REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 122 (2009)

Mesure invariante pour le système d'équations stochastiques du modèle de compétition avec diffusion spatiale

SALIHA HAMDOUS (*) - HISAO FUJITA YASHIMA (**)

1. Introduction.

Depuis quelques années la question de la mesure invariante est devenue un des thèmes centraux de la recherche sur les équations stochastiques de la dynamique de populations. En particulier, Rudnicki [14] a démontré l'existence et l'unicité de la mesure invariante pour l'équation stochastique du modèle proie-prédateur, en précisant les conditions sur les coefficients de l'équation pour l'existence de la mesure invariante et l'extention de son support. D'autre part, pour le modèle stochastique de compétition entre deux espèces, dans [16] le comportement asymptotique de la solution de l'équation stochastique, y compris le cas de convergence vers une mesure invariante, a été classifié, en utilisant la méthode de Rudnicki et l'application directe de la fonction de Khas'minskii (voir [10]). Or, dans le cas où on considère aussi la diffusion spatiale de la population dans un territoire, Tornatore [15] a démontré que pour n espèces en compétition l'espérance mathématique des populations totales, qui résultent de l'équation stochastique, est uniformément bornée pour tout $t \geq 0$. Dans [7] nous avons démontré l'existence d'une mesure invariante pour un système d'équations analogue à celui de [15] mais avec une compétition limitée entre les espèces différentes.

Le but du présent travail est de démontrer que l'équation stochastique pour deux espèces en compétition dans la forme usuelle avec la diffusion

(*) Indirizzo dell'A.: Département de Mathématiques, Université M. Mammeri, 15000, Tizi-Ouzou, Algérie, et Dipartimento di Matematica, Università di Torino, 10123 Torino, Italia.
E-mail: hamdoussaliha2002@yahoo.fr, saliha.hamdous@unito.it
(**) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Torino, 10123 Torino, Italia.
E-mail: fujitayashima@unito.it

spatiale admet, sous une condition convenable et naturelle, une mesure invariante, pour laquelle aucune des deux espèces n'est destinée à l'extinction.

Pour les modèles de la dynamique de populations en général et ceux avec la diffusion spatiale ou des perturbations stochastiques, voir aussi [17], [12], [3], [8], [1], [2], [6] et d'autres.

2. Résultat principal.

Considérons un système écologique formé par deux espèces végétales ou animales dans un territoire D en compétition pour des ressources du territoire. Pour formuler le problème dans une forme mathématique, admettons que D soit un ensemble ouvert borné de $\boldsymbol{R}^d$, $d = 2$ ou 3, muni de la frontière régulière ∂D et désignons par $N_1(t, x)$ et $N_2(t, x)$ la densité de population au point $x \in D$ et à l'instant $t \in \boldsymbol{R}$ de la première et de la seconde espèce respectivement. Cela étant, nous considérons le système d'équations stochastiques

$$
\begin{aligned}
(2.1)\quad & dN_i(t,\cdot) \\
= & \left[\left(\alpha_i - \sum_{j=1}^{2} \beta_{ij} N_j(t,\cdot) \right) N_i(t,\cdot) + \varepsilon_i \Delta N_i(t,\cdot) \right] dt + \rho_i N_i(t,\cdot) dW(t), \quad i = 1, 2,
\end{aligned}
$$

dans l'espace de Hilbert $L^2(D)$ avec la condition aux limites

$$
\nabla N_i \cdot \vec{n} = 0 \qquad \text{sur} \ \ \partial D, \qquad i = 1, 2; \tag{2.2}
$$

dans (2.1)–(2.2) l'opérateur de Laplace Δ et le nabla ∇ sont à considérer par rapport aux variables spatiales $x_1, \cdots, x_d$, $\vec{n}$ désigne le vecteur normal à la frontière ∂D de D et les coefficients α_i, β_{ij}, ε_i et ρ_i $(i, j = 1, 2)$ sont des constantes telles que

$$
\alpha_i > 0, \ \ \varepsilon_i > 0, \ \ \rho_i > 0, \ \ \beta_{ii} > 0, \ \ i = 1, 2, \ \ \beta_{ij} \geq 0, \ \ i,j = 1, 2 \ \ i \neq j, \tag{2.3}
$$

tandis que $W(t)$ est un mouvement brownien défini sur une base stochastique

$$
(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \boldsymbol{P})
$$

à valeurs dans $L^2(D)$. On suppose que $W(t)$ est de la forme

$$
W(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e_m(\,\cdot\,) W^{(m)}(t), \tag{2.4}
$$

où $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ est une base orthonormale de $L^2(D)$ avec $e_m(\,\cdot\,) \in L^\infty(D)$ pour tout $m \in \boldsymbol{N}\backslash\{0\}$, $W^{(m)}(t)$, $m = 1, 2, \cdots$, sont des mouvements browniens indépendants à valeurs réelles, et $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ est une suite de nombres réels telle que

$$\Big\| \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 e_m^2(\,\cdot\,) \Big\|_{L^\infty(D)} = K_0 < \infty. \tag{2.5}$$

