REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 124 (2010)

Mesure invariante pour le système d'équations stochastiques du modèle de proie-prédateur avec diffusion spatiale

SALIHA HAMDOUS (*) - LUIGI MANCA (**) - HISAO FUJITA YASHIMA (***)

1. Introduction.

Dans sa célèbre oeuvre [16], Volterra a analysé de manière détaillée le système d'équations ordinaires du modèle de proie-prédateur, connu sous le nom d'équation de Lotka-Volterra. Negro et Gabutti ([11], [6]) ont démontré l'existence et l'unicité de la solution de ce système d'équations avec diffusion spatiale dans un domaine borné de $\boldsymbol{R}^d$, $d \leq 3$. Or, l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations du modèle de proie-prédateur avec des perturbations stochastiques ont été prouvées dans [1] et ce résultat a été généralisé au cas avec diffusion spatiale (voir [4]). D'autre part, Rudnicki [13] a démontré l'existence et l'unicité de la mesure invariante pour l'équation stochastique du modèle proie-prédateur, en précisant les conditions sur les coefficients de l'équation pour l'existence de la mesure invariante et l'extention de son support.

Le but du présent travail est de démontrer l'existence d'une mesure invariante pour le système d'équations stochastiques du modèle de proie-prédateur avec diffusion spatiale, mesure invariante pour laquelle aucune des deux espèces n'est destinée à l'extinction, sous une condition qui est une généralisation naturelle de la condition avec laquelle Rudnicki a démontré son résultat cité ci-dessus.

Du point de vue technique, nous suivons le schéma de [8], où on a démontré l'existence d'une mesure invariante pour le système d'équations pour deux espèces en compétition avec diffusion spatiale. Comme dans [8], la démonstration du résultat du présent travail s'appuie sur les estimations

(*) Indirizzo dell'A.: Département de Mathématiques, Université de Tizi-Ouzou M. Mammeri, 15000 Tizi-Ouzou, Algérie

(**) Indirizzo dell'A.: Laboratoire IMATH, Université du Sud-Toulon Var, 83957 La Garde Cedex France

(***) Indirizzo dell'A.: Université 08 Mai 1945, 24000 Guelma, Algérie et Università di Torino, 10123 Torino, Italy

de la solution de l'équation avec une donnée initiale et sur le théorème de Krylov-Bogoliubov ainsi que sur les idées du théorème de Khas'minskii (voir [9]). Il est bon de rappeler que, pour obtenir ces estimations de la solution, dans le cas de deux espèces en compétition (considéré dans [8]) on pouvait utiliser une fonctionnelle plutôt simple, tandis que dans le cas de proie et prédateur (considéré dans le présent travail), à cause de la relation spécifique entre la proie et le prédateur (exprimée par une relation spécifique entre les coefficients dans les équations) nous avons dû construire une fonctionnelle particulière quelque peu complexe. Pour ces estimations on a utilisé également des idées de [14], [15], [1], [4], [5].

2. Résultat principal.

Notre étude a pour objet la population de deux espèces, une proie et une prédatrice, qui vivent dans un certain territoire D. Pour bien formuler le problème du point de vue mathématique, nous admettons que D est un ensemble ouvert borné de $\boldsymbol{R}^d$, $d = 2$ ou 3, muni de la frontière régulière ∂D. La densité de population au point $x \in D$ et à l'instant $t \in \boldsymbol{R}$ de l'espèce proie et de l'espèce prédatrice sera désignée respectivement par $N_1(t,x)$ et par $N_2(t,x)$.

Nous allons considérer un modèle stochastique de populations de proie et de prédateurs avec diffusion spatiale, plus précisément nous envisageons le système d'équations stochastiques dans l'espace de Hilbert $L^2(D; \boldsymbol{R}^2)$

$$dN_1(t,\cdot) = [(\alpha - \beta N_2(t,\cdot) - \mu N_1(t,\cdot))N_1(t,\cdot) + \kappa_1 \varDelta N_1(t,\cdot)]dt + \rho_1 N_1(t,\cdot)dW(t), \tag{2.1}$$

$$dN_2(t,\cdot) = [(-\gamma + \delta N_1(t,\cdot) - \nu N_2(t,\cdot))N_2(t,\cdot) + \kappa_2 \varDelta N_2(t,\cdot)]dt + \rho_2 N_2(t,\cdot)dW(t), \tag{2.2}$$

avec la condition aux limites

$$\nabla N_i \cdot \vec{n} = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial D, \qquad i = 1, 2, \tag{2.3}$$

où

$$\varDelta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \qquad \nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_d}\Big)^T,$$

$\vec{n}$ désigne le vecteur normal à la frontière ∂D de D et $W(t)$ est un mouvement brownien défini sur une base stochastique

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \boldsymbol{P})$$

à valeurs dans $L^2(D; \boldsymbol{R})$. On suppose que

(2.4) $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \mu,\ \nu,\ \kappa_1$ et κ_2 sont des constantes strictement positives,

(2.5) ρ_1 et ρ_2 sont des constantes non-négatives,

(2.6) $$W(t) \text{ est de la forme } \quad W(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e_m(\cdot)\ W^{(m)}(t),$$

où $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ est une base orthonormale de $L^2(D)$ avec $e_m(\cdot)\ \in L^\infty(D)$ et $\nabla e_m \cdot \vec{n} = 0$ sur ∂D pour tout $m \in \boldsymbol{N}\backslash\{0\}$, $W^{(m)}(t)$, $m = 1, 2, \cdots$, sont des mouvements browniens indépendants à valeurs réelles, et $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ est une suite de nombres réels telle que

(2.7) $$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 e_m^2(\cdot) \right\|_{L^\infty(D)} = K_0 < \infty.$$

