldsymbol{M}^{0,\mathbf{BT}}_{\mathcal{A}}(\varphi,\nabla).$$

Ils sont pleinement fidèles. En effet, comme $\boldsymbol{D}\circ\mathcal{M} = \mathrm{Id}_{\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)}$ (proposition 4.11), ils sont fidèles, et pour voir qu'ils sont pleins, il suffit de montrer que $\boldsymbol{D}$ est fidèle. Mais si $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2 \in \boldsymbol{M}_{\mathcal{A}}(\varphi,\nabla)$, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathcal{A}}(\varphi,\nabla)}(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(2)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)}(\mathbf{D}(\mathcal{M}_1),\mathbf{D}(\mathcal{M}_2)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}}(\varphi)}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_1,\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_2) \arrow[r, "(3)"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}^{\mathrm{eff}}_{\mathbb{K}/\mathbb{K}_0}(\varphi)}(\mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_1),\mathbf{D}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_2))
\end{tikzcd}$$

L'application (2) est injective parce que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}}(\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_1,\mathcal{A}_{\mathbb{K}}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_2)$$

l'est (ce qui résulte du fait que $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont libres). L'application (3) est injective (*cf* [15, Propositions 1.2.8 & 1.2.13]). Il en résulte que (1) est injective, ce qu'on voulait.

Posons $\mathfrak{S} = \mathcal{O}_{K_0}[\![u]\!]$, que l'on munit de l'opérateur de Frobenius défini par $\sigma(u) = u^p$. Remarquons que $\mathfrak{S}$ est un sous-anneau de $\mathcal{A}$.

Définition 4.16. On note $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi,\nabla)$ la catégorie dont les objets sont les triplets $(\mathfrak{M},\varphi_{\mathfrak{M}},\nabla_{\mathfrak{M}})$ où $\mathfrak{M}$ est un $\mathfrak{S}$-module libre de rang fini, $\varphi_{\mathfrak{M}}\colon\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ une application σ-linéaire dont le linéarisé $1\otimes\varphi\colon\sigma^*\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ a un conoyau tué par une puissance de $E(u)$, et où $\nabla_{\mathfrak{M}}\colon\mathfrak{M}/u\mathfrak{M}\to(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})\otimes_{\mathcal{O}_{K_0}}\widehat{\Omega}$ est une connexion intégrable quasi-nilpotente pour laquelle l'opérateur induit par $\varphi_{\mathfrak{M}}$ sur le $\mathcal{O}_{K_0}$-module $\mathfrak{M}/u\mathfrak{M}$ est horizontal.

Les morphismes sont les applications $\mathfrak{S}$-linéaires compatibles aux Frobenius et aux connexions.

On dénote par $\boldsymbol{M}^{\mathbf{BT}}_{\mathfrak{S}}(\varphi,\nabla)$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi,\nabla)$ constituée des objets $(\mathfrak{M},\varphi_{\mathfrak{M}},\nabla_{\mathfrak{M}})$ tels que $\mathrm{Coker}(1\otimes\varphi\colon\sigma^*\mathfrak{M}\to\mathfrak{M})$ est tué par $E(u)$ (et pas seulement une puissance de $E(u)$).

Proposition 4.17 (*cf* [15, Lemma 1.3.13]). *Le foncteur*

$$\Theta\colon \boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi,\nabla)\otimes_{\boldsymbol{Z}_p}\boldsymbol{Q}_p \to \boldsymbol{M}^0_{\mathcal{A}}(\varphi,\nabla)$$
$$\mathfrak{M}\mapsto\mathfrak{M}\otimes_{\mathfrak{S}}\mathcal{A}$$

est une équivalence de catégories. En outre, Θ induit une équivalence de *catégories*

$$\boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi,\nabla)\otimes_{\boldsymbol{Z}_p}\boldsymbol{Q}_p \to \boldsymbol{M}_{\mathcal{A}}^{0,\mathbf{BT}}(\varphi,\nabla)$$
$$\mathfrak{M}\mapsto \mathfrak{M}\otimes_{\mathfrak{S}}\mathcal{A}.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons déjà que

$$\Theta(\mathfrak{M})/u\Theta(\mathfrak{M})\simeq(\mathfrak{M}/u\mathfrak{M})\otimes_{\mathcal{O}_{K_0}}K_0,$$

de sorte que $\Theta(\mathfrak{M})/u\Theta(\mathfrak{M})$ est bien muni d'une connexion intégrable quasi-nilpotente telle que l'opérateur induit par le Frobenius est horizontal. La démonstration du fait que c'est une équivalence est la même que [15, Lemma 1.3.13] et [15, Theorem 1.3.2], parce que ces énoncés reposent sur les résultats de [13] et de [14], pour lesquels on a pas d'hypothèse sur le corps résiduel. □

COROLLAIRE 4.18. *On a un foncteur pleinement fidèle*

$$\mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}\colon \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\mathrm{fa,eff}}(\varphi,\nabla)\to \boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}(\varphi,\nabla)\otimes_{\boldsymbol{Z}_p}\boldsymbol{Q}_p$$

induisant un foncteur pleinement fidèle

$$\mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}\colon \mathbf{MF}_{K/K_0}^{\mathrm{fa},\mathbf{BT}}(\varphi,\nabla)\to \boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi,\nabla)\otimes_{\boldsymbol{Z}_p}\boldsymbol{Q}_p.$$

DÉMONSTRATION. C'est la conjonction des propositions 4.9, 4.11, 4.14 et 4.17. □

5. Classification des groupes de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_K$

5.1 – *Un épaississement à puissances divisées de $\mathcal{O}_K$*

Soit $\mathrm{D}_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(E(u))$ l'enveloppe à puissances divisées de $\mathcal{O}_{K_0}[u]$ relativement à l'idéal $(E(u))$, compatibles aux puissances divisées sur l'idéal (p).

On note S le séparé complété de $\mathrm{D}_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(E(u))$ pour la topologie p-adique, et on note $\mathrm{Fil}^1 S$ l'adhérence dans S de l'idéal à puissances divisées engendré par $E(u)$. C'est encore un idéal à puissances divisées et on a un isomorphisme

$$S/\mathrm{Fil}^1 S\simeq \mathcal{O}_{K_0}[u]/(E(u))\simeq \mathcal{O}_K$$

induit par $u\mapsto \varpi$.

REMARQUE 5.2.

(1) L'anneau S est local complet, d'idéal maximal $\mathfrak{m} = uS + \mathrm{Fil}^1 S$. En effet, on a déjà $S/\mathfrak{m} \simeq \mathcal{O}_K/\varpi\mathcal{O}_K = k$. Par ailleurs, on a $\mathfrak{m}^{(e+1)p} \subseteq pS$ (car $u^{ep} = p!(u^e)^{[p]} \in pS$ et $x^p = p!x^{[p]} \in pS$ pour tout $x \in \mathrm{Fil}^1 S$) et S est complet pour la topologie p-adique.