Pour le problème (2.1)–(2.2) proposé ci-dessus, on connaît l'existence et l'unicité ainsi que la positivité de la solution. Plus précisément, on a la

PROPOSITION 2.1. *Le problème* (2.1)–(2.2) *avec la condition initiale* $N_i(0, x) > 0$ *p.p. dans* D, $N_i(0, \cdot) \in L^2(D)$, $i = 1, 2$, *admet une solution* $N(t, x) = (N_1(t, x), N_2(t, x))$ *et une seule dans l'intervalle* $0 \le t < \infty$ *et on a* $N_i(t, x) > 0$ *p.p. dans* D *p.s.* ($i = 1, 2$) *pour tout* $t \ge 0$.

Pour la démonstration, voir [15] (dans [15] l'existence et l'unicité de la solution sont démontrées pour un système de n espèces).

Pour démontrer l'existence d'une mesure invariante, nous supposons que, avec K_0 défini dans (2.4)–(2.5), on ait

$$\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} < \frac{\alpha_2 - K_0 \dfrac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2}}{\alpha_1} \le \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - K_0 \dfrac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2}} < \frac{\beta_{22}}{\beta_{12}}, \tag{2.6}$$

où on entend $\dfrac{\beta_{22}}{\beta_{12}} = +\infty$ si $\beta_{12} = 0$. Comme $\dfrac{\beta_{21}}{\beta_{11}} \ge 0$ et que $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, l'inégalité (2.6) implique que

$$\alpha_i - K_0 \frac{\rho_i^2}{2} \ge \alpha_i - K_0 \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2} 0, \qquad i = 1, 2, \tag{2.7}$$

Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 2.1. *Si les coefficients* α_i, β_{ij} *et* ρ_i ($i, j = 1, 2$) *et le mouvement brownien* $W(t)$ *satisfont aux conditions* (2.3)–(2.6), *alors il existe une mesure invariante* $\bar{\mu}$ *dans* $L^2(D; \boldsymbol{R}^2)$ *pour l'équation* (2.1) *avec la condition aux limites* (2.2), *telle que*

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\{N_i \in H^1(D),\ i = 1, 2\}) &= \bar{\mu}(\{N_i > 0 \text{ p.p. dans } D,\ i = 1, 2\}) \\ &= \bar{\mu}(\{\log N_i \in L^1(D),\ i = 1, 2\}) = 1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

La population totale de l'espèce i sur le territoire D, qui est essentielle du point de vue biologique, est exprimée exactement par la norme

$\|N_i\|_{L^1(D)}$. Mais pour les traitements mathématiques il nous est commode de considérer N_i comme élément de $L^2(D)$; comme on voit facilement, la norme $\|N_i\|_{L^1(D)}$ est majorée par $\sqrt{mes(D)}\|N_i\|_{L^2(D)}$.

3. Démonstration de l'existence d'une mesure invariante.

La démonstration du théorème 2.1 se base sur l'application du théorème de Krylov-Bogoliubov, qui, à son tour, s'appuie sur une estimation de la solution du problème (2.1)–(2.2) avec les conditions initiales et utilise également les idées du théorème de Khas'minskii (voir [10]). Comme l'estimation de la solution qu'on va utiliser est assez complexe, en renvoyant sa démonstration au paragraphe suivant, dans le présent paragraphe on va démontrer le théorème 2.1 en admettant le résultat de l'estimation.

Pour formuler ce résultat auxiliaire, on pose

$$\Phi_0(N) = \sum_{i=1}^{2} \big(\|N_i\|^2_{L^2(D)} + \|\log N_i\|_{L^1(D)}\big), \tag{3.1}$$

$$\Phi_1(N) = \sum_{i=1}^{2} \big(\|\nabla N_i\|^2_{L^2(D)} + \|\nabla \log N_i\|^2_{L^2(D)}\big), \tag{3.2}$$

$$\Xi(D) = \{\, N \in L^2(D; (\boldsymbol{R}_+)^2) \,|\, \log\, N_i \in L^1(D),\ i = 1, 2 \,\}. \tag{3.3}$$

On a alors le lemme suivant.