En ce qui concerne l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1)-(2.3) avec une condition initiale, nous rappelons que dans [4] on a démontré que sous la condition $N_i(0,\cdot) \in W^1_{d+h}(D)$ (avec ∂D de classe C^2 et $0 < h < 1$ si $d = 3$, $h > 0$ si $d = 2$), $\log N_i(0,\cdot) \in L^1(D)$, le problème admet une solution (N_1, N_2) et une seule dans la classe $L^\infty(0,T; W^1_{d+h}(D))$ avec $N_i > 0$. Si on construit les solutions approchées en utilisant la troncature par rapport à la norme $\|N_i\|_{L^2(D)}$ comme dans [14], avec la donnée initiale $N_i(0,\cdot) \in L^2(D)$ on peut obtenir sans difficulté la solution (N_1, N_2) dans la classe $L^\infty(0,T; L^2(D))$. Plus précisément, on a la

PROPOSITION 2.1. *Sous les conditions* (2.4)-(2.7) *le problème* (2.1)-(2.3) *avec la condition initiale* $N_i(0,x) > 0$ *p.p. dans* D, $N_i(0,\cdot) \in L^2(D)$, $\log N_i(0,\cdot) \in L^1(D)$, $i = 1, 2$, *admet une solution* $N(t,x) = (N_1(t,x), N_2(t,x))$ *et une seule dans la classe* $L^\infty(0,T; L^2(D))$ *pour tout* $T > 0$ *et on a* $N_i(t,x) > 0$ *p.p. dans* D *p.s.* ($i = 1, 2$) *pour tout* $t \geq 0$.

DÉMONSTRATION. On la démontre de manière analogue au théorème 1.1 de [4] (avec l'utilisation de solutions approchées analogues à celles de [14]). □

Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 2.1. *Si les coefficients* α, β, γ, δ, μ, ν, κ_i, ρ_i *(*$i = 1, 2$*) et* $W(t)$ *satisfont aux conditions* (2.4)–(2.7) *et si on a*

$$\mu(\gamma + K_0 \frac{\rho_2^2}{2}) < \delta(\alpha - K_0 \frac{\rho_1^2}{2}), \tag{2.8}$$

alors le système d'équations (2.1)-(2.2) *avec les conditions aux limites* (2.3) *admet une mesure invariante* $\bar{\mu}$ *dans* $L^2(D; \boldsymbol{R}^2)$ *telle que*

$$\bar{\mu}(\{N_i \in H^1(D),\ i = 1, 2\}) = \bar{\mu}(\{N_i > 0 \ p.p.\ dans\ D,\ i = 1, 2\}) = \tag{2.9}$$

$$= \bar{\mu}(\{\log N_i \in L^1(D),\ i = 1, 2\}) = 1.$$

On rappelle que c'est sous la condition

$$\mu\big(\gamma + \frac{\rho_2^2}{2}\big) < \delta\big(\alpha - \frac{\rho_1^2}{2}\big) \tag{2.10}$$

que Rudnicki a démontré dans [13] l'existence et l'unicité de la mesure invariante avec $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ p.s. pour le système d'équations

$$dN_1 = (\alpha - \beta N_2 - \mu N_1)N_1 dt + \rho_1 N_1 dW,$$

$$dN_2 = (-\gamma + \delta N_1 - \nu N_2)N_2 dt + \rho_2 N_2 dW,$$

où $W(t)$ est un mouvement brownien à valeurs réelles (il a démontré également que, si $\mu(\gamma + \frac{\rho_2^2}{2}) > \delta(\alpha - \frac{\rho_1^2}{2})$, alors il n'existe pas une telle mesure invariante). Vue la forme des inégalités (2.10) et (2.8), on pourrait considérer la condition (2.8) comme une généralisation suffisamment naturelle de (2.10) au cas de la présence de diffusion spatiale. La condition (2.10), à son tour, peut être considérée comme version stochastique de la condition nécessaire et suffisante, $\mu\gamma < \delta\alpha$, pour l'existence de la solution stationnaire strictement positive de l'équation de Lotka-Volterra pour le modèle de proie-prédateur avec les termes logistiques.

La population totale de l'espèce i sur le territoire D, qui est essentielle du point de vue biologique, est exprimée exactement par la norme $\|N_i\|_{L^1(D)}$. Mais pour les traitements mathématiques il nous est commode de considérer N_i comme élément de $L^2(D)$; il est évident que la norme $\|N_i\|_{L^1(D)}$ est majorée par $\sqrt{mes(D)}\|N_i\|_{L^2(D)}$.

3. Démonstration de l'existence d'une mesure invariante.

La démonstration du théorème 2.1 se base sur l'application du théorème de Krylov-Bogoliubov, qui, à son tour, s'appuie sur une estimation de la solution des équations (2.1)-(2.2) avec les conditions aux limites (2.3) et les conditions initiales et utilise également les idées du théorème de Khas'minskii (voir [9]). Comme l'estimation de la solution qu'on va utiliser est assez complexe, en renvoyant sa démonstration au paragraphe suivant, dans le présent paragraphe on va démontrer le théorème 2.1 en admettant le résultat de l'estimation.

Pour formuler ce résultat auxiliaire, on pose

$$\Phi_0(N) = \sum_{i=1}^{2} \big(\|N_i\|^2_{L^2(D)} + \|\log N_i\|_{L^1(D)}\big), \tag{3.1}$$

$$\Phi_1(N) = \sum_{i=1}^{2} \big(\|\nabla N_i\|^2_{L^2(D)} + \|\nabla \log N_i\|^2_{L^2(D)}\big), \tag{3.2}$$

$$\Xi(D) = \{\, N \in L^4(D; \boldsymbol{R}^2) \,|\, N_i > 0,\ \log N_i \in L^1(D),\ i = 1, 2 \,\}. \tag{3.3}$$

On a alors le lemme suivant.