(2) L'anneau S ne dépend que de $\mathcal{O}_{K_0}$ et de l'entier e : comme $E(u) \equiv u^e \bmod p\mathcal{O}_{K_0}[u]$, on a $\mathrm{D}_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(E(u)) = \mathrm{D}_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(u^e)$, d'où l'égalité en passant aux complétés p-adiques. Par contre, l'idéal $\mathrm{Fil}^1 S$ dépend bien sûr de $E(u)$.

Notons I_u l'adhérence, pour la topologie p-adique, de l'idéal de S engendré par u et les puissances divisées de u^e. On a $S/I_u \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{K_0}$, et l'image de $\mathrm{Fil}^1 S$ modulo I_u n'est autre que $p\mathcal{O}_{K_0}$.

5.3. On munit S d'un opérateur de Frobenius prolongeant σ sur $\mathcal{O}_{K_0}$ en posant $\sigma(u) = u^p$. Comme $\sigma(E(u)) \equiv E(u)^p \bmod p\mathcal{O}_{K_0}[u]$ d'où $\sigma(E(u)) \in$ $\in p\mathrm{D}_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(E(u))$, on a encore $\sigma(E(u)^{[n]}) \in p\mathrm{D}_{\mathcal{O}_{K_0}[u]}(E(u))$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}_{>0}$, et donc $\sigma(\mathrm{Fil}^1 S) \subseteq pS$ en passant aux complétés p-adiques. On pose

$$\begin{aligned} \sigma_1 \colon \mathrm{Fil}^1 S &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto \sigma(x)/p \end{aligned}$$

DÉFINITION 5.4. On note $\mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$ la catégorie dont les objets sont les S-modules libres de rang fini M munis d'un sous-S-module $\mathrm{Fil}^1 M$, d'une application σ-linéaire $\varphi_1 \colon \mathrm{Fil}^1 M \to M$ et d'une connexion $\nabla \colon M/I_u M \to$ $\to (M/I_u M) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ topologiquement quasi-nilpotente (rappelons que $S/I_u S \simeq \mathcal{O}_{K_0}$) tels que

(a) $\mathrm{Fil}^1 S.M \subseteq \mathrm{Fil}^1 M$ et $M/\mathrm{Fil}^1 M$ est un $\mathcal{O}_K$-module libre ;
(b) l'application linéarisée $\sigma^* \mathrm{Fil}^1 M \xrightarrow{1\otimes\varphi_1} M$ est surjective ;
(c) l'opérateur induit par φ sur $M/I_u M$ est horizontal pour ∇ ;

(les morphismes étant les applications S-linéaires respectant toutes les structures), où l'opérateur φ est défini par

$$\varphi(m) = \sigma_1(E(u))^{-1} \varphi_1(E(u)m).$$

REMARQUE 5.5. (1) Cette formule a bien un sens, car $\sigma_1(E(u)) \in S^\times$. En effet, écrivons

$$E(u) = p\lambda_e + \cdots + p\lambda_1 u^{e-1} + u^e$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_{e-1} \in \mathcal{O}_{K_0}$ et $\lambda_e \in \mathcal{O}_{K_0}^\times$. On a alors

$$\sigma_1(E(u)) = \sigma(\lambda_e) + \sigma(\lambda_{e-1})u^p + \cdots + \sigma(\lambda_1)u^{(e-1)p} + (p-1)!(u^e)^{[p]} \in \mathcal{O}_{K_0}^\times + \mathfrak{m} \subseteq S^\times$$

(cf. remarque 5.2). En outre, pour $m \in \mathrm{Fil}^1 M$, on a

$$\varphi(m) = \sigma_1(E(u))^{-1}\varphi_1(E(u)m) = \sigma_1(E(u))^{-1}\sigma(E(u))\varphi_1(m) = p\varphi_1(m).$$

(2) En général, le linéarisé $\sigma^*\mathrm{Fil}^1 M \xrightarrow{1\otimes\varphi_1} M$ n'est pas injectif, comme le montre déjà le cas $(S, \mathrm{Fil}^1 S, \sigma_1, \mathrm{d})$: on a $z = 1 \otimes E(u)^{[p]} - \sigma_1(E(u)) \otimes \otimes E(u)^{[p-1]} \mapsto 0 \in S$, mais $z \neq 0$.

5.6. Soient $M \in \mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$ et $D = (M/I_u M) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} K_0$. Alors D est un K_0-espace vectoriel de dimension le rang de M sur S, il est muni d'un opérateur σ-linéaire φ_D déduit de φ. Comme l'application linéarisée $\sigma^*\mathrm{Fil}^1 M \xrightarrow{1\otimes\varphi_1} M$ est surjective, il en est de même de $1 \otimes \varphi_D \colon \sigma^* D \to D$, qui est donc un isomorphisme.

Proposition 5.7 (*cf* [15, Lemma 1.2.6]). *Il existe une unique application $S[p^{-1}]$-linéaire*

$$\xi \colon D \otimes_{K_0} S[p^{-1}] \to M \otimes_S S[p^{-1}]$$

dont la réduction modulo I_u est l'identité de D et qui est compatible aux Frobenius. C'est un isomorphisme.

Démonstration. Soit s_0 une application $\mathcal{O}_{K_0}$-linéaire $M/I_u M \to M$ dont la réduction modulo I_u est l'identité de $M/I_u M$, on note encore s_0 l'application $s_0 \colon D \to M \otimes_S S[p^{-1}]$ obtenue en inversant p. Le linéarisé $1 \otimes \varphi_D \colon \sigma^* D \to D$ est un isomorphisme. Pour tout $j \in \boldsymbol{N}$, on dispose donc de l'application composée

$$D \xrightarrow{(1\otimes\varphi_D)^{-j}} K_{0\sigma^j} \otimes_{K_0} D \xrightarrow{1\otimes s_0} S[p^{-1}]_{\sigma^j} \otimes_S M \xrightarrow{(1\otimes\varphi)^j} M.$$

Montrons que la somme

$$(3) \qquad s = s_0 + \sum_{j=0}^{\infty} (1\otimes\varphi)^{j+1} \circ (1 \otimes s_0) \circ (1 \otimes \varphi_D)^{-(j+1)} - \\ - (1 \otimes \varphi)^j \circ (1 \otimes s_0) \circ (1 \otimes \varphi_D)^{-j}$$

converge en une application K_0-linéaire φ-équivariante $D \to M \otimes_S S[p^{-1}]$, et que cette dernière est unique. L'application recherchée se déduit alors de s par $S[p^{-1}]$-linéarité.