LEMME 3.1. *Il existe une fonction $G : \Xi(D) \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}$ telle que, si on pose*

$$A(c) = \sup\{\, G(N) \,|\, N \in \Xi(D),\ \Phi_0(N) \geq c \,\}, \tag{3.4}$$

on ait

$$\sup_{N\in\Xi(D)} G(N) = A(0) < \infty \tag{3.5}$$

$$A(c) \to -\infty \qquad \text{pour} \ \ c \to +\infty, \tag{3.6}$$

et que de plus, si $N(t,\cdot)$ est la solution du problème (2.1)–(2.2) *avec la condition initiale $N(0,\cdot) = N_0 \in \Xi(D)$, alors on ait*

$$\kappa_0 \boldsymbol{E}\Phi_0(N(t,\cdot)) + \kappa_1 \int_0^t \boldsymbol{E}\Phi_1(N(t',\cdot))dt' \leq \kappa_2 \|N_0\|^2_{\Xi} + \int_0^t \boldsymbol{E}G(N(t',\cdot))dt', \tag{3.7}$$

où κ_0, κ_1, κ_2 sont des constantes positives et

$$\|N\|_{\Xi} = \sum_{i=1}^{2} (\|N_i\|_{L^2(D)} + \|\log N_i\|_{L^1(D)}). \tag{3.8}$$

En renvoyant la démonstration de ce lemme au paragraphe 4, on expose ici la démonstration du théorème 2.1.

Démonstration du théorème 2.1. Comme le premier membre de (3.7) est non-négatif, on a

$$0 \leq \kappa_2 \|N_0\|_{\Xi}^2 + tA(0) + A(c) \int_0^t \boldsymbol{P}\big(\{\varPhi_0(N(t',\cdot)) \geq c\}\big)dt';$$

en particulier pour c tel que $A(c) < 0$, on a

$$\frac{1}{t}\int_0^t \boldsymbol{P}\big(\{\varPhi_0(N(t',\cdot)) \geq c\}\big)dt' \leq \frac{1}{-A(c)}\left(A(0) + \frac{\kappa_2\|N_0\|_{\Xi}^2}{t}\right). \tag{3.9}$$

D'autre part, de (3.7) on déduit immédiatement que

$$\kappa_1 \frac{1}{t}\int_0^t \boldsymbol{E}\varPhi_1(N(t',\cdot))dt' \leq A(0) + \frac{\kappa_2\|N_0\|_{\Xi}^2}{t}. \tag{3.10}$$

De (3.9)–(3.10) et de (3.6) on déduit

$$\frac{1}{t}\int_0^t \boldsymbol{P}\big(\{\varPhi_0(N(t',\cdot)) + \varPhi_1(N(t',\cdot)) \leq c\}\big)dt' \geq 1 - \varepsilon(c) \quad \forall t \geq 1 \tag{3.11}$$

avec une fonction décroissante $\varepsilon(c)$ telle que

$$\varepsilon(c) \to 0 \quad \text{pour} \quad c \to \infty.$$

Pour $N_0 \in \Xi(D)$ et un ensemble borélien $\varGamma$ de $L^2(D;\boldsymbol{R}^2) \times L^1(D;\boldsymbol{R}^2)$, on pose

$$P_t(N_0,\varGamma) = \boldsymbol{P}\big(\{(N_1(t,\cdot),N_2(t,\cdot),\log N_1(t,\cdot),\log N_2(t,\cdot)) \in \varGamma\}\big),$$

où $N(t,\cdot)$ est la solution du problème (2.1)–(2.2) avec la condition initiale

$$N_i(0,x) = N_{0,i}(x), \quad i = 1,2.$$

On définit alors

$$\nu_T(\Gamma) = \frac{1}{T}\int_0^T P_t(N_0, \Gamma)dt.$$

Cela étant, de (3.11) et de la définition de $\Phi_0(\,\cdot\,)$ et $\Phi_1(\,\cdot\,)$ (voir (3.1) et (3.2)) on déduit qu'on a

$$\nu_T\Big(\Big\{N \in \Xi(D) \mid \|N\|^2_{H^1(D;\boldsymbol{R}^2)} + \sum_{i=1}^{2} \|\log N_i\|^2_{H^1(D;\boldsymbol{R})} \leq c\Big\}\Big) \geq 1 - \tilde{\varepsilon}(c) \quad \forall T \geq 1$$

