Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 139 (2018), 1–76
DOI 10.4171/RSMUP/139-1

Algèbres de distributions et $\mathcal{D}$-modules arithmétiques

Christine Huyghe (∗) – Tobias Schmidt (∗∗)

Résumé – Soient p un nombre premier, V un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, G un groupe algébrique affine lisse sur Spec V. En utilisant les techniques de puissances divisées de niveau m de Berthelot, nous construisons dans ce cadre des algèbres de distributions arithmétiques, avec des niveaux m, généralisant la construction classique. Nous construisons aussi la complétion faible de l'algèbre des distributions classique sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$. Nous montrons alors que ces algèbres de distribution s'identifient aux opérateurs différentiels arithmétiques invariants sur G et donnons un théorème de cohérence si l'indice de ramification de K est $< p - 1$.

Summary – Let p be a prime number, V a complete discrete valuation ring of unequal caracteristics $(0, p)$, G a smooth affine algebraic group over Spec V. Using partial divided powers techniques of Berthelot, we construct arithmetic distribution algebras, with level m, generalizing the classical construction of the distribution algebra. We also construct the weak completion of the classical distribution algebra over a finite extension K of $\mathbf{Q}_p$. We then show that these distribution algebras can be identified with invariant arithmetic differential operators over G, and prove a coherence result when the ramification index of K is $< p - 1$.

Mathematics Subject Classification (2010). 20G05, 20G25, 13N10, 16S32.

Keywords. Arithmetic $\mathcal{D}$-modules, p-adic distribution algebras.

(∗) *Indirizzo dell'A.*: IRMA, Université de Strasbourg , 7 rue René Descartes , 67084 Strasbourg cedex , France
E-mail: huyghe@math.unistra.fr

(∗∗) *Indirizzo dell'A.*: Tobias Schmidt, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France
E-mail: Tobias.Schmidt@univ-rennes1.fr

Table des matières

1. Introduction

Soient p un nombre premier, V une $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre noethérienne, $S = \operatorname{Spec} V$, et G un schéma en groupes affine et lisse sur S. On suppose dans la suite que S est connexe. C'est un résultat classique de Demazure et Gabriel [DG70] que l'algèbre de distributions de G, $\operatorname{Dist}(G)$, s'identifie aux opérateurs différentiels globaux sur G qui sont G-invariants. Rappelons que l'algèbre $\operatorname{Dist}(G)$ joue un rôle central dans la théorie des représentations de G. Si, en outre, S est un corps de caractéristique 0, l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G s'identifie à l'algèbre de distributions de G. Pour tout niveau m, Berthelot a construit des faisceaux d'opérateurs différentiels arithmétiques $\mathcal{D}_G^{(m)}$. Dans cet article, nous construisons des algèbres de distributions sur G canoniquement isomorphes aux opérateurs différentiels arithmétiques de niveau m invariants sous l'action de G. Par analogie à la caractéristique 0, on peut donc voir ces algèbres de distributions comme des analogues arithmétiques de niveau m de l'algèbre enveloppante de $\operatorname{Lie}(G)$ sur une base arithmétique S. Nous construisons aussi des algèbres de distributions p-adiquement complètes de niveau m pour un schéma formel en groupes, $\mathcal{G}$, sur le spectre formel d'un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$. Dans ce cas, on peut aussi passer à la limite sur m et construire une algèbre de distributions faiblement complète correspondant aux opérateurs différentiels arithmétiques sur $\mathcal{G}$ qui sont $\mathcal{G}$-invariants.

Une motivation importante de ces constructions réside dans le cas du complété formel d'un schéma en groupes réductif connexe déployé sur V. Dans ce contexte, nous utilisons ces algèbres ([HS15]) pour montrer une version arithmétique, i.e. une version pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de Berthelot, du théorème de localisation classique de Beilinson et Bernstein [BB81].

Classiquement, l'algèbre Dist(G) est définie en dualisant les fonctions sur les voisinages infinitésimaux de la section unité de G. L'idée de notre construction de l'algèbre des distributions de niveau m est de remplacer ces voisinages infinitésimaux par les m-PD-voisinages infinitésimaux de la section unité de G, au sens des puissances divisées partielles de niveau m de Berthelot.

Indiquons maintenant brièvement la structure de notre article.

Dans la section 2, nous rappelons la théorie des puissances divisées partielles et la construction des opérateurs différentiels arithmétiques. Nous expliquons le formalisme des opérateurs différentiels twistés par un faisceau inversible dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de Berthelot et donnons quelques propriétés de base. Ces faisceaux twistés jouent un rôle important en théorie des représentations et c'est ce qui motive la construction cristalline faite ici, valable sur une base arithmétique.

Dans la section 3, nous rappelons quelques généralités sur les faisceaux équivariants sur les schémas munis d'une action du schéma en groupes G, qui sont éparpillées dans la littérature. Nous appliquons ces considérations aux versions arithmétiques des faisceaux de parties principales, aux algèbres symétriques et aux opérateurs différentiels dans le cas d'un schéma en groupes G lisse sur S. Nous montrons en particulier que ces faisceaux sont G-équivariants.

Dans la section 4, nous étudions systématiquement les algèbres de distributions $D^{(m)}(G)$, ainsi que les modules sur ces algèbres. Nous montrons ainsi que la construction des algèbres $D^{(m)}(G)$ est fonctorielle en G. D'autre part, ces algèbres sont filtrées par la filtration par l'ordre et le gradué associé à cette filtration est commutatif (proposition 4.1.8) et s'identifie à l'algèbre symétrique de niveau m de Lie(G), l'algèbre de Lie du groupe G. On dispose en particulier d'un théorème du type Poincaré–Birkhoff–Witt pour $D^{(m)}(G)$ en termes d'une V-base de Lie(G). De plus, les anneaux $D^{(m)}(G)$ sont noethériens à gauche et à droite. Nous donnons une description explicite de ces algèbres dans le cas du groupe additif et du groupe multiplicatif, et introduisons la notion de PD stratification de niveau m en § 4.2, permettant de décrire plus facilement les $D^{(m)}(G)$-modules.

En outre, si X est un S-schéma muni d'une action de G (à droite), nous donnons en § 4.3 et § 4.4 une interprétation géométrique des algèbres $D^{(m)}(G)$ en montrant qu'il existe un homomorphisme d'anneaux de $D^{(m)}(G)$ vers l'algèbre des sections globales sur X du faisceau des opérateurs différentiels de niveau m sur X : $\mathcal{D}_X^{(m)}$. De plus, et c'est un résultat très important pour les applications, nous montrons que cet homomorphisme d'anneaux est surjectif si X est un espace homogène. Enfin, dans le cas où $X = G$, ces constructions permettent d'identifier $D^{(m)}(G)$ avec les opérateurs différentiels sur G, G-invariants. Tous ces résultats sont aussi valables en caractéristique finie, ou si V possède de la torsion. Pour résumer on dispose du résultat suivant.

Théorème 4.4.9.2. *Soit $\mathcal{D}_G^{(m)}$ le faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques de Berthelot sur G, $\Gamma(G, \mathcal{D}_G^{(m)})^G$ les sections globales G-invariantes, alors il existe un isomorphisme d'algèbres canonique $\Gamma(G, \mathcal{D}_G^{(m)})^G \simeq D^{(m)}(G)$.*

Au début de la section 5, nous établissons des analogues des résultats précédents dans le cas où V est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$ et pour un schéma formel en groupes (cette notion étant définie en § 5.1). Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{S}$-schéma formel en groupes, alors on peut construire des algèbres de distributions complétées de niveau m : $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})$. En passant à la limite inductive sur m, on en déduit une algèbre $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$. Dans l'énoncé qui suit $\Gamma(\mathcal{G}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{G}}^{(m)})^{\mathcal{G}}$ désigne les sections globales $\mathcal{G}$-invariantes de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{G}}^{(m)}$.

Théorème 5.2.3. *Il existe des isomorphismes canoniques d'algèbres filtrées, entre les algèbres $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})$ et $\Gamma(\mathcal{G}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{G}}^{(m)})^{\mathcal{G}}$ (resp. entre les algèbres $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ et $\Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{D}_{\mathcal{G},\mathbf{Q}}^\dagger)^{\mathcal{G}}$).*

En § 5.3 et § 5.4, nous relions ces constructions à la théorie des représentations p-adiques dans le cas où V est l'anneau des entiers d'un corps local p-adique. Nous introduisons un certain groupe analytique rigide G° dont le groupe des points rationnels $G^\circ(K)$ est égal au 'premier groupe de congruence' de $G(V)$. Son algèbre des distributions analytiques rigides $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$ est le dual continu de l'espace des sections globales de G°, muni du produit de convolution. Nous montrons que l'inclusion de $\mathrm{Lie}(G^\circ)$ dans $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$ s'étend naturellement en un isomorphisme entre $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ et $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$, ce qui généralise [PSS13, 2.3.3.] dans le cas $V = \mathbf{Z}_p$ et $\mathrm{GL}(2)$. Un résultat d'Emerton [Em04] implique alors que l'anneau $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ est cohérent, si l'indice de ramification e de $K/\mathbf{Q}_p$ satisfait $e < p - 1$. Précisément, nous obtenons les résultats suivants.

Proposition 5.3.1. *L'application $U(\mathrm{Lie}(G^\circ)) \to D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$ s'étend en un isomorphisme d'anneaux topologiques $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\simeq} D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$.*

Corollaire 5.3.2. *Soit e l'indice de ramification de K sur $\mathbf{Q}_p$. Si $e < p - 1$, alors l'anneau $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ est cohérent.*

Nous introduisons ensuite les catégories des représentations analytiques rigides des groupes de Lie $G^\circ(K)$ et $G(V)$ ainsi que leurs sous-catégories de représentations admissibles. Par construction, ces dernières sont anti-équivalentes aux catégories de modules de présentation finie sur $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$.

Les algèbres de distributions arithmétiques avaient été définies ad hoc par Kaneda et Ye ([KY07]), sans utiliser un formalisme conceptuel et fonctoriel comme ici, et qui ne les ont pas étudiées systématiquement. Remarquons aussi que, dans le cas GL(2) et $V = \mathbf{Z}_p$, ces algèbres sont définies ad hoc par Patel, Schmidt et Strauch [PSS13] pour calculer des sections globales des opérateurs log-différentiels arithmétiques sur certains modèles formels semistables de la droite projective.

Notons aussi que Le Stum et Quiros ont introduit les m-PD-enveloppes de la section unité d'un groupe G dans [LSQ08].

Notations. V désigne toujours une $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre noethérienne et $S = \operatorname{Spec} V$ est connexe. Si, plus particulièrement, V est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$ (noté AVDC dans la suite), nous noterons π une uniformisante de V, $K = \operatorname{Frac}(V)$ et k le corps résiduel de V. Si V est un AVDC, on écrit $\mathcal{S} = \operatorname{Spf} V$. Un $\mathcal{S}$-schéma formel est un schéma formel localement noethérien $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{S}$, tel que $\pi\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ soit un idéal de definition. Si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{S}$-schéma formel, alors X_i sera le S-schéma $\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \operatorname{Spec}(V/\pi^{i+1}V)$. Si X est un S-schéma quelconque, le $\mathcal{S}$-schéma formel obtenu par compléter X le long de l'idéal $\pi\mathcal{O}_X$, sera toujours noté $\mathcal{X}$.

Tous les schémas considérés dans cet article sont localement noethériens.

2. Rappels sur les opérateurs différentiels arithmétiques

2.1 – *Enveloppes à puissances divisées partielles*

Nous utiliserons dans la suite le formulaire (1.1.3 de [Ber96]).

2.1.1 – Définitions

Fixons un entier m. Pour un entier $k \in \mathbf{N}$, q_k est le quotient de la division euclidienne de k par p^m. Berthelot introduit les coefficients suivants pour deux entiers k, k' avec $k \geq k'$

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\} = \frac{q_k!}{q_{k'}! q_{k''}!} \in \mathbf{N}, \quad \left\langle \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\rangle = \binom{k}{k'} \left\{ \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\}^{-1} \in \mathbf{Z}_p$$

où $k'' = k - k'$. On peut généraliser ces coefficients pour des multi-indices en posant pour $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_N) \in \mathbf{N}^N$,

$$q_{\underline{k}}! = q_{k_1}! \cdots q_{k_N}!,$$

et
$$\left\{ \begin{matrix} k \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\} = \frac{q_{\underline{k}}!}{q_{\underline{k}'}! q_{\underline{k}''}!} \in \mathbf{N}, \quad \left\langle \begin{matrix} k \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle = \binom{k}{\underline{k}'} \left\{ \begin{matrix} k \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\}^{-1} \in \mathbf{Z}_p.$$

S'il y a lieu, on précisera dans ces notations le niveau m en indice.