Il existe $c \in \boldsymbol{N}$ tel que $(1 \otimes \varphi_D)^{-1}(M/I_u M) \subseteq p^{-c} M/I_u M$. Par ailleurs, comme s_0 induit l'identité modulo I_u, on a

$$\big((1\otimes\varphi) \circ (1 \otimes s_0) \circ (1 \otimes \varphi_D)^{-1} - s_0\big)(M/I_u M) \subseteq p^{-c} I_u M.$$

Pour $j \in \boldsymbol{N}$, on a donc

$$\big((1\otimes\varphi)^{j+1}\circ(1\otimes s_0)\circ(1\otimes\varphi_D)^{-(j+1)} - \\ -(1\otimes\varphi)^{j}\circ(1\otimes s_0)\circ(1\otimes\varphi_D)^{-j}\big)(M/I_uM)\subseteq p^{-(j+1)c}I_u^{p^j}M.$$

Si $p^j = qe + r$ est la division euclidienne de p^j par e, on a $u^{p^j} = q!(u^e)^{[q]}u^r$ et donc $p^{-(j+1)c}u^{p^j} \in p^{-(j+1)c}q!S$. Comme on a $((u^e)^{[n]})^{p^j} = p^j!((u^e)^{[n]})^{[p^j]}$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}_{>0}$, on a $p^{-(j+1)c}I_u^{p^j}M \subseteq p^{-(j+1)c}q!M$. Mais $v(p^{-(j+1)c}q!) \geq \geq q/p - 1 - (j+1)c$ et donc $v(p^{-(j+1)c}q!) \geq p^{j-1}/e - (j+1)c - 1 \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La série (3) est bien convergente. L'unicité de s résulte de ce que si s' est une autre section, on a $(s-s')(D) \subseteq I_uM \otimes_S S[p^{-1}]$. Pour tout $j \in \boldsymbol{N}$, on a donc $(s-s')(\varphi^j(D)) \subseteq I_u^{p^j}M \otimes_S S[p^{-1}]$ et donc $(s-s')(D) \subseteq I_u^{p^j}M \otimes_S S[p^{-1}]$ vu que $\varphi(D)$ engendre D. Si $N \in \boldsymbol{N}$ est tel que s et s' sont à valeurs dans M sur $p^N M/I_uM$, on a $p^N(s-s')(M/I_uM) \subseteq I_u^{p^j}M$ pour tout $j \in \boldsymbol{N}$. Comme M est libre sur S et S séparé pour la topologie I_u-adique, on a $s = s'$.

Les deux $S[p^{-1}]$-modules $D \otimes_{K_0} S[p^{-1}]$ et $M \otimes_S S[p^{-1}]$ sont libres de même rang : soit $\alpha \in S[p^{-1}]$ le déterminant de ξ. Comme ξ induit l'identité modulo I_u, on a $\alpha \equiv 1 \bmod I_uS[p^{-1}]$. Écrivons $\alpha = p^m f$ avec $f \in S$ et $m \in \boldsymbol{Z}$. Modulo I_u, on a $p^m\overline{f} = 1$, où $\overline{f} \in \mathcal{O}_{K_0}$ désigne l'image de f. On a nécessairement $m = 0$ d'où $\alpha \in S$ a une image égale à 1 modulo I_u donc *a fortiori* modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de S : on a $\alpha \in S^\times$ et ξ est bijective. □

5.8 – *Construction d'un foncteur de Dieudonné*

Comme $S/\mathrm{Fil}^1S \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K$ et comme $p^nS + \mathrm{Fil}^1S$ est un idéal à puissances divisées de S, pour tout $n \in \boldsymbol{N}_{>0}$, on dispose de l'épaississement à puissances divisées $S \to \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$.

Soit $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$. Il correspond (*cf* [8, Lemma 2.4.4]) à un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$, *i.e.* à un système $(G_n)_{n>0}$, où G_n est un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$ et $G_{n+1|\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K} \simeq G_n$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}_{>0}$. On peut alors évaluer le cristal de Dieudonné $\boldsymbol{D}(G_n)$ en l'épaississement $S \to \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$, et on pose

$$\boldsymbol{M}(G) = \boldsymbol{D}(G)(S \to \mathcal{O}_K) := \varprojlim_{n>0} \boldsymbol{D}(G_n)(S \to \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K).$$

PROPOSITION 5.9. *Cela définit un foncteur contravariant*

$$\boldsymbol{M}\colon \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla).$$

DÉMONSTRATION. Cela définit déjà un foncteur contravariant de la catégorie $\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ dans la catégorie des S-modules $\mathcal{M}$ libres de rang fini (S

est local) munis d'un opérateur de Frobenius σ-linéaire $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Comme le foncteur de Dieudonné commute aux changements de base (cf. [2]), pour tout $n \in \boldsymbol{N}_{>0}$, on a

$$\boldsymbol{D}(G \otimes_{\mathcal{O}_K} k)(\mathcal{O}_{K_0}) = \boldsymbol{D}(G_n)(S \to \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K) \otimes_S \mathcal{O}_{K_0}$$

et donc

$$\boldsymbol{D}(G \otimes_{\mathcal{O}_K} k)(\mathcal{O}_{K_0}) = \boldsymbol{M}(G) \otimes_S \mathcal{O}_{K_0} = \boldsymbol{M}(G)/I_u\boldsymbol{M}(G)$$

en passant à la limite. Le $\mathcal{O}_{K_0}$-module $\boldsymbol{M}(G)/I_u\boldsymbol{M}(G)$ est donc sous-jacent au cristal $\boldsymbol{D}(G \otimes_{\mathcal{O}_K} k)$: il est naturellement muni d'une connexion intégrable quasi-nilpotente, pour laquelle l'opérateur de Frobenius est horizontal.

Le seul point délicat pour voir que le foncteur $\boldsymbol{M}$ est à valeurs dans $\mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$ est le fait qu'il est muni d'un sous-S-module $\mathrm{Fil}^1\boldsymbol{M}(G)$ tel que $\mathrm{Fil}^1 S.\ \boldsymbol{M}(G) \subseteq \mathrm{Fil}^1\boldsymbol{M}(G)$ et tel que l'opérateur φ est divisible par p sur $\mathrm{Fil}^1\boldsymbol{M}(G)$ induisant $\varphi_1 := \varphi/p\colon \mathrm{Fil}^1\boldsymbol{M}(G) \to \boldsymbol{M}(G)$ dont le linéarisé est surjectif. Cela résulte de [15, Lemma A.2] appliqué à $S \to \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$ pour $n \in \boldsymbol{N}_{>0}$ en passant à la limite. $\square$

Exemples : on a $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p) = \big(S, \mathrm{Fil}^1 S, \sigma_1, \mathrm{d}\big)$ et par dualité $\boldsymbol{M}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}[p^\infty]) = \big(S, S, \sigma, \mathrm{d}\big)$.

THÉORÈME 5.10 (cf. Kisin [15, Proposition A.6]). *Si $p > 2$, le foncteur $\boldsymbol{M}$ est une anti-équivalence. Si $p = 2$, le foncteur $\boldsymbol{M}$ induit une équivalence entre les catégories à isogénie près.*

DÉMONSTRATION. Pour prouver que c'est une équivalence, on construit un quasi-inverse comme le fait Kisin. Seule la première étape change. Soit $M \in \mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$. Le quotient $M_1 := M/I_uM = M \otimes_S \mathcal{O}_{K_0}$ (où $S \to \mathcal{O}_{K_0}$ est définie par $u \mapsto 0$) est muni d'une connexion topologiquement quasi-nilpotente $\nabla\colon M_1 \to M_1 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ et d'un opérateur de Frobenius $F\colon M_1 \to M_1$ (déduit de $\varphi\colon M \to M$) qui est σ-linéaire et horizontal.