LEMME 3.1. *Il existe une fonction $G : \Xi(D) \to \boldsymbol{R}$ telle que, en posant*

$$A(c) = \sup \{\, G(N) \,|\, N \in \Xi(D),\ \Phi_0(N) \geq c \,\}, \tag{3.4}$$

on ait

$$\sup_{N \in \Xi(D)} G(N) = A(0) < \infty, \tag{3.5}$$

$$A(c) \to -\infty \qquad \text{pour} \quad c \to +\infty, \tag{3.6}$$

et que, si $N(t, \cdot) = (N_1(t, \cdot), N_2(t, \cdot))$ est la solution du problème (2.1)-(2.3) *avec la condition initiale $N(0, \cdot) = N_0 \in \Xi(D)$, alors on ait*

$$\bar{C}_0 \boldsymbol{E} \Phi_0(N(t, \cdot)) + \bar{C}_1 \int_0^t \boldsymbol{E} \Phi_1(N(t', \cdot)) dt' \leq \bar{\varphi}(N_0) + \int_0^t \boldsymbol{E} G(N(t', \cdot)) dt' \tag{3.7}$$

avec deux constantes strictement positives $\bar{C}_0$, $\bar{C}_1$ et une valeur réelle finie $\bar{\varphi}(N_0)$ (dépendante de $N_0 \in \Xi(D)$).

En renvoyant la démonstration de ce lemme au paragraphe 4, on expose ici la démonstration du théorème 2.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. Comme le premier membre de (3.7) est non-négatif, on a

$$0 \leq \bar{\varphi}(N_0) + tA(0) + A(c) \int_0^t \boldsymbol{P}\big(\{\Phi_0(N(t', \cdot)) \geq c\}\big) dt';$$

en particulier pour c tel que $A(c)<0$, on a

$$\frac{1}{t}\int_0^t \boldsymbol{P}\big(\{\Phi_0(N(t',\cdot))\geq c\}\big)dt' \leq \frac{1}{-A(c)}\big(A(0)+\frac{\bar{\varphi}(N_0)}{t}\big). \tag{3.8}$$

D'autre part, de (3.7) on déduit immédiatement que

$$\bar{C}_1\frac{1}{t}\int_0^t \boldsymbol{E}\Phi_1(N(t',\cdot))dt' \leq A(0)+\frac{\bar{\varphi}(N_0)}{t}. \tag{3.9}$$

De (3.8)-(3.9) et de (3.6) on déduit

$$\frac{1}{t}\int_0^t \boldsymbol{P}\big(\{\Phi_0(N(t',\cdot))+\Phi_1(N(t',\cdot))\leq c\}\big)dt' \geq 1-\varepsilon(c) \quad \forall t\geq 1 \tag{3.10}$$

avec une fonction décroissante $\varepsilon(c)$ telle que

$$\varepsilon(c)\to 0 \quad \text{pour} \quad c\to\infty.$$

Pour $N_0\in\Xi(D)$ et un ensemble borélien Γ de $L^2(D;\boldsymbol{R}^2)\times L^1(D;\boldsymbol{R}^2)$, on pose

$$P_t(N_0;\Gamma)=\boldsymbol{P}\big(\,\{(N_1(t,\cdot),N_2(t,\cdot),\log N_1(t,\cdot),\log N_2(t,\cdot))\in\Gamma\}\,\big),$$

où $N(t,\cdot)$ est la solution du problème (2.1)-(2.3) avec la condition initiale

$$N_i(0,x)=N_{0,i}(x), \quad i=1,2.$$

On définit alors

$$\nu_T(\Gamma)=\frac{1}{T}\int_0^T P_t(N_0;\Gamma)dt.$$

De la définition de $\Phi_0(\cdot)$ et $\Phi_1(\cdot)$ (voir (3.1) et (3.2)) on déduit qu'on a

$$\nu_T(\{N\in\Xi(D)|\|N\|^2_{H^1(D;\boldsymbol{R}^2)}+\sum_{i=1}^2\|\log N_i\|^2_{H^1(D;\boldsymbol{R})}\leq c\})\geq 1-\tilde{\varepsilon}(c) \quad \forall T\geq 1$$

avec une fonction décroissante $\tilde{\varepsilon}(\cdot)$ telle que

$$\tilde{\varepsilon}(c)\to 0 \quad \text{pour} \quad c\to\infty.$$

C'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $C_{(\varepsilon)}$ tel que

$$\text{(3.11)} \quad \nu_T(\{N \in \Xi(D) | \|N\|^2_{H^1(D;\boldsymbol{R}^2)} + \\ + \sum_{i=1}^{2} \|\log N_i\|^2_{H^1(D;\boldsymbol{R})} \le C_{(\varepsilon)}\}) \ge 1 - \varepsilon, \quad \forall T \ge 1.$$

On rappelle qu'un ensemble borné dans $H^1(D;\boldsymbol{R}^2) \times H^1(D;\boldsymbol{R}^2)$ est relativement compact dans $L^2(D;\boldsymbol{R}^2) \times L^1(D;\boldsymbol{R}^2)$. Donc, compte tenu que les estimations citées ci-dessus sont relatives à la solution (N_1, N_2) des équations (2.1)-(2.2) avec la condition aux limites (2.3) et une condition initiale $N_i(0,x) = N_{0,i}(x)$, $i = 1, 2$ (pour les généralités des équations stochastiques à valeurs dans un espace de Hilbert, nous les envoyons à [3]), en vertu du théorème de Krylov-Bogoliubov ([10]) dans sa version complétée par le critère de Prokhorov (voir [2], [3]; voir aussi le théorème 1 du §1, chap. IX de [7]), on déduit de (3.11) l'existence d'une mesure invariante $\bar{\nu}$ dans $L^2(D;\boldsymbol{R}^2) \times L^1(D;\boldsymbol{R}^2)$ pour le système d'équations (2.1)-(2.2) avec la condition aux limites (2.3). Désignons par $\bar{\mu}$ et $\bar{\lambda}$ les projections de $\bar{\nu}$ sur $L^2(D;\boldsymbol{R}^2)$ et sur $L^1(D;\boldsymbol{R}^2)$ respectivement. Or, comme $\bar{\nu}$ est obtenue comme limite faible d'une suite $\{\nu_{T_k}\}_{k=1}^{\infty}$ et que

$$\nu_{T_k}\big(\{((N_1,N_2),(\Lambda_1,\Lambda_2)) \in L^2(D;\boldsymbol{R}^2) \times L^1(D;\boldsymbol{R}^2) | \Lambda_1 = \log N_1, \Lambda_2 = \log N_2\}\big) = 1,$$

on a

$$\bar{\nu}\big(\{((N_1,N_2),(\Lambda_1,\Lambda_2)) \in L^2(D;\boldsymbol{R}^2) \times L^1(D;\boldsymbol{R}^2) | \Lambda_1 = \log N_1, \Lambda_2 = \log N_2\}\big) = 1;$$

donc on a

$$\bar{\mu}(\{N_i > 0 \text{ p.p. dans } D, \ i = 1, 2\}) \ge \\ \ge \bar{\mu}(\{(\log N_1, \log N_2) \in L^1(D;\boldsymbol{R}^2)\}) = \bar{\lambda}(L^1(D;\boldsymbol{R}^2)) = 1,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.1. □