avec une fonction décroissante $\tilde{\varepsilon}(\,\cdot\,)$ telle que

$$\tilde{\varepsilon}(c) \to 0 \quad \text{pour} \quad c \to \infty.$$

C'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $C_{(\varepsilon)}$ tel que

$$\nu_T\Big(\Big\{N \in \Xi(D) \mid \|N\|^2_{H^1(D;\boldsymbol{R}^2)} + \sum_{i=1}^{2} \|\log N_i\|^2_{H^1(D;\boldsymbol{R})} \leq C_{(\varepsilon)}\Big\}\Big) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall T \geq 1. \tag{3.12}$$

On rappelle qu'un ensemble borné dans $H^1(D;\boldsymbol{R}^2) \times H^1(D;\boldsymbol{R}^2)$ est relativement compact dans $L^2(D;\boldsymbol{R}^2) \times L^1(D;\boldsymbol{R}^2)$. Donc en vertu du théorème de Krylov-Bogoliubov ([11]) dans sa version complétée par le critère de Prokhorov (voir [4], [5]), on déduit de (3.12) l'existence d'une mesure invariante $\bar{\nu}$ dans $L^2(D;\boldsymbol{R}^2) \times L^1(D;\boldsymbol{R}^2)$ pour l'équation (2.1) avec la condition aux limites (2.2). Désignons par μ_T et λ_T les projections de ν_T sur $L^2(D;\boldsymbol{R}^2)$ et sur $L^1(D;\boldsymbol{R}^2)$ et analoguement par $\bar{\mu}$ et $\bar{\lambda}$ les projections de $\bar{\nu}$ sur $L^2(D;\boldsymbol{R}^2)$ et sur $L^1(D;\boldsymbol{R}^2)$ respectivement. Or, comme $\bar{\nu}$ est obtenue comme limite faible d'une suite $\{\nu_{T_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (voir [4]; voir aussi le théorème 1 du §1, chap. IX de [9]) et que

$$\mu_{T_k}\big(\{N_i > 0 \text{ p.p. dans } D,\ i = 1, 2\}\big) = 1, \qquad \lambda_{T_k} = \log \circ \mu_{T_k},$$

on a

$$\bar{\mu}(\{N_i > 0 \text{ p.p. dans } D,\ i = 1, 2\}) = 1, \qquad \bar{\lambda} = \log \circ \bar{\mu},$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.1 □

4. Démonstration du lemme 3.1.

Pour démontrer le lemme 3.1, on va appliquer la formule d'Ito à une fonction convenable et en obtenir une estimation, en utilisant les idées de la fonction de Khas'minskii et celles des estimations dans $L^2(D)$ de la solution de l'équation (2.1) avec la condition (2.2) (voir [15]).

Commençons par remarquer une conséquence élémentaire de la condition (2.6).

REMARQUE 4.1. *Pour* $i = 1, 2$, *il existe* $k_i > 0$ *tel que*

$$(\beta_{ii} + \beta_{ji} + k_i\alpha_i)^2 - 4k_i\beta_{ii}\left(\alpha_1 + \alpha_2 - K_0\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2}\right) < 0, \quad j \neq i. \tag{4.1}$$

DÉMONSTRATION. En considérant (4.1) comme équation algébrique du second degré en k_i, on voit qu'il existe $k_i > 0$ satisfaisant à (4.1), si et seulement si

$$\alpha_i(\beta_{ii} + \beta_{ji}) - 2\beta_{ii}\left(\alpha_1 + \alpha_2 - K_0\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2}\right) < 0,$$

$$\left(\alpha_i(\beta_{ii} + \beta_{ji}) - 2\beta_{ii}\left(\alpha_1 + \alpha_2 - K_0\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2}\right)\right)^2 - \alpha_i^2(\beta_{ii} + \beta_{ji})^2 > 0, \quad j \neq i.$$

On voit aisément que, pour que ces deux inégalités soient vérifiées, il faut et il suffit que

$$\alpha_i(\beta_{ii} + \beta_{ji}) < \beta_{ii}\left(\alpha_1 + \alpha_2 - K_0\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2}\right), \qquad j \neq i.$$