D'après [8, Theorem 4.1.1], comme k admet une p-base, le foncteur de Dieudonné sur la catégorie $\mathbf{BT}(k)$ est une anti-équivalence de catégories avec la catégorie des cristaux de Dieudonné sur $\mathrm{Spec}(k)$ (*cf* [8, Definition 2.3.2 & 2.4.2]). Comme $\mathcal{O}_{K_0}$ est un relèvement de k en caractéristique 0, la catégorie des cristaux en $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(k)/\boldsymbol{Z}_p}$-modules quasi-cohérents est équivalente à la catégorie des $\mathcal{O}_{K_0}$-modules M séparés et complets pour la topologie p-adique, munis d'une connexion intégrable topologiquement quasi-nilpotente $\nabla\colon M \to M \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ (cf. [3, Proposition 1.3.3]). Cette équivalence induit une équivalence entre la catégorie des cristaux de

Dieudonné sur Spec(k) et la catégorie des quadruplets (M, ∇, F, V) où M est un $\mathcal{O}_{K_0}$-module libre de rang fini, $\nabla\colon M \to M \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$ une connexion intégrable topologiquement quasi-nilpotente, $F\colon M_\sigma \to M$ et $V\colon M \to M_\sigma$ sont $\mathcal{O}_{K_0}$-linéaires (où $M_\sigma = M \otimes_{\mathcal{O}_{K_0},\sigma} \mathcal{O}_{K_0}$), horizontaux tels que $F \circ V = p\mathrm{Id}_M$ et $V \circ F = p\mathrm{Id}_{M_\sigma}$ (cf. [8, 2.3.4]).

On munit M_1 d'une structure de cristal de Dieudonné sur Spec(k) en définissant le morphisme de Verschiebung de la façon suivante. On note $\mathrm{Fil}^1 M_1$ l'image de $\mathrm{Fil}^1 M$ dans M_1. Remarquons que comme M est libre de rang fini sur S, il est de même de M_1 sur $\mathcal{O}_{K_0}$. Par ailleurs, comme $\mathrm{Fil}^1 M_1$ est inclus dans M_1, il est lui aussi libre de rang fini, et $\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{K_0}}(\mathrm{Fil}^1 M_1) \leq$ $\leq \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{K_0}}(M_1)$.

L'homomorphisme surjectif $1 \otimes \varphi_1\colon \sigma^*\mathrm{Fil}^1 M \to M$ induit un homomorphisme surjectif $1 \otimes \varphi_1\colon \sigma^*\mathrm{Fil}^1 M_1 \to M_1$. En particulier, on a en fait $\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{K_0}}(\mathrm{Fil}^1 M_1) = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{K_0}}(M_1)$ et comme $1 \otimes \varphi_1\colon \sigma^*\mathrm{Fil}^1 M_1 \to M_1$ est surjectif, c'est un isomorphisme. L'homomorphisme linéarisé du morphisme de Verschiebung V est alors défini comme le composé

$$M_1 \overset{(1\otimes\varphi_1)^{-1}}{\longrightarrow} \sigma^*\mathrm{Fil}^1 M_1 \subseteq \sigma^* M_1.$$

Soit $G_0 \in \mathbf{BT}(k)$ le groupe p-divisible associé à M_1 par le foncteur $\boldsymbol{D}$. On a un isomorphisme

$$\boldsymbol{D}(G_0)(\mathcal{O}_{K_0}) \overset{\sim}{\longrightarrow} M_1$$

de φ-modules sur $\mathcal{O}_{K_0}$. Par ailleurs, via cet isomorphisme, $V\boldsymbol{D}(G_0)$ s'identifie à $\mathrm{Fil}^1 M_1$ (cf. [15, Proposition A.2]).

La deuxième étape de la preuve consiste à relever G_0 en $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ de sorte que $\boldsymbol{M}(G) = M$. Elle est identique à celle de [15, Proposition A.6]. C'est un argument de déformation, qui utilise la filtration $\mathrm{Fil}^1 M$ (on applique le théorème de Messing, [18, Chapter V, Theorem 1.6] et [17, II § 9]), pour relever G_0 à $\mathcal{O}_K/\varpi^2\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_K/\varpi^3\mathcal{O}_K, \ldots, \mathcal{O}_K/\varpi^e\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ (c'est l'étape la plus délicate parce qu'en général, on n'a pas de structure à puissances divisées sur $\varpi\mathcal{O}_K$), puis à $\mathcal{O}_K/p^2\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_K/p^3\mathcal{O}_K$, etc.

6. Groupes de Barsotti-Tate et représentations p-adiques

LEMME 6.1. *Si $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$, alors $\boldsymbol{M}(G)[p^{-1}]$ ne dépend (en tant que $S[p^{-1}]$-module muni d'un opérateur de Frobenius et d'une connexion modulo I_u) que de la fibre spéciale $G_k := G \otimes_{\mathcal{O}_K} k$, i.e. on a*

$$\boldsymbol{M}(G)[p^{-1}] = \boldsymbol{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} S[p^{-1}].$$

Démonstration. En effet, on a $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K = k \oplus k\overline{\varpi} \oplus \cdots \oplus k\overline{\varpi}^{e-1}$, avec $\overline{\varpi}^e = 0$), et donc $\sigma^N(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K) \subseteq k$ pour $N \gg 0$. On a donc

$$\varphi^N\big(\boldsymbol{D}(G_1)(S \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)\big) \subseteq \boldsymbol{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} S$$

pour $N \gg \log e/\log p$ (rappelons que pour $n \in \boldsymbol{N}_{>0}$, on a $G_n = G \otimes_{\mathcal{O}_K} (\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K)$). Mais comme ce sont des cristaux de Dieudonné, le Frobenius est une isogénie, si bien que

$$\boldsymbol{D}(G_1)(S \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[p^{-1}] = \boldsymbol{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} S[p^{-1}].$$

Mais comme p a des puissances divisées dans $\mathcal{O}_K$, on a

$$\boldsymbol{D}(G_n)(S \to \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K) = \boldsymbol{D}(G_1)(S \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$$

pour tout $n \in \boldsymbol{N}_{>0}$, et donc $\boldsymbol{M}(G) = \boldsymbol{D}(G_1)(S \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$. $\square$

6.2. Comme $\mathrm{A_{cris}}$ est une $\mathcal{O}_{K_0}$-algèbre telle que $E([\widetilde{\varpi}])$ a des puissances divisées (car $\theta(E([\widetilde{\varpi}])) = E(\varpi) = 0 \in \mathcal{O}_C$), on a un plongement naturel

$$\begin{aligned} S &\to \mathrm{A_{cris}} \\ u &\mapsto [\widetilde{\varpi}]. \end{aligned}$$

Ce dernier est compatible aux filtrations, Frobenius et connexions.