4. Démonstration du lemme 3.1.

Dans ce paragraphe on va démontrer le lemme 3.1. Pour ce faire, nous allons introduire une fonction $\varphi(N)$ et analyser la formule d'Ito appliquée à $\varphi(N)$ sous une forme convenable, ce qui nous conduira à la preuve du lemme 3.1.

Pour définir la fonction $\varphi(N)$, on commence par l'introduction de la fonction $U(N)$ pour $N \in (\boldsymbol{R}_+)^2$. On pose

$$U(N) = U(k_1, k_2, k_3, k_4; N) = k_1 N_1 + k_2 N_2 - \\ -\log N_1 - k_3 \log N_2 + k_4 {N_1}^2 + C, \tag{4.1}$$

où k_i, $i = 1, \cdots, 4$, sont des constantes strictement positives à déterminer et

$$C = C_{k_1,k_2,k_3,k_4} = 1 - \\ - \inf_{N \in (\boldsymbol{R}_+)^2} (k_1 N_1 + k_2 N_2 - \log N_1 - k_3 \log N_2 + k_4 {N_1}^2). \tag{4.2}$$

Il est évident que

$$U(N) \geq 1 \qquad \forall N \in (\boldsymbol{R}_+)^2 \tag{4.3}$$

et que, une fois déterminées les constantes strictement positives k_i, $i = 1, \cdots, 4$, on peut trouver des constantes $\bar{c}_i > 0$, $i = 1, \cdots, 5$ telles que

$$\bar{c}_1 \sum_{i=1}^{2} |\log N_i| \leq U(N) \leq \bar{c}_2 + \bar{c}_3 \sum_{i=1}^{2} |\log N_i| + \bar{c}_4 \sum_{i=1}^{2} N_i + \bar{c}_5 {N_1}^2 \\ \forall (N_1, N_2) \in (\boldsymbol{R}_+)^2. \tag{4.4}$$

On remarque en outre que

$$\int_D U(N) dx = \|U(N)\|_{L^1(D)}.$$

On introduit maintenant

$$\varphi(N) = \frac{1}{2} \int_D \left[(h_0 \delta N_1 + \beta N_2)^2 + h_1 N_1^2 + h_2 N_2^2 \right] dx \\ + \frac{h_3}{3} \int_D N_1^3 dx + \frac{1}{2} \|U(N)\|_{L^1(D)}^2 \tag{4.5}$$

avec des constantes $h_i > 1$, $i = 0, 1, 2, 3$, à déterminer.

Pour appliquer la formule d'Ito à la fonction $\varphi(N)$, rappelons que l'on a

$$\frac{\partial \varphi(N)}{\partial N_i}(f) = \int_D \left[\vartheta_i (h_0 \delta N_1 + \beta N_2) + h_i N_i + \delta_{i1} h_3 N_1^2 \right] f dx + \int_D U(N) dx \int_D \frac{\partial U(N)}{\partial N_i} f dx,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(N)}{\partial N_i \partial N_j}(f)(g) = \int_D (\vartheta_i \vartheta_j + \delta_{ij}(h_i + 2\delta_{i1} h_3 N_1)) f g dx +$$

$$+\int_D U(N)dx\int_D \frac{\partial^2 U(N)}{\partial N_i \partial N_j} fg dx + \int_D \frac{\partial U(N)}{\partial N_j} f dx \int_D \frac{\partial U(N)}{\partial N_i} g dx,$$

$$\frac{\partial U(N)}{\partial N_1} = k_1 - \frac{1}{N_1} + 2k_4 N_1, \qquad \frac{\partial U(N)}{\partial N_2} = k_2 - \frac{k_3}{N_2},$$

$$\frac{\partial^2 U(N)}{\partial N_1^2} = \frac{1}{N_1^2} + 2k_4, \qquad \frac{\partial^2 U(N)}{\partial N_2^2} = \frac{k_3}{N_2^2}, \qquad \frac{\partial^2 U(N)}{\partial N_1 \partial N_2} = 0,$$

où

$$\vartheta_1 = h_0\delta, \qquad \vartheta_2 = \beta. \tag{4.6}$$

En appliquant la formule d'Ito à la fonction $\varphi(N)$ (pour la formule d'Ito pour les processus à valeurs dans un espace de Hilbert, voir par exemple [12]) et en intégrant par parties sur D les termes contenant l'opérateur de Laplace Δ, on obtient

$$\varphi(N(t,\cdot)) + \int_0^t F(N(t',\cdot))dt' = \varphi(N(0,\cdot)) + \tag{4.7}$$

$$+\int_0^t (G_1(N(t',\cdot)) + G_2(N(t',\cdot)) + G_3(N(t',\cdot)))dt' + \int_0^t \langle h(N(t',\cdot)), dW(t')\rangle,$$

où

$$F(N) = \kappa_1(h_0^2\delta^2 + h_1)\|\nabla N_1\|^2_{L^2(D)} + 2\kappa_1 h_3 \|\sqrt{N_1}\nabla N_1\|^2_{L^2(D)} + \tag{4.8}$$

$$+\kappa_2(\beta^2 + h_2)\|\nabla N_2\|^2_{L^2(D)} + (\kappa_1+\kappa_2)h_0\beta\delta\int_D \nabla N_1\cdot\nabla N_2 dx +$$