On se réfère ici à 1.3.5 de [Ber96]. Soit A une $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre commutative, (I, J, γ) un m-PD-idéal. Par définition, cela signifie que (J, γ) est un idéal à puissances divisées (un PD-idéal) et que I est muni de puissances divisées partielles, c'est-à-dire que, pour tout entier k qui se décompose $k = p^m q_k + r$ (avec $r < p^m$), il existe une opération définie pour tout x de I par
$$x^{\{k\}} = x^r \gamma_k(x^{p^m}).$$

Quand nous voudrons préciser le niveau m, nous noterons $q_k^{(m)}$ l'entier q_k que nous venons de définir. On a ainsi la relation
$$q_k! x^{\{k\}} = x^k,$$

et le formulaire

- pour tout $x \in I$,

(1a) $$x^{\{0\}} = 1, \quad x^{\{1\}} = x,$$

(1b) $$x^{\{k\}} \in I \quad \text{pour tout } k \geq 1,$$

(1c) $$x^{\{k\}} \in J \quad \text{pour tout } k \geq p^m;$$

- pour tout $x \in I$, $a \in A$, $k \in \mathbf{N}$,

(1d) $$(ax)^{\{k\}} = a^k x^{\{k\}};$$

- pour tout $x, y \in I$, $k \in \mathbf{N}$,

(1e) $$(x+y)^{\{k\}} = \sum_{k'+k''=k} \left\langle \begin{matrix} k \\ k' \end{matrix} \right\rangle x^{\{k'\}} y^{\{k''\}};$$

- pour tout $x \in I$, $k', k'' \in \mathbf{N}$,

(1f) $$x^{\{k'\}} x^{\{k''\}} = \left\{ \begin{matrix} k' + k'' \\ k' \end{matrix} \right\} x^{\{k'+k''\}}.$$

Un homomorphisme d'algèbres φ entre deux m-PD-algèbres (A, I, J, γ) et (A', I', J', γ') est un m-PD-morphisme si $\varphi(I) \subset I'$ et si $\varphi\colon (A, J, \gamma) \to (A', J', \gamma')$ est un PD-morphisme, autrement dit $\gamma'(\varphi(x)) = \varphi(\gamma(x))$ pour tout x de J. Dans cette situation, on a donc, pour tout $x \in I$,

$$\varphi(x^{\{k\}}) = (\varphi(x))^{\{k\}}.$$

Ces notations seront aussi utilisées avec des multi-indices $\underline{k} = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbf{N}^N$ et les conventions habituelles, pour des multi-indices $\underline{k}$ et $\underline{k}'$ de longueur N avec $\underline{k} \geq \underline{k}'$

$$\left\langle \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle = \prod_{i=1}^{N} \left\langle \begin{matrix} k_i \\ k'_i \end{matrix} \right\rangle, \quad \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\} = \prod_{i=1}^{N} \left\{ \begin{matrix} k_i \\ k'_i \end{matrix} \right\}.$$

Enfin, on notera $|\underline{k}| = k_1 + \cdots + k_N$.

2.1.2 – Enveloppes à puissances divisées d'un faisceau d'idéaux

Avec ce formalisme, les m-PD-enveloppes à puissances divisées sont construites de façon analogue aux PD-enveloppes à puissances divisées (1.4.2 de [Ber96]). Ces constructions se faisceautisent.

On dit qu'un idéal I d'une V-algèbre commutative A est régulier si I/I^2 est un $V = A/I$-module libre de rang fini. En ce cas, si $t_1, \dots, t_N \in I$ sont tels que modulo I^2, ces éléments forment une base de I/I^2, on dit que $t_1, \dots, t_N$ forment une suite régulière d'éléments de I. Suivant 1.5.3 de [Ber96] (que nous appliquons avec $R = V$ et $A/I = V$), si I est un idéal régulier d'une V-algèbre A et $(t_1, \dots, t_N)$ est une suite régulière de paramètres de I, alors la m-PD-enveloppe de I, notée $P_{(m)}(I)$, est un V-module libre de base les éléments

$$\underline{t}^{\{\underline{k}\}} = t_1^{\{k_1\}} \cdots t_N^{\{k_N\}},$$

où $q_i! t_i^{\{k_i\}} = t_i^{k_i}$. Sous ces hypothèses, ces algèbres sont indépendantes du choix de la m-PD-structure compatible sur la base V. Ces algèbres sont munies d'une filtration décroissante par les idéaux $I^{\{n\}}$, tels que

$$I^{\{n\}} = \bigoplus_{|\underline{k}| \geq n} V \cdot \underline{t}^{\{\underline{k}\}}. \tag{2}$$

Les quotients $P^n_{(m)}(I) := P_{(m)}(I)/I^{\{n+1\}}$ sont donc engendrés comme V-module par les éléments $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \leq n$.

Une base duale des $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ sera notée $\underline{\eta}^{\langle \underline{k} \rangle}$. Ces éléments vérifient formellement

$$\underline{\eta}^{\langle \underline{k} \rangle} = \prod_i \eta_i^{\langle k_i \rangle}, \quad \text{où } \frac{k_i!}{q_{k_i}!} \eta_i^{\langle k_i \rangle} = \eta_i^{k_i}.$$

2.2 – *Faisceaux d'opérateurs différentiels*

2.2.1 – Faisceaux gradués de parties principales

Nous reprenons ici des constructions de [Huy97]. Soient Y un S-schéma, $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre sur Y, $\mathbf{S}(\mathcal{E})$ l'algèbre symétrique associée au faisceau $\mathcal{E}$, $\mathcal{I}$ l'idéal des éléments homogènes de degré 1 de cette algèbre, on définit ci-dessous

$$\Gamma_{(m)}(\mathcal{E}) = P_{\mathbf{S}(\mathcal{E}),(m)}(\mathcal{I}),$$

où $P_{\mathbf{S}(\mathcal{E}),(m)}(\mathcal{I})$ est le faisceau de m-PD-enveloppes de l'algèbre symétrique $\mathbf{S}(\mathcal{E})$ pour l'idéal $\mathcal{I}$ et,

$$\Gamma^n_{(m)}(\mathcal{E}) = \Gamma_{(m)}(\mathcal{E})/\mathcal{I}^{\{n+1\}}.$$

Ces algèbres sont graduées

$$\Gamma^n_{(m)}(\mathcal{E}) = \bigoplus_{n'\leq n} \Gamma_{(m),n'}(\mathcal{E}).$$

Si $\mathcal{E}$ admet localement pour base $\xi_1, \dots, \xi_N$, on a la description locale suivante

$$\Gamma_{(m),n'}(\mathcal{E}) \simeq \bigoplus_{|\underline{k}|=n'} \mathcal{O}_Y \underline{\xi}^{\{\underline{k}\}}, \quad \text{où } q_i!\xi_i^{\{k_i\}} = \xi_i^{k_i}. \tag{3}$$

Définissons maintenant par dualité

$$\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E}) = \bigcup_n \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\Gamma^n_{(m)}(\mathcal{E}^\vee), \mathcal{O}_Y). \tag{4}$$

On obtient ainsi une algèbre commutative graduée

$$\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E}) = \bigoplus_n \mathbf{S}^{(m)}_n(\mathcal{E}).$$

Soient $\xi_1, \dots, \xi_N$ une base locale de $\mathcal{E}$, $\underline{\xi}^{\langle \underline{k}\rangle}$ la base duale des éléments $\underline{\xi}^{\{\underline{k}\}}$ de (3). On a alors la description suivante

$$\mathbf{S}^{(m)}_n(\mathcal{E}) \simeq \bigoplus_{|\underline{k}|=n} \mathcal{O}_Y \underline{\xi}^{\langle \underline{k}\rangle}, \quad \text{où } \frac{k_i!}{q_{k_i}!}\xi^{\langle k_i\rangle} = \xi^{k_i}.$$

Quand le contexte sera clair on omettra parfois de noter le schéma Y en indice.

Appliquons maintenant la définition d'enveloppe à puissances divisées partielles dans le cas des faisceaux de parties principales (1.5.3 et 2.1 [Ber96]) de niveau m sur un S-schéma lisse Y.

2.2.2 – Faisceaux de parties principales

On note $\mathcal{P}^n_{Y,(m)}$ le faisceau des parties principales de niveau m et d'ordre n de Y relativement à S : ce sont les enveloppes à puissance divisées partielles de niveau m de l'idéal $\mathcal{I}$ de l'immersion diagonale $Y \hookrightarrow Y \times Y$. Par construction, il existe un morphisme canonique de $\mathcal{O}_S$-algèbres

$$r_m \colon \mathcal{O}_{Y\times Y} \longrightarrow \mathcal{P}^n_{Y,(m)}. \tag{5}$$

On dispose de 2 morphismes canoniques induits par $a \mapsto a \otimes 1$, noté $\mathcal{O}_{Y,g}$ et par $a \mapsto 1 \otimes a$ noté $\mathcal{O}_{Y,d}$ sur $\mathcal{P}^n_{Y,(m)}$, qui munissent ce faisceau d'algèbres de 2 structures de $\mathcal{O}_Y$-module. Lorsque le contexte sera clair les mentions d et g ne figureront pas dans les notations. L'application r_m est $\mathcal{O}_Y$-linéaire pour la structure de $\mathcal{O}_{Y,g}$-module de $\mathcal{P}^n_{Y,(m)}$.

Si $(y_1, \dots, y_N)$ est un système de coordonnées locales sur Y, et si $\tau_i = 1 \otimes y_i - y_i \otimes 1 \in \mathcal{O}_{Y\times Y}$, on dispose localement d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-modules

$$\mathcal{P}^n_{Y,(m)} \simeq \bigoplus_{|\underline{k}|\leq n} \mathcal{O}_Y \tau_1^{\{u_1\}} \cdots \tau_N^{\{u_N\}}, \quad \text{où } q_i!\tau_i^{\{k_i\}} = \tau_i^{k_i}. \tag{6}$$

L'idéal $\mathcal{I}^{\{k\}}$ est l'idéal engendré par les éléments $\underline{\tau}^{\{\underline{u}\}}$ avec $|\underline{u}| \geq k$.

Ces définitions ont un sens pour $m = \infty$ où l'on trouve que $\mathcal{P}^n_{Y,(\infty)} = \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}^{n+1}$. Le cas $m = 0$ correspond à l'algèbre à puissances divisées classique de l'idéal d'une V-algèbre A.

En appliquant les résultats de 1.1.5 de [Huy97], on voit que l'algèbre graduée associée à la filtration m-PD-adique de $\mathcal{P}_{Y,(m)}$, s'identifie à la m-PD-algèbre graduée $\Gamma_{(m)}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) = \Gamma_{(m)}(\Omega^1_Y)$ (cf. § 2.2.1). Plus précisément, on dispose d'un isomorphisme canonique de m-PD-algèbres

$$d_m^* \colon \Gamma_{(m)}(\Omega^1_Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{P}_{Y,(m)}. \tag{7}$$

Dans la suite, on note plus simplement

$$\Gamma^n_{Y,(m)} = \Gamma^n_{(m)}(\Omega^1_Y) \quad \text{(resp. sans } n\text{)}. \tag{8}$$

Donnons maintenant une description en coordonnées locales de ces algèbres. Avec les notations précédentes, notons ξ_i la classe de τ_i dans $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, alors localement les faisceaux $\Gamma^n_{(m)}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-modules libres de base les éléments $\underline{\xi}^{\{\underline{u}\}} = \xi_1^{\{u_1\}} \cdots \xi_N^{\{u_N\}}$ avec $\sum u_i \leq n$. Soit f un morphisme de S-schémas lisses : $Y \to X$, alors il existe un homomorphisme canonique $\mathcal{O}_Y$-linéaire noté

$df\colon f^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \to \mathcal{P}^n_{Y,(m)}$ (2.1.4 de [Ber96]). De plus, si h est une section locale de $\mathcal{O}_X$, l'image de la classe de $1\otimes h - h\otimes 1$ par df est la classe de l'élément $1\otimes f^{-1}(h) - f^{-1}(h)\otimes 1$ dans $\mathcal{P}^n_{Y,(m)}$. On peut ainsi vérifier que si g est un morphisme de S-schémas lisses : $Z \to Y$, alors le morphisme $d(f\circ g)\colon (f\circ g)^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \to \mathcal{P}^n_{Z,(m)}$ coïncide avec $dg\circ g^*df$. Considérons le cas où $Y = Z\times X$ et où p_1 et p_2 sont les deux projections. On dispose aussi d'une projection $r_2\colon Y\times Y \to X\times X$. L'application canonique $r_2^{-1}\mathcal{O}_{X\times X} \to \mathcal{O}_{Y\times Y}$, envoie l'idéal diagonal de X vers l'idéal diagonal de Y. Par la propriété universelle des m-PD-enveloppes, on a donc un morphisme canonique, pour tout n

$$dp_2\colon p_2^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \longrightarrow \mathcal{P}^n_{Y,(m)}.$$

De même on dispose de $dp_1\colon p_1^*\mathcal{P}^n_{Z,(m)} \to \mathcal{P}^n_{Y,(m)}$, et si J_Z est le m-PD-idéal de la m-PD-algèbre $\mathcal{P}^n_{Z,(m)}$, on dispose d'un m-PD-morphisme

$$s_2\colon \mathcal{P}^n_{Y,(m)} \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{P}^n_{Y,(m)}/p_1^*(J_Z).$$

Décrivons localement ces morphismes. Supposons que $t'_1,\dots,t'_M$, $t_1,\dots,t_N$ soient des coordonnées locales sur Z et X respectivement, notons $\tau'_i = 1\otimes t'_i - t'_i\otimes 1$, resp. $\tau_i = 1\otimes t_i - t_i\otimes 1$, de sorte que les éléments $p_1^*(t'_1),\dots,p_1^*(t'_M)$, $p_2^*(t_1),\dots,$ $p_2^*(t_N)$ forment un système de coordonnées locales de Y. Dans toute la suite, on notera encore τ_i (resp. τ'_i) les images de ces éléments dans $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ (resp. $\mathcal{P}^n_{Y,(m)}$). Localement, on peut donc identifier

$$\mathcal{P}^n_{Y,(m)} \simeq \bigoplus_{|\underline{l}_1|+|\underline{l}_2|\le n} \mathcal{O}_Y\, p_1^*(\underline{\tau}'^{\{\underline{l}_1\}}_1)\, p_2^*(\underline{\tau}_2^{\{\underline{l}_2\}}),$$

et $p_1^*(J_Z)$ avec le sous $\mathcal{O}_X$-module engendré par les éléments $p_1^*(\underline{\tau}'^{\{\underline{l}_1\}}_1)p_2^*(\underline{\tau}_2^{\{\underline{l}_2\}})$ pour lesquels $|\underline{l}_1|\ge 1$, ce qui donne

$$\mathcal{P}^n_{Y,(m)}/p_1^*(J_Z) \simeq \bigoplus_{|\underline{l}_2|\le n} \mathcal{O}_Y\, p_2^*(\underline{\tau}_2^{\{\underline{l}_2\}}).$$

Or, avec ce choix de coordonnées locales, on a aussi

$$\mathcal{P}^n_{X,(m)} \simeq \bigoplus_{|\underline{l}_2|\le n} \mathcal{O}_X\, \underline{\tau}_2^{\{\underline{l}_2\}},$$

en d'autres termes, $s_2\circ dp_2$ est un m-PD-isomorphisme d'algèbres, noté λ_2. On pose donc

$$q_2 = \lambda_2^{-1}\circ s_2\colon \mathcal{P}^n_{Y,(m)} \longrightarrow p_2^*\mathcal{P}^n_{X,(m)}. \tag{9}$$

Avec les identifications précédentes, on a

$$q_2\Big(\sum_{\underline{l}_1,\underline{l}_2} a_{\underline{l}_1,\underline{l}_2} p_1^*(\underline{\tau}'^{\{\underline{l}_1\}}_1) p_2^*(\underline{\tau}_2^{\{\underline{l}_2\}})\Big) = \sum_{\underline{l}_2} a_{0,\underline{l}_2} p_2^*(\underline{\tau}_2^{\{\underline{l}_2\}}).$$

On vérifie ainsi localement que q_2 est une section canonique de dp_2.