On dispose d'un accouplement

$$\mathrm{T}_p(G) \times_{\boldsymbol{Z}_p} \boldsymbol{M}(G) \to \mathrm{A_{cris}}$$

défini de la façon suivante. Si $x \in \mathrm{T}_p(G)$ et $m \in \boldsymbol{M}(G)$, alors

$$x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(\mathcal{O}_{\overline{K}})}(\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p, G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}})$$

induit

$$x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(\mathcal{O}_C)}(\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p, G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_C)$$

et comme $\mathrm{A_{cris}} \to \mathcal{O}_C$ est un épaississement à puissances divisées, x induit une application $\mathrm{A_{cris}}$-linéaire compatible aux filtrations, Frobenius, connexions et à l'action de $\mathcal{G}_{K_\infty}$

$$\boldsymbol{D}(x)_{\mathrm{A_{cris}}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A_{cris}},\mathrm{Fil}^\bullet,\varphi,\nabla}(\mathrm{A_{cris}} \otimes_S \boldsymbol{M}(G), \mathrm{A_{cris}})$$

(on a $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p) = (S, \mathrm{Fil}^1 S, \sigma_1, \mathrm{d}\,)$), où $\boldsymbol{D}(x)_{\mathrm{A_{cris}}}$ désigne l'évaluation du morphisme $\boldsymbol{D}(x)$ en l'épaississement $\mathrm{A_{cris}} \to \mathcal{O}_C$ (obtenu par changement de base $S \to \mathrm{A_{cris}}$), et l'image de (x, m) par l'accouplement est $\boldsymbol{D}(x)_{\mathrm{A_{cris}}}(1 \otimes m)$.

Cet accouplement donne lieu à une application $\mathrm{A_{cris}}$-linéaire, compatible aux filtrations, Frobenius, et aux connexions

$$\rho_G\colon \mathrm{A_{cris}} \otimes_S \boldsymbol{M}(G) \to \mathrm{A_{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Z}_p} \mathrm{T}_p(G)^\vee$$

où $\mathrm{T}_p(G)^\vee$ désigne le $\boldsymbol{Z}_p$-module dual de $\mathrm{T}_p(G)$, muni de l'action naturelle de $\mathcal{G}_K$. Par fonctorialité, cette application est aussi compatible à l'action de $\mathcal{G}_{K_\infty}$ (pas de $\mathcal{G}_K$ *a priori* parce que $\mathcal{G}_K$ agit non trivialement sur S, vu que u correspond à $[\widetilde{\varpi}]$).

Proposition 6.3 ([10, Theorem 7]). *Le conoyau de ρ_G est tué par t.*

Rappelons l'idée de la preuve. On traite d'abord explicitement le cas où $G = \mathbb{G}_\mathrm{m}[p^\infty]$, pour lequel $\boldsymbol{M}(G) = \big(S, S, \sigma, \mathrm{d}\big)$ et $\mathrm{T}_p(G) = \boldsymbol{Z}_p(1)$, l'application ρ_G n'étant alors autre que l'inclusion $\mathrm{A_{cris}} \subset \mathrm{A_{cris}}(-1) = t^{-1}\mathrm{A_{cris}}$.

Le cas général s'en déduit de la façon suivante. Soit $y \in \mathrm{T}_p(G)^\vee$, alors $ty \in \mathrm{T}_p(G)^\vee(1) \simeq \mathrm{T}_p(G^\mathsf{D})$ (où G^D désigne le dual de Cartier de G) correspond à un morphisme de groupes de Barsotti-Tate $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p \to G^\mathsf{D}$ sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, donc (en passant au dual) à un morphisme de groupes de Barsotti-Tate $(ty)^\mathsf{D}\colon G \to (\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p)^\mathsf{D} = \mathbb{G}_\mathrm{m}[p^\infty]$, tel que $\mathrm{T}_p((ty)^\mathsf{D})^\vee\colon \boldsymbol{Z}_p t^{-1} = \mathrm{T}_p(\mathbb{G}_\mathrm{m}[p^\infty])^\vee \to$ $\to \mathrm{T}_p(G)^\vee$ envoie t^{-1} sur y.

Par ailleurs, comme $\mathcal{O}_C$ est une $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-algèbre et $\mathrm{A_{cris}}$ un épaississement à puissances divisées de $\mathcal{O}_C$, on en déduit une application $\mathrm{A_{cris}}$-linéaire

$$\boldsymbol{M}\big((ty)^\mathsf{D}\big)_{\mathrm{A_{cris}}}\colon \mathrm{A_{cris}} \otimes_S \boldsymbol{M}(\mathbb{G}_\mathrm{m}[p^\infty]) \to \mathrm{A_{cris}} \otimes_S \boldsymbol{M}(G).$$

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A_{cris}} \otimes_S \mathrm{M}(G) \arrow[r, "\rho_G"] & \mathrm{A_{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}_p(G)^\vee \\
\mathrm{A_{cris}} \otimes_S \mathrm{M}(\mathbb{G}_\mathrm{m}[p^\infty]) \arrow[u, "\mathrm{M}((ty)^\mathsf{D})_{\mathrm{A_{cris}}}"] \arrow[r, "\rho_{\mathbb{G}_\mathrm{m}[p^\infty]}"] & \mathrm{A_{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}_p(\mathbb{G}_\mathrm{m}[p^\infty])^\vee \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathrm{A_{cris}}} \otimes \mathrm{T}_p((ty)^\mathsf{D})^\vee"']
\end{tikzcd}$$

de sorte que si $x = \boldsymbol{M}((ty)^\mathsf{D})_{\mathrm{A_{cris}}}(1 \otimes 1) \in \mathrm{A_{cris}} \otimes_S \boldsymbol{M}(G)$, on a

$$\rho_G(x) = \big(\mathrm{Id}_{\mathrm{A_{cris}}} \otimes \mathrm{T}_p((ty)^\mathsf{D})^\vee\big)(t \otimes t^{-1}) = t \otimes y,$$

et $t \otimes y \in \mathrm{Im}(\rho_G)$.

Corollaire 6.4. *Si $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$, alors $\mathrm{V}_p(G) \in \mathbf{Rep}^{\mathbf{BT}}_{\mathrm{cris}}(G_K)$ et $\mathrm{D_{cris}}(\mathrm{V}_p(G)^\vee) = \boldsymbol{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]$ comme (φ, ∇)-modules sur K_0.*

Démonstration. En inversant t, l'homomorphisme ρ_G induit un homomorphisme surjectif de $\mathrm{B_{cris}}$-modules

$$\rho_G[t^{-1}]\colon \mathrm{B_{cris}} \otimes_{S[p^{-1}]} \boldsymbol{M}(G)[p^{-1}] \to \mathrm{B_{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} \mathrm{V}_p(G)^\vee.$$

Comme les $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$-modules $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{S[p^{-1}]} \boldsymbol{M}(G)[p^{-1}]$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} \mathrm{V}_p(G)^\vee$ sont tous les deux libres de rang h (où h est la hauteur de G), et comme $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ est intègre, l'homomorphisme $\rho_G[t^{-1}]$ est un isomorphisme. En outre, d'après le lemme 6.1, on a $\boldsymbol{M}(G)[p^{-1}] = \boldsymbol{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} S[p^{-1}]$: on dispose donc d'un isomorphisme $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$-linéaire, compatible aux filtrations, Frobenius, connexions et à l'action de $\mathcal{G}_{K_\infty}$

$$(**) \qquad \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \boldsymbol{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} \mathrm{V}_p(G)^\vee.$$