$$+\frac{1}{2}\|U(N)\|_{L^1(D)}(\kappa_1\|\nabla \log N_1\|^2_{L^2(D)} + 2\kappa_1 k_4\|\nabla N_1\|^2_{L^2(D)} + \kappa_2 k_3\|\nabla \log N_2\|^2_{L^2(D)}),$$

$$G_1(N) = \int_D [(-(h_0-1)\beta\delta N_1 N_2 - h_0\delta\mu N_1^2 - \beta\nu N_2^2 + h_0\alpha\delta N_1 - \gamma\beta N_2]\cdot \tag{4.9}$$

$$\cdot(h_0\delta N_1 + \beta N_2) + (h_1 + h_3 N_1)(\alpha - \beta N_2 - \mu N_1)N_1^2 + h_2(-\gamma + \delta N_1 - \nu N_2)N_2^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}(\vartheta_i\vartheta_j + \delta_{ij}(h_i + 2\delta_{1i}h_3 N_1))\rho_i\rho_j N_i N_j \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 e_m^2]dx,$$

$$(4.10)\quad G_2(N) = \|U(N)\|_{L^1(D)}\Big(\int_D AU(N)dx - \frac{1}{2}(\kappa_1\|\nabla\log N_1\|^2_{L^2(D)} + \\ + 2\kappa_1 k_4\|\nabla N_1\|^2_{L^2(D)} + \kappa_2 k_3\|\nabla\log N_2\|^2_{L^2(D)})\Big),$$

$$(4.11)\quad AU(N) = AU(k_1,k_2,k_3,k_4;N) = \\ = \frac{\partial U(N)}{\partial N_1}(\alpha - \beta N_2 - \mu N_1)N_1 + \frac{\partial U(N)}{\partial N_2}(-\gamma + \delta N_1 - \nu N_2)N_2 + \\ + \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\rho_i\rho_j}{2}N_iN_j\frac{\partial^2 U(N)}{\partial N_i\partial N_j}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 e_m^2,$$

$$(4.12)\quad G_3(N) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{2}\int_D \frac{\partial U(N)}{\partial N_i}\rho_i N_i\lambda_m e_m dx \int_D \frac{\partial U(N)}{\partial N_j}\rho_j N_j\lambda_m e_m dx,$$

$$(4.13)\quad h(N) = \sum_{i=1}^{2}[\vartheta_i(h_0\delta N_1 + \beta N_2) + h_iN_i + \delta_{i1}h_3N_1^2]\rho_iN_i + \\ + \int_D U dx\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial U(N)}{\partial N_i}\rho_iN_i.$$

La formule d'Ito appliquée à $\varphi(N)$ étant écrite, maintenant notre objectif est de montrer que la fonction $G(N) = G_1(N) + G_2(N) + G_3(N)$ vérifie les conditions (3.5)–(3.6) et que, avec un choix convenable de coefficients, on a $\bar{C}_0\Phi_0(N) \leq \varphi(N)$ et $\bar{C}_1\Phi_1(N) \leq F(N)$ ($\bar{C}_0 > 0$, $\bar{C}_1 > 0$), ce qui nous permettra de déduire de (4.7) l'inégalité (3.7); ainsi le lemme 3.1 sera démontré.

Comme la démonstration de ces propriétés est assez complexe et ses raisonnements sont quelque peu techniques, on la divise en plusieurs étapes (les lemmes 4.1–4.5 et la conclusion de la démonstration du lemme 3.1). Commençons par le lemme suivant.

LEMME 4.1. *Il existe des constantes strictement positives k_1, k_2, k_3, k_4, ε_A et δ_A telles que*

$$(4.14)\quad AU(k_1,k_2,k_3,k_4;N) \leq -\varepsilon_A \qquad \textit{pour} \quad \min(N_1, N_2, \frac{1}{N_1}, \frac{1}{N_1}) \leq \delta_A.$$

DÉMOSTRATION. En substituant les expressions de $\dfrac{\partial U(N)}{\partial N_i}$ et de $\dfrac{\partial^2 U(N)}{\partial N_i \partial N_j}$ dans (4.11), on a

$$AU(k_1,k_2,k_3,k_4;N) = -(2k_4N_1^2+k_1N_1-1)\mu N_1-(k_1\beta-k_2\delta+2k_4\beta N_1)N_1N_2+$$
$$-(k_2N_2-k_3)\nu N_2+(k_1\alpha-k_3\delta)N_1+(\beta-k_2\gamma)N_2+2k_4\big(\alpha+\frac{\rho_1^2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2e_m^2\big)N_1^2+$$
$$-\alpha+k_3\gamma+\frac{\rho_1^2+k_3\rho_2^2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2e_m^2.$$

Donc en vertu de (2.7) on a

$$AU(k_1,k_2,k_3,k_4;N) \leq \psi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N), \tag{4.15}$$

où

$$\psi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N) = -(2k_4N_1^2+k_1N_1-1)\mu N_1-(k_1\beta-k_2\delta+2k_4\beta N_1)\cdot$$
$$\cdot N_1N_2-(k_2N_2-k_3)\nu N_2+(k_1\alpha-k_3\delta)N_1+(\beta-k_2\gamma)N_2+$$
$$+2k_4\big(\alpha+K_0\frac{\rho_1^2}{2}\big)N_1^2-(\alpha-K_0\frac{\rho_1^2}{2})+k_3(\gamma+K_0\frac{\rho_2^2}{2}). \tag{4.16}$$

Comme les coefficients des termes de degré plus élevé du polynome $\psi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N)$ en N_1, N_2 sont strictement négatifs, on a

$$\psi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N) \to -\infty \qquad \text{pour} \quad |N|^2 = N_1^2+N_2^2 \to \infty; \tag{4.17}$$

en particulier, il existe deux constantes strictement positives C_{k_1,k_2,k_3,k_4} et $\varepsilon_A^{(0)}$ telles que

$$\psi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N) \leq -\varepsilon_A^{(0)} \qquad \text{si} \quad \max(N_1,N_2) \geq C_{k_1,k_2,k_3,k_4}. \tag{4.18}$$

D'autre part, on considère les fonctions

$$\Psi_1(N_1) = \psi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N_1,0), \qquad \Psi_2(N_2) = \psi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(0,N_2),$$

dont l'expression explicite est donnée par

$$\Psi_1(N_1) = -2k_4\mu N_1^3-\big(\mu k_1-2k_4\alpha-2k_4K_0\frac{\rho_1^2}{2}\big)N_1^2+$$
$$+(\mu-k_3\delta+k_1\alpha)N_1-\alpha+K_0\frac{\rho_1^2}{2}+k_3(\gamma+K_0\frac{\rho_2^2}{2}),$$
$$\Psi_2(N_2) = -\nu k_2N_2^2+(k_3\nu+\beta-k_2\gamma)N_2-\alpha+K_0\frac{\rho_1^2}{2}+k_3(\gamma+K_0\frac{\rho_2^2}{2}).$$

Pour la fonction $\Psi_1(N_1)$ on a le lemme suivant.

