

Opérateurs invariants sur un immeuble affine de type \tilde{B}_n ($n \geq 3$)

FERDAOUS KELLIL (*) - GUY ROUSSEAU (**)

RÉSUMÉ - On considère un immeuble \mathcal{A} de type \tilde{B}_n ($n \geq 3$), différents sous-ensembles \mathcal{S}' de l'ensemble \mathcal{S} des sommets de \mathcal{A} et un groupe G d'automorphismes de \mathcal{A} , fortement transitif sur \mathcal{A} en respectant les types. On montre que l'algèbre des opérateurs G -invariants agissant sur l'espace des fonctions sur \mathcal{S}' n'est pas commutative (contrairement aux résultats classiques) et on donne ses générateurs. On explicite également la structure de certaines sous-algèbres commutatives.

ABSTRACT - We consider a building \mathcal{A} of type \tilde{B}_n ($n \geq 3$), different subsets \mathcal{S}' of the set \mathcal{S} of vertices in \mathcal{A} and an automorphism group G strongly transitive and type preserving on \mathcal{A} . We prove that the algebra of G -invariant operators acting on the space of functions on \mathcal{S}' is not commutative (contrarily to the classical results) and we give its generators. We give also the precise structure of some commutative subalgebras

Introduction

Soit \mathcal{A} un immeuble épais localement fini et \mathcal{S}' un sous-ensemble de l'ensemble \mathcal{S} de ses sommets. On suppose qu'il existe un groupe G d'automorphismes de \mathcal{A} qui respecte les types et agit "fortement transitivement" sur \mathcal{A} . Un opérateur K est une fonction "localement finie" sur $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'$. Ces opérateurs forment une algèbre qui agit sur l'espace des fonctions sur \mathcal{S}' . On s'intéresse à l'algèbre \mathcal{O}' des opérateurs G -invariants

(*) Indirizzo dell'A.: Département de Mathématiques, Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir (ISIMM), Université de Monastir, 5000 Monastir Tunisie.

E-mail: kelifferdaous@yahoo.fr

(**) Indirizzo dell'A.: Institut Élie Cartan, UMR 7502, Nancy-Université, CNRS, BP 70239, 54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex, France.

E-mail: Guy.Rousseau@iecn.u-nancy.fr

i.e. vérifiant : $K(gu, gv) = K(u, v)$, $\forall g \in G$, $\forall u, v \in S'$ (*cf.* préliminaires). Ce point de vue a été adopté dans plusieurs articles antérieurs [C 01], [CM 94], [CW 04], [GL 99], [MZ 00] et [MZ 02].

Ce travail est une suite logique de notre étude précédente [K-R 07] qui traite le cas d'un immeuble de type \tilde{A}_2 ou \tilde{B}_2 . On s'intéresse à des cas non classiques, c'est à dire non couverts par les résultats d'Ichiro Satake [S 63] qui affirment que \mathcal{O}' est souvent commutative.

Plus précisément on se place dans le cas d'un immeuble Δ , épais localement fini, de type \tilde{B}_n ($n \geq 3$). D'après les travaux de Jacques Tits (*cf.* [T 78], [R 89; corollary 10.25] ou [W 09; chap. 27]) un tel immeuble est l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe G quasi-simple simplement connexe sur un corps local non archimédien \mathbb{K} . Ce groupe G agit fortement transitivement sur Δ en respectant les types. Si on remplace G par son groupe adjoint G^* , alors celui-ci permute les deux types spéciaux (0 et 1) de sommets [T 78; 2.5 p. 47]. On n'utilisera ci-dessous que les propriétés de transitivité de G et G^* .

Après une première partie consacrée aux résultats généraux, on s'intéresse, dans la seconde partie, aux sommets spéciaux (donc de type 0 ou 1). Sans surprise l'algèbre \mathcal{O}_0 (resp. \mathcal{O}_1) des opérateurs sur l'ensemble S_0 (resp. S_1) des sommets de type 0 (resp. 1) invariants par G est commutative. Soit \mathcal{O} (resp. \mathcal{O}^*) l'algèbre des opérateurs sur $S_0 \cup S_1$ invariants par le groupe G (resp. G^*). On montre que \mathcal{O} n'est pas commutative et, grâce à une filtration sur cette algèbre, on en détermine des générateurs (théorème 2.6). On explicite complètement la structure des algèbres commutatives \mathcal{O}_0 , \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}^* (théorèmes 2.7 et 2.9), en particulier \mathcal{O}^* est une algèbre de polynômes. On en déduit aussi la structure explicite de l'algèbre \mathcal{O} (remarque 2.8).

Dans la partie 3, on étudie l'algèbre \mathcal{O}^n (resp. \mathcal{O}^{n*}) des opérateurs sur l'ensemble S_n des sommets de type n de Δ invariants par G (resp. G^*). C'est techniquement plus difficile. On trouve cependant des générateurs de l'algèbre non commutative \mathcal{O}^n (théorème 3.8) et on prouve que l'algèbre \mathcal{O}^{n*} est une algèbre de polynômes (théorème 3.10).

Enfin dans une dernière partie, on compare ces résultats avec ceux que l'on peut déduire des travaux classiques d'Ichiro Satake [S 63].

1. Préliminaires :

1.1 – Complexes de chambres

Un *complexe simplicial* d'ensemble de sommets S est un ensemble X de parties finies de S qu'on appelle *simplexes (facettes)* tel que :

1. Chaque singleton $\{x\}$ pour x dans S est un simplexe.
2. Chaque partie F' d'un simplexe F est un simplexe, une telle partie est appelée *face* du simplexe initial. La *codimension* de F' (dans F) est alors le cardinal de $F \setminus F'$.

Un *morphisme simplicial* d'un complexe X dans Y est une application f de l'ensemble des sommets de X dans l'ensemble des sommets de Y qui envoie simplexe sur simplexe. Si de plus f est bijective et f^{-1} est un morphisme simplicial on parle d'*isomorphisme simplicial*. Dans le cas où l'ensemble des sommets de X est une partie de l'ensemble des sommets de Y et tout simplexe de X est un simplexe de Y , on dit que X est un *sous-complexe* de Y . Alors X est un complexe simplicial à part entière.

Un complexe simplicial est un *complexe de chambres* si tout simplexe est contenu dans un simplexe maximal (chambre) et si pour toute paire $\{c, c'\}$ de chambres il existe une suite appelée *galerie* $c = c_1, c_2, \dots, c_m = c'$ de chambres consécutivement adjacentes (*i.e.* telles que $\forall i, 1 \leq i \leq m-1, c_i$ et c_{i+1} ont un simplexe de codimension 1 (*cloison*) en commun). Alors toutes les chambres ont le même nombre $n+1$ de sommets, le nombre n est appelé le *rang* du complexe.

1.2 – Complexes de Coxeter

On appelle *groupe de réflexions affine essentiel* un groupe W^a agissant de manière affine sur un espace vectoriel euclidien V de dimension n tel qu'il existe un ensemble \mathcal{H} d'hyperplans affines (appelés murs) vérifiant :

1. W^a stabilise l'ensemble de ces hyperplans ;
2. W^a est engendré par les réflexions orthogonales r_H pour $H \in \mathcal{H}$;
3. il existe un ensemble fini Φ d'éléments non nuls du dual V^* engendrant V^* tel que \mathcal{H} est l'ensemble des hyperplans $H_{\alpha,k}$ d'équation $\alpha(v) + k = 0$ pour $\alpha \in \Phi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On peut en fait montrer que Φ est alors un système de racines et W^a son groupe de Weyl affine, *cf.* [B 68].

À chaque point x on associe sa facette qui est l'intersection des demi-appartements $D_{\alpha,k}$ (d'équation $\alpha(v) + k \geq 0$ pour $\alpha \in \Phi$ et $k \in \mathbb{Z}$) qui la contiennent. Une facette minimale est réduite à un sommet; c'est l'intersection de n murs $H_{\alpha,k}$ associés à des α indépendants. Les facettes maximales appelées chambres, sont les adhérences des composantes connexes de V privé de la réunion de tous les murs.

Une facette est l'enveloppe convexe des sommets qu'elle contient.

L'*enclos* d'une partie Ω de V est l'intersection des demi-appartements contenant Ω , c'est une partie convexe de V . La partie Ω est dite *close* si elle est égale à son enclos.

On considère uniquement le cas où l'action de W sur V est irréductible. Alors toute facette est un simplexe : les sommets qu'elle contient sont affinement indépendants. On associe à ce groupe de réflexions un complexe simplicial appelé *complexe de Coxeter affine* de type W^a dont les sommets sont les sommets de V et les simplexes les ensembles de sommets d'une facette de V . Ce complexe est un complexe de chambres de rang n . Le groupe W^a induit un groupe d'automorphismes simpliciaux que l'on appelle le groupe de Weyl de ce complexe. Un sommet $a \in V$ est dit *spécial* pour W^a si pour tout hyperplan $H \in \mathcal{H}$, il existe un hyperplan $H' \in \mathcal{H}$ parallèle à H et tel que $a \in H'$.