Montrons qu'en fait, cet isomorphisme est $\mathcal{G}_K$-équivariant (et pas seulement $\mathcal{G}_{K_\infty}$-équivariant). On dispose des sous-groupes $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{G}_{K_\infty}$ de $\mathcal{G}_K$. Rappelons (*cf* preuve de la proposition 3.8) que le groupe $\mathcal{G}_K$ est engendré par $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{G}_{K_\infty}$. Pour montrer que $(**)$ est $\mathcal{G}_K$-équivariant, il s'agit donc de voir qu'il est $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$-équivariant. Il suffit pour cela de vérifier que l'application

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \boldsymbol{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Z}_p} \mathrm{T}_p(G)^\vee$$

(qui n'est pas un isomorphisme en général, mais dont $(**)$ se déduit par localisation) est $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$-équivariante. Mais $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est isomorphe (comme anneau muni d'une action de $\mathcal{G}_K$) à l'anneau $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}\{\langle u_1, \ldots, u_d\rangle\}$, séparé complété, pour la topologie p-adique, de l'anneau des polynômes à puissances divisées en $u_1, \ldots, u_d$ (*cf* section 3) à coefficients dans l'anneau $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ relatif à $\mathbb{K}$ (*cf* [7, Proposition 2.39]). Comme $u_1, \ldots, u_d$ sont invariants sous $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$, il suffit de vérifier que l'application

$$\mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \boldsymbol{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \to \mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Z}_p} \mathrm{T}_p(G)^\vee$$

est $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$-équivariante. Mais cela résulte de la $\mathcal{G}_{\mathbb{K}}$-équivariance de

$$\mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{K}_0} \boldsymbol{D}(G_k)(\mathcal{O}_{\mathbb{K}_0})[p^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} \mathrm{V}_p(G)^\vee$$

([15, Corollary 2.1.14] et la preuve de [15, Corollary 2.2.6]).

En prenant les invariants sous $\mathcal{G}_K$, on a donc

$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}_p(G)^\vee) = \boldsymbol{D}(G_k)(\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]$$

et $\dim_{K_0}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}_p(G)^\vee)) = h = \dim_{\boldsymbol{Q}_p}(\mathrm{V}_p(G)^\vee)$: la représentation $\mathrm{V}_p(G)^\vee$ est donc cristalline, et il en est de même de la représentation $\mathrm{V}_p(G)$.

Enfin, les poids de Hodge-Tate de $\mathrm{V}_p(G)$ peuvent se calculer après le changement de base $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ où $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathcal{O}_K.\mathrm{W}(k)$: on est alors ramenés au cas où k est parfait, et donc à [19]. Notons qu'on peut aussi invoquer [11, (2.3.3) et (2.5)].

6.5. Remarquons que $\mathfrak{S}$ est un sous-anneau de S. En effet, si $n \in \boldsymbol{N}$ et $n = eq + r$ avec $q \in \boldsymbol{N}$ et $0 \leq r < e$ est division euclidienne de n par e, on a

$$u^n = q!(u^e)^{[q]}u^r \in S$$

et donc $\lim\limits_{n\to\infty} u^n = 0$ dans S.

6.6. Soit $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}}, \nabla_{\mathfrak{M}}) \in \boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$. Suivant Breuil (cf. [5]), on pose

$$M = S_\sigma \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$$

(où le σ signifie qu'on voit S comme une $\mathfrak{S}$-algèbre via le composé $\mathfrak{S} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{S} \subseteq S$)

$$\mathrm{Fil}^1 M = \{m \in M,\ (1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(m) \in \mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}\}$$

et on définit $\varphi_1 \colon \mathrm{Fil}^1 M \to M$ comme l'application composée

$$\mathrm{Fil}^1 M \xrightarrow{1\otimes\varphi_{\mathfrak{M}}} \mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \xrightarrow{\sigma_1 \otimes 1} S_\sigma \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} = M.$$

En outre, on a $M/I_u M \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}/u\mathfrak{M}$ est par définition muni d'une connexion intégrable quasi-nilpotente $\nabla \colon M/I_u M \to (M/I_u M) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}$.

Proposition 6.7. *Cela définit un foncteur* $\mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}^{S} \colon \boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla) \to \to \mathbf{MF}_{S}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$.

Démonstration. Reprenons les notations qui précèdent. Il s'agit de vérifier les propriétés (a), (b) et (c) de la définition 5.4.

Si $x \in \mathrm{Fil}^1 S$ et $m \in M$, on a $(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(xm) = x(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(m) \in xS \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \subseteq \subseteq \mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$. D'autre part, par définition de $\mathrm{Fil}^1 M$, on a un homomorphisme injectif

$$M/\mathrm{Fil}^1 M \to (S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})/(\mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})$$

induit par $1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}$. Mais comme $S/\mathrm{Fil}^1 S = \mathcal{O}_K$, le $\mathcal{O}_K$-module $(S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})/(\mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}) \simeq \mathcal{O}_K \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ est libre car $\mathfrak{M}$ l'est sur $\mathfrak{S}$. Il est donc de même du $\mathcal{O}_K$-module $M/\mathrm{Fil}^1 M$ (car $\mathcal{O}_K$ est un anneau de valuation discrète), ce qui prouve (a).

Soit $m \in \mathfrak{M}$. Comme $\mathrm{Coker}(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}} \colon \sigma^* \mathfrak{M} \to \mathfrak{M})$ est tué par $E(u)$, il existe $\widetilde{m} \in \mathfrak{S}_\sigma \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ tel que $(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(\widetilde{m}) = E(u)m$. On a alors $\widetilde{m} \in M = = S_\sigma \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ et

$$(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(\widetilde{m}) = 1 \otimes E(u)m = E(u) \otimes m \in S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}.$$

On a donc $(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(\widetilde{m}) \in \mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ d'où $\widetilde{m} \in \mathrm{Fil}^1 M$. De plus, on a

$$\varphi_1(\widetilde{m}) = (\sigma_1 \otimes 1)(E(u) \otimes m) = \sigma_1(E(u)) \otimes m \in M$$

et comme $\sigma_1(E(u)) \in S^\times$ (remarque 5.2), on a $1 \otimes m \in \mathrm{Im}(1 \otimes \varphi_1 : \sigma^* M \to M)$, ce qui prouve (b).