LEMME 4.2. *Il existe des constantes strictement positives k_1, k_3, k_4 telles que*

$$\sup_{N_1>0} \Psi_1(N_1) < 0. \tag{4.19}$$

DÉMOSTRATION. Posons

$$Q_{k_4}(N_1) = -2k_4\mu N_1^3 + \big(2k_4\alpha + 2k_4K_0\frac{\rho_1^2}{2}\big)N_1^2,$$

$$Q_{k_1,k_3}(N_1) = \Psi_1(N_1) - Q_{k_4}(N_1).$$

On remarque que

$$\sup_{N_1>0} Q_{k_4}(N_1) = 2k_4 \sup_{N_1>0} \big[-\mu N_1^3 + \big(\alpha + K_0\frac{\rho_1^2}{2}\big)N_1^2\big].$$

Donc pour que (4.19) soit vérifiée, il suffit que

$$\sup_{N_1>0} Q_{k_1,k_3}(N_1) < 0$$

et que k_4 soit choisie suffisamment petite. Or, de l'expression de $Q_{k_1,k_3}(N_1)$ on déduit que cette condition soit vérifiée si

$$0 < k_3 < \frac{\alpha - K_0\frac{\rho_1^2}{2}}{\gamma + K_0\frac{\rho_2^2}{2}}, \qquad k_3\delta > k_1\alpha + \mu.$$

En vertu de (2.8), on peut choisir deux constantes strictement positives k_3 et k_1, qui satisfassent à cette condition. Le lemme 4.2 est démontré. □

CONTINUATION DE LA DÉMONSTRATION DU LEMME 4.1. Compte tenu de la continuité de la fonction $\psi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N)$ et de la relation

$$\lim_{N_1\to\infty} \Psi_1(N_1) = -\infty,$$

du lemme 4.2 et de la définition de $\Psi_1(N_1)$ on déduit qu'il existe deux constantes strictement positives $\varepsilon_A^{(1)}$ et $\delta_A^{(1)}$ telles qu'avec les constantes k_1, k_3, k_4 choisies dans le lemme 4.2 on ait

$$\psi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N_1,N_2) \le -\varepsilon_A^{(1)} \qquad \text{pour} \quad N_2 \le \delta_A^{(1)}.$$

En ce qui concerne $\Psi_2(N_2)$, de son expression on déduit qu'en choisissant k_2 de sorte que

$$k_2 > \frac{k_3 \nu + \beta}{\gamma},$$

on a

$$\Psi_2(N_2) \leq -\alpha + K_0 \frac{\rho_1^2}{2} + k_3 (\gamma + K_0 \frac{\rho_2^2}{2}) < 0;$$

ici la dernière inégalité est due au choix de k_3 fait dans le lemme 4.2.

En adjoignant les inégalités obtenues, on obtient (4.14). □

LEMME 4.3. *Avec les constantes k_1, k_2, k_3, k_4 choisies dans le lemme* 4.1, *on a*

$$\sup_{N \in \Xi(D)} G_2(N) < \infty, \tag{4.20}$$

$$\sup \{ G_2(N) \mid N \in \Xi(D), \int_D U(N) dx \geq c \} \to -\infty \quad \textit{pour} \quad c \to +\infty. \tag{4.21}$$

DÉMOSTRATION. De l'expression de $\psi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N)$ et du lemme 4.1 on déduit que

$$\sup_{N \in (\boldsymbol{R}_+)^2} \psi_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N) \equiv \bar{\Gamma} < \infty, \tag{4.22}$$

d'où, compte tenu de (4.15), il résulte que

$$\sup_{N \in \Xi(D)} \tilde{a}_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N) < \infty, \tag{4.23}$$

où

$$\tilde{a}_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N) = \int_D AU(k_1, k_2, k_3, k_4; N) dx + \tag{4.24}$$

$$-\frac{1}{2} (\kappa_1 \|\nabla \log N_1\|^2_{L^2(D)} + 2\kappa_1 k_4 \|\nabla N_1\|^2_{L^2(D)} + \kappa_2 k_3 \|\nabla \log N_2\|^2_{L^2(D)}).$$

Etant établie (4.23), pour démontrer (4.20) et (4.21), on considère séparément les deux cas

i) $$\int_D AU(k_1, k_2, k_3, k_4; N) dx \leq -\frac{\varepsilon_A \, mes(D)}{2},$$

$ii)$
$$\int_D AU(k_1,k_2,k_3,k_4;N)dx > -\frac{\varepsilon_A\, mes(D)}{2}.$$

Dans le cas $i)$, de la définition de $G_2(N)$ on déduit que

$$G_2(N) \le \int_D U(k_1,k_2,k_3,k_4;N)dx \int_D AU(k_1,k_2,k_3,k_4;N)dx \le$$
$$\le -\frac{\varepsilon_A\, mes(D)}{2}\int_D U(k_1,k_2,k_3,k_4;N)dx,$$

ce qui entraîne (4.20)-(4.21).