Le raisonnement qui précède peut aussi s'appliquer aux faisceaux d'algèbres $\Gamma^n_{X,(m)}$ et $\Gamma^n_{Y,(m)}$ si $Y = Z \times X$. Comme on a un isomorphisme $\Omega^1_Y \simeq p_1^*\Omega^1_Z \oplus p_2^*\Omega^1_X$, la proposition 1.2.2 de [Huy97], implique que l'on a un isomorphisme canonique $\Gamma_{Z\times X,(m)} \simeq p_1^*\Gamma_{Z,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} p_2^*\Gamma_{X,(m)}$. En procédant exactement comme ci-dessus, on voit qu'il existe un m-PD-morphisme canonique

$$p_2^*\Gamma^n_{X,(m)} \longrightarrow \Gamma^n_{Z\times X,(m)},$$

et une section à ce morphisme, qui est aussi un m-PD-morphisme

$$q_2'\colon \Gamma^n_{Z\times X,(m)} \longrightarrow p_2^*\Gamma^n_{X,(m)}.$$

En coordonnées locales, et avec les notations précédentes, notons ξ_i' la classe de $1 \otimes t_i' - t_i' \otimes 1$ dans $\Gamma_{Z,(m)}$ (resp. ξ_i la classe de $1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$ dans $\Gamma_{X,(m)}$). On peut alors identifier

$$\Gamma^n_{Z\times X,(m)} \simeq \bigoplus_{|\underline{l}_1|+|\underline{l}_2|\leq n} \mathcal{O}_Y\, p_1^*(\underline{\xi}'^{\{\underline{l}_1\}}_1) p_2^*(\underline{\xi}_2^{\{\underline{l}_2\}}), \quad \Gamma^n_{X,(m)} \simeq \bigoplus_{|\underline{l}|\leq n} \mathcal{O}_X \underline{\xi}_2^{\{\underline{l}\}}),$$

et avec ces identifications

$$q_2'\Big(\sum_{\underline{l}_1,\underline{l}_2} a_{\underline{l}_1,\underline{l}_2} p_1^*(\underline{\xi}'^{\{\underline{l}_1\}}_1) p_2^*(\underline{\xi}_2^{\{\underline{l}_2\}})\Big) = \sum_{\underline{l}_2} a_{0,\underline{l}_2} p_2^*(\underline{\xi}_2^{\{\underline{l}_2\}}).$$

2.2.3 – Faisceaux d'opérateurs différentiels

Soit X un S-schéma lisse, on définit le faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_{X,n}$ des opérateurs différentiels d'ordre n et de niveau m, comme

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X,n} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{O}_X),$$

le dual étant pris pour la structure gauche de $\mathcal{O}_X$-module sur le faisceau $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$. Le faisceau des opérateurs différentiels de niveau m est $\mathcal{D}^{(m)}_X = \varinjlim_n \mathcal{D}^{(m)}_{X,n}$.

Le faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_X$ est muni d'une structure d'anneau de la façon suivante (2.2.1 de [Ber96]). L'application $\mathcal{O}_{X\times X} \to \mathcal{O}_{X\times X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X\times X}$, qui envoie $a \otimes b$ sur $a \otimes 1 \otimes 1 \otimes b$, induit un unique m-PD-morphisme de m-PD-algèbres

$$\delta^{n,n'}\colon \mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)} \xrightarrow{\delta^{n,n'}} \mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X,(m)}, \tag{10}$$

où le produit tensoriel est donné par la structure de $\mathcal{O}_X$-module à gauche de $\mathcal{P}^{n'}_{X,(m)}$ et par la structure de $\mathcal{O}_X$-module à droite de $\mathcal{P}^{n}_{X,(m)}$.

Soient $P \in \mathcal{D}^{(m)}_{X,n}$, $P' \in \mathcal{D}^{(m)}_{X,n'}$, l'opérateur PP' est obtenu comme composé

$$\mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)} \xrightarrow{\delta^{n,n'}} \mathcal{P}^{n}_{X,(m)} \otimes \mathcal{P}^{n'}_{X,(m)} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes P'} \mathcal{P}^{n}_{X,(m)} \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X. \tag{11}$$

Nous renvoyons à 2.3 de [Ber96] pour le fait que se donner sur un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$ une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module revient à se donner une m-PD-stratification. En dualisant, on déduit facilement de l'isomorphisme d^*_m de (7), comme en 1.3.7.3 de [Huy97], l'isomorphisme canonique d'algèbres commutatives

$$d_m\colon \mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}^{(m)}_X \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X) \tag{12}$$

où $\mathcal{T}_X$ désigne le faisceau tangent de X. En particulier, l'algèbre $\mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}^{(m)}_X(U)$ est noethérienne sur les ouverts affines U de X, et donc aussi $\mathcal{D}^{(m)}_X(U)$ par un argument classique.

Si $x_1, \ldots, x_N$ est un système de coordonnées locales sur X sur un ouvert U, $\tau_i = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$, on note $\underline{\partial}^{\langle k\rangle}$ la base duale des $\underline{\tau}^{\{k\}}$ de (6), et $\partial_i^{[k_i]} = \partial_i^{k_i}/k_i!$. Alors, $\partial_i^{\langle k_i\rangle} = q_{k_i}!\partial_i^{[k_i]}$. On a la description locale suivante sur l'ouvert U

$$\mathcal{D}^{(m)}_X{}_{|U} \simeq \bigoplus_{\underline{k}} \mathcal{O}_U \underline{\partial}^{\langle k\rangle} \tag{13}$$

La structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module de $\mathcal{O}_X$ est donné par le composé suivant, pour P une section locale de $\mathcal{D}^{(m)}_{X,n}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X &\xrightarrow{u_d} \mathcal{P}^{n}_{X,(m)} \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X, \\ f &\longmapsto 1 \otimes f. \end{aligned}$$

Pour les opérations cohomologiques pour les $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules cohérents, nous nous référons aux chapitres 2 et 4 de [Ber02]. Nous utiliserons ces opérations pour des complexes de la catégorie dérivée des $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules, à cohomologie bornée et cohérente, que nous noterons $D^b_c(\mathcal{D}^{(m)}_X)$. Notons que si $f\colon Y \to X$ est un morphisme de S-schémas lisses, le foncteur image inverse $f^!$ va de la catégorie dérivée $D^b_c(\mathcal{D}^{(m)}_X)$ vers $D^b_c(\mathcal{D}^{(m)}_Y)$.

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module cohérent (vu comme complexe en degré 0), alors, comme $\mathcal{O}_Y$-module, $f^!\mathcal{E}$ s'identifie à $\mathcal{O}_Y \otimes^{\mathbf{L}}_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{E}$ (4.2 de chapitre VI de [Bor87]). Mais comme f est plat, la cohomologie de ce complexe est concentrée en degré 0, où il est isomorphe à $f^*\mathcal{E}$. Dans la suite de ce texte la notation $\mathcal{H}^0 f^!\mathcal{E}$

désignera donc, si f est lisse et $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module cohérent, un $\mathcal{D}_Y^{(m)}$-module cohérent isomorphe, comme $\mathcal{O}_Y$-module, à $f^*\mathcal{E}$.

Nous aurons aussi besoin du fait suivant. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de l'immersion diagonale $X \hookrightarrow X \times X$, alors, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{\{1\}}/\mathcal{I}^{\{2\}} \longrightarrow \mathcal{P}^1_{X,(m)} \longrightarrow \mathcal{O}_X,$$

où on identifie $\mathcal{O}_X$ à l'algèbre $\mathcal{P}^0_{X,(m)}$. Or, comme $\mathcal{I}^2 \subset \mathcal{I}^{\{2\}}$, on a une flèche canonique $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \mathcal{I}^{\{1\}}/\mathcal{I}^{\{2\}}$. Il résulte de (2) que $\mathcal{I}^{\{1\}} = \mathcal{I}+\mathcal{I}^{\{2\}}$, et on voit aussi que cette flèche est un isomorphisme en coordonnées locales donc un isomorphisme. D'autre part, l'application canonique $\mathcal{O}_X \to \mathcal{P}^1_{X,(m)}$ donne un scindage de la suite exacte ci-dessus, qui fournit un isomorphisme

$$\mathcal{P}^1_{X,(m)} \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_X \oplus \Omega^1_X. \tag{14}$$

En dualisant, on trouve donc des isomorphismes

$$B_m\colon \mathcal{D}^{(m)}_{X,1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{T}_X, \tag{15a}$$

$$\overline{B}_m\colon \mathcal{D}^{(m)}_{X,1}/\mathcal{D}^{(m)}_{X,0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_X, \tag{15b}$$

$$\overline{B}^*_m\colon \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_1 \mathcal{P}_{X,(m)}, \tag{15c}$$

où $\overline{B}^*_m$ est obtenu en dualisant $\overline{B}_m$.

Si V est un AVDC, $\mathcal{S} = \operatorname{Spf} V$ et si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel lisse sur $\mathcal{S}$, nous introduirons

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} = \varprojlim_i \mathcal{D}^{(m)}_{X_i} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}} = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}.$$

Si $x_1, \dots, x_N$ est un système de coordonnées locales sur $\mathfrak{X}$ sur un ouvert formel $\mathfrak{U}$, $\tau_i = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$, on note $\underline{\partial}^{\langle k\rangle}$ la base duale des $\underline{\tau}^{\{k\}}$ de (6), et $\partial_i^{[k_i]} = \partial_i^{k_i}/k_i!$. Alors, $\partial_i^{\langle k_i\rangle} = q_{k_i}!\partial_i^{[k_i]}$. On a la description locale suivante sur l'ouvert affine $\mathfrak{U}$

$$\Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) = \Big\{ \sum_{\underline{k}\in\mathbf{N}^N} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{\langle k\rangle},\ a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{U}) \;\Big|\; \mathrm{v}_p(a_{\underline{k}}) \longrightarrow +\infty \text{ si } |\underline{k}| \to +\infty \Big\}$$

$$\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}) = \Big\{ \sum_{\underline{k}\in\mathbf{N}^N} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[k]},\ a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\mathfrak{U}) \;\Big|\; \text{il existe } c \in \mathbf{R}, \eta > 0, \text{ tels que } \mathrm{v}_p(a_{\underline{k}}) > \eta|\underline{k}| + c \Big\}.$$

Ici, v_p désigne la valuation p-adique sur V-algèbre plate $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{U})$ et aussi la valuation induite sur $\mathbf{Q}$-algèbre $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}(\mathfrak{U}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{U}) \otimes \mathbf{Q}$.

2.2.4 – Faisceaux d'opérateurs différentiels twistés

Nous aurons besoin d'une version twistée par un faisceau inversible des constructions précédentes. Nous commencerons par définir les faisceaux de parties principales twistés. Reprenons ici les hypothèses de la sous-section précédente § 2.2.3. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible sur X. Introduisons le faisceau twisté des parties principales

$$ {}^t\mathcal{P}^n_{X,(m)} = \mathcal{L}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X,g}} \mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}. $$

La notation $\mathcal{O}_{X,d}$ (resp. $\mathcal{O}_{X,g}$) signifie que l'on prend la structure de $\mathcal{O}_X$-module à droite (resp. à gauche) sur $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ décrite en § 2.2.2.

Remarque. Les faisceaux ${}^t\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ ne sont pas des faisceaux d'algèbres, sauf si $\mathcal{L}$ est trivial.