Cette dernière inégalité pour $i = 1$ et 2 est équivalente à (2.6). □

On pose maintenant

$$U(N) = \sum_{i=1}^{2}(k_iN_i - \log N_i) + C, \tag{4.2}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes positives satisfaisant à (4.1) et

$$C = 1 - \inf_{N \in (\boldsymbol{R}_+)^2} \sum_{i=1}^{2}(k_iN_i - \log N_i).$$

Grâce à ce choix de C, on a

$$U(N) \geq 1 \qquad \forall N \in (\boldsymbol{R}_+)^2 \tag{4.3}$$

et il existe des constantes positives $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$, $\bar{c}_4$ telles que

$$\bar{c}_1\sum_{i=1}^{2}|\log N_i| \leq U(N) \leq \bar{c}_2 + \bar{c}_3\sum_{i=1}^{2}|\log N_i| + \bar{c}_4\sum_{i=1}^{2}|N_i|. \tag{4.4}$$

On pose en outre

$$\varphi(N) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_D N_i^2 dx + \frac{1}{2}\left(\int_D U(N_1, N_2)dx\right)^2. \tag{4.5}$$

On va appliquer la formule d'Ito à la fonction $\varphi(N)$. Pour cela, rappelons que

$$\frac{\partial\varphi(N)}{\partial N_i}(f) = \int_D N_i f dx + \int_D U(N)dx \int_D \frac{\partial U(N)}{\partial N_i} f dx,$$

$$\frac{\partial^2\varphi(N)}{\partial N_i \partial N_j}(f)(g) = \delta_{ij}\int_D fgdx + \int_D U(N)dx \int_D \frac{\partial^2 U(N)}{\partial N_i \partial N_j} fgdx$$
$$+ \int_D \frac{\partial U(N)}{\partial N_j} fdx \int_D \frac{\partial U(N)}{\partial N_i} gdx,$$

$$\frac{\partial U(N)}{\partial N_i} = k_i - \frac{1}{N_i}, \qquad \frac{\partial^2 U(N)}{\partial N_i \partial N_j} = \frac{\delta_{ij}}{N_i^2}.$$

En appliquant la formule d'Ito à la fonction $\varphi(N)$ (pour la formule d'Ito pour les processus à valeurs dans un espace de Hilbert, voir par exemple [13]) et en intégrant par parties sur D les termes contenant l'opérateur de Laplace Δ, on obtient

$$\varphi(N(t,\cdot)) + \int_0^t F(N(t',\cdot))dt' = \varphi(N(0,\cdot)) \tag{4.6}$$
$$+ \int_0^t (G_1(N(t',\cdot)) + G_2(N(t',\cdot)) + G_3(N(t',\cdot)))dt'$$
$$+ \int_0^t \langle h(N(t',\cdot)), dW(t')\rangle,$$

où

$$F(N) = \sum_{i=1}^{2}\varepsilon_i\left(\|\nabla N_i\|^2_{L^2(D)} + \frac{1}{2}\|U(N)\|_{L^1(D)}\|\nabla \log N_i\|^2_{L^2(D)}\right), \tag{4.7}$$

$$G_1(N) = \sum_{i=1}^{2}\int_D N_i^2\left(\alpha_i + \frac{\rho_i^2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 e_m^2 - \sum_{j=1}^{2}\beta_{ij}N_j\right)dx, \tag{4.8}$$

$$G_2(N) = \int_D U(N)dx \left(\int_D AU(N)dx - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i \|\nabla \log N_i\|^2_{L^2(D)} \right), \tag{4.9}$$

$$AU(N) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial U}{\partial N_i}\left(\alpha_i - \sum_{j=1}^{2} \beta_{ij} N_j\right) N_i + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\rho_i \rho_j}{2} N_i N_j \frac{\partial^2 U}{\partial N_i \partial N_j} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 e_m^2, \tag{4.10}$$

$$G_3(N) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{2} \int_D \frac{\partial U}{\partial N_i} \rho_i N_i \lambda_m e_m dx \int_D \frac{\partial U}{\partial N_j} \rho_j N_j \lambda_m e_m dx, \tag{4.11}$$

$$h(N) = \sum_{i=1}^{2} \rho_i N_i^2 + \int_D U dx \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial U}{\partial N_i} \rho_i N_i. \tag{4.12}$$

Lemme 4.1. *On a*

$$\sup_{N \in \Xi(D)} G_2(N) < \infty, \tag{4.13}$$

$$\sup \left\{ G_2(N) \,|\, N \in \Xi(D), \int_D U(N) dx \geq c \right\} \to -\infty \quad \textit{pour} \quad c \to +\infty. \tag{4.14}$$