1.3 – Immeubles

Un *immeuble* de type W^a est un complexe simplicial \mathcal{A} qui peut être recouvert par une famille de sous-complexes appelés *appartements* et vérifiant :

1. chaque appartement est un complexe de Coxeter de type W^a ;
2. deux simplexes quelconques de \mathcal{A} sont toujours contenus dans un même appartement ;
3. Si A et A' sont deux appartements contenant une chambre c , il existe un isomorphisme de A dans A' fixant tous les simplexes de A et A' en commun.

Un immeuble est un complexe de chambres. Il existe une application τ de \mathcal{A} dans $\{0, 1, \dots, n\}$ qui à chaque sommet associe son *type* et dont la restriction à chaque simplexe est injective. Une cloison F est dite de type i si $\tau(F) = \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\}$; la *valence* $v(F)$ de cette cloison est le nombre de chambres la contenant, elle ne dépend en général que du type $\tau(F)$. On dit que l'immeuble est *épais* si $v(F) \geq 3$ pour toute cloison F . Dans la suite on note $q_i + 1$ la valence d'une cloison de type i ; c'est un nombre fini si l'immeuble est localement fini.

Un *automorphisme* de l'immeuble \mathcal{A} est un automorphisme simplicial qui envoie appartement sur appartement. On dit qu'un automorphisme φ de \mathcal{A} *respecte les types* si et seulement si pour toute facette F contenue dans un appartement A et pour tout $w \in W(A)$ tel que $\varphi(F) \subset A$ et $w\varphi(F) = F$, alors $w\varphi$ stabilise toute face de F .

Un groupe G d'automorphismes de l'immeuble Δ agit *fortement transitivement* sur Δ s'il est transitif sur l'ensemble \mathcal{A} des appartements de Δ et si pour tout $A \in \mathcal{A}$ les trois conditions ci-dessous pour une paire (C, C') de chambre de A sont équivalentes :

1. C et C' sont conjuguées par le groupe de Weyl $W(A)$ de A .
2. C et C' sont conjuguées par le stabilisateur $N_G(A)$ de A dans G .
3. C et C' sont conjuguées par G (comme chambres de Δ).

Le groupe G agit *très fortement transitivement* sur Δ si le sous-groupe G_0 de G formé des éléments conservant les types agit transitivement sur les paires (A, C) où C est une chambre de l'appartement A .

Soit \mathcal{S}' un sous-ensemble de l'ensemble \mathcal{S} des sommets d'un immeuble. Un opérateur K sur \mathcal{S}' est une fonction sur $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'$. L'opérateur est dit *localement fini* si pour tout $u \in \mathcal{S}'$, $\{v \in \mathcal{S}' / K(u, v) \neq 0\}$ est fini. Le produit de deux tels opérateurs K, K' est alors donné par $K * K'(s, t) = \sum_u K(s, u)K'(u, t)$. Ces opérateurs localement finis forment une algèbre qui agit sur l'espace des fonctions sur \mathcal{S}' par $(K * f)(s) = \sum_u K(s, u)f(u)$. L'opérateur est dit *G -invariant* par un groupe G d'automorphismes si $K(gu, gv) = K(u, v)$, $\forall g \in G, \forall u, v \in \mathcal{S}'$. Si on suppose G transitif sur \mathcal{S}' alors un tel opérateur s'identifie à une fonction à support fini sur G/K_s où K_s est le fixateur dans G d'un sommet s de \mathcal{S}' .

On considérera dans la suite des immeubles "géométriques" de type W^a dans lesquels un simplexe est remplacé par son "enveloppe convexe". Alors l'appartement "géométrique" associé à un appartement est isomorphe à l'espace V sur lequel W agit (comme en 1.2). L'intersection de deux appartements est une partie close de chacun d'eux. L'immeuble \mathcal{I} est muni d'une métrique qui induit la métrique euclidienne sur chaque appartement et les isomorphismes entre appartements sont des isométries. De même tout automorphisme de \mathcal{I} agit par isométrie.

1.4 – Immeubles de type \tilde{B}_n

Plus précisément dans ce papier on va regarder le cas particulier d'un immeuble localement fini épais de type $\tilde{B}_n (n \geq 3)$:

Nous prendrons pour V l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) et du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $R = \{\pm e_i (1 \leq i \leq n), \pm e_i \pm e_j (1 \leq i < j \leq n)\}$ un système de racines réduit et irréductible dans V et $B = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de R où, pour

$1 \leq i \leq n-1$, $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ et pour $i = n$, $\alpha_n = e_n$. Comme R est irréductible, il existe une plus grande racine $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \cdots + 2\alpha_n = e_1 + e_2$. On a $\langle \tilde{\alpha}, \alpha_i \rangle = 0$ pour $i \neq 2$ et $\langle \tilde{\alpha}, \alpha_2 \rangle = 1$.

La formule $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ donne pour le système R^\vee des coracines l'ensemble des vecteurs $\pm 2e_i (1 \leq i \leq n)$, $\pm e_i \pm e_j (1 \leq i < j \leq n)$. Comme R est réduit, il s'en suit que $B^\vee = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 2\alpha_n\}$ est une base de R^\vee . La base duale $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de B est définie par $\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout $j (1 \leq j \leq n)$, ses éléments s'appellent les *copoids fondamentaux* relativement à B et valent $\lambda_i = e_1 + e_2 + \cdots + e_i$. Le \mathbb{Z} -module de R est $P = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\lambda_i$ de base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Finalement, soit Q , le sous- \mathbb{Z} -module de P défini par

$$Q = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{Z}\alpha^\vee = \left\{ x \in P, x = (a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i e_i \mid \sum_{i=1}^n a_i \text{ pair} \right\}.$$

Le groupe de Weyl $W = W(R)$ est engendré par les réflexions r_α , $\alpha \in R$. Or dans \mathbb{R}^n , la réflexion orthogonale $r_{e_i - e_j} (i \neq j)$ échange e_i et e_j et laisse invariants les e_k d'indice k distinct de i et j . Ces réflexions engendrent un groupe isomorphe au groupe symétrique S_n . La réflexion orthogonale r_{e_i} transforme e_i en $-e_i$ et laisse invariants les e_k d'indice k distinct de i . Ces dernières réflexions engendrent un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, distingué dans le groupe de Weyl W . Ainsi W est isomorphe à un produit semi-direct de S_n par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, il est d'ordre $2^n \cdot n!$.

Le groupe de Weyl affine $W^a = W^a(R)$ engendré par les réflexions affines $r_{\alpha, k}$ (par rapport au mur $H_{\alpha, k}$) pour $\alpha \in R$ et $k \in \mathbb{Z}$ est le produit semi-direct de W par Q . Le groupe de Weyl affine étendu est $W^{et} = W \times P$.

Soit \mathcal{C} la chambre fermée de Weyl définie par la base de racines B , on a :

$$\mathcal{C} = \{x = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0\}.$$

Les sommets spéciaux dans \mathcal{C} sont les $x = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i$ pair, ou $\sum_{i=1}^n a_i$ impair qui correspondent respectivement aux sommets de types 0 ou 1 dans \mathcal{C} . Les sommets non spéciaux de type h avec $2 \leq h \leq n$ dans \mathcal{C} ont des coordonnées demi-entières avec un nombre égal à $h (h \geq 2)$ de non-entiers.

Dans la suite on sera amené à choisir un sommet $x = (b_1, \dots, b_n)$ de type 0, 1 ou n dans $V = A$ et on notera (j_1, \dots, j_n) les coordonnées de V d'origine $x (j_i = a_i - b_i)$.

L'immeuble \mathcal{A} considéré est donc réunion d'appartements isomorphes à V . Pour un tel immeuble on sait que les valences vérifient $q_0 = q_1 = \cdots = q_{n-1}$, éventuellement différent de q_n . Si \mathcal{A} est l'immeuble

de Bruhat-Tits d'un groupe quasi-simple simplement connexe G sur un corps local non archimédien \mathbb{K} , on sait que q_0 et q_n valent q , q^2 ou q^3 où q est le cardinal du corps résiduel de \mathbb{K} , voir les tables de [T 78] ou [W 09; chap. 28].

2. L'algèbre \mathcal{O} des opérateurs sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$:

Soit A un appartement, x un sommet de $\mathcal{S}_i \cap A$, $i \in \{0, 1\}$ (c'est à dire x spécial) et C une chambre de A contenant x , il existe un unique système orthonormé de coordonnées sur l'appartement A tel que $x = x_{0, \dots, 0}$, $\mathcal{S} \cap C = \{x_{0, \dots, 0}, x_{\frac{1}{2}, \dots, 0}, x_{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}, x_{1, 0, \dots, 0}\}$ avec $\tau(x_{\underbrace{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_k, 0, \dots, 0}) = k \geq 2$, $\tau(x_{0, \dots, 0}) = i$,

$\tau(x_{1, 0, \dots, 0}) = 1 - i$. Alors $\{x_{j_1, \dots, j_n} \mid j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n \geq 0\}$ est le quartier $Q_{x, C}$ de A de sommet x contenant C . L'ensemble $\mathcal{S}_i \cap A$ (resp. $\mathcal{S}_{1-i} \cap A$, $\mathcal{S}_k \cap A (k \geq 2)$) est formé des x_{j_1, \dots, j_n} avec $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{p=1}^n j_p$ est pair (resp. $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{p=1}^n j_p$ impair, $j_1, \dots, j_n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et $\#\{j_p \mid j_p \notin \mathbb{Z}\} = k$).