Définissons sur X les faisceaux d'opérateurs différentiels twistés d'ordre inférieur à n ${}^t\mathcal{D}^{(m)}_{X,n}$ par

$$ \begin{aligned} {}^t\mathcal{D}^{(m)}_{X,n} &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X,g}}({}^t\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{O}_X) \\ &\simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X,g}}(\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}, \mathcal{L}). \end{aligned} $$

Identifions $\mathcal{L}^{-1}$ à $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Alors on dispose d'un isomorphisme canonique

$$ \begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X,g}}(\mathcal{P}^n_{X,(m)}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X,g}}(\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}, \mathcal{O}_X), \\ Q \otimes \varphi &\longmapsto (T \otimes l \longmapsto Q(T \cdot (1 \otimes \varphi(l)))), \end{aligned} $$

qui nous donne finalement, après tensorisation sur $\mathcal{O}_{X,g}$ par $\mathcal{L}$ un isomorphisme canonique

$$ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X,g}}(\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X,g}} \mathcal{D}^{(m)}_{X,n} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}^{-1}, $$

et donc

$$ {}^t\mathcal{D}^{(m)}_{X,n} \simeq \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X,g}} \mathcal{D}^{(m)}_{X,n} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}^{-1}. $$

On définit aussi

$$ \begin{aligned} {}^t\mathcal{D}^{(m)}_{X} &= \varinjlim_n {}^t\mathcal{D}^{(m)}_{X,n} \\ &\simeq \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X,g}} \mathcal{D}^{(m)}_{X} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}^{-1}. \end{aligned} $$

Observons que le m-PD-morphisme $\delta^{n,n'}$ de (10) est $\mathcal{O}_{X,g}\times\mathcal{O}_{X,d}$-linéaire pour la structure de $\mathcal{O}_{X,d}$-module sur $\mathcal{P}^{n'}_{X,(m)}$ (resp. $\mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)}$), et la structure de $\mathcal{O}_{X,g}$ -module sur $\mathcal{P}^{n}_{X,(m)}$ (resp. $\mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)}$), de sorte que l'on peut considérer l'application

$$ {}^t\delta^{n,n'}\colon \mathcal{L}^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_{X,g}}\mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)}\otimes_{\mathcal{O}_{X,d}}\mathcal{L}\longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_{X,g}}\mathcal{P}^{n}_{X,(m)}\otimes\mathcal{P}^{n'}_{X,(m)}\otimes_{\mathcal{O}_{X,d}}\mathcal{L} $$

defini par $\mathrm{Id}\otimes\delta^{n,n'}\otimes\mathrm{Id}$. Autrement dit, on dispose d'un m-PD-morphisme

$$ {}^t\delta^{n,n'}\colon {}^t\mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)}\xrightarrow{{}^t\delta^{n,n'}}{}^t\mathcal{P}^{n}_{X,(m)}\otimes{}^t\mathcal{P}^{n'}_{X,(m)}. $$

Le faisceau ${}^t\mathcal{D}^{(m)}_X$ est alors un faisceau d'anneaux comme dans le cas classique. Soient $P\in{}^t\mathcal{D}^{(m)}_{X,n}$, $P'\in{}^t\mathcal{D}^{(m)}_{X,n'}$, l'opérateur PP' est obtenu comme composé

$$ {}^t\mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)}\xrightarrow{{}^t\delta^{n,n'}}{}^t\mathcal{P}^{n}_{X,(m)}\otimes{}^t\mathcal{P}^{n'}_{X,(m)}\xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes P'}{}^t\mathcal{P}^{n}_{X,(m)}\xrightarrow{P}\mathcal{O}_X. \tag{16} $$

Soient a une section locale de $\mathcal{O}_X$, τ une section locale de l'idéal diagonal $\mathcal{I}$, alors $(a\otimes 1)\tau=\tau(1\otimes a)$ et donc les structures de $\mathcal{O}_{X,g}$ et $\mathcal{O}_{X,d}$-modules coïncident sur $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. En particulier, on dispose d'un isomorphisme

$$ \mathcal{L}^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_{X,g}}\Gamma_{(m)}(\Omega^1_X)\otimes_{\mathcal{O}_{X,d}}\mathcal{L}\simeq\Gamma_{(m)}(\Omega^1_X). $$

D'après (7), l'algèbre graduée pour la filtration $\mathcal{I}$-adique de ${}^t\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ s'identifie à

$$ \mathcal{L}^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_{X,g}}\Gamma_{(m)}(\Omega^1_X)\otimes_{\mathcal{O}_{X,d}}\mathcal{L}\simeq\mathrm{gr}^t_\bullet\,\mathcal{P}^n_{X,(m)}, $$

ce qui, compte tenu de la remarque précédente, donne un isomorphisme canonique

$$ \Gamma_{(m)}(\Omega^1_X)\xrightarrow{\sim}\mathrm{gr}_\bullet\,{}^t\mathcal{P}_{X,(m)}. $$

En dualisant, cet isomorphisme donne un isomorphisme canonique pour l'algèbre graduée des opérateurs différentiels twistés

$$ \mathrm{gr}_\bullet\,{}^t\mathcal{D}_{X,(m)}\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X). \tag{17} $$

De ce fait le gradué associé à la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels est commutatif et noethérien sur les ouverts affines. Comme dans le cas classique, on en déduit que le faisceau ${}^t\mathcal{D}^{(m)}_X$ est cohérent et à sections noethériennes sur les ouverts affines.

Soient $x_1, \dots, x_N$ un système de coordonnées locales sur un ouvert U de X, $\tau_i = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$. On suppose de plus que $\mathcal{L}_{|U}$ est engendré par un élément u. En reprenant les notations de (6) et (13), on dispose des isomorphismes suivants sur cet ouvert U

$$ {}^t\mathcal{P}^n_{X,(m)} \simeq \bigoplus_{|\underline{k}|\leq n} \mathcal{O}_X\, u^{-1} \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}} \otimes u, \tag{18a}$$

$$ {}^t\mathcal{D}_{X,(m)} \simeq \bigoplus_{|\underline{k}|} \mathcal{O}_X\, u \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} \otimes u^{-1}. \tag{18b}$$

De plus, les éléments $u \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} \otimes u^{-1}$ forment la base duale de la base constituée des éléments $u^{-1} \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}} \otimes u$.

Si V est un AVDC, $\mathcal{S} = \operatorname{Spf} V$, $\mathfrak{X}$ un schéma formel lisse sur $\mathcal{S}$, nous introduisons

$$ {}^t\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} = \varprojlim_i {}^t\mathcal{D}^{(m)}_{X_i} \quad \text{et} \quad {}^t\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}} = \varinjlim_m {}^t\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}.$$

On dispose alors de la

Proposition 2.2.4.1. (i) *Les faisceaux complétés* ${}^t\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ *sont cohérents, à sections noethériennes sur les ouverts affines.*

(ii) *Le faisceau* ${}^t\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}$ *est cohérent.*

Démonstration. Le (i) se démontre comme dans le cas classique, à partir du fait que les faisceaux ${}^t\mathcal{D}_{X,(m)}$ sont à sections noethériennes sur les ouverts affines, et des propriétés du passage au complété p-adique.

Pour le (ii), on peut en outre remarquer que si u est un générateur local de $\mathcal{L}$ sur un ouvert affine U, on dispose d'un isomorphisme d'algèbres défini localement sur $\mathfrak{U}$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}\,|\mathfrak{U}} &\longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}} \otimes \mathcal{L}^{-1}_{|\mathfrak{U}}, \\ P &\longmapsto u \otimes P \otimes u^{-1}. \end{aligned}$$

De cette façon, on voit que ${}^t\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}$ est cohérent puisque c'est le cas de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}}$. Nous aurions aussi pu utiliser un argument du même type pour le (i). □

2.2.5 – Compléments sur les faisceaux d'opérateurs différentiels twistés

Reprenons les notations et hypothèses de § 2.2.4. Définissons en suivant les notations de § 2.2.1 le fibré vectoriel associé à $\mathcal{L}$

$$Y = \operatorname{Spec} \mathbf{S}(\mathcal{L}),$$

et q le morphisme canonique : $Y \to X$. Nous identifierons dans la suite $\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}$ au sous-$\mathcal{P}^n_{X,(m)}$-module de $q_*\mathcal{P}^n_{Y,(m)}$ engendré par $1 \otimes \mathcal{L}$ via $T \otimes f \mapsto T \cdot (1 \otimes f)$, pour $f \in \mathcal{L}$ et $T \in \mathcal{P}^n_{X,(m)}$.

Introduisons aussi $\mathcal{D}^{(m)}_Y(\mathcal{L})$, le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules constitué des opérateurs différentiels sur Y qui se restreignent en des opérateurs différentiels agissant sur X et $\mathcal{L}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}^{(m)}_{Y,n}(\mathcal{L}) = \{P \in q_*\mathcal{D}^{(m)}_Y \mid P(\mathcal{P}^n_{X,(m)}) \subset \mathcal{O}_X \text{ et } P(\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}) \subset \mathcal{L}\}, \tag{19}$$

et

$$\mathcal{D}^{(m)}_Y(\mathcal{L}) = \varinjlim_n \mathcal{D}^{(m)}_{Y,n}(\mathcal{L}).$$

Si $P \in \mathcal{D}^{(m)}_{Y,n}(\mathcal{L})$, on définit

$$r_{\mathcal{L}}(P) = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}^{-1}} \otimes P_{|\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes \mathcal{L}} \in {}^t\mathcal{D}^{(m)}_{X,n},$$

qu'on appelle morphisme de restriction à $\mathcal{L}$.

Soient $x_1, \ldots, x_N$ des coordonnées locales sur un ouvert U de X, tel que $\mathcal{L}_{|U}$ soit un $\mathcal{O}_U$-module libre engendré par u. Alors $x_1, \ldots, x_N, u$ forment un système de coordonnées sur l'ouvert $q^{-1}(U) \subset Y$. Notons $\underline{\partial}_x^{\langle k \rangle}$ les opérateurs sur U correspondant aux coordonnées $x_1, \ldots, x_N$ sur X, et $\partial_u^{\langle l_u \rangle}$ les opérateurs de $\mathcal{D}^{(m)}_Y$ correspondant à la coordonnée u sur $q^{-1}(U)$. Reprenons les notations de (18). Le faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_Y$ est muni de la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels. On dispose alors d'isomorphismes canoniques (12) $\mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}^{(m)}_Y \simeq \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_Y)$ (resp. sur X). Comme Y est un fibré vectoriel sur X, on a un projecteur $q_*\mathcal{T}_Y \to \mathcal{T}_X$, qui est une section du morphisme canonique $\mathcal{T}_X \to q_*\mathcal{T}_Y$. On en déduit un projecteur $q_*\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_Y) \to \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X)$, et donc via les isomorphismes canoniques précédents un projecteur $\lambda_q \colon \mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}^{(m)}_Y \to \mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}^{(m)}_X$. On a la description locale suivante.

Proposition 2.2.5.1. (i) *P est dans $\mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})(U)$ si et seulement si il existe $a_{\underline{k}}, b_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_X(U)$, $c_{\underline{k},l_u} \in q_*\mathcal{O}_Y(U)$ tels que*

$$P = \sum_{\underline{k}\in\mathbf{N}^N} a_{\underline{k}} \underline{\partial}_x^{\langle k\rangle} + \sum_{\underline{k}\in\mathbf{N}^N} b_{\underline{k}} \underline{\partial}_x^{\langle k\rangle} u\partial_u + \sum_{\underline{k}\in\mathbf{N}^N,\, l_u\geq 2} c_{\underline{k},l_u} \underline{\partial}_x^{\langle k\rangle} \partial_u^{\langle l_u\rangle}.$$

(ii) *Si P est dans $\mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})(U)$ et s'écrit comme précédemment, alors*

$$r_{\mathcal{L}}(P) = \sum_{\underline{k}\in\mathbf{N}^N} a_{\underline{k}}\, u \otimes \underline{\partial}_x^{\langle k\rangle} \otimes u^{-1} + \sum_{\underline{k}\in\mathbf{N}^N} b_{\underline{k}}\, u \otimes \underline{\partial}_x^{\langle k\rangle} \otimes u^{-1}.$$

(iii) *L'application $r_{\mathcal{L}}$ est filtrée, surjective, et n'est pas injective.*

(iv) *L'application graduée $\mathrm{gr}_\bullet\, r_{\mathcal{L}}$ induite par $r_{\mathcal{L}}$ sur $\mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$ est égale au projecteur λ_q (restreint à $\mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$).*

Démonstration. Soient $\tau_i = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$, $\tau_u = 1 \otimes u - u \otimes 1$. Nous utilisons les notations de § 2.2.2. Soit $P \in q_*\mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$. Nous avons alors le

Lemme 2.2.5.2. *P est dans $\mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})(U)$ si et seulement si*

$$P(\mathcal{P}^n_{X,(m)}) \subset \mathcal{O}_X$$

et

$$P(\underline{\tau}^{\{l\}}\tau_u) \in \mathcal{L} \quad \textit{pour tout } \underline{l} \in \mathbf{N}^N.$$

Démontrons ce lemme. Soient $a \in \mathcal{O}_X(U)$, $\underline{l} \in \mathbf{N}^N$ et P vérifiant les conditions du lemme. Comme P est $q_*\mathcal{O}_Y$-linéaire à gauche, la condition du lemme implique

$$P(\mathcal{P}^n_{X,(m)}\tau_u) \in \mathcal{L}.$$

Notons $T = \underline{\tau}^{\{l\}}(1 \otimes a) \in \mathcal{P}^n_{X,(m)}$, alors

$$\begin{aligned} P(\underline{\tau}^{\{l\}}(1 \otimes a)) &= P(T(1 \otimes u)) \\ &= P((u \otimes 1)T + T\tau_u) \\ &= P(T)u + P(T\tau_u) \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

de sorte que $P \in \mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$. Réciproquement, si $P \in \mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$, alors

$$P(\underline{\tau}^{\{l\}}\tau_u) = P(\underline{\tau}^{\{l\}}(1 \otimes u)) - P(\underline{\tau}^{\{l\}})u \in \mathcal{L},$$

de sorte que P vérifie les conditions du lemme.

Revenons à la démonstration de la proposition. Soit $P \in q_*\mathcal{D}_Y^{(m)}$. Écrivons

$$P = \sum_{\underline{k},l_u} d_{\underline{k},l_u} \underline{\partial}_x^{\langle \underline{k} \rangle} \partial_u^{\langle l u \rangle},$$

avec $d_{\underline{k},l_u} \in \mathcal{O}_Y$. Alors $d_{\underline{k},0} = P(\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}) \in \mathcal{O}_X$ et $d_{\underline{k},1} = P(\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}\tau_u) \in \mathcal{L}$, ce qui donne le (i).