Démonstration. En substituant les expressions de $\dfrac{\partial U(N)}{\partial N_i}$ et de $\dfrac{\partial^2 U(N)}{\partial N_i \partial N_j}$ dans (4.10), on obtient

$$AU(N) = \gamma(N), \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \gamma(N) = &- (k_1 N_1 - 1)\beta_{11} N_1 + (\beta_{21} + k_1 \alpha_1) N_1 - (k_1 \beta_{12} + k_2 \beta_{21}) N_1 N_2 \\ &- (k_2 N_2 - 1)\beta_{22} N_2 + (\beta_{12} + k_2 \alpha_2) N_2 - \alpha_1 - \alpha_2 \\ &+ \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 e_m^2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

On remarque d'abord que

$$\gamma(N) \to -\infty \qquad \text{pour} \quad |N|^2 = N_1^2 + N_2^2 \to \infty \tag{4.17}$$

et donc

$$\sup_{N \in (\boldsymbol{R}_+)^2} \gamma(N) \equiv \overline{\Gamma} < \infty, \tag{4.18}$$

d'où, compte tenu de (4.15), il résulte que

$$\sup_{N\in\Xi(D)}\left(\int_D AU(N)dx-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_i\|\nabla\log N_i\|^2_{L^2(D)}\right)<\infty. \tag{4.19}$$

On va démontrer qu'il existe deux constantes positives ε_G et L_G telles que

$$\gamma(N)\leq-\varepsilon_G \quad \text{pour} \quad \sum_{i=1}^{2}|\log N_i|\geq L_G. \tag{4.20}$$

Pour ce faire, étant donné qu'on a (4.17), il suffit de démontrer qu'il existe deux constantes positives ε_G et δ_G telles que

$$\gamma(N)\leq-\varepsilon_G \qquad \text{pour} \quad \min(N_1,N_2)\leq\delta_G,$$

ou, compte tenu de la continuité de $\gamma(N)$ en N_1 et N_2 (voir (4.11)), de démontrer que

$$\sup_{N_i>0}\psi_i(N_i)<0, \quad i=1,2, \qquad \psi_i(N_i)=\gamma(N)\big|_{N_j=0}, \quad j\neq i.$$

En tenant compte de la condition (2.5), de l'expression (4.16) de $\gamma(N)$ on déduit que

$$\psi_i(N_i)=-\beta_{ii}k_iN_i^2+(\beta_{ii}+\beta_{ji}+k_i\alpha_i)N_i-\alpha_1-\alpha_2+\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2e_m^2\leq\tilde\psi_i(N_i),$$

où

$$\tilde\psi_i(N_i)=-\beta_{ii}k_iN_i^2+(\beta_{ii}+\beta_{ji}+k_i\alpha_i)N_i-\alpha_1-\alpha_2+K_0\,\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{2}.$$

Il est clair que pour avoir

$$\sup_{N_i>0}\tilde\psi_i(N_i)<0,$$

il faut et il suffit qu'on ait

$$\Delta=(\beta_{ii}+\beta_{ji}+k_i\alpha_i)^2-4\beta_{ii}(\alpha_1+\alpha_2-K_0\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{2})k_i<0, \quad j\neq i. \tag{4.21}$$

Or, l'existence d'un $k_i>0$ satisfaisant à (4.21) a été démontrée dans la remarque 4.1. Donc, il existe deux constantes positives ε_G et L_G satisfaisant à (4.20).

Etant établie (4.20), pour démontrer (4.14), on considère séparément les deux cas

i)
$$\int_D AU(N)dx = \int_D \gamma(N)dx \le -\frac{\varepsilon_G\, mes(D)}{2},$$

ii)
$$\int_D AU(N)dx = \int_D \gamma(N)dx > -\frac{\varepsilon_G\, mes(D)}{2}.$$

Dans le cas *i*), on a évidemment

$$G_2(N) \le \int_D U(N)dx \int_D AU(N)dx \le -\frac{\varepsilon_G\, mes(D)}{2} \int_D U(N)dx,$$

d'où résultent (4.13)–(4.14).