Dans le cas $ii)$, en utilisant la notation $\bar{\Gamma}$ donnée dans (4.22) et en posant $L_A = 2|\log\,\delta_A|$, grâce à (4.14) on obtient

$$-\frac{\varepsilon_A}{2}\, mes(D) \le \int_{\{\sum_{i=1}^2 |\log N_i| > L_A\}} AU(k_1,k_2,k_3,k_4;N)dx +$$
$$+ \int_{\{\sum_{i=1}^2 |\log N_i| \le L_A\}} AU(k_1,k_2,k_3,k_4;N)dx \le$$
$$\le -\varepsilon_A\, mes\{\sum_{i=1}^2 |\log N_i| > L_A\} + \bar{\Gamma}\, mes\{\sum_{i=1}^2 |\log N_i| \le L_A\} \le$$
$$\le -\varepsilon_A\, mes(D) + \big(\bar{\Gamma}+\varepsilon_A\big)\, mes\{\sum_{i=1}^2 |\log N_i| \le L_A\},$$

d'où on déduit l'inégalité

$$mes\{\sum_{i=1}^2 |\log N_i| \le L_A\} \ge \frac{\varepsilon_A\, mes(D)}{2(\varepsilon_A+\bar{\Gamma})} > 0.$$

En vertu de l'inégalité de Poincaré il existe une constante C' qui dépend de D et de $\dfrac{\varepsilon_A\, mes(D)}{2(\varepsilon_A+\bar{\Gamma})}$ et satisfait à l'inégalité

$$\sum_{i=1}^2 \|\log N_i\|_{L^1(D)} - mes(D)\, L_A \le$$
$$\le \int_D \Big(\sum_{i=1}^2 |\log N_i| - L_A\Big)^+ dx \le C' \sum_{i=1}^2 \|\nabla \log N_i\|_{L^2(D)}.$$

Donc, compte tenu de l'inégalité

$$\int_D AU(k_1, k_2, k_3, k_4; N)dx \le \bar{\Gamma}\, mes(D),$$

on a

$$\tilde{a}_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N) \to -\infty \qquad \text{pour } \{\sum_{i=1}^{2} \|\log N_i\|_{L^1(D)} \to \infty \tag{4.25}$$

(pour $\tilde{a}_{k_1,k_2,k_3,k_4}(N)$ voir (4.24)).

On remarque que dans le cas où $\sum_{i=1}^{2} |N_i|$ est suffisamment grand, grâce à (4.17) l'inégalité du cas i) est vérifiée. Donc, en rappelant (4.4) et (4.23), des considérations sur le cas i) et de la relation (4.25) on déduit (4.20) et (4.21). Le lemme est démontré. □

LEMME 4.4. *Il est possible de choisir $h_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3$ de telle sorte que*

$$G_1(N) + G_3(N) \le c_1 + c_2 \sum_{i=1}^{2} \|N_i\|^2_{L^2(D)} - c_3\|N_2\|^3_{L^2(D)} - c_4\|N_1\|^4_{L^2(D)}, \tag{4.26}$$

$$\Phi_1(N) \le c_5 F(N) \tag{4.27}$$

avec des constantes strictement positives c_i, $i = 1, \cdots, 5$.

DÉMOSTRATION. Pour démontrer (4.26), prenons $h_0 > 1$ et $h_2 = (h_0 - 1)\beta^2$. On a alors

$$h_2\delta N_1 N_2^2 \le (h_0 - 1)\beta\delta N_1 N_2(\beta N_2 + h_0\delta N_1).$$

D'autre part

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \int_D (\vartheta_i\vartheta_j + \delta_{ij}(h_i + 2\delta_{1i}h_3N_1))\rho_i\rho_j N_i N_j \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 e_m^2 dx \le$$

$$\le \frac{K_0}{2}(h_0^2\delta^2 + h_1)\rho_1^2 \int_D N_1^2 dx + K_0 h_3 \rho_1^2 \int_D N_1^3 dx +$$

$$+ \frac{K_0}{2}(\beta^2 + h_2)\rho_2^2 \int_D N_2^2 dx + K_0 h_0 \delta\beta\rho_1\rho_2 \int_D N_1 N_2 dx,$$

où ϑ_i, $i=1,2$, sont comme dans (4.6). Donc on a

$$G_1(N) \leq \big(\frac{K_0}{2}(h_0^2\delta^2+h_1)\rho_1^2+h_0^2\delta^2\alpha+h_1\alpha\big)\cdot \tag{4.28}$$

$$\cdot\int_D N_1^2dx+(K_0h_0\delta\beta\rho_1\rho_2+h_0\alpha\beta\delta)\int_D N_1N_2dx+$$

$$+\frac{K_0}{2}(\beta^2+h_2)\rho_2^2\int_D N_2^2dx+(K_0h_3\rho_1^2+h_3\alpha-h_0^2\delta^2\mu)\int_D N_1^3dx+$$

$$-(\beta^2\nu+h_2\nu)\int_D N_2^3dx-h_3\mu\int_D N_1^4dx.$$

D'autre part, on a

$$\int_D \frac{\partial U}{\partial N_i}\rho_iN_i\lambda_me_mdx\int_D \frac{\partial U}{\partial N_j}\rho_jN_j\lambda_me_mdx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_D \lambda_m^2e_m^2dx\Big[\rho_i^2\int_D\big(\frac{\partial U}{\partial N_i}N_i\big)^2dx+\rho_j^2\int_D\big(\frac{\partial U}{\partial N_j}N_j\big)^2dx\Big],$$

ou

$$\sum_{i,j=1}^2\int_D \frac{\partial U}{\partial N_i}\rho_iN_i\lambda_me_mdx\int_D \frac{\partial U}{\partial N_j}\rho_jN_j\lambda_me_mdx \leq$$

$$\leq 2\int_D \lambda_m^2e_m^2dx\Big[\rho_1^2\int_D(2k_4N_1^2+k_1N_1-1)^2dx+\rho_2^2\int_D(k_2N_2-k_3)^2dx\Big].$$

En rappelant (4.12), on obtient

$$G_3(N) \leq 2\,mes(D)K_0\Big[4k_4^2\rho_1^2\int_D N_1^4dx+4k_1k_4\rho_1^2\int_D N_1^3dx+ \tag{4.29}$$

$$+(k_1^2-4k_4)\rho_1^2\int_D N_1^2dx-2k_1\rho_1^2\int_D N_1dx+\rho_1^2\,mes(D)+$$

$$+k_2^2\rho_2^2\int_D N_2^2dx-2k_2k_3\rho_2^2\int_D N_2dx+k_3^2\rho_2^2\,mes(D)\Big].$$

En utlisant l'inégalité de Young $ab \leq \dfrac{1}{2c}a^2 + \dfrac{c}{2}b^2$ à plusieurs reprises avec des coefficients convenables c ainsi que les inégalités

$$\|N_i\|^3_{L^2(D)} \leq (mes(D))^{1/2} \int\limits_D N_i^3 dx, \qquad \|N_i\|^4_{L^2(D)} \leq mes(D) \int\limits_D N_i^4 dx$$

et en choisissant un nombre h_3 suffisamment grand, de (4.28) et (4.29) on déduit (4.26).