Pour le (ii), il suffit d'utiliser la base locale de ${}^t\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ constituée des éléments $u^{-1} \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}} \otimes u$ donnée en (18). Or, on a

$$\begin{aligned}
\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k} \rangle}(\underline{\tau}^{\{\underline{l}\}} \otimes u) &= \underline{\partial}_x^{\langle \underline{k} \rangle}(\underline{\tau}^{\{\underline{l}\}}\tau_u + (u \otimes 1)\underline{\tau}^{\{\underline{l}\}}) \\
&= u\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k} \rangle}(\underline{\tau}^{\{\underline{l}\}}) \\
&= u\delta_{\underline{k},\underline{l}},
\end{aligned}$$

où $\delta_{\underline{k},\underline{l}}$ désigne le symbole de Kronecker. De façon analogue,

$$\begin{aligned}
u\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k} \rangle}\partial_u(\underline{\tau}^{\{\underline{l}\}} \otimes u) &= u\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k} \rangle}\partial_u(\underline{\tau}^{\{\underline{l}\}}\tau_u + (u \otimes 1)\underline{\tau}^{\{\underline{l}\}}) \\
&= u\delta_{\underline{k},\underline{l}},
\end{aligned}$$

d'où le (ii) du lemme. Passons à (iii). L'application $r_{\mathcal{L}}$ est filtrée par définition. Le reste se vérifie localement. Or on a une section locale de $r_{\mathcal{L}}$ en posant, pour $P \in \mathcal{D}_X^{(m)}(U)$, $r_{\mathcal{L}}(u \otimes P \otimes u^{-1}) = P \in \mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})(U)$. De plus $r_{\mathcal{L}}(\partial_u^{\langle 2 \rangle}) = 0$, de sorte que $r_{\mathcal{L}}$ n'est pas injectif. L'affirmation (iv) est une conséquence immédiate de (ii) . □

Sur la description locale de $\mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$, on voit que c'est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_S$-algèbres (et de $\mathcal{O}_X$-modules) de $q_*\mathcal{D}_Y^{(m)}$. On a plus précisément la

Proposition 2.2.5.3. (i) *Le faisceau $\mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$ est un sous-faisceau d'algèbres du faisceau $q_*\mathcal{D}_Y^{(m)}$.*

(ii) *La flèche de restriction $r_{\mathcal{L}} \colon \mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L}) \to {}^t\mathcal{D}_X^{(m)}$ est un homomorphisme surjectif de faisceaux d'algèbres.*

Démonstration. Commençons par (i). Soient $P, P' \in \mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$. Rappelons que le produit PP' est donné par le composé suivant (11)

$$q_*\mathcal{P}^{n+n'}_{Y,(m)} \xrightarrow{q_*\delta^{n,n'}} q_*\mathcal{P}^n_{Y,(m)} \otimes q_*\mathcal{P}^{n'}_{Y,(m)} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes P'} q_*\mathcal{P}^n_{Y,(m)} \xrightarrow{P} q_*\mathcal{O}_Y,$$

où $\delta^{n,n'}$ est induit par $a \otimes b \mapsto a \otimes 1 \otimes 1 \otimes b$. Ainsi, on a $q_*\delta^{n,n'}(1 \otimes \mathcal{L}) \subset 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \mathcal{L}$, et $(\mathrm{Id} \otimes P')(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \mathcal{L}) \subset 1 \otimes \mathcal{L}$, si bien que $PP'(1 \otimes \mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

De plus, les faisceaux $\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes \mathcal{P}^{n'}_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}$ sont des sous-faisceaux de $q_*(\mathcal{P}^n_{Y,(m)} \otimes \mathcal{P}^{n'}_{Y,(m)})$, et les morphismes $\delta^{n,n'}$ sont des m-PD-morphismes. Le fait que $PP'(1 \otimes \mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$ entraîne donc formellement que $PP'(\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. Il est d'autre part clair que $PP'(\mathcal{P}^n_{X,(m)}) \subset \mathcal{O}_X$ et ceci montre (i).

D'après le (i), le composé PP' est donné en restriction à $(1 \otimes \mathcal{L})$ par

$$\mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L} \xrightarrow{\delta^{n,n'}} \mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes \mathcal{P}^{n'}_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes P'} \mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L} \xrightarrow{P} \mathcal{L}.$$

En tensorisant ce diagramme à gauche (sur $\mathcal{O}_{X,g}$) par $\mathcal{L}^{-1}$, on retrouve exactement le diagramme (16) définissant le produit dans ${}^t\mathcal{D}^{(m)}_X$, ce qui montre que $r_{\mathcal{L}}$ est un homomorphisme d'anneaux. La surjectivité a été établie dans la proposition précédente 2.2.5.1. $\square$

3. Faisceaux équivariants

3.1 – *Notations–Rappels*

Soient D une V-algèbre commutative, A, B des D-modules, C une D-algèbre, u (resp. v) un homomorphisme D-linéaire $A \to C$, (resp. $v\colon B \to C$), m l'application produit $C \otimes_D C \to C$ telle que $m(a \otimes b) = ab$. On note alors $u \overline{\otimes} v = m \circ (u \otimes v)\colon A \otimes_D B \to C$.

Soient G un schéma en groupes affine et lisse sur S, $\mu\colon G \times G \to G$ l'application produit, $e\colon S \hookrightarrow G$ l'élément neutre. Les applications déduites de μ et e au niveau des faisceaux structuraux seront notées $\mu^\sharp$ et ε_G.

Un G-comodule M est un V-module M muni d'une action à droite de G, c'est-à-dire que pour toute V-algèbre R, $R \otimes_V M$ est un $G(R)$-module à droite. Comme G est affine, cela revient à se donner une application de comodule dual $\Delta_M\colon M \to V[G] \otimes_V M$, vérifiant les deux égalités suivantes :

$$(\mathrm{Id}_{V[G]} \otimes \Delta_M) \circ \Delta_M = (\mu^\sharp \otimes \mathrm{Id}_M) \circ \Delta_M \tag{20}$$

et

$$(\varepsilon_G \overline{\otimes} \mathrm{Id}_M) \circ \Delta_M = \mathrm{Id}_M .$$

Notons que cette définition diffère de celle de G-module de Jantzen (I 2.8 de [Jan03]) qui décrit la relation de comodule sur un V-module M, pour laquelle $M \otimes_V R$ est un $G(R)$-module à gauche pour toute R-algèbre V.

Nous aurons besoin de petits lemmes techniques qui font l'objet de la sous-section suivante.

3.2 – *Lemmes techniques*

On rappelle quelques faits classiques.

Lemme 3.2.1. *Soient f, g deux morphismes de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sur un S-schéma X localement noethérien. Pour x un point fermé de X, on note i_x l'immersion $\{x\} \hookrightarrow X$. On suppose que pour tout point fermé de X, les morphismes induits $f(x), g(x) : i_x^*\mathcal{F} \to i_x^*\mathcal{G}$ coïncident. Alors $f = g$.*

Démonstration. On peut supposer que X est affine et noethérien. Soit $\mathcal{H}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent sur X tel que $i_x^*\mathcal{H} = 0$ pour tout point fermé x de X. Alors le support de $\mathcal{H}$ est fermé et s'il est non vide, il correspond à un sous-schéma fermé de X contenant un point fermé x. Par hypothèse, $i_x^*\mathcal{H}$ est nul, donc $\mathcal{H}_x$ est nul par le lemme de Nakayama, ce qui est absurde : cela montre que $\mathcal{H}$ est nul. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau cohérent image de $f - g$. La remarque précédente appliquée à $\mathcal{I}$ donne le résultat. □

Si on applique cette même remarque aux faisceaux cohérents $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathcal{G}/\operatorname{Im}(f)$ on obtient aussi le résultat suivant.

Lemme 3.2.2. *Sous les hypothèses et notations précédentes, soit f un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents : $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Alors f est surjectif (resp. un isomorphisme, resp. injectif) si et seulement si en tout point fermé x de X, l'homorphisme induit $f(x)$ est surjectif (resp. un isomorphisme, resp. injectif).*

3.3 – *Faisceaux G-équivariants*

Il s'agit ici essentiellement de faire quelques rappels.

3.3.1 – Définitions

Dans cette section, X est un S-schéma, muni d'une action à gauche $\sigma_X : G \times_S X \to X$. On note $\sigma^\sharp : \sigma^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{G\times X}$ l'application qu'on en déduit au niveau des faisceaux structuraux. L'application σ_X sera tout simplement notée σ lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté. De plus, le produit fibré $\times_S$ sera notée $\times$. On note p_2 la deuxième projection : $G \times X \to X$, $t_1, t_2, t_3 : G \times G \times X \to G \times X$ définies respectivement par $t_1(g_1, g_2, x) = (g_1, g_2 x)$, $t_2(g_1, g_2, x) = (g_1 g_2, x)$, $t_3(g_1, g_2, x) = (g_2, x)$. Suivant [MFK94], un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}$ est

G-équivariant, s'il existe un isomorphisme $\Phi\colon \sigma^*\mathcal{E} \simeq p_2^*\mathcal{E}$, qui vérifie les conditions de cocycles (cf. [Kas89]), c'est-à-dire tel que le diagramme suivant commute :

$$
\begin{tikzcd}
t_2^*\sigma^*\mathcal{E} \arrow[rrr, "t_2^*(\Phi)"] \arrow[d, "\wr"] & & & t_2^* p_2^*\mathcal{E} \arrow[d, "\wr"] \\
t_1^*\sigma^*\mathcal{E} \arrow[r, "t_1^*(\Phi)"] & t_1^* p_2^*\mathcal{E} = t_3^*\sigma^*\mathcal{E} \arrow[rr, "t_3^*(\Phi)"] & & t_3^* p_2^*\mathcal{E}.
\end{tikzcd}
\tag{21}
$$

Par exemple, le faisceau $\mathcal{O}_X$ est G-équivariant, ainsi que tous les faisceaux "différentiels" sur X, comme nous le vérifierons en § 3. Si $\mathcal{L}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres, $\mathcal{L}$ est G-équivariant si et seulement si le fibré vectoriel associé à $\mathcal{L}$ est muni d'une action de G compatible à l'action de G sur X.

3.3.2 – Propriétés

On a la description suivante des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules G-équivariants. Soient R une V-algèbre, $g, g' \in G(R)$, $X_R = \operatorname{Spec}(R) \times X$, σ_R l'application déduite de σ par ce changement de base, $\mathcal{L}_R$ le tiré en arrière de $\mathcal{L}$ sur X_R. L'opérateur de translation $T_g\colon X_R \to X$ donné par $T_g = \sigma \circ (g \times \mathrm{Id}_X)$ s'étend canoniquement en un opérateur toujours noté $T_g\colon X_R \to X_R$. On dispose d'une famille d'isomorphismes $\mathcal{O}_X$-linéaires $\Phi_g\colon T_g^*\mathcal{L}_R \simeq \mathcal{L}_R$, vérifiant la condition $\Phi_{gg'} = \Phi_{g'} \circ T_{g'}^*(\Phi_g)$, provenant de la condition de cocycle. Ces applications induisent pour tout ouvert U des applications $\Phi_{g,U}\colon \mathcal{L}_R(gU) \to \mathcal{L}_R(U)$, semi-linéaires par rapport aux applications $T_g^{-1}\colon \mathcal{O}_{X_R}(gU) \simeq \mathcal{O}_{X_R}(U)$. Par définition, on a l'égalité $T_{g'}^*(\Phi_{g,U}) = \Phi_{g,g'U}$, de sorte que la relation de cocyle se traduit par $\Phi_{gg',U} = \Phi_{g',U} \circ \Phi_{g,g'U}$. Si U est le schéma X_R, notons $\Phi_g = \Phi_{g,X_R}$, pour $e \in \Gamma(X_R, \mathcal{L}_R)$, on définit une action à droite de $G(R)$ sur $\Gamma(X_R, \mathcal{L}_R)$ en posant $g \cdot e = \Phi_g(e)$, grâce à la relation $\Phi_{gg'} = \Phi_g \circ \Phi_{g'}$. Nous verrons en S 4.4 que cette action à droite correspond à une structure de comodule dual sur $\Gamma(X_R, \mathcal{L}_R)$.

Enfin, nous aurons besoin des propositions classiques suivantes.

Proposition 3.3.2.1. *Soit $\mathcal{L}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini G-équivariant, alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini G-équivariant.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait que pour un faisceau localement libre de rang fini, on a un isomorphisme canonique et fonctoriel

$$\sigma^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{G\times X}}(\sigma^*\mathcal{L},\mathcal{O}_{G\times X}),$$

de sorte que ${}^t\Phi^{-1}$, c'est-à-dire l'application transposée de l'isomorphisme Φ^{-1}, définit la structure G-équivariante sur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},\mathcal{O}_X)$. L'action à droite de $G(R)$ sur les sections globales de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_R}}(\mathcal{L}_R,\mathcal{O}_{X_R})$ est donc aussi donnée par ${}^t\Phi_g^{-1}$ et donc, si e est une section globale de $\mathcal{L}_R$, φ une section locale de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_R}}(\mathcal{L}_R,\mathcal{O}_{X_R})$, alors pour tout g de $G(R)$ on a $(\varphi\cdot g)(e)=\varphi(e\cdot g^{-1})$. □

Proposition 3.3.2.2. *Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents, G-équivariant, alors $\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}'$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérent, G-équivariant.*

Démonstration. On a un isomorphisme fonctoriel

$$\sigma^*(\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}') \xrightarrow{\sim} \sigma^*\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_{G\times X}}\sigma^*\mathcal{L}'. \qquad \square$$

Considérons maintenant un schéma formel $\mathcal{X}$ tel que pour tout $i\in\mathbf{N}$, le schéma X_i soit muni d'une action du schéma en groupes G_i. Nous poserons alors

$$\alpha_i\colon X_i \hookrightarrow \mathcal{X},$$

$$\gamma_i\colon G_i\times X_i \hookrightarrow G_{i+1}\times X_{i+1}.$$

Définition 3.3.2.3. Un faisceau $\mathcal{E}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules complets pour la topologie p-adique sera dit *G-équivariant* si, pour tout $i\in\mathbf{N}$, le faisceau $\mathcal{E}_i=\alpha_i^*\mathcal{E}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{X_i}$-modules G-équivariants tel que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} p_{2,i}^*\mathcal{E}_i \arrow[rr, "\sim", "\Phi_i"'] & & \sigma_{2,i}^*\mathcal{E}_i \\ \gamma_i^*p_{2,i+1}^*\mathcal{E}_{i+1} \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, "\sim", "\gamma_i^*(\Phi_{i+1})"'] & \gamma_i^*\sigma_{2,i+1}^*\mathcal{E}_{i+1}. \arrow[ur, phantom] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} p_{2,i}^*\mathcal{E}_i & \xrightarrow[\Phi_i]{\sim} & \sigma_{2,i}^*\mathcal{E}_i \\ \uparrow\wr & & \uparrow\wr \\ \gamma_i^*p_{2,i+1}^*\mathcal{E}_{i+1} & \xrightarrow[\gamma_i^*(\Phi_{i+1})]{\sim} & \gamma_i^*\sigma_{2,i+1}^*\mathcal{E}_{i+1}. \end{array}$$

Dans le cas où $\mathcal{E}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules cohérents, cette définition équivaut au fait que l'on se donne un isomorphisme $\Phi\colon\sigma^*\mathcal{E}\simeq p_2^*\mathcal{E}$ vérifiant les conditions de cocycles énoncées en (21), ce qui nous amène à la définition suivante.