Si maintenant $m \in \mathfrak{M}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(1 \otimes m) &= \sigma_1(E(u))^{-1}(\sigma_1 \otimes 1) \circ (1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}})(E(u) \otimes m) \\ &= \sigma_1(E(u))^{-1}(\sigma_1 \otimes 1)(E(u) \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}(m)) \\ &= 1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}}(m) \end{aligned}$$

et l'application induite par φ sur $M/I_u M$ n'est autre que $\varphi_{\mathfrak{M}}$: elle commute à ∇ et la condition (c) est vérifiée. □

PROPOSITION 6.8. *Le foncteur* $\mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}^{S}$ *est pleinement fidèle.*

DÉMONSTRATION. Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $\mathfrak{M}_i \in \boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi, \nabla)$ et $M_i = \mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}^{S}(\mathfrak{M}_i)$. Il s'agit de prouver que l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{M}_{\mathfrak{S}}^{\mathbf{BT}}(\varphi,\nabla)}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi,\nabla)}(M_1, M_2)$$

est un isomorphisme. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi,\nabla)}(M_1, M_2) = \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathrm{Hom}_S(S_\sigma \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_1, S_\sigma \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_2) \\ (1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}_2}) \circ f = f \circ (1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}_1}) \\ f(\mathrm{Fil}^1 M_1) \subseteq \mathrm{Fil}^1 M_2 \\ \nabla_{\mathfrak{M}_2} \circ f = f \circ \nabla_{\mathfrak{M}_1} \end{array} \right\}.$$

Il suffit de vérifier que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi,\nabla)}(M_1, M_2)$, on a $f(\mathfrak{M}_1) \subseteq \mathfrak{M}_2$, et on aura $f = \mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}^{S}(f_{|\mathfrak{M}_1})$ *i.e.* la bijectivité souhaitée.

Les $\mathfrak{S}$-modules $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ étant libres, on en fixe des bases. Les applications linéarisées de $\varphi_{\mathfrak{M}_1}$ et $\varphi_{\mathfrak{M}_2}$ sont alors représentées par des matrices $\Phi_1 \in \mathrm{M}_{r_1}(\mathfrak{S})$ et $\Phi_2 \in \mathrm{M}_{r_2}(\mathfrak{S})$, où r_1 (resp. r_2) est le rang de $\mathfrak{M}_1$ (resp. $\mathfrak{M}_2$). De même, l'application f est décrite par une matrice $U \in \mathrm{M}_{r_2 \times r_1}(S)$. Comme $(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}_2}) \circ f = f \circ (1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}_1})$, on a la relation

$$\Phi_2 \sigma(U) = U \Phi_1. \tag{4}$$

Montrons que cela implique que $U \in \mathrm{M}_{r_2 \times r_1}(\mathfrak{S})$ et on aura fini. Remarquons tout d'abord que comme $\mathrm{Coker}(1 \otimes \varphi_{\mathfrak{M}_1} : \sigma^* \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_1)$ est tué par $E(u)$, on a $\Phi_1 \in \mathrm{GL}_{r_1}(\mathfrak{S}[E(u)^{-1}])$ et $E(u)\Phi_1^{-1} \in \mathrm{M}_{r_1}(\mathfrak{S})$. L'équation (4) se réécrit alors

$E(u)U = \Phi_2\sigma(U)(E(u)\Phi_1^{-1})$. Une récurrence immédiate implique alors que pour tout $N \in \boldsymbol{N}$, il existe des matrices $\Xi_1^{(N)} \in \mathrm{M}_{r_1}(\mathfrak{S})$ et $\Xi_2^{(N)} \in \mathrm{M}_{r_2}(\mathfrak{S})$ telles que

$$E(u)^N U = \Xi_2^{(N)}\sigma^N(U)\Xi_1^{(N)} \tag{5}$$

On a $S = \mathfrak{S} + \mathrm{Fil}^1 S$, donc $\sigma(S) \subseteq \sigma(\mathfrak{S}) + pS = \sigma(\mathfrak{S}) + p\mathfrak{S} + p\mathrm{Fil}^1 S$ (car $\sigma(\mathrm{Fil}^1 S) \subseteq pS$). Pour tout $N \in \boldsymbol{N}$, on a donc

$$\sigma^N(S) \subseteq \sigma^N(\mathfrak{S}) + p\sigma^{N-1}(\mathfrak{S}) + \cdots + p^N\mathfrak{S} + p^N\mathrm{Fil}^1 S$$

d'où $\sigma^N(S) \subseteq \mathfrak{S} + p^N S$. L'égalité (5) implique donc que pour tout $N \in \boldsymbol{N}$ on a

$$U \in \frac{1}{E(u)^N}\mathrm{M}_{r_2\times r_1}(\mathfrak{S} + p^N S).$$

Il suffit donc de vérifier le lemme suivant :

LEMME 6.9. *Si $f \in S$ est tel que pour tout $N \in \boldsymbol{N}$, on a $E(u)^N f \in \mathfrak{S} + p^N S$, alors $f \in \mathfrak{S}$.*

DÉMONSTRATION. On voit S comme un sous-$\mathcal{O}_{K_0}$-module de

$$\left(K_0 \oplus K_0 u \oplus \cdots \oplus K_0 u^{e-1}\right)[[E(u)]].$$

On a une écriture unique $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n E(u)^{[n]}$ avec $f_n \in \mathcal{O}_{K_0} \oplus \mathcal{O}_{K_0} u \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{K_0} u^{e-1}$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$. Par hypothèse, pour tout $n, N \in \boldsymbol{N}$, il existe $a_{n,N}, b_{n,N} \in \mathcal{O}_{K_0} \oplus \mathcal{O}_{K_0} u \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{K_0} u^{e-1}$ tels que

$$E(u)^N f = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,N} E(u)^n + p^N \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,N} E(u)^{[n]}.$$

On a donc l'égalité

$$\frac{1}{n!} f_n = a_{n+N,N} + p^N \frac{b_{n+N,N}}{(n+N)!}.$$

Fixons $n \in \boldsymbol{N}$ et posons $N = p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1 - n$. Alors $v_p((n+N)!) = \frac{(n+N)-n}{p-1} = \frac{N}{p-1}$ et donc $v_p\left(\frac{p^N}{(n+N)!}\right) = N\frac{p-2}{p-1} \geq 0$: on a en fait

$$\frac{1}{n!} f_n \in \mathcal{O}_{K_0} \oplus \mathcal{O}_{K_0} u \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{K_0} u^{e-1}$$

et donc $f \in \left(\mathcal{O}_{K_0} \oplus \mathcal{O}_{K_0} u \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{K_0} u^{e-1}\right)[[E(u)]] = \mathfrak{S}$. $\square$

THÉORÈME 6.10 (*cf* [15, Theorem 0.3]). *Le foncteur* V_p *induit une équivalence de catégories*

$$\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K) \otimes_{\boldsymbol{Z}_p} \boldsymbol{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}^{\mathbf{BT}}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$$

en particulier toute représentation cristalline de $\mathcal{G}_K$ *à poids de Hodge-Tate dans* $\{0,1\}$ *provient d'un groupe p-divisible sur* $\mathcal{O}_K$.