Dans le cas *ii*), en utilisant la notation $\overline{\Gamma}$ donnée dans (4.18), on obtient

$$\begin{aligned}
-\frac{\varepsilon_G}{2}\, mes(D) &\le \int_{\left\{\sum_{i=1}^{2} |\log N_i| > L_G\right\}} \gamma(N)dx + \int_{\left\{\sum_{i=1}^{2} |\log N_i| \le L_G\right\}} \gamma(N)dx \\
&\le -\varepsilon_G\, mes\left\{\sum_{i=1}^{2} |\log N_i| > L_G\right\} + \overline{\Gamma}\, mes\left\{\sum_{i=1}^{2} |\log N_i| \le L_G\right\} \\
&\le -\varepsilon_G\, mes(D) + \left(\overline{\Gamma} + \varepsilon_G\right) mes\left\{\sum_{i=1}^{2} |\log N_i| \le L_G\right\},
\end{aligned}$$

d'où on obtient

$$mes\left\{\sum_{i=1}^{2} |\log N_i| \le L_G\right\} \ge \frac{\varepsilon_G\, mes(D)}{2(\varepsilon_G + \overline{\Gamma})} > 0.$$

En vertu de l'inégalité de Poincaré il existe une constante positive C', qui dépend de D et de $\dfrac{\varepsilon_G\, mes(D)}{2(\varepsilon_G + \overline{\Gamma})}$ et telle que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2} \|\log N_i\|_{L^1(D)} - mes(D)\, L_G \\
&\qquad \le \int_D \left(\sum_{i=1}^{2} |\log N_i| - L_G\right)^+ dx \le C' \sum_{i=1}^{2} \|\nabla \log N_i\|_{L^2(D)}.
\end{aligned}$$

Donc, compte tenu de

$$\int_D AU(N)dx = \int_D \gamma(N)dx \le \overline{\Gamma}\, mes(D),$$

on a

$$\int_D AU(N)dx - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i \|\nabla \log N_i\|_{L^2(D)} \to -\infty \qquad \text{pour } \sum_{i=1}^{2} \|\log N_i\|_{L^1(D)} \to \infty. \tag{4.22}$$

On remarque que dans le cas où $\sum_{i=1}^{2} |N_i|$ est suffisamment grand, grâce à (4.17) l'inégalité du cas i) est vérifiée. Donc, en rappelant (4.4) et (4.19), des considérations sur le cas i) et de la relation (4.22) on déduit (4.13)–(4.14). Le lemme est démontré. □

LEMME 4.2. *Si on pose*

$$G(N) = G_1(N) + G_2(N) + G_3(N)$$

($G_i(N)$, $i = 1, 2, 3$, étant définies dans (4.8)–(4.11)*), alors $G(N)$ vérifie la condition* (3.6).

DÉMONSTRATION. On remarque que, comme

$$\|N_i\|^3_{L^2(D)} \le (mes(D))^{1/2} \int_D N_i^3 dx,$$

on a

$$-\int_D \sum_{i,j=1}^{2} \beta_{ij} N_i^2 N_j dx \le -c_1 \left(\sum_{i=1}^{2} \|N_i\|^2_{L^2(D)} \right)^{3/2} \tag{4.23}$$

avec une constante positive c_1.

En outre, on a

$$\int_D \frac{\partial U}{\partial N_i} \rho_i N_i \lambda_m e_m dx \int_D \frac{\partial U}{\partial N_j} \rho_j N_j \lambda_m e_m dx$$

$$= \int_D \rho_i (k_i N_i - 1) \lambda_m e_m dx \int_D \rho_j (k_j N_j - 1) \lambda_m e_m dx$$

$$\le \frac{1}{2} \int_D \lambda_m^2 e_m^2 dx \left(\rho_i^2 \int_D (k_i N_i - 1)^2 dx + \rho_j^2 \int_D (k_j N_j - 1)^2 dx \right).$$

En rappelant (4.11) et en tenant compte de la condition (2.5), on obtient

$$G_3(N) \leq c_2 K_0 \left[\int_D (k_1 N_1 - 1)^2 dx + \int_D (k_2 N_2 - 1)^2 dx \right]$$

avec une constante c_2. Donc, en rappelant (4.8) on a

$$G_1(N) + G_3(N) + \int_D \sum_{i,j=1}^{2} \beta_{ij} N_i^2 N_j dx \leq c_3 \sum_{i=1}^{2} \|N_i\|_{L^2(D)}^2 + c_4$$

avec deux constantes c_3 et c_4. Par conséquent, compte tenu de (4.23), on a

$$\sup_{N \in \Xi(D)} (G_1(N) + G_3(N)) < \infty, \tag{4.24}$$

$$\sup \left\{ G_1(N) + G_3(N) \,|\, N \in \Xi(D),\ \sum_{i=1}^{2} \|N_i\|_{L^2(D)}^2 \geq c \right\} \to -\infty \quad \text{pour} \quad c \to +\infty. \tag{4.25}$$