Définition 3.3.2.4. Un faisceau $\mathcal{E}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents sera dit *G-équivariant* s'il existe un isomorphisme $\Phi: \sigma^*\mathcal{E} \simeq p_2^*\mathcal{E}$ vérifiant les conditions de cocycles énoncées en (21).

Si $\mathcal{E}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules cohérents G-équivariant, alors $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}} := \mathcal{E} \otimes \mathbf{Q}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents G-équivariant.

Pour les faisceaux équivariants de $\mathcal{D}$-modules nous demandons en outre que les applications soient compatibles avec la structure de $\mathcal{D}$-module, ce qui nous amène à la définition suivante, pour laquelle nous remplaçons les morphismes images inverses au sens des faisceaux de $\mathcal{O}_{G\times X}$-modules par les images inverses au sens des $\mathcal{D}^{(m)}_{G\times X}$-modules, suivant les explications qui seront données en S 2.2.3.

Définition 3.3.2.5. Un faisceau $\mathcal{E}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents (resp. de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules) sera dit *$G$-équivariant* s'il existe un isomorphisme $\Phi: \sigma^!\mathcal{E} \simeq p_2^!\mathcal{E}$ vérifiant les conditions de cocycles énoncées en (21) (où l'on remplace tous les morphismes s^* par $\mathcal{H}^0 s^!$, $s^!$ étant l'image inverse au sens des $\mathcal{D}$-modules).

3.3.3 – Structures G-équivariantes à droite

On considère ici un S-schéma X muni d'une action à droite d'un schéma en groupes G donnée par un morphisme de schémas $\tau: X \times G \to X$. Une structure G-équivariante à droite sur un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}$ consiste en la donnée d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X\times G}$-modules $\Phi: \tau^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathcal{E}$, vérifiant la condition de cocyle suivante. Soient $t_1, t_2, t_3: X \times G \times G \to X \times G$ définis par $t_1(x, g_1, g_2) = (xg_1, g_2)$, $t_2(x, g_1, g_2) = (x, g_1g_2)$, $t_3(x, g_1, g_2) = (x, g_1)$. On demande que Ψ vérifie $t_2^*(\Psi) = t_3^*(\Psi) \circ t_1^*(\Psi)$. Ainsi, pour toute V-algèbre R, pour tout $g \in G(R)$ on a un opérateur de translation $T_g: X_R \to X_R$. Pour tout ouvert U de X_R, on dispose d'applications $\Psi_{U,g}: \mathcal{E}_R(Ug) \to \mathcal{E}_R(U)$ semi-linéaires par rapport aux applications $T_g^{-1}: \mathcal{O}_{X_R}(Ug) \to \mathcal{O}_{X_R}(U)$ telles que $\Psi_{U,g_1g_2} = \Psi_{g_1} \circ \Psi_{g_2,Ug_1}$. Ainsi, l'application $g \in G(S) \mapsto \Psi_g$ définit une action à gauche de $G(S)$ sur $\Gamma(X, \mathcal{E})$ pour tout faisceau G-équivariant. Soit enfin l'involution $\mathrm{inv} \times \mathrm{Id}_X: G \times X \to G \times X$, où inv est l'application de passage à l'inverse $G \to G$. L'application $\sigma = \mathrm{inv} \times \mathrm{Id}_X \circ \tau$ définit une action à gauche de G sur X. Un faisceau $\mathcal{E}$ est G-équivariant (pour τ) si et seulement si $\mathcal{E}$ est G-équivariant pour σ. L'isomorphisme Φ définissant cette équivariance est alors donné par $\Phi = (\mathrm{inv} \times \mathrm{Id}_X)^*(\Psi)$ (et $\Psi = (\mathrm{inv} \times \mathrm{Id}_X)^*(\Phi)$).

3.4 – *Action de G sur les faisceaux de parties principales*

Dans cette partie, on suppose que X est un S-schéma lisse, muni d'une action à gauche de G et on note $\Gamma^n_{X,(m)} = \Gamma^n_{(m)}(\Omega^1_X)$ (8) et $\mathbf{S}^{(m)}_X = \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X)$ de (4). Nous allons montrer d'abord que les faisceaux de parties principales $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ sont G-équivariants, puis par dualité, que les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{X,n}$ sont G-équivariants comme en § 3.3.1, et enfin que les faisceaux complétés $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ sont G-équivariants.

Énonçons à présent le résultat de cette sous-section. Pour l'algèbre symétrique $\mathbf{S}^{(m)}_X$ de niveau m et les propriétés de base de cette algèbre, nous nous référons à [Huy97].

Proposition 3.4.1. (i) *Les faisceaux $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ et $\Gamma^n_{X,(m)}$ sont des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules G-équivariants.*

(ii) *Les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{X,n}$ et $\mathbf{S}^{(m)}_X$ sont des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules G-équivariants.*

(iii) *Les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ sont des faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-modules G-équivariants.*

Démonstration. L'assertion (ii) provient de (i) par passage à la dualité. Ensuite, par (ii) les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$ sont G-équivariants de façon compatible pour différentes valeurs de i, de sorte que les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ sont G-équivariants par passage à la limite projective sur i. Donc (ii) entraîne (iii). Dans la suite nous montrons donc (i). Le cas des algèbres graduées $\Gamma^n_{X,(m)}$ se traitera comme celui des faisceaux $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ (en utilisant q'_2 au lieu de q_2) ou encore la structure de G-équivariance de Ω^1_X. Dans la suite, on se restreint donc à la G-linéarité des faisceaux $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$.

Soit $d\sigma$ le morphisme obtenu par fonctorialité : $\sigma^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \to \mathcal{P}^n_{G\times X,(m)}$. On définit alors $\Phi = q_2 \circ d\sigma : \sigma^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \to p_2^*\mathcal{P}^n_{X,(m)}$. Le morphisme Φ est un m-PD-morphisme. L'algèbre $\mathcal{P}^0_{X,(m)}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$. Pour voir que Φ est un isomorphisme, il suffit de le vérifier en les points fermés de $G\times X$ d'après § 3.2.

Soient g un point de G, de corps résiduel $k(g)$, ev_g l'évaluation $\mathcal{O}_G \to k(g)$ (qui à $l \in \mathcal{O}_G$ associe $l(g)$), i_g l'immersion fermée $g\times X \hookrightarrow G\times X$, $\sigma_g = \sigma\circ i_g$, $p_{2,g} = p_2\circ i_g$. Le morphisme $i_g^*\Phi$ est obtenu comme morphisme composé

$$\sigma_g^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \xrightarrow{i_g^* d\sigma} i_g^*\mathcal{P}^n_{G\times X,(m)} \xrightarrow{i_g^* q_2} p_{2,g}^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \simeq k(g)\otimes_V \mathcal{P}^n_{X,(m)}.$$

Il suffit alors de constater que le morphisme $i_g^*\Phi$ coïncide avec le morphisme $d\sigma_g$, qui est un isomorphisme d'inverse $d\sigma_{g^{-1}}$. Vérifions pour cela que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\sigma_g^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \arrow[r, "i_g^* d\sigma"] \arrow[d, equal] & i_g^*\mathcal{P}^n_{G\times X,(m)} \arrow[r, "i_g^* q_2"] & i_g^* q_2^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \arrow[d, equal] \\
\sigma_g^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \arrow[rr, "d\sigma_g"] & & \mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes_V k(g).
\end{tikzcd}$$

Soient $u \in \mathcal{O}_X$, $\tau = 1\otimes u - u \otimes 1 \in \mathcal{P}^n_{X,(m)}$. Écrivons $\sigma^\sharp(u) = \sum_l k_l \otimes f_l$, avec $k_l \in \mathcal{O}_G$ et $f_l \in \sigma^{-1}\mathcal{O}_X$. Alors

$$\begin{aligned}
d\sigma_g(1\otimes\tau) &= \sum_l k_l(g)(1\otimes f_l - f_l \otimes 1), \\
d\sigma(1\otimes\tau) &= \sum_l (1\otimes f_l)(1\otimes k_l - k_l\otimes 1) \\
&\quad + \sum_l (k_l\otimes 1)(1\otimes f_l - f_l\otimes 1) \ \in \mathcal{P}^n_{G\times X,(m)}, \\
i_g^* d\sigma(1\otimes\tau) &= \sum_l f_l(1\otimes k_l - k_l\otimes 1) + \sum_l k_l(g)(1\otimes f_l - f_l\otimes 1), \\
i_g^* q_2 \circ i_g^* d\sigma(1\otimes\tau) &= \sum_l k_l(g)(1\otimes f_l - f_l\otimes 1) \\
&= d\sigma_g(1\otimes\tau).
\end{aligned}$$

Les morphismes $d\sigma_g$ et $i_g^*q_2 \circ i_g^* d\sigma$ sont des m-PD-morphismes $\mathcal{O}_X \otimes_V k(g)$-linéaires qui coïncident sur les éléments $1\otimes\tau$. Comme les éléments $1\otimes\tau$ engendrent $\sigma_g^*\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ comme m-PD-algèbre, on voit ainsi que $d\sigma_g$ et $i_g^*q_2\circ i_g^*d\sigma$ sont égaux.

La condition de cocycle $t_2^*(\Phi) = t_3^*(\Phi)\circ t_1^*(\Phi)$ se vérifie aussi sur les fibres $g_1 \times g_2 \times X$ où g_1, g_2 sont deux points de G, définis sur une certaine algèbre A, et revient à montrer que $\Phi_{g_1 g_2} = \Phi_{g_2} \circ \sigma_{g_2}^* \Phi_{g_1}$, ce qui résulte de la fonctorialité rappelée en § 2.2.2 puisque $\Phi_{g_1} = d\sigma_{g_1}$. $\square$

4. Algèbres de distributions arithmétiques à un niveau fini

4.1 – *Définition, propriétés à un niveau fini*

Reprenons les notations de l'introduction : V est une $\mathbf{Z}_{(p)}$-algèbre noethérienne et G est un schéma en groupes affine et lisse sur $S = \operatorname{Spec} V$ de dimension relative N. Soit $e\colon S \hookrightarrow G$ la section unité. Notons $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux noyau du morphisme de V-algèbres $\varepsilon_G\colon \mathcal{O}_G \to e{*}\mathcal{O}_S$, $V[G] = \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$, $I = \Gamma(G, \mathcal{I}) = \mathrm{Ker}(V[G] \twoheadrightarrow V)$. Soient $P^n_{(m)}(G)$ la m-PD-enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m et d'ordre n, de l'idéal I de $V[G]$. Comme G est lisse sur S, l'idéal $\mathcal{I}$ est localement régulier sur S, c'est-à-dire que $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est localement libre sur S.

Soit $S' = \operatorname{Spec} V'$ un ouvert affine de S sur lequel $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est libre de base $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N$, avec $t_i \in V' \otimes_V I$ pour tout i. On dira dans ce cas que les t_i forment une suite régulière de paramètres de $\mathcal{I}(V') = V' \otimes_V I$. On considère le groupe $G'_S = G \times_S S'$ obtenu par changement de base du groupe G. Par 1.5.3 de [Ber96], les V'-algèbres $P^n_{(m)}(G_{S'})$ sont des V'-modules libres de base les $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \leq n$ en reprenant les notations de (1). La formation des m-PD-algèbres commute aux changements de base plats (1.4.6 de [Ber96]), ce qui implique que $P^n_{(m)}(G_{S'}) \simeq V' \otimes_V P^n_{(m)}(G)$ et nous donne finalement la

Proposition 4.1.1. *Pour $S' = \operatorname{Spec} V'$ un ouvert de S, et $t_1, \dots, t_N$ une suite régulière de paramètres de $V' \otimes_V I$, on a un isomorphisme de V'-modules*

$$V' \otimes_V P^n_{(m)}(G) \simeq \bigoplus_{|\underline{k}| \leq n} V' \underline{t}^{\{\underline{k}\}}.$$

Une conséquence de cet énoncé est que l'on peut faisceautiser la construction des algèbres $P^n_{(m)}(G)$ en des faisceaux sur S, cohérents et localement libres.