On note $V_{j_1, \dots, j_n}(x)$ l'ensemble des points x_{j_1, \dots, j_n} associés aux différents choix de A et C tels que $x \in C \subset A$; cet ensemble est fini car l'immeuble est supposé localement fini.

L'ensemble \mathcal{S}_i (resp. \mathcal{S}_{1-i} , $\mathcal{S}_k (k \geq 2)$) est réunion disjointe des $V_{j_1, \dots, j_n}(x)$ avec $j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n \geq 0$, $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{p=1}^n j_p$ est pair (resp. $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{p=1}^n j_p$ impair, $j_1, \dots, j_n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ et $\#\{j_p \mid j_p \notin \mathbb{N}\} = k$).

Ces ensembles sont les orbites de G_x (fixateur de x dans G) dans \mathcal{S}_i (resp. \mathcal{S}_{1-i} , \mathcal{S}_k). Pour tout sommet spécial s et tout s_k dans $\mathcal{S}_k \cap A (k \geq 2)$, $\{s, s_k\}$ est une arête si et seulement si $s_k = s + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_i = 0$ ou $\pm \frac{1}{2}$ (avec $\#\{\varepsilon_p \mid \varepsilon_p \neq 0\} = k$) i.e. $\|s_k - s\|_\infty = \frac{1}{2}$.

On définit des opérateurs K_{j_1, \dots, j_n}^i sur $(\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1) \times \mathcal{S}$ pour $i \in \{0, 1\}$, $j_1, \dots, j_n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n \geq 0$ (et nombre de non-entiers $\neq 1$) par :

$$K_{j_1, \dots, j_n}^i(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau(u) = i \text{ et } v \in V_{j_1, \dots, j_n}(u) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas où $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n \geq 0$, les opérateurs K_{j_1, \dots, j_n}^i opèrent sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$.

On note \mathcal{O} l'algèbre des opérateurs sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ invariants par le groupe G fortement transitif et respectant les types. Ainsi l'algèbre \mathcal{O} admet pour base les K_{j_1, \dots, j_n}^0 et K_{j_1, \dots, j_n}^1 ($j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n \geq 0$). Comme le support de $K_{j_1, \dots, j_n}^0 K_{j_1, \dots, j_n}^1$ est différent du support de $K_{j_1, \dots, j_n}^1 K_{j_1, \dots, j_n}^0$, l'algèbre \mathcal{O} est non commutative.

On veut maintenant déterminer les générateurs de \mathcal{O} . Pour cela on définit d'abord ci-dessous une relation d'ordre compatible avec l'addition dans \mathbb{R}^n .

On note :

$$\mathcal{C}^\perp = \mathbb{R}_+(e_1 - e_2) \oplus \mathbb{R}_+(e_2 - e_3) \oplus \dots \oplus \mathbb{R}_+e_n.$$

On a $\mathcal{C}^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{C}\}$ et $\mathcal{C} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{C}^\perp\}$. On pose par définition :

$$x \leq_{\mathcal{C}^\perp} y \iff y - x \in \mathcal{C}^\perp.$$

En particulier pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{aligned} x \leq_{\mathcal{C}^\perp} y \implies & (y_1 > x_1) \text{ ou } (y_1 = x_1 \text{ et } y_2 > x_2) \text{ ou, } \dots, \\ & \text{ou } (y_1 = x_1, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}, y_n \geq x_n); \end{aligned}$$

donc $\leq_{\mathcal{C}^\perp}$ implique l'ordre lexicographique sur \mathbb{R}^n .

D'après un résultat classique (cf. [B 68], VI § 1 proposition 18) on a :

$$y \in \mathcal{C} \iff \forall w \in W, wy \leq_{\mathcal{C}^\perp} y.$$

PROPOSITION 2.1. *Si on pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta(x) = Wx \cap \mathcal{C}$ on a :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n; \delta(x + y) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x) + \delta(y).$$

DÉMONSTRATION. En effet soit $w \in W$ tel que $w(x + y) \in \mathcal{C}$ et soient $w', w'' \in W$ tels que $w'x \in \mathcal{C}$ et $w''y \in \mathcal{C}$. Alors pour tout $w_0 \in W$ on a $w_0(w'x) \leq_{\mathcal{C}^\perp} w'x$. En particulier pour $w_0 = ww'^{-1}$ on obtient $wx \leq_{\mathcal{C}^\perp} w'x$. De même $w_0 = ww''^{-1}$ donne $wy \leq_{\mathcal{C}^\perp} w''y$. Il s'en suit que $wx + wy = w(x + y) \leq_{\mathcal{C}^\perp} w'x + w''y$. Ainsi on a le résultat. \square

CONSÉQUENCE. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ posons $\delta(x, y) = \delta(y - x)$. On définit ainsi une application $\delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{C}$ qui est invariante par le groupe de Weyl affine W^α (ou le groupe de Weyl affine étendu $W^{et} = W \times P$). La proposition 2.1 montre l'inégalité triangulaire :

$$\delta(x, z) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x, y) + \delta(y, z).$$

Comme δ est invariante par W^a elle peut être définie de manière intrinsèque, sur tout appartement de l'immeuble et même sur l'immeuble car deux appartements contenant x et y sont isomorphes par un isomorphisme fixant x et y .

Pour $x \in (\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1) \cap A$ et $(j_1, \dots, j_n) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ on a $s \in V_{j_1, \dots, j_n}(x)$ si et seulement si $\delta(x, s) = (j_1, \dots, j_n)$.

On a $\delta(x, y) = \delta(y, x), \forall x, y \in \mathcal{I}$, car $-Id$ est dans W .

PROPOSITION 2.2. *L'inégalité triangulaire est vérifiée dans l'immeuble :*

$$\forall x, y, z \in \mathcal{I} ; \delta(x, z) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x, y) + \delta(y, z).$$

DÉMONSTRATION. Il existe un nombre fini de points $y_0 = y, y_1, \dots, y_n = z$ du segment $[y, z]$ tel que, pour tout $i = 1, \dots, n$, x, y_{i-1}, y_i soient dans un même appartement. Dans cet appartement on a $\delta(x, y_i) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x, y_{i-1}) + \delta(y_{i-1}, y_i)$ d'après la proposition 2.1. Donc $\delta(x, z) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x, y) + \sum_{i=1}^n \delta(y_{i-1}, y_i)$. Mais les points $y_0 = y, y_1, \dots, y_n = z$ sont alignés dans un même appartement, donc $\sum_{i=1}^n \delta(y_{i-1}, y_i) = \delta(y, z)$. \square

REMARQUE. On sait que ce résultat se généralise à tout immeuble affine.

DEFINITION 2.3. *Le terme dominant d'un élément non nul $\kappa = \sum a_{j_1, \dots, j_n}^i K_{j_1, \dots, j_n}^i$ de \mathcal{O} est l'élément $\text{dom}(\kappa)$ de \mathcal{O} obtenu en remplaçant chaque a_{j_1, \dots, j_n}^i par 0 dès qu'il existe (j'_1, \dots, j'_n) strictement supérieur à (j_1, \dots, j_n) tel que $a_{j'_1, \dots, j'_n}^i \neq 0$.*

PROPOSITION 2.4. *Pour $i = 0$ ou 1 , $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$, $j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n \geq 0$, on a :*

$$\text{dom}(K_{j_1, j_2, \dots, j_n}^i \overline{K_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{i + \sum_p j_p}}) = K_{j_1 + i_1, j_2 + i_2, \dots, j_n + i_n}^i ;$$

où $\overline{i + \sum_p j_p}$ est la classe de $i + \sum_p j_p$ modulo 2.