Du lemme 4.1 et des relations (3.1), (4.24), (4.25), on déduit (3.6). □

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1. On remarque que par la propriété des martingales, on a

$$\boldsymbol{E} \int_0^t \langle h(N(t', \cdot)), dW(t') \rangle = 0. \tag{4.26}$$

On remarque d'autre part que les définitions de $\Phi_0(N)$, $\Phi_1(N)$, $\varphi(N)$, $U(N)$, $F(N)$ (voir aussi (3.8), (4.2), (4.3), (4.4)) impliquent qu'il existe des constantes positives κ_2, C_0, C_1 telles que

$$\Phi_0(N) \leq C_0 \varphi(N) \quad \forall N \in \Xi(D), \tag{4.27}$$

$$\Phi_1(N) \leq C_1 F(N) \quad \forall N \in \{ N \in \Xi(D) \,|\, \nabla N_i, \nabla \log N_i \in L^2(D), i = 1, 2 \}, \tag{4.28}$$

$$\varphi(N) \leq \kappa_2 \|N\|_{\Xi}^2. \tag{4.29}$$

Compte tenu de (4.27), (4.28) et (4.29) et en posant $\kappa_0 = \dfrac{1}{C_0}$, $\kappa_1 = \dfrac{1}{C_1}$, le lemme 3.1 résulte de (4.6) et du lemme 4.2. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. C. CAPELO, *Modelli matematici in biologia* . Decibel editrice, Padova, 1989.
[2] S. CHESSA - H. FUJITA YASHIMA, *Equazione stocastica di dinamica di popolazioni di tipo preda-predatore*. Boll. U.M.I., Serie VIII, vol. **5** - B (2002), pp. 789–804.
[3] F. B. CHRISTIANSEN - T. M. FENCHEL, *Theories of population in biological communities*. Springer, 1977.
[4] G. DA PRATO, *An introduction to infinite dimensional analysis*. Scuola Norm. Sup. Pisa, 2001.
[5] G. DA PRATO - J. ZABCZYK, *Ergodicity for infinite dimensional systems*. Cambridge Univ. Press, 1996.
[6] H. FUJITA YASHIMA, *Equation stochastique de dynamique de populations du type proie-prédateur avec diffusion dans un territoire*. Novi Sad J. Math., vol. **33** (2003), pp. 31–52.
[7] H. FUJITA YASHIMA - S. HAMDOUS, *Mesure invariante pour l'équation stochastique d'un modèle de compétition limitée entre des espèces avec une diffusion spatiale*. Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Tomo **56** (2007), pp. 79–89.
[8] B. GABUTI - A. NEGRO, *Some results on asymptotic behaviour of the Volterra-lotka diffusion equations*. Rend. Sem. Math. Univ. Polit., Torino, vol. **36** (1977/1978), pp. 403–414.
[9] I. I. GUIKHMAN - A. V. SKOROKHOD, *Introduction à la théorie des processus aléatoires* (traduit du russe). Mir (Moscou), 1980.
[10] R. Z. HAS'MINSKII, *Stochastic stability of differential equations* . (translated from Russian). Sijthoff & Noordhoff, Alphe ann den Rijn, 1980.
[11] N. KRYLOFF - N. BOGOLIUBOFF, *La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire*. Annals Math., vol. **38** (1937), pp. 65–113.
[12] A. NEGRO - B. GABUTI, *A fractional steps method for the Volterra-lotka diffusion equations*. Rend. Sem. Math. Univ. Polit., Torino, vol. **35** (1976/1977), pp. 373–389.
[13] E. PARDOUX, *Intégrales stochastiques hilbertiennes*. Publication interne Univ. Paris - Dauphine, 1976.
[14] R. RUDNICKI, *Long-time behaviour of a stochastic prey-predator model*. Stoch. Proc. Appl., vol. **108** (2003), pp. 93–107.
[15] E. TORNATORE, *Stochastic equation of population dynamic with diffusion on a domain*. Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Tomo **52** (2003), pp. 15–29.
[16] E. TORNATORE - L. MANCA - H. FUJITA YASHIMA, *Comportamento asintotico della soluzione del sistema di equazioni stocastiche per due specie in competizione*. Rend. Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. (Sci. Mat. Appl.). vol. **136/137** (2002/03), pp. 151–183.
[17] V. VOLTERRA, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 luglio 2008.