Dans le cas d'un AVDC (ou d'un quotient), les algèbres $P^n_{(m)}(G)$ sont des V-modules libres de rang fini. Si κ est le point fermé de V, $e(\kappa)$ est un point fermé de G, encore noté κ, $\mathcal{O}_{G,\kappa}$ désigne alors l'anneau local de G en ce point, et $\mathcal{I}_\kappa$ le localisé de I en κ. On dispose alors de la

Proposition 4.1.2. *Si V est un AVDC, ou un quotient d'un AVDC, de point fermé κ, alors l'algèbre $P^n_{(m)}(G)$ est la m-PD-enveloppe de $\mathcal{I}_\kappa \subset \mathcal{O}_{G,\kappa}$. En particulier ces algèbres sont des V-modules libres et en utilisant des paramètres $t_1, \dots, t_N$ de $\mathcal{I}_\kappa$, on retrouve la description ci-dessus de la proposition 4.1.1.*

Démonstration. Comme V est un AVCD ou un quotient d'un AVCD, alors V est local et principal, I/I^2 est un V-module libre de rang fini et on peut appliquer la proposition 4.1.1. □

Il résulte aussi de la proposition 4.1.1 que

$$V \simeq P^{0}_{(m)}(G).$$

Notons $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Hom}_V(I/I^2, V)$. Sur un ouvert de $S' = \mathrm{Spec}\, V'$ sur lequel $\mathcal{I}$ admet une suite régulière de générateurs $t_1, \ldots, t_N$, le V'-module $V' \otimes_V \mathrm{Lie}(G)$ est libre de base $\xi_1, \ldots, \xi_N$, que l'on définit comme la base duale des $t_1, \ldots, t_N$.

En particulier dans le cas où V est un AVDC (ou un quotient), l'algèbre $\mathrm{Lie}(G)$ est un V-module libre de base $\xi_1, \ldots, \xi_N$.

En procédant comme pour (14), on voit qu'on a des isomorphismes

$$P^{1}_{(m)}(G) \xleftarrow{\sim} V \oplus I/I^2. \tag{22}$$

En effet, cet isomorphisme se montre par un calcul local sur un ouvert sur lequel $\mathcal{I}$ est muni d'une suite régulière de générateurs.

Nous introduirons le niveau m en indice de l'exposant dans cette notation, lorsque nous voudrons préciser le niveau.

Enfin, on note ρ_m l'application canonique

$$\rho_m \colon V[G] \longrightarrow P^{n}_{(m)}(G), \tag{23}$$

qui munit $P^{n}_{(m)}(G)$ d'une structure de $V[G]$-module.

Pour $m' \geq m$, d'après la propriété universelle des algèbres à puissances divisées, on trouve des homomorphismes d'algèbres filtrées $\psi_{m,m'}$

$$\psi_{m,m'} \colon P_{(m')}(G) \longrightarrow P_{(m)}(G), \tag{24}$$

qui donnent par passage au quotient des homomorphismes d'algèbre

$$\psi^{n}_{m,m'} \colon P^{n}_{(m')}(G) \longrightarrow P^{n}_{(m)}(G).$$

Si I admet sur S une suite régulière de générateurs $t_1, \ldots, t_N$ (par exemple si V est un AVDC ou un quotient), on a

$$\psi^{n}_{m,m'}(\underline{t}^{\{\underline{k}\}_{(m')}}) = \frac{q^{(m)}_{\underline{k}}!}{q^{(m')}_{\underline{k}}!} \underline{t}^{\{\underline{k}\}_{(m)}}.$$

On définit maintenant les algèbres de distributions de niveau m : la structure d'algèbre est expliquée après la définition et provient, comme dans le cas classique, de la structure de groupe.

DÉFINITION 4.1.3. Les *distributions de niveau m et d'ordre n de G* sont

$$D_n^{(m)}(G) := \mathrm{Hom}_V(P^n_{(m)}(G), V)$$

et le *V-module des distributions de niveau m* est

$$D^{(m)}(G) := \varinjlim_n D_n^{(m)}(G).$$

Remarquons que la relation (22) nous donne les isomorphismes

$$A_m \colon D_1^{(m)}(G) \xrightarrow{\sim} V \oplus \mathrm{Lie}(G),\ \bar{A}_m \colon \mathrm{gr}_1\, D^{(m)}(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(G), \tag{25}$$

obtenue par dualité à partir de $\bar{A}_m$.

On dispose d'une action de $D^{(m)}(G)$ sur $V[G]$. Si $P \in D^{(m)}(G)$, l'action de P est définie par

$$\begin{array}{ccc} V[G] \xrightarrow{\rho_m} P^n_{(m)}(G) & \xrightarrow{P} & V, \\ f & \longmapsto & P(\rho_m(f)). \end{array}$$

Pour un entier $m' \geq m$, les morphismes d'algèbres $\psi^n_{m,m'}$ de (24) donnent par passage à la dualité des applications linéaires

$$\Phi^n_{m,m'} \colon D_n^{(m)}(G) \to D_n^{(m')}(G) \text{ et } \Phi_{m,m'} \colon D^{(m)}(G) \to D^{(m')}(G).$$

On a $\Phi_{m',m''} \circ \Phi_{m,m'} = \Phi_{m,m''}$ pour $m'' \geq m' \geq m$. Pour comparer les algèbres $D^{(m)}(G)$ avec des distributions classiques on définit

$$\mathrm{Dist}_n(G) := D_n^{(\infty)}(G) := \mathrm{Hom}_V(V[G]/I^{n+1}, V).$$

Alors,

$$\mathrm{Dist}(G) := \varinjlim_n \mathrm{Dist}_n(G)$$

est l'algèbre de distributions classiques d'un schéma en groupes sur S, définie en II.§4.6.1 de [DG70] et $\mathrm{Dist}_n(G)$ est l'espace de distributions d'ordre n.

On voit, en procédant comme en (25) qu'on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Dist}_1(G) \simeq \mathrm{Lie}(G) \oplus V.$$

L'application canonique $V[G]/\mathcal{I}^{n+1} \to P^n_{(m)}(G)$ induit une application linéaire

$$\Phi_{m,\infty} \colon D^{(m)}(G) \longrightarrow \mathrm{Dist}(G)$$

compatible avec les applications $\Phi_{m,m'}$.

Nous donnons maintenant un énoncé de changement de base. Soient V' une V-algèbre plate, $S' = \operatorname{Spec} V'$, $G_{S'} = G \times_S S'$. Alors on a la proposition suivante.

Proposition 4.1.4. *On dispose d'isomorphismes canoniques*

$$D_n^{(m)}(G_{S'}) \simeq D_n^{(m)}(G) \otimes_V V',$$

resp.

$$D^{(m)}(G_{S'}) \simeq D^{(m)}(G) \otimes_V V'.$$

Démonstration. Sous nos hypothèses, d'après 1.5.3 de [Ber96], la formation des algèbres $P^n_{(m)}(G)$ commute aux changements de base plats et les faisceaux $\mathcal{O}_S \otimes_V P^n_{(m)}(G)$ sont des $\mathcal{O}_S$-modules cohérents localement libres de rang fini sur S, donc $\mathcal{O}_S \otimes_V D_n^{(m)}(G)$ est isomorphe à $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S \otimes_V P^n_{(m)}(G), \mathcal{O}_S)$, ce qui permet de montrer l'énoncé. □

Supposons que I admette sur S une suite régulière de générateurs $t_1, \ldots, t_N$. Notons $\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle}$ les éléments de la base duale de la famille $\underline{t}^{\{\underline{k}\}} = t_1^{\{k_1\}} \cdots t_N^{\{k_N\}}$, $|\underline{k}| \leq N$, $\underline{\xi}^{[\underline{k}]} := \underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle_\infty}$ (de sorte que les éléments $\underline{\xi}^{[\underline{k}]}$ forment la base duale de la famille $t_1^{k_1} \cdots t_N^{k_N}$). Soit $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. On obtient par construction la proposition suivante.

Proposition 4.1.5. (i) *Comme V-module, $D_n^{(m)}(G)$ est libre de base les éléments $\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle}$ avec $|\underline{k}| \leq n$.*

(ii) *On a les relations*

$$\underline{k}!\underline{\xi}^{[\underline{k}]} = \underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle_0};$$

$$\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle_m} = \frac{q_{\underline{k}}^{(m)}!}{q_{\underline{k}}^{(m+1)}!} \underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle_{m+1}};$$

si $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_N)$ et pour tout $i \leq N$, $k_i \leq p^m$,

$$\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle_m} = \underline{\xi}^{[\underline{k}]}.$$

On notera tout simplement $\xi_l = \xi_l^{[1]} = \xi_l^{\langle 1 \rangle_m}$.

En particulier, si V est un AVDC ou d'un quotient d'un AVDC, on a la proposition suivante.

Proposition 4.1.6. *Sous l'hypothèse ci-dessus, le module $D_n^{(m)}(G)$ est libre de base les éléments $\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle}$ avec $|\underline{k}| \leq n$. Ces éléments satisfont la relation (ii) de la proposition précédente.*

On déduit de la dernière formule de (ii) que les applications $\Phi_{m,\infty}$ induisent un isomorphisme linéaire

$$\varinjlim_m D^{(m)}(G) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Dist}(G).$$

Il existe un morphisme canonique $D^{(0)}(G) \to \mathrm{Dist}(G)$.

Supposons que V est un AVCD, et soit $t_1, \ldots, t_N$ une suite régulière de générateurs de I, alors ce morphisme envoie $\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle_m}$ sur $q_{\underline{k}}^{(m)}!\underline{\xi}^{[\underline{k}]}$. Comme $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Hom}_V(I/I^2, V)$ les éléments ξ_l forment une V-base de $\mathrm{Lie}(G)$. Il suit de la première formule de (ii) de la proposition 4.1.6 que $D^{(0)}(G) \otimes K = \mathrm{Dist}(G) \otimes K$ et donc $D^{(m)}(G) \otimes K = \mathrm{Dist}(G) \otimes K$ pour tout m. Ce qui montre que $D^{(m)}(G)$ est une forme entière de $\mathrm{Dist}(G) \otimes K = U(\mathrm{Lie}(G) \otimes K)$, où $U(\mathrm{Lie}(G) \otimes K)$ est l'algèbre enveloppante universelle de $\mathrm{Lie}(G) \otimes K$. En général, I est localement régulier sur S et toutes les constructions commutent aux extensions plates de la base d'après 4.1.4, ce qui montre que $D^{(m)}(G)$ est une forme entière de $\mathrm{Dist}(G) \otimes K = U(\mathrm{Lie}(G) \otimes K)$ si V est un AVCD.

Supposons de nouveau que I admette sur S une suite régulière de générateurs $t_1, \ldots, t_N$. La base des $\underline{\xi}^{\langle \underline{k}' \rangle}$ est duale de celle des $\underline{t}^{\{\underline{k}'\}}$, et par définition de l'action de $D^{(m)}(G)$ sur $V[G]$, on a la proposition suivante.

Proposition 4.1.7. *Soit $f \in V[G]$, on a la formule de Taylor*

$$\rho_m(f) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle}(f) \otimes \underline{t}^{\{\underline{k}\}}.$$

Nous donnons maintenant un énoncé important sur la structure d'algèbre de $D^{(m)}(G)$ (sans supposer que I admet une suite régulière de générateurs sur S).

Proposition 4.1.8. *Le module $D^{(m)}(G)$ est une V-algèbre filtrée par les sous-modules $D_n^{(m)}(G)$. L'algèbre graduée associée à cette filtration est commutative.*

Démonstration. L'application $\mu^\sharp$ induit une application $V[G] \to V[G] \otimes_V V[G]$, qui envoie l'idéal I dans $I \otimes V[G] + V[G] \otimes I$ d'après I 7.7 de [Jan03]. D'autre part, en procédant comme en 2.1.3 de [Ber96], on voit qu'il existe une unique m-PD-structure sur $P^n_{(m)}(G) \otimes P^{n'}_{(m)}(G)$ telle que $I \otimes P^{n'}_{(m)}(G) + P^n_{(m)} \otimes I$ soit un m-PD-idéal. On considère alors l'application $\delta \circ \mu^\sharp$:

$$V[G] \xrightarrow{\mu^\sharp} V[G] \otimes_V V[G] \xrightarrow{\delta} P^n_{(m)}(G) \otimes_V P^{n'}_{(m)}(G),$$

où δ est l'application canonique $\rho_m \otimes \rho_m \colon V[G] \otimes_V V[G] \to P^n_{(m)}(G) \otimes_V P^{n'}_{(m)}(G)$.

Comme $\mu^\sharp$ applique tout élément de I dans un m-PD-idéal, cette application se factorise d'une unique façon par un m-PD-morphisme $\delta^{n,n'}$

$$\delta^{n,n'} \colon P_{(m)}(G) \xrightarrow{\delta^{n,n'}} P^n_{(m)}(G) \otimes P^{n'}_{(m)}(G). \tag{26}$$

On notera éventuellement $\delta^{n,n'}_{(m)}$ lorsqu'on voudra préciser le niveau m de ce morphisme.

Soient $(u, v) \in D^{(m)}_n(G) \times D^{(m)}_{n'}(G)$, on définit $u \cdot v$ comme la composée

$$u \cdot v \colon P_{(m)}(G) \xrightarrow{\delta^{n,n'}} P^n_{(m)}(G) \otimes P^{n'}_{(m)}(G) \xrightarrow{u \otimes v} V.$$

Il nous reste à montrer que $u \cdot v$ s'annule sur $I^{\{n+n'+1\}}$ et définit donc une application $P^{n+n'}_{(m)}(G) \to V$. La vérification est locale sur S et nous pouvons supposer que I admet sur S une suite régulière de générateurs $t_1, \dots, t_N$. Nous utilisons les notations de la proposition 4.1.5. Il nous faut montrer que $\delta^{n,n'}$ s'annule sur les éléments $\underline{t}^{\{\underline{k}\}} = t_1^{\{k_1\}} \cdots t_r^{\{k_r\}}$ avec $|\underline{k}| \geq n + n' + 1$, en utilisant les notations de § 2.1.2, et passe au quotient en une application

$$P^{n+n'}_{(m)}(G) \longrightarrow P^n_{(m)}(G) \otimes P^{n'}_{(m)}(G).$$

Toujours d'après I 7.7 de [Jan03], on peut écrire

$$\mu^\sharp(t_i) = 1 \otimes t_i + t_i \otimes 1 + \sum_{s=1}^{h_i} a_{i,s} \otimes b_{i,s},$$

avec $a_{i,s}$ et $b_{i,s}$ des éléments de I. Dans le cas du groupe additif $\mathbf{G}_a$, on a $\mu^\sharp(t_i) = 1 \otimes t_i + t_i \otimes 1$.