DÉMONSTRATION. Par définition la valeur $(K_{j_1, j_2, \dots, j_n}^i \overline{K_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{i + \sum_p j_p}})(s, t)$ en $(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ de ce produit est $\sum_u K_{j_1, j_2, \dots, j_n}^i(s, u) \overline{K_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{i + \sum_p j_p}}(u, t)$. Ceci est non nul si et seulement si $s \in \mathcal{S}_i, t \in \mathcal{S}_{\overline{i + \sum_p (j_p + i_p)}}$ et il existe $u \in \mathcal{S}_{\overline{i + \sum_p j_p}}$ tel

que $u \in V_{j_1, \dots, j_n}(s)$ et $t \in V_{i_1, \dots, i_n}(u)$. Par un bon choix de la chambre fondamentale d'origine s les coordonnées normalisées de u sont (j_1, \dots, j_n) , les coordonnées de t normalisées par rapport à u sont (i_1, \dots, i_n) . Cela signifie que $\delta(s, u) = (j_1, \dots, j_n)$ et $\delta(u, t) = (i_1, \dots, i_n)$. D'après la proposition 2.2 $\delta(s, t) \leq_{c^\perp} (i_1 + j_1, \dots, i_n + j_n)$. Autrement dit après renormalisation les coordonnées de t sont de la forme (j'_1, \dots, j'_n) avec $(j'_1, \dots, j'_n) \leq_{c^\perp} (j_1 + i_1, \dots, j_n + i_n)$. De plus pour $s = (0, \dots, 0)$ et $t = (j_1 + i_1, \dots, j_n + i_n)$, il existe un unique $u \in \mathcal{I}$ tel que $\delta(s, u) = (j_1, \dots, j_n)$ et $\delta(u, t) = (i_1, \dots, i_n)$, puisque ce u est forcément dans l'enclos de s et t . Donc $\text{dom}(K_{j_1, j_2, \dots, j_n}^i \overline{K_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{i + \sum_p j_p}}) = K_{j_1 + i_1, j_2 + i_2, \dots, j_n + i_n}^i$. \square

DEFINITION 2.5. *Le degré de l'opérateur K_{j_1, \dots, j_n}^i est $j_1 + \dots + j_n \in \mathbb{N}$.*

THÉOREMÈME 2.6. *Pour $i \in \{0, 1\}$, $k \geq 1$, on note : $L_k^i = K_{\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, 0, \dots, 0}^i$.*

1. $\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^i \overline{L_k^{i + \sum_p j_p}}) = K_{j_1 + 1, \dots, j_k + 1, j_{k+1}, j_n}^i$
2. *Les opérateurs L_k^i pour $i \in \{0, 1\}$ et $0 \leq k \leq n$ engendrent l'algèbre \mathcal{O} .*

DÉMONSTRATION. 1. S'obtient en appliquant la proposition 2.4.

2. S'obtient facilement par un raisonnement par récurrence sur le degré de K_{j_1, \dots, j_n}^i . \square

NOTATIONS. On note

$$L_j^* = L_j^0 + L_j^1, \quad K_{j_1, \dots, j_n}^* = K_{j_1, \dots, j_n}^0 + K_{j_1, \dots, j_n}^1.$$

Un opérateur K de \mathcal{O} est dit *symétrique* si $K(s, t) = K(t, s)$, $\forall s, t \in \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$. L'opérateur K_{j_1, \dots, j_n}^i pour $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$ est symétrique si et seulement si son degré est pair : c'est clairement une condition nécessaire car sinon son support est $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_{1-i}$ et on a $K_{j_1, \dots, j_n}^i(t, s) = K_{j_1, \dots, j_n}^{1-i}(s, t)$ et c'est suffisant car on a vu que $\delta(s, t) = \delta(t, s)$.

L'espace vectoriel \mathcal{O}^σ des opérateurs invariants symétriques a pour base les K_{j_1, \dots, j_n}^i de degré pair et les K_{j_1, \dots, j_n}^* de degré impair.

Le sous-espace vectoriel \mathcal{O}^* de \mathcal{O}^σ de base les K_{j_1, \dots, j_n}^* est formé des opérateurs "très symétriques" ou "P-invariants", c'est à dire invariants par le groupe affine étendu $W^{et} = W \times P$. C'est l'algèbre des opérateurs sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ invariants sous le groupe G^* très fortement transitif, transitif sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$.

THÉOREMÈME 2.7. *L'algèbre \mathcal{O}^* est commutative, c'est l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[L_1^*, \dots, L_n^*]$.*

REMARQUE. La commutativité de \mathcal{O}^* est un résultat de Parkinson [P 06].

DÉMONSTRATION. L'algèbre \mathcal{O}^* est formée d'opérateurs symétriques, elle est donc commutative. Pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, on voit facilement que le terme dominant de $(L_1^*)^{a_1} \dots (L_n^*)^{a_n}$ est $K_{a_1+a_2+\dots+a_n, a_2+\dots+a_n, \dots, a_n}^*$, les variables L_1^*, \dots, L_n^* sont donc algébriquement indépendantes et $\mathcal{O}^* = \mathbb{C}[L_1^*, \dots, L_n^*]$. \square

L'algèbre \mathcal{O} est la somme directe des quatre sous-espaces vectoriels :

$$\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}^{0,0}, \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}^{1,1}, \mathcal{O}^{0,1} \text{ et } \mathcal{O}^{1,0},$$

où $\mathcal{O}^{i,j}$ est formé des opérateurs de support dans $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$. Pour $K \in \mathcal{O}$ et $i, j \in \{0, 1\}$ on note ${}_i|K|_j$ (resp. ${}_i|K, K|_j$) sa restriction à $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ (resp. $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}, \mathcal{S} \times \mathcal{S}_j$) prolongée par 0 en dehors. L'application $K \mapsto {}_i|K|_j$ est la projection de \mathcal{O} sur $\mathcal{O}^{i,j}$.

Malheureusement \mathcal{O}^σ n'est pas une algèbre : $L_2^0 = K_{1,1,0,\dots,0}^0 \in \mathcal{O}^\sigma$ et $L_1^* = K_{1,0,\dots,0}^0 + K_{1,0,\dots,0}^1 \in \mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}^\sigma$, mais $L_2^0 L_1^*$ est non nul et son support est dans $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1$ il ne peut donc être symétrique.

Comme une base de \mathcal{O} est formée des $K_{j_1, \dots, j_n}^i = {}_i|K_{j_1, \dots, j_n}^*$, on a $\mathcal{O} = {}_0|\mathcal{O}^* \oplus {}_1|\mathcal{O}^*$ avec la relation :

$$({}_i|K|_{i'})({}_{i'}|K'|) = \begin{cases} {}_i|KK'| & \text{si } i + i' + \text{deg}(K) \equiv 0[2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

si K et K' sont des monômes (ou plus généralement si tous les monômes de K ont des degrés de même parité).

REMARQUE 2.8. Cette relation de composition des ${}_i|K$ et la structure de l'algèbre \mathcal{O}^* décrivent entièrement la structure de l'algèbre \mathcal{O} .

Par restriction à \mathcal{S}_i ($i = 0$ ou 1), l'algèbre \mathcal{O}_i des opérateurs sur \mathcal{S}_i invariants par G est contenue dans ${}_i|\mathcal{O}^*$ et on a :

$$\mathcal{O}_i = \{ {}_i|K/K \in \mathcal{O}^* \text{ et tous monômes de } K \text{ ont un degré pair.} \}$$

La relation ci-dessus sur la composition des ${}_i|K$ permet de montrer :

THÉOREMÈ 2.9. L'algèbre \mathcal{O}_i est commutative et isomorphe (par $K \mapsto {}_i|K$) à la sous-algèbre \mathcal{O}^{**} de $\mathcal{O}^* = \mathbb{C}[L_1^*, \dots, L_n^*]$ formée des éléments de degré pair.

N.B. On rappelle que le degré de L_j^* est j .

3. L'algèbre \mathcal{O}^n des opérateurs sur \mathcal{S}_n :

Soit A un appartement, u un sommet de $\mathcal{S}_n \cap A$ (c'est à dire u est de type n), la chambre de Weyl C_u de sommet u est déterminée par :

$$C_u = \{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{R}^n \mid j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n \geq 0\}, \text{ et } C_u \cap \mathcal{S}_n = C_u \cap \mathbb{Z}^n$$

pour un système de coordonnées (j_1, \dots, j_n) d'origine u .

Il existe un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) d'origine un sommet spécial u_s dans lequel u a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ alors $x_i = j_i + \frac{1}{2}$ et

la chambre C_u est $\left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \frac{1}{2} \right\}$. Le fixateur W_u^a

(dans le groupe de Weyl affine $W^a = W \rtimes Q$) de u contient les permutations et les changements de signes des j_i (avec un nombre pair de changements de signe). En effet W contient toutes les permutations et tous les changements de signes des x_i (cf. [B 68] ou encore § 1 pré-

liminaires), mais $Q = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i \text{ pair} \right\}$ et le changement de signe $j_i \mapsto -j_i$ (autres j_k fixés) correspond à la transformation $(x_1, \dots, x_n) \mapsto r_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Donc, à G_u près, tout sommet $v \in \mathcal{S}$ est dans $C'_u = C_u \cup r_n(C_u) = \{(j_1, \dots, j_n) \mid j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_{n-1} \geq |j_n|\}$. Pour choisir entre la coordonnée j_n ou $-j_n$, on décide par convention que $\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ est de type 1 et $\left(\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right)$ est de type 0 (i.e. $\tau(u_s) = (-1)^n$).

On dit que $v \in V_{j_1, \dots, j_n}(u)$ avec $j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq |j_n|$ s'il existe $g \in G_u$ tel que $g(v) = u + (j_1, \dots, j_n)$. L'ensemble \mathcal{S}_n est réunion disjointe des $V_{j_1, \dots, j_n}(u)$ (pour $(j_1, \dots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$) qui sont les orbites dans \mathcal{S}_n du fixateur G_u de u dans G . De même \mathcal{S}_k ($2 \leq k \leq n-1$) (resp. \mathcal{S}_0 ou \mathcal{S}_1) est réunion disjointe des $V_{j_1, \dots, j_n}(u)$ pour $(j_1, \dots, j_n) \in C'_u \cap \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^n$ et le nombre de j_i entiers égal à k (resp. égal à 0 et $n + \sum_{i=1}^n \left(j_i + \frac{1}{2}\right)$ pair ou impair).