DÉMONSTRATION. On sait déjà que le foncteur est pleinement fidèle. Soit $V \in \mathbf{Rep}^{\mathbf{BT}}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$, $D = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \in \mathbf{MF}^{\mathrm{fa},\mathbf{BT}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$ et $M = \mathbf{BT}^S_{\mathfrak{S}} \circ \mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}(D) \in$ $\in \boldsymbol{M}^{\mathbf{BT}}_S(\varphi,\nabla) \otimes_{\boldsymbol{Z}_p} \boldsymbol{Q}_p$ (*cf* corollaire 4.18 et proposition 6.7). Comme le foncteur $\boldsymbol{M}$ est une équivalence de catégories

$$\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K) \otimes_{\boldsymbol{Z}_p} \boldsymbol{Q}_p \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{M}^{\mathbf{BT}}_S(\varphi,\nabla) \otimes_{\boldsymbol{Z}_p} \boldsymbol{Q}_p$$

il existe $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ tel que $M \simeq \boldsymbol{M}(G^{\mathsf{D}})$ dans $\boldsymbol{M}^{\mathbf{BT}}_S(\varphi,\nabla) \otimes_{\boldsymbol{Z}_p} \boldsymbol{Q}_p$. D'après le corollaire 6.4 appliqué à G^{D}, la représentation $\mathrm{V}_p(G^{\mathsf{D}})$ est cristalline et on a $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}_p(G^{\mathsf{D}})^\vee) = \boldsymbol{D}(G^{\mathsf{D}}_k)(\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]$. On a donc un isomorphisme

$$\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \boldsymbol{D}(G^{\mathsf{D}}_k)(\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} \mathrm{V}_p(G^{\mathsf{D}})^\vee \simeq$$
$$\simeq \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} \mathrm{V}_p(G)(-1) \simeq \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} \mathrm{V}_p(G)$$

qui est $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$-linéaire $\mathcal{G}_K$-équivariant, compatible avec l'action de $\mathcal{G}_K$, les Frobenius, les connexions et les filtrations. Par ailleurs, on a $\boldsymbol{M}(G^{\mathsf{D}})[p^{-1}] =$ $= \boldsymbol{D}(G^{\mathsf{D}}_k)(\mathcal{O}_{K_0}) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} S[p^{-1}]$ d'après le lemme 6.1. On en déduit un isomorphisme $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\boldsymbol{Q}_p} \mathrm{V}_p(G) \simeq \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_S M$, compatible avec l'action de $\mathcal{G}_{K_\infty}$, les Frobenius, les connexions et les filtrations. Par ailleurs, d'après les propositions 4.11 et 5.7, on a un homomorphisme naturel

$$D \otimes_{K_0} S[p^{-1}] \xrightarrow{\sim} M \otimes_S S[p^{-1}] \tag{6}$$

qui est un isomorphisme de $S[p^{-1}]$-modules, compatible aux Frobenius et aux connexions. Il est en fait aussi compatible aux filtrations après tensorisation par K. En effet, on a

$$\mathrm{Fil}^1 M = \{x \in M,\ (1 \otimes \varphi)(x) \in \mathrm{Fil}^1 S \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}\}$$

où $\mathfrak{M} = \mathbf{BT}_{\mathfrak{S}}(D)$, d'où

$$\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0} \otimes_S \mathrm{Fil}^1 M = \{x \in \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0} \otimes_S M,\ (1 \otimes \varphi)(x) \in E(u)\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}\}$$
$$= \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}} (1 \otimes \varphi)(\mathrm{Fil}^1 \sigma^* \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})).$$

Mais d'après [15, Lemma 1.2.12 (4)], on a un isomorphisme

$$\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0} \otimes_{\mathcal{A}_{\mathbb{K}}} (1 \otimes \varphi)(\mathrm{Fil}^1 \sigma^* \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(D_{\mathbb{K}_0})) \xrightarrow{\sim} E(u)\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0} \otimes_K D_K + \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0} \otimes_K \mathrm{Fil}^1 D_K$$

et donc $\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0} \otimes_S \mathrm{Fil}^1 M \simeq E(u)\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0} \otimes_K D_K + \widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0} \otimes_K \mathrm{Fil}^1 D_K$ d'où $\mathbb{K} \otimes_S \mathrm{Fil}^1 M \simeq \mathrm{Fil}^1 D_{\mathbb{K}}$ en quotientant par $E(u)\widehat{\mathfrak{S}}_{\mathbb{K},0}$.

On a donc un isomorphisme de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$-modules compatible à l'action de $\mathcal{G}_{K_\infty}$, aux Frobenius, aux connexions et aux filtrations :

$$\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}_p(G) \simeq \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_S M \simeq \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D \simeq \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

En prenant les invariants sous φ, les sections horizontales dans le Fil^0, on en déduit un isomorphisme $\mathcal{G}_{K_\infty}$-équivariant $V \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}_p(G)$. Comme V et $\mathrm{V}_p(G)$ sont cristallines, on a en fait $V \simeq \mathrm{V}_p(G)$ comme représentations de $\mathcal{G}_K$ en vertu de la proposition 3.8. □

REFERENCES

[1] P. Berthelot, *Théorie de Dieudonné sur un anneau de valuation parfait*, Annales Scientifiques de l'ENS $4^{\text{ème}}$ série, t. 13, pp. 225–268, Gauthier-Villars (1980).

[2] P. Berthelot - L. Breen - W. Messing, *Théorie de Dieudonné cristalline II*, Lecture Notes in Mathematics **930**, x+261, Springer-Verlag (1982).

[3] P. Berthelot - W. Messing, *Théorie de Dieudonné cristalline III. Théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité, The Grothendieck Festschrift*, Vol. I, p. 173–247, Progress in Mathematics, **86**, Birkhäuser (1990).

[4] C. Breuil, *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Ann., **307**, no. 2 (1997), pp. 191–224.

[5] C. Breuil, *Schémas en groupes et corps des normes* (non publié) 13p, (1998).

[6] C. Breuil, *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. Math. (2) **152**, no. 2 (2000), pp. 489–549.

[7] O. Brinon, *Représentations cristallines dans le cas d'un corps residuel imparfait*, Annales de l'Institut Fourier, **56**, no. 4 (2006), pp. 919–999.

[8] A.J. de Jong, *Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry*, Publ. Math. de l'IHES, **82** (1995), pp. 5–96.

[9] A.J. de Jong, *Homomorphisms of Barsotti-Tate groups and crystals in positive characteristic*, Invent. Math., **134**, no. 2, Springer Verlag (1998), pp. 301–333.

[10] G. Faltings, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings*, JAMS, **12**, no. 1 (1999), pp. 117–144.

[11] O. Hyodo, *On variation of Hodge-Tate structures*, Math. Ann. **284**, no. 1 (1989), pp. 7–22.

[12] N. Katz, *Slope filtration of F-crystals, Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978)*, Vol. I, Astérisque **63**, SMF (1979), pp. 113–163.

[13] K. Kedlaya, *A p-adic local monodromy theorem*, Ann. of Math., **160** no. 1 (2004), pp. 93–184.

[14] K. KEDLAYA, *Slope filtrations revisited*, Doc. Math., **10** (2005), pp. 447–525.
[15] M. KISIN, *Crystalline representations and F-crystals*, in *Algebraic Geometry and Number Theory, in Honor of Vladimir Drinfeld's 50th Birthday*, Progress in Math. **253**, Birkhäuser, (2006).
[16] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, xiii+320, Cambridge university Press, (1986).
[17] B. MAZUR, W. MESSING, *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, Lecture notes in Mathematics **370**, vi+134, Springer Verlag, (1974).
[18] W. MESSING, *Crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, Lecture notes in Mathematics **264**, Springer Verlag (1972), p. 190.
[19] J. TATE, *p-divisible groups, Proceedings of a conference on local fields*, Springer Verlag (1967), pp. 158–183.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 settembre 2006.