On remarque que dans la démonstration de (4.26) on n'a pas déterminé la constante h_1. Donc on peut choisir un nombre h_1 suffisamment grand de telle sorte que

$$(\kappa_1 + \kappa_2)h_0\beta\delta < 2\sqrt{\kappa_1(h_0^2\delta^2 + h_1)\kappa_2(\beta^2 + h_2)},$$

ce qui, en rappelant la définition de $\Phi_1(N)$ et de $F(N)$ et de la relation (4.3), implique (4.27). □

LEMME 4.5. *Si on pose*

$$G(N) = G_1(N) + G_2(N) + G_3(N)$$

($G_i(N)$, $i = 1,2,3$, étant définies dans (4.9), (4.10), (4.12)*), alors $G(N)$ vérifie les conditions* (3.5)-(3.6).

DÉMOSTRATION. De (4.26) on déduit que

$$\sup_{N\in\Xi(D)} (G_1(N) + G_3(N)) < \infty, \tag{4.30}$$

$$\sup \{G_1(N) + G_3(N) \,|\, N \in \Xi(D),\ \sum_{i=1}^{2} \|N_i\|^2_{L^2(D)} \geq c\} \to -\infty \quad \text{pour} \quad c \to +\infty. \tag{4.31}$$

Du lemme 4.3 (voir aussi (4.4)) et des relations (3.1), (4.30), (4.31), on déduit (3.5) et (3.6). □

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1. On remarque que par la propriété des martingales, on a

$$\boldsymbol{E} \int\limits_0^t \langle h(N(t',\cdot)), dW(t')\rangle = 0. \tag{4.32}$$

D'autre part, les définitions de $\Phi_0(N)$, $\varphi(N)$, $U(N)$ (voir aussi (4.3), (4.4)) impliquent qu'il existe une constante strictement positive $\bar{C}_0$ telle que

$$\bar{C}_0\Phi_0(N) \leq \varphi(N) \quad \forall N \in \Xi(D). \tag{4.33}$$

Donc, en posant $\bar{\varphi}(N_0) = \varphi(N_0)$ et $\bar{C}_1 = \dfrac{1}{c_5}$ (avec c_5 figurant dans (4.27)), des relations (4.7), (4.27), (4.33) on déduit (3.7).

Cela étant, le lemme 3.1 résulte du lemme 4.5. $\square$

REFERENCES

[1] S. Chessa - H. Fujita Yashima, *Equazione stocastica di dinamica di popolazioni di tipo preda-predatore*. Boll. U, M. I., Serie VIII, vol. **5** - B (2002), pp. 789–804.

[2] G. Da Prato, *An introduction to infinite dimensional analysis*. Scuola Norm. Sup. Pisa, 2001.

[3] G. Da Prato - J. Zabczyk, *Ergodicity for infinite dimensional systems*. Cambridge Univ. Press, 1996.

[4] H. Fujita Yashima, *Equation stochastique de dynamique de populations du type proie-prédateur avec diffusion dans un territoire*. Novi Sad J. Math., vol. **33** (2003), pp. 31–52.

[5] H. Fujita Yashima - S. Hamdous, *Mesure invariante pour l'équation stochastique d'un modèle de compétition limitée entre des espèces avec une diffusion spatiale*. Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie **II**, Tomo 56 (2007), pp. 79–89.

[6] B. Gabutti - A. Negro, *Some results on asymptotic behaviour of the Volterra-lotka diffusion equations*. Rend. Sem. Mat. Univ. Poli. Torino, vol. **36** (1977/1978), pp. 403–414.

[7] I. I. Guikhman - A. V. Skorokhod, *Introduction à la théorie des processus aléatoires* (traduit du russe). Mir (Moscou), 1980.

[8] S. Hamdous - H. Fujita Yashima, *Mesure invariante pour le système d'équations stochastiques du modèle de compétition avec diffusion spatiale*. Rend. Sem. Mat. Padova, vol. **122** (2009), pp. 85–98.

[9] R. Z. Has'minskij, *Stochastic stability of differential equations* . (translated from Russian). Sijthoff Noordhoff, Alphe ann den Rijn, 1980.

[10] N. Kryloff - N. Bogoliuboff, *La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire*. Annals Math., vol. **38** (1937), pp. 65–113.

[11] A. Negro - B. Gabutti, *A fractional steps method for the Volterra-lotka diffusion equations*. Rend. Sem. Mat. Univ. Poli. Torino, vol. **35** (1976/1977), pp. 373–389.

[12] E. Pardoux, *Intégrales stochastiques hilbertiennes*. Publication interne Univ. Paris - Dauphine, 1976.

[13] R. Rudnicki, *Long-time behaviour of a stochastic prey-predator model*. Stoch. Proc. Appl., vol. **108** (2003), pp. 93–107.

[14] E. Tornatore, *Stochastic equation of population dynamic with diffusion on a domain*. Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie **II**, Tomo 52 (2003), pp. 15–29.

[15] E. Tornatore - L. Manca - H. Fujita Yashima, *Comportamento asintotico della soluzione del sistema di equazioni stocastiche per due specie in competizione*. Rend. Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. (Sci. Mat. Appl.). vol. **136/137** (2002/03), pp. 151–183.

[16] V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 luglio 2009.