Pour $(j_1, \dots, j_n) \in C'_u \cap \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^n$ les opérateurs K_{j_1, \dots, j_n}^n sont définis sur \mathcal{S} par :

$$K_{j_1, \dots, j_n}^n(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau(u) = n \text{ et } v \in V_{j_1, \dots, j_n}(u) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note aussi $L_k^n = K_{\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0}^n$ (pour $0 \leq k \leq n$) et $L_{n-}^n = K_{1, \dots, 1, -1}^n$.

L'algèbre \mathcal{O}^n des opérateurs sur \mathcal{S}_n invariants par le groupe G fortement transitif et respectant les types a pour base les K_{j_1, \dots, j_n}^n pour $(j_1, \dots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$.

Pour $(j_1, \dots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$ on a $v \in V_{j_1, \dots, j_n}(u) \iff v = u + (j_1, \dots, j_n)$ (avec des coordonnées normalisées par rapport à u) $\iff u = v + (-j_1, \dots, -j_n)$ et par W_u^a on a $u = v + (j_1, \dots, j_{n-1}, (-1)^n j_n)$, mais si on veut des coordonnées normalisées par rapport à v cela donne $u = v + (j_1, \dots, j_{n-1}, (-1)^{n+\deg(j)} j_n)$. Ainsi on a $v \in V_{j_1, \dots, j_n}(u) \iff u \in V_{j_1, \dots, j_{n-1}, (-1)^{n+\deg(j)} j_n}(v)$, autrement dit $K_{j_1, \dots, j_n}^n(u, v) = K_{j_1, \dots, j_{n-1}, (-1)^{n+\deg(j)} j_n}^n(v, u)$. En particulier si $n + \deg(j)$ est pair ou si $j_n = 0$ l'opérateur K_{j_1, \dots, j_n}^n est symétrique.

On veut déterminer les générateurs de l'algèbre \mathcal{O}^n . En utilisant le préordre lexicographique sur $(j_1, \dots, j_{n-1}, |j_n|)$, on définit le terme dominant d'un élément de \mathcal{O}^n (ou plus généralement d'une combinaison linéaire des K_{j_1, \dots, j_n}^n) comme en 2.3.

PROPOSITION 3.1. Si $(j_1, \dots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$, on a

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n K_{1, \dots, 1, 0}^n) = K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n.$$

DÉMONSTRATION. $K_{j_1, \dots, j_n}^n K_{1, \dots, 1, 0}^n(s, t) = \sum_u K_{j_1, \dots, j_n}^n(s, u) K_{1, \dots, 1, 0}^n(u, t)$.

Or $K_{1, \dots, 1, 0}^n(u, t) \neq 0 \iff u$ et $t \in \mathcal{S}_n$ et il existe une galerie C_0, C_1 tel que $u \in C_0$ et $t \in C_1$. Il existe alors un appartement A contenant s, C_0 (et par suite u) avec ou bien A contient s, C_0 et t ou bien la rétraction $\rho_{A, C}(t) = u$ (C est la chambre de sommet s dans la chambre de Weyl fondamentale). Les t possibles sont alors $s + (j_1 + m_1, \dots, j_n + m_n)$ avec :

$$(m_i = 0 \text{ ou } \pm 1 \text{ et } \#\{m_i \neq 0\} = n - 1) \text{ ou } (m_i = 0 \ \forall i).$$

Même après renormalisation elles sont toutes inférieures à $s + (j_1 + 1, \dots, j_{n-1} + 1, j_n)$. De plus pour s et $t = s + (j_1 + 1, \dots, j_{n-1} + 1, j_n)$ on a un unique u car cet u doit appartenir à l'enclos de s et t . D'où le résultat. \square

DEFINITION 3.2. Pour $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ on définit l'opérateur $M^{i, j}$ sur \mathcal{S} par :

$$M^{i, j}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau(u) = i, \tau(v) = j \text{ et } \{u, v\} \text{ arête} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PROPOSITION 3.3. *Pour $1 \leq k \leq n - 2$ et $(j_1, \dots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$ on a :*

1. $\text{dom}(M^{n,n-k}M^{n-k,n}) = K_{\underbrace{1,1,\dots,1}_{k}, 0, \dots, 0}^n = L_k^n.$
2. $\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,n-k}) = K_{j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_k + \frac{1}{2}, j_{k+1}, \dots, j_n}^n.$
3. $\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,n-k}M^{n-k,n}) = K_{j_1+1, \dots, j_k+1, j_{k+1}, \dots, j_n}^n.$

DÉMONSTRATION. 1. $M^{n,n-k}M^{n-k,n}(s, t) = \sum_{u \in \mathcal{S}_{n-k}} M^{n,n-k}(s, u)M^{n-k,n}(u, t)$, où la somme porte sur les u tel que $\{s, u\}$ et $\{t, u\}$ sont des arêtes. Il existe alors un appartement contenant s, u et t et si $s = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, les coordonnées de u normalisées sont $\left(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ ou $\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0\right)$, les t possibles voisins de u sont $\left(1 + \varepsilon_1, \dots, 1 + \varepsilon_k, \frac{1}{2} + \varepsilon_{k+1}, \dots, \frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)$ ou $\left(1 + \varepsilon'_1, \dots, 1 + \varepsilon'_{k-1}, \frac{1}{2} + \varepsilon'_k, \dots, \frac{1}{2} + \varepsilon'_{n-1}, \varepsilon'_n\right)$, avec $\varepsilon_i, \varepsilon'_i = 0$, ou $\pm \frac{1}{2}$. Même après renormalisation elles sont inférieures à :

$$\left(\underbrace{1 + \frac{1}{2}, \dots, 1 + \frac{1}{2}}_k, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) = s + \left(\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0\right).$$

De plus pour $s, t = s + \left(\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0\right)$, on a u est dans l'enclos de s et t . Donc u est bien déterminé par s et un tel t . Ainsi on obtient le résultat.

2. $K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,n-k}(s, t) \neq 0 \iff s \in \mathcal{S}_n, t \in \mathcal{S}_{n-k}$ et $\exists u \in \mathcal{S}_n$ tel que u est voisin de t (s, u et t sont alors dans un même appartement). Avec un repère adapté si $s = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, $u = s + \left(j_1, \dots, j_n\right)$ normalisé, les voisins t de u sont $s + (j_1 + \varepsilon_1, \dots, j_n + \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_i = 0$, ou $\pm \frac{1}{2}$ et $\#\{\varepsilon_i / \varepsilon_i \neq 0\} = k$ ($t \in \mathcal{S}_{n-k}$). Même après renormalisation, elles sont inférieures à $s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_k + \frac{1}{2}, j_{k+1}, \dots, j_n\right)$. Par ailleurs pour $s = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ et $t = s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_k + \frac{1}{2}, j_{k+1}, \dots, j_n\right)$, u est bien déterminé (u est dans l'enclos de s et t) puisque pour toute racine α telle que $\alpha(s) \leq \alpha(t)$, on a

$\alpha(s) \leq \alpha(u) \leq \alpha(t)$. D'où :

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n, n-k}) = K_{j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_k + \frac{1}{2}, j_{k+1}, \dots, j_n}^n.$$

3. Si on sait que :

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n, n-k} M^{n-k, n}) = \text{dom}(K_{j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_k + \frac{1}{2}, j_{k+1}, \dots, j_n}^n M^{n-k, n}),$$

par un raisonnement analogue au 1) on aura:

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n, n-k} M^{n-k, n}) = K_{j_1 + 1, \dots, j_k + 1, j_{k+1}, \dots, j_n}^n.$$

Il suffit alors de s'assurer que les termes intervenant dans $K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n, n-k}$ et qui sont strictement inférieurs à $K_{j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_k + \frac{1}{2}, j_{k+1}, \dots, j_n}^n$ donnent par le produit par $M^{n-k, k}$ des termes strictement inférieurs à $K_{j_1 + 1, \dots, j_k + 1, j_{k+1}, \dots, j_n}^n$. En effet les voisins dans \mathcal{S}_{n-k} d'un sommet $u = s + (j_1 + \varepsilon_1, \dots, j_n + \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_p = 0$, ou $\pm \frac{1}{2}$ et $\#\{\varepsilon_p \mid \varepsilon_p \neq 0\} = k$ sont sous la forme $s + (j_1 + m_1, \dots, j_n + m_n)$, avec $m_p = 0$, ou ± 1 et $\#\{m_p \mid m_p \neq 0\} \leq k$. Si de plus $(j_1 + \varepsilon_1, \dots, j_n + \varepsilon_n) < (j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_k + \frac{1}{2}, j_{k+1}, \dots, j_n)$, on a $(j_1 + m_1, \dots, j_n + m_n) < (j_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \dots, j_k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, j_{k+1}, \dots, j_n)$ et par suite $s + (j_1 + m_1, \dots, j_n + m_n) < s + (j_1 + 1, \dots, j_k + 1, j_{k+1}, \dots, j_n)$.

Revoyons l'analogie de 1) : $K_{j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_k + \frac{1}{2}, j_{k+1}, \dots, j_n}^n M^{n-k, n}(s, t) \neq 0 \iff s \in \mathcal{S}_n$, $t \in \mathcal{S}_n$ et $\exists u \in \mathcal{S}_{n-k}$ tel que $\{u, t\}$ est une arête (donc s, u et t sont dans un même appartement). Ainsi avec un bon choix de la chambre de Weyl fondamentale si $s = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ et $u = s + (j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_k + \frac{1}{2}, j_{k+1}, \dots, j_n)$, les t voisins de u dans \mathcal{S}_n sont de la forme $u = s + (j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \dots, j_k + \frac{1}{2} + \varepsilon_k, j_{k+1} + \varepsilon_{k+1}, \dots, j_n + \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_p = 0$, ou $\pm \frac{1}{2}$ et comme $t \in \mathcal{S}_n$ alors $t = s + (j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \dots, j_k + \frac{1}{2} + \varepsilon_k, j_{k+1}, \dots, j_n)$, avec $\varepsilon_p = \pm \frac{1}{2}$.

Or un $t = s + (j_1 + m_1, \dots, j_k + m_k, j_{k+1}, \dots, j_n)$, avec $m_p = 0$ ou 1. Elles sont toutes après renormalisation inférieures à $s + (j_1 + 1, \dots, j_k + 1, j_{k+1}, \dots, j_n)$. De plus pour s et $t = s + (j_1 + 1, \dots, j_k + 1, j_{k+1}, \dots, j_n)$, on a u est bien déterminé (u est dans l'enclos de s et t). \square

COROLLAIRE 3.4. *Pour $k \leq n - 2$ et $(j_1, \dots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$, on a :*
 $dom(K_{j_1, \dots, j_n}^n L_k^n) = K_{j_1+1, \dots, j_k+1, j_{k+1}, \dots, j_n}^n$.

DÉMONSTRATION. On utilise la proposition 3.3 et le fait que les termes intervenant dans $M^{n, n-k} M^{n-k, n}$ et qui sont strictement inférieurs à L_k^n donnent par le produit à gauche par K_{j_1, \dots, j_n}^n des termes strictement inférieurs à $K_{j_1+1, \dots, j_k+1, j_{k+1}, \dots, j_n}^n$. \square

PROPOSITION 3.5. *Pour $k = n$, $(j_1, \dots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$ et $i \in \{0, 1\}$ on a :*

1. $dom(M^{n, i} M^{i, n}) = K_{1, \dots, 1, (-1)^{n+i}}^n$.
2. $dom(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n, 0}) =$

$$\begin{cases} K_{j_1+\frac{1}{2}, \dots, j_{n-1}+\frac{1}{2}, j_n+\frac{1}{2}}^n & \text{si } j_n \geq 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ pair} \\ q_n K_{j_1+\frac{1}{2}, \dots, j_{n-1}+\frac{1}{2}, j_n+\frac{1}{2}}^n & \text{si } j_n < 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ pair} \\ K_{j_1+\frac{1}{2}, \dots, j_{n-1}+\frac{1}{2}, j_n-\frac{1}{2}}^n & \text{si } j_n \leq 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ impair} \\ q_n K_{j_1+\frac{1}{2}, \dots, j_{n-1}+\frac{1}{2}, j_n-\frac{1}{2}}^n & \text{si } j_n > 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ impair} \end{cases}$$
3. $dom(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n, 0} M^{0, n}) =$

$$\begin{cases} K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n+1}^n & \text{si } j_n \geq 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ pair} \\ q_n K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n & \text{si } j_n < 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ pair} \\ q_n K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n & \text{si } j_n > 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ impair} \\ K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n-1}^n & \text{si } j_n \leq 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ impair} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. : Faisons la démonstration dans le cas $i = 0$; le raisonnement est semblable pour $i = 1$.

1. $M^{n, 0} M^{0, n}(s, t) \neq 0$ si $s \in \mathcal{S}_n$, $t \in \mathcal{S}_n$, $\exists u \in \mathcal{S}_0$ tel que $\{s, u\}$ est une arête et $\{u, t\}$ aussi. Il existe un appartement contenant s , u et t . Par un bon choix de la chambre de Weyl fondamentale si $s = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, $u = s + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_p = \pm \frac{1}{2}$ (u spécial).

S'il y a un nombre pair des ε_p négatifs, on se ramène par changement de signe avec des ε_p tous positifs. S'il y a un nombre impair des ε_p négatifs, on se ramène par changement de signe et par permutation à $\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Donc les u spéciaux voisins de s sont $(1, \dots, 1)$ ou $(1, \dots, 1, 0)$. Maintenant les u dans \mathcal{S}_0 sont $(1, \dots, 1)$ si n est pair ou $(1, \dots, 1, 0)$ si n est impair.

(a) Si n est pair, les t voisins de $u = (1, \dots, 1)$ dans \mathcal{S}_n sont $(1 + \varepsilon_1, \dots, 1 + \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_p = \pm \frac{1}{2}$. Elles sont toutes après renormalisation inférieures à $\left(\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}\right) = s + (1, \dots, 1)$. De plus il n'y a qu'un seul u déterminé par $s = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$ et $t = \left(\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}\right)$, donc :

$$\text{dom}(M^{n,0}M^{0,n}) = K_{1,\dots,1}^n \text{ si } n \text{ est pair.}$$

(b) Si n est impair, les t voisins de $u = (1, \dots, 1, 0)$ dans \mathcal{S}_n sont $(1 + \varepsilon_1, \dots, 1 + \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_p = \pm \frac{1}{2}$, donc $t = s + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_1, \dots, \frac{1}{2} + \varepsilon_{n-1}, m_n\right)$ où $m_n = 0$ ou -1 et $\varepsilon_p = \pm \frac{1}{2}$. Elles sont toutes après renormalisation inférieures à $s + (1, \dots, 1, -1)$. De plus pour s et $t = s + (1, \dots, 1, -1)$ le sommet u est entièrement déterminé par un tel choix (u est dans l'enclos $cl(s, t)$). Donc :

$$\text{dom}(M^{n,0}M^{0,n}) = K_{1,\dots,-1}^n \text{ si } n \text{ est impair.}$$

2. $K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0}(s, t) \neq 0 \iff s \in \mathcal{S}_n, t \in \mathcal{S}_0, \exists u \in \mathcal{S}_n$ tel que u et t sont voisins (donc s, u et t sont dans un même appartement) et par un bon choix de la chambre de Weyl fondamentale si $s = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, $u = s + (j_1, \dots, j_n)$ normalisée alors les t possibles sont $s + (j_1 + \varepsilon_1, \dots, j_n + \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_p = \pm \frac{1}{2}$.

(a) Si $n + \sum j_p$ est pair alors elles sont toutes après renormalisation inférieures à $s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n + \frac{1}{2}\right)$. De plus pour s et $t = s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n + \frac{1}{2}\right)$, il n'y a qu'un seul u pour ce tel choix si $j_n \geq 0$ et plusieurs dans le cas où $j_n < 0$ car pour ce cas u n'est pas dans l'enclos de s et t . Donc :

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0}) = \begin{cases} K_{j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n + \frac{1}{2}}^n & \text{si } n + \sum j_p \text{ est pair et } j_n \geq 0 \\ *K_{j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n + \frac{1}{2}}^n & \text{si } n + \sum j_p \text{ est pair et } j_n < 0 \end{cases}$$

où $*$ est un coefficient positif que l'on va calculer. Pour $s \in \mathcal{S}_n, t \in \mathcal{S}_0$, $t = s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_{n-1} + \frac{1}{2}, -|j_n| + \frac{1}{2}\right)$ fixés, on veut déterminer le nombre des $u = s + (j_1, \dots, j_{n-1}, -|j_n|)$. Comme les racines α telles

que $\alpha(s) \leq \alpha(t)$ sont : $(e_p - e_k)_{1 \leq p < k \leq n}$; $-(e_p - e_k)_{1 \leq p < k < n}$ et $j_p = j_k$;
 $(e_p + e_k)_{1 \leq p < k \leq n-1}$;

$$(e_p + e_n)_{1 \leq p < n}; \quad (e_p)_{1 \leq p < n} \quad \text{et} \quad -e_n.$$

Parmi celles ci, celles telles que $\alpha(s) \leq \alpha(u) \leq \alpha(t)$ sont toutes à part $-e_n$. Soit $r_{n,t}$ la réflexion par rapport à l'hyperplan de direction $\alpha_n = -e_n$ et contenant t . Comme $u = t - \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) = t - v$ où $v = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$, on a $r_{n,t}(u) = t - [v - \alpha_n(v)\alpha_n^\vee]$. Donc $r_{n,t}(u) = t - \left(\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right) = s + (j_1, \dots, j_{n-1}, -|j_n| + 1)$ et on a pour tout α tel que $\alpha(s) \leq \alpha(t)$, $\alpha(s) \leq \alpha(r_{n,t}(u)) \leq \alpha(t)$. Ainsi $*$ = q_n .

(b) Si $n + \sum j_p$ est impair, elles sont toutes inférieures après renormalisation à $s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_{n-1} + \frac{1}{2}, j_n - \frac{1}{2}\right)$ et pour $s, t = s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_{n-1} + \frac{1}{2}, j_n - \frac{1}{2}\right)$ on a u est dans l'enclos de s et t si $j_n \leq 0$ et u n'est pas dans l'enclos de s et t si $j_n > 0$. Donc :

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0}) = \begin{cases} K_{j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n - \frac{1}{2}}^n, & \text{si } n + \sum j_p \text{ impair et } j_n \leq 0 \\ ** K_{j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n - \frac{1}{2}}^n, & \text{si } n + \sum j_p \text{ impair et } j_n > 0 \end{cases}$$

où $**$ est un coefficient positif que l'on calcule comme dans le cas pair ci-dessus, en remplaçant $-e_n$ par e_n ; on trouve encore $** = q_n$.

3. Si on sait que $\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0} M^{0,n}) = \text{dom}[\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0}) M^{0,n}]$, on aura :

(a) Si $n + \sum j_p$ est pair, $K_{j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n + \frac{1}{2}}^n M^{0,n}(s, t) \neq 0 \iff s \in \mathcal{S}_n, t \in \mathcal{S}_n, \exists u \in \mathcal{S}_0$ tel que $\{u, t\}$ est une arête (donc s, u et t sont dans un même appartement) et par un bon choix du repère si $s = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$. $u = s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n + \frac{1}{2}\right)$ normalisée alors les t possibles sont de la forme $s + \left(j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \dots, j_n + \frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)$, où $\varepsilon_p = \pm \frac{1}{2}$. Après renormalisation elles sont toute inférieures à :

$$\begin{cases} s + (j_1 + 1, \dots, j_{n-1} + 1, j_n + 1) & \text{si } j_n \geq 0 \\ s + \left(j_1 + 1, \dots, j_{n-1} + 1, j_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) & \text{si } j_n < 0. \end{cases}$$

De plus pour s et un tel t les u correspondants sont dans l'enclos de s et t .
 Donc pour $n + \sum j_p$ pair on a :

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0} M^{0,n}) = \begin{cases} K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n+1}^n & \text{si } j_n \geq 0 \\ q_n K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n & \text{si } j_n < 0. \end{cases}$$

(b) Si $n + \sum j_p$ est impair on a : $K_{j_1+\frac{1}{2}, \dots, j_n-\frac{1}{2}}^{n,0} M^{0,n}(s, t) \neq 0 \iff s \in \mathcal{S}_n$,
 $t \in \mathcal{S}_n, \exists u \in \mathcal{S}_0$ tel que $\{u, t\}$ est une arête (donc s, u et t sont dans un même appartement) et par un bon choix du repère si $s = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$,
 $u = s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n - \frac{1}{2}\right)$ normalisée alors les t possibles sont de la forme $s + \left(j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \dots, j_n - \frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)$, où $\varepsilon_p = \pm \frac{1}{2}$. Après renormalisation elles sont toute inférieures à :

$$\begin{cases} s + (j_1 + 1, \dots, j_{n-1} + 1, j_n) & \text{si } j_n > 0 \\ s + (j_1 + 1, \dots, j_{n-1} + 1, j_n - 1) & \text{si } j_n \leq 0. \end{cases}$$

De plus pour s et un tel t les u correspondants sont dans l'enclos de s et t .
 Donc pour $n + \sum j_p$ impair on a :

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0} M^{0,n}) = \begin{cases} q_n K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n & \text{si } j_n > 0 \\ K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n-1}^n & \text{si } j_n \leq 0. \end{cases}$$

Vérifions maintenant que :

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0} M^{0,n}) = \text{dom}[\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0}) M^{0,n}].$$

Les u dans $K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0}$, sont dans un bon repère $s + (j_1 + \varepsilon_1, \dots, j_n + \varepsilon_n)$,
 où $\varepsilon_p = \pm \frac{1}{2}$, leurs voisins dans \mathcal{S}_n sont $s + (j_1 + m_1, \dots, j_n + m_n)$, avec
 $m_p = 0$ ou ± 1 (les m_p sont obtenues en ajoutant $\pm \frac{1}{2}$ à ε_p).

(a) Si $n + \sum j_p$ impair et $s + (j_1 + \varepsilon_1, \dots, j_n + \varepsilon_n) < s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n - \frac{1}{2}\right)$, on a $s + (j_1 + m_1, \dots, j_n + m_n) \leq$

$$\begin{cases} s + \left(j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \dots, j_n + \varepsilon_n + \frac{1}{2}\right) < s + (j_1 + 1, \dots, j_n) & \text{si } j_n > 0 \\ s + \left(j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \dots, j_n + \varepsilon_n - \frac{1}{2}\right) < s + (j_1 + 1, \dots, j_n - 1) & \text{si } j_n \leq 0 \end{cases}$$

(b) Si $n + \sum j_p$ pair et $s + (j_1 + \varepsilon_1, \dots, j_n + \varepsilon_n) < s + (j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n + \frac{1}{2})$, on a $s + (j_1 + m_1, \dots, j_n + m_n) \leq$

$$\begin{cases} s + \left(j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \dots, j_n + \varepsilon_n + \frac{1}{2}\right) < s + (j_1 + 1, \dots, j_n + 1) & \text{si } j_n \geq 0 \\ s + \left(j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \dots, j_n + \varepsilon_n - \frac{1}{2}\right) < s + (j_1 + 1, \dots, j_n - 1) & \text{si } j_n < 0 \end{cases}$$

Il faut s'assurer que $\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0} M^{0,n}) = \text{dom}[K_{j_1, \dots, j_n}^n \text{dom}(M^{n,0}) M^{0,n}]$.

On a les termes intervenant dans $M^{n,0} M^{0,n}$ et qui sont strictement inférieurs à $K_{1, \dots, 1, (-1)^n}^n$ sont $\underbrace{K_{1, \dots, 1, 0, \dots, 0}^n}_k$, $k \leq n - 1$. D'après ce qui précède on a :

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n \underbrace{K_{1, \dots, 1, 0, \dots, 0}^n}_k) = K_{j_1+1, \dots, j_k+1, j_{k+1}, \dots, j_n}^n$$

Vérifions que ces termes sont strictement inférieurs à $\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,0} M^{0,n})$. Les seuls cas qui causent un problème sont lorsque $n + \sum j_p$ est impair (*resp.* pair) avec $j_n > 0$ (*resp.* $j_n < 0$). Prenons le cas où $n + \sum j_p$ impair et $j_n > 0$ (même genre de raisonnement pour $n + \sum j_p$ pair est $j_n < 0$) on a :

pour $s = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$,

$u = s + (j_1, \dots, j_n)$ et $t = u + (1, \dots, 1) = s + (j_1 + 1, \dots, j_n + 1)$, le milieu $\frac{u+t}{2} = s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \dots, j_n + \frac{1}{2}\right)$ est spécial dans $\mathcal{S}_1(n + \sum j_p$

impair), donc par rétraction par rapport au mur correspondant on trouve $(j_1 + 1, \dots, j_{n-1} + 1, j_n)$. Par suite $K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n$ figure dans $K_{j_1, \dots, j_n}^n K_{1, \dots, 1, (-1)^n}^n$ donc :

Si $n + \sum j_p$ pair,

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n K_{1, \dots, 1, (-1)^n}^n) = \begin{cases} K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n+1}^n & \text{si } j_n \geq 0 \\ *K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n & \text{si } j_n < 0 \end{cases}$$

Si $n + \sum j_p$ impair,

$$\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n K_{1, \dots, 1, (-1)^n}^n) = \begin{cases} **K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n & \text{si } j_n > 0 \\ K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n-1}^n & \text{si } j_n \leq 0 \end{cases}$$

□

REMARQUE 3.6. *Un raisonnement analogue au 2) et 3) de la proposition 3.5 donne : $\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,1}) =$*

$$\left\{ \begin{array}{ll} K_{j_1+\frac{1}{2}, \dots, j_{n-1}+\frac{1}{2}, j_n-\frac{1}{2}}^n & \text{si } j_n \leq 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ pair} \\ q_n K_{j_1+\frac{1}{2}, \dots, j_{n-1}+\frac{1}{2}, j_n-\frac{1}{2}}^n & \text{si } j_n > 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ pair} \\ K_{j_1+\frac{1}{2}, \dots, j_{n-1}+\frac{1}{2}, j_n+\frac{1}{2}}^n & \text{si } j_n \geq 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ impair} \\ q_n K_{j_1+\frac{1}{2}, \dots, j_{n-1}+\frac{1}{2}, j_n+\frac{1}{2}}^n & \text{si } j_n < 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ impair} \end{array} \right.$$

et $\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n M^{n,1} M^{1,n}) =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n-1}^n & \text{si } j_n \leq 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ pair} \\ q_n K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n & \text{si } j_n > 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ pair} \\ q_n K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n & \text{si } j_n < 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ impair} \\ K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n+1}^n & \text{si } j_n \geq 0 \text{ et } n + \sum j_p \text{ impair} \end{array} \right.$$

PROPOSITION 3.7. *Pour $(j_1, \dots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$ on a :*

1. $\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n L_n^n) =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n-1}^n & \text{si } j_n \leq 0 \text{ et } \sum j_p \text{ impair} \\ q_n K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n & \text{si } (j_n > 0 \text{ et } \sum j_p \text{ impair}) \text{ ou } (j_n < 0 \text{ et } \sum j_p \text{ pair}) \\ K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n+1}^n & \text{si } j_n \geq 0 \text{ et } \sum j_p \text{ pair} \end{array} \right.$$

2. $\text{dom}(K_{j_1, \dots, j_n}^n L_{n-}^n) =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n+1}^n & \text{si } j_n \geq 0 \text{ et } \sum j_p \text{ impair} \\ q_n K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n}^n & \text{si } (j_n < 0 \text{ et } \sum j_p \text{ impair}) \text{ ou } (j_n > 0 \text{ et } \sum j_p \text{ pair}) \\ K_{j_1+1, \dots, j_{n-1}+1, j_n-1}^n & \text{si } j_n \leq 0 \text{ et } \sum j_p \text{ pair} \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION. Corollaire assez facile de la proposition 3.5 et de la remarque 3.6. \square

THÉOREMÈ 3.8. *L'algèbre \mathcal{O}^n des opérateurs sur \mathcal{S}_n invariants par un groupe fortement transitif et respectant les types est engendrée par :*

$$L_k^n \text{ et } L_{n-}^n (0 \leq k \leq n).$$

Elle est non commutative

DÉMONSTRATION. Par un raisonnement par récurrence sur le degré de K_{j_1, \dots, j_n}^n et en utilisant les propositions précédentes. Pour la non commutativité on a :

$$\text{dom}(L_n^n L_{n-}^n) = K_{2,2, \dots, 2}^n \text{ alors que } \text{dom}(L_{n-}^n L_n^n) = q_n K_{2,2, \dots, -1}^n. \quad \square$$

REMARQUE 3.9. 1. *Les opérateurs L_k^n et L_{n-}^n ($0 \leq k \leq n$) sont des opérateurs symétriques et ils engendrent \mathcal{O}^n qui est formée d'opérateurs non nécessairement symétriques ; c'est possible car \mathcal{O}^n n'est pas commutative.*

2. *L'algèbre \mathcal{O}^{n*} des opérateurs sur \mathcal{S}_n invariants sous le groupe G^* , très fortement transitif, transitif sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$, admet pour base les $K_{j_1, \dots, j_{n-1}, j_n}^{n*} = K_{j_1, \dots, j_{n-1}, j_n}^n + K_{j_1, \dots, j_{n-1}, -j_n}^n$, pour $(j_1, \dots, j_{n-1}, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ et $j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n \geq 0$.*

THÉOREMÈ 3.10. *L'algèbre \mathcal{O}^{n*} est commutative. C'est l'algèbre de polynômes $\mathcal{O}^{n*} = \mathbb{C}[L_1^n, \dots, L_{n-1}^n, L_n^{n*}]$ si l'on note $L_n^{n*} = L_n^n + L_{n-}^n$.*

DÉMONSTRATION. D'après le calcul précédant la proposition 3.1, l'algèbre \mathcal{O}^{n*} est formée d'opérateurs symétriques, elle est donc commutative. D'après les propositions 3.1, 3.4 et 3.7 elle est engendrée par $L_k^n (0 \leq k \leq n-1)$ et L_n^{n*} . De plus pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, le terme dominant de $(L_1^n)^{a_1} (L_2^n)^{a_2} \dots (L_n^{n*})^{a_n}$ est $K_{a_1+a_2+\dots+a_n, a_2+\dots+a_n, \dots, a_n}^{n*}$. Les variables $L_k^n (0 \leq k \leq n-1)$ et L_n^{n*} sont donc algébriquement indépendantes et $\mathcal{O}^{n*} = \mathbb{C}[L_1^n, \dots, L_n^{n*}]$. \square

4. Commentaires :

Comme signalé en [K-R 07], on peut comparer nos résultats avec les résultats classiques de Ichiro Satake [S 63], qui a étudié les groupes réductifs sur un corps p-adique. Si G est un tel groupe et U un "bon" sous-groupe compact ouvert, alors l'algèbre de Hecke, $\mathcal{H}(G, U)$, c'est à dire

l'algèbre de convolution des fonctions complexes bi- U -invariantes à support compact, est toujours commutative si G est connexe. Elle est même intègre de degré de transcendance le rang relatif de G , et on sait déterminer des générateurs explicites.

À un tel groupe G est associé son immeuble de Bruhat-Tits \mathcal{A} qui est supposé ici de type \widetilde{B}_n , ($n \geq 3$).

Pour faire le lien entre notre point de vue et celui de Satake il faut choisir pour U le fixateur K_s dans G d'un sommet s de type i . Alors G/U s'identifie à l'ensemble \mathcal{S}_{G_i} des sommets de type appartenant à l'orbite G_i de i sous G . Ainsi $\mathcal{H}(G, U)$ s'identifie à l'algèbre \mathcal{O}_{G_i} des opérateurs G -invariants sur \mathcal{S}_{G_i} .

Examinons de plus près les conditions d'application du théorème de Satake. Il faut que $U = K_s$ soit un "bon" sous-groupe compact ouvert ce qui se traduit par les conditions techniques I et II de Satake. La condition II est essentiellement conséquence des propriétés connues des immeubles (car on a choisi $U = K_s$). La condition I se résume en l'existence de décompositions dans $G : G = U.H.N$ (Iwasawa) et $G = U.H.U$ (Bruhat). Cette décomposition de Bruhat est vérifiée si et seulement si $U = K_s$ induit tout le groupe de Weyl relatif sur un appartement contenant s ; cela élimine donc le cas de l'algèbre \mathcal{O}^n (on a bien trouvé que \mathcal{O}^n est non commutative). La décomposition d'Iwasawa est vérifiée essentiellement si $U = K_s$ est transitif sur la frontière Ω de l'immeuble, ce qui conduit à la même élimination.

Pour les autres cas envisagés ici, si G respecte les types, $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ n'est pas une orbite de G et la non commutativité de \mathcal{O} ne contredit pas Satake. Pour G très fortement transitif, transitif sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$, on a vu que les algèbres \mathcal{O}^* et \mathcal{O}^{n*} sont bien commutatives.

REFERENCES

- [B 68] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4, 5 et 6. Éléments de mathématique, Hermann, Paris (1968).
- [C 01] D. I. CARTWRIGHT, *Spherical harmonic analysis on buildings of type \widetilde{A}_n* , *Monatsh. Math.*, **133** (2001), pp. 93–109.
- [CM 94] D. I. CARTWRIGHT - W. MLOTKOWSKI, *Harmonic analysis for groups acting on triangle buildings*, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*, **56** (1994), pp. 345–383.
- [CW 04] D. I. CARTWRIGHT - W. WOESS, *Isotropic random walks in a building of type \widetilde{A}_d* , *Math. Z.*, **247** (2004), pp. 101–135.
- [GL 99] P. GÉRARDIN - K. F. LAI, *Opérateurs invariants sur les immeubles affines de type A* , *C. R. Acad. Sci. Paris ser. I*, **329** (1999), pp. 1–4.

- [K-R 07] F. KELLIL - G. ROUSSEAU, *Opérateurs invariants sur certains immeubles affines de rang 2*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), **16** (2007), n° 3, pp. 591–610.
- [MZ 00] A. M. MANTERO - A. ZAPPA, *Eigenfunctions of the Laplace operators for a building of type A_2* , J. Geom. Analysis., **10** (2000), pp. 339–363.
- [MZ 02] A. M. MANTERO - A. ZAPPA, *Eigenfunctions of the Laplace operators for buildings of type B_2* , Boll. Unione Mat. Ital. Ser B Artic. Ric. Mat. (8), **5** (2002), pp. 163–195.
- [P 06] J. PARKINSON, *Buildings and Hecke algebras*, J. of Algebra, **297** (2006), pp. 1–49.
- [R 89] M. RONAN, *Lectures on buildings*, Academic Press (1989).
- [S 63] I. SATAKE, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields*, Pub. Math. I. H. E. S., **18** (1963), pp. 5–69.
- [T 78] J. TITS, *Reductive groups over local fields*, in “Automorphic forms, representations and L-functions, Corvallis-1977”, Proc. Symp. pure Math. **33**, Amer. Math. Soc. (1979), pp. 29–69.
- [W 09] R. WEISS, *The structure of affine buildings*, Annals of Math. Studies, **168**, Princeton U. Press (2009).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 gennaio 2011.