En appliquant les formules de § 2.1.1, on trouve

$$\delta^{n,n'}(t_i^{\{k_i\}}) = \sum_{\alpha_i=0}^{k_i} \left\langle {k_i \atop \alpha_i} \right\rangle t_i^{\{\alpha_i\}} \otimes t_i^{\{k_i-\alpha_i\}} + \gamma_{k_i} \quad \text{avec } \gamma_{k_i} \in \sum_{s+t\geq k_i+1} I^{\{s\}} \otimes I^{\{t\}}.$$

Dans cette somme, les termes correspondant à des $\alpha_i \geq n+1$ ou tel que $k_i - \alpha_i \geq n'+1$ ou à des éléments γ_{k_i} de $I^{\{s\}} \otimes I^{\{t\}}$ avec $s \geq n+1$ ou $t \geq n'+1$ sont en fait nuls. De plus, la première somme est un tenseur symétrique. En effectuant le produit, cela donne

$$\delta^{n,n'}(\underline{t}^{\{\underline{k}\}}) = \sum_{\underline{\alpha}\leq\underline{k}} \left\langle {\underline{k} \atop \underline{\alpha}} \right\rangle \underline{t}^{\{\underline{\alpha}\}} \otimes \underline{t}^{\{\underline{k}-\underline{\alpha}\}} + \gamma_{\underline{k}} \quad \text{avec } \gamma_{\underline{k}} \in \sum_{s+t\geq |\underline{k}|+1} I^{\{s\}} \otimes I^{\{t\}}.$$

Dans cette somme, les termes correspondant à des $|\underline{\alpha}| \geq n+1$ ou tels que $|\underline{k}-\underline{\alpha}| \geq n'+1$ ou à des éléments $\gamma_{\underline{k}}$ de $I^{\{s\}} \otimes I^{\{t\}}$ avec ($s \geq n+1$ ou $t \geq n'+1$) sont nuls.

Montrons maintenant que uv est d'ordre $\leq n+n'$. Il suffit pour cela de montrer que $uv(\underline{t}^{\{\underline{k}\}}) = (u \otimes v) \circ \delta^{n,n'}(\underline{t}^{\{\underline{k}\}}) = 0$ pour tout $\underline{k}$ tel que $|\underline{k}| = n+n'+1$. Reprenons la formule précédente. L'élément $\delta^{n,n'}(\underline{t}^{\{\underline{k}\}})$ s'écrit comme somme d'éléments des idéaux $I^{\{s\}} \otimes I^{\{t\}}$ avec $s+t \geq n+n'+1$, i.e. $s \geq n+1$ ou $t \geq n'+1$. Le résultat est donc bien nul puisque u s'annule sur $I^{\{n+1\}}$ et v sur $I^{\{n'+1\}}$.

Montrons que $uv - vu$ est d'ordre $\leq n+n'-1$. Il faut montrer que le résultat du calcul suivant est nul pour un $\underline{k}$ fixé tel que $|\underline{k}| = n+n'$,

$$\begin{aligned}(uv - vu)(\underline{t}^{\{\underline{k}\}}) &= (u \otimes v) \circ \delta^{n,n'}(\underline{t}^{\{\underline{k}\}}) - (v \otimes u) \circ \delta^{n',n}(\underline{t}^{\{\underline{k}\}}) \\ &= (u \otimes v)\Bigg(\sum_{\underline{\alpha}\leq\underline{k}} \left\langle {\underline{k} \atop \underline{\alpha}} \right\rangle \underline{t}^{\{\underline{\alpha}\}} \otimes \underline{t}^{\{\underline{k}-\underline{\alpha}\}} + \gamma_{\underline{k}}\Bigg) \\ &\quad - (v \otimes u)\Bigg(\sum_{\underline{\alpha}\leq\underline{k}} \left\langle {\underline{k} \atop \underline{\alpha}} \right\rangle \underline{t}^{\{\underline{\alpha}\}} \otimes \underline{t}^{\{\underline{k}-\underline{\alpha}\}} + \gamma'_{\underline{k}}\Bigg).\end{aligned}$$

On remarque que tous les éléments $(u \otimes v)(\gamma_{\underline{k}})$, et $(u \otimes v)(\gamma_{\underline{k}'})$ sont nuls pour tous les multi-indices k et k' intervenant dans les sommes précédentes car chaque élément $\gamma_{\underline{k}}$ ou $\gamma_{\underline{k}'}$ est dans un idéal du type $I^{\{s\}} \otimes I^{\{t\}}$, avec $s \geq n+1$ ou $t \geq n'+1$. Il vient donc finalement

$$(uv - vu)(\underline{t}^{\{\underline{k}\}}) = \sum_{\underline{\alpha}\leq\underline{k}} \left\langle {\underline{k} \atop \underline{\alpha}} \right\rangle u(\underline{t}^{\{\underline{k}\}}) v(\underline{t}^{\{\underline{k}\}-\{\underline{\alpha}\}}) - v(\underline{t}^{\{\underline{\alpha}\}}) u(\underline{t}^{\{\underline{k}\}-\{\underline{\alpha}\}}) = 0.$$

L'associativité du produit provient, comme dans le cas classique, de l'associativité de la loi de groupe et de la propriété universelle des algèbres à puissances divisées. $\square$

Proposition 4.1.9. *L'application* $\Phi_{m,m'}\colon D^{(m)}(G) \to D^{(m')}(G)$ *est un homomorphisme d'algèbres filtrées pour* $m, m' \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. *De plus, on a l'égalité* $\varinjlim_m D^{(m)}(G) = \mathrm{Dist}(G)$ *comme algèbres filtrées.*

Démonstration. Par la propriété universelle des m-PD-enveloppes d'un idéal, il existe une unique flèche $P_{(m')}(G) \to P_{(m)}(G)$ pour $m' \geq m$ qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} P_{(m')}(G) & \xrightarrow{\delta^{n,n'}_{(m')}} & P^n_{(m')}(G) \otimes P^{n'}_{(m')}(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{(m)}(G) & \xrightarrow{\delta^{n,n'}_{(m)}} & P^n_{(m)}(G) \otimes P^{n'}_{(m)}(G). \end{array}$$

On en tire formellement la proposition. $\square$

Dans l'énoncé suivant nous donnons quelques propriétés de fonctorialité de $D^{(m)}(\cdot)$.

Proposition 4.1.10. *Soient* H, G *deux schémas en groupes sur* S.

(i) *Soit* $f\colon H \to G$ *un morphisme de* S*-schémas qui est compatible avec les sections unité* $\varepsilon_H, \varepsilon_G$, *i.e.* $f \circ \varepsilon_H = \varepsilon_G$. *Il induit un homomorphisme* $D^{(m)}(f)$ *de* V*-modules filtrés* $D^{(m)}(H) \to D^{(m)}(G)$. *Si* f *est un morphisme de schémas en groupes, alors* $D^{(m)}(f)$ (*resp.* $D^{(m)}(f)$) *est multiplicatif.*

(ii) *Il existe un isomorphisme de* V*-algèbres filtrées* $D^{(m)}(H) \otimes_V D^{(m)}(G) \simeq D^{(m)}(H \times G)$ (*resp.* $D^{(m)}(H) \otimes_V D^{(m)}(G) \simeq D^{(m)}(H \times G)$) *où le terme de gauche est muni de la filtration produit tensoriel.*

Démonstration. Soient $f^\sharp\colon V[G] \to V[H]$ le morphisme d'algèbres associé à f, I_H et I_G les idéaux de $V[H]$ et $V[G]$ définissant les sections unités de G et de H. L'hypothèse faite sur H implique que $f^{\sharp-1}(I_H) = I_G$, de sorte que f induit un morphisme $P^n_{(m)}(G) \to P^n_{(m)}(H)$. En dualisant on trouve une application V-linéaire $D^{(m)}_n(H) \to D^{(m)}_n(G)$. On obtient $D^{(m)}(f)$ en passant à la limite sur n. Cela montre (i). Maintenant, d'après (i), les morphismes $H \times e_G$ and $e_H \times G$ induisent des homomorphismes $D^{(m)}(G) \to D^{(m)}(H \times G)$ et

$D^{(m)}(H) \to D^{(m)}(H \times G)$. Ces derniers homomorphismes induisent un homomorphisme $h\colon D^{(m)}(H) \otimes_V D^{(m)}(G) \to D^{(m)}(H \times G)$. La question de savoir si ce morphisme est un isomorphisme (filtré) est locale. Quitte à restreindre S, on peut supposer que I_G et I_H sont engendrés par une suite régulière de paramètres. Choisissons une suite régulière de générateurs $t_1, \dots, t_N$ de l'idéal $I_{H\times G}$ constituée de suites régulières pour les idéaux I_H et I_G. Alors la proposition 4.1.6 implique que h est un isomorphisme filtré. $\square$

Donnons maintenant deux exemples. D'abord dans le cas du groupe additif $\mathbf{G}_a^N$, muni des coordonnées $t_1, \dots, t_N$, dont la loi de groupe est définie par $\mu^\sharp(t_i) = 1 \otimes t_i + t_i \otimes 1$, pour tout $1 \leq i \leq N$. On note $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$ les opérateurs différentiels relatifs au choix des t_i. On a alors

Proposition 4.1.11. *Dans $D^{(m)}(\mathbf{G}_a^N)$, on a la relation*

$$\underline{\xi}^{\langle \underline{k}' \rangle} \cdot \underline{\xi}^{\langle \underline{k}'' \rangle} = \left\langle \begin{matrix} \underline{k}' + \underline{k}'' \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle \underline{\xi}^{\langle \underline{k}' + \underline{k}'' \rangle}.$$

Démonstration. Il nous faut en effet calculer

$$(\underline{\xi}^{\langle \underline{k}' \rangle} \cdot \underline{\xi}^{\langle \underline{k}'' \rangle})(\underline{t}^{\{\underline{r}\}}) = (\underline{\xi}^{\langle \underline{k}' \rangle} \otimes \underline{\xi}^{\langle \underline{k}'' \rangle}) \left(\sum_{\underline{\alpha} \leq \underline{r}} \left\langle \begin{matrix} \underline{r} \\ \underline{\alpha} \end{matrix} \right\rangle \underline{t}^{\{\underline{\alpha}\}} \otimes \underline{t}^{\{\underline{r} - \underline{\alpha}\}} \right)$$

$$= \delta_{\underline{r}, \underline{k}' + \underline{k}''} \left\langle \begin{matrix} \underline{k}' + \underline{k}'' \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle, \qquad \square$$

ce qui donne l'énoncé recherché.

Dans le cas $N = 1$ on en déduit les formules suivantes pour un entier $k \geq 1$

$$\text{si } k \neq 0\,[p^m], \qquad k\xi^{\langle k \rangle} = \xi \xi^{\langle k-1 \rangle},$$

$$\text{si } k \;\; 0 \;\; [p^m], \qquad p^m \xi^{\langle k \rangle} = \xi \xi^{\langle k-1 \rangle},$$

dont on déduit la formule suivante pour tout $k \geq 0$

$$\frac{k!}{q_k!} \xi^{\langle k \rangle} = \xi^k.$$

On vérifie au passage, que si $f \in V[T_1, \dots, T_N]$,

$$\xi^{\langle k \rangle}(f) = \underline{\partial}^{\langle k \rangle}(f)(0).$$

En particulier, dans le case $m = 0$, on a $\xi^{\langle k \rangle_{(0)}} = \xi^k$ pour tout k.

Maintenant, dans $\mathbf{G}_m$, qu'on identifie à Spec $V[T, T^{-1}]$, le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ est engendré par $\tau = T - 1$. La loi de groupe est donnée par $\mu^\sharp(\tau) = \tau \otimes 1 + 1 \otimes \tau + \tau \otimes \tau$.

Proposition 4.1.12. *Dans $D^{(m)}(\mathbf{G}_m)$, on a les relations*

$$\xi^{\langle k'\rangle} \cdot \xi^{\langle k''\rangle} = \sum_{\max\{k',k''\} \leq l \leq k'+k''} \frac{q_{k'}!\, q_{k''}!\, l!}{q_l!\,(k'+k''-l)!\,(l-k')!\,(l-k'')!} \xi^{\langle l\rangle}.$$

Démonstration. Calculons, en appliquant S 2.1.1,

$$\begin{aligned}\mu^\sharp(\tau^{(l)}) &= \sum_{r=0}^{l} \left\{ \begin{matrix} l \\ r \end{matrix} \right\} (\tau \otimes 1 + 1 \otimes \tau)^{\{r\}} \tau^{\{l-r\}} \otimes \tau^{l-r} \\ &= \sum_{r=0}^{l} \sum_{s=0}^{r} q_{l-r}! \left\{ \begin{matrix} l \\ r \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s+l-r \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l-s \\ r-s \end{matrix} \right\}.\end{aligned}$$

Cela nous permet de calculer $\xi^{\langle k'\rangle} \otimes \xi^{\langle k''\rangle} \delta^{k',k''}(\mu^\sharp(\tau^{(l)}))$ et nous donne l'énoncé. $\square$

On en déduit les formules suivantes pour un entier $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{si } k \neq 0\,[p^m], &\quad k\xi^{\langle k\rangle} = (\xi - k + 1)\xi^{\langle k-1\rangle}, \\ \text{si } k = 0\,[p^m], &\quad p^m\xi^{\langle k\rangle} = (\xi - k + 1)\xi^{\langle k-1\rangle}, \end{aligned}$$

dont on déduit la formule suivante pour tout $k \geq 0$

$$\frac{k!}{q_k!}\xi^{\langle k\rangle} = (\xi - k + 1)(\xi - k + 2)\cdots(\xi - 1)\xi. \tag{27}$$

En particulier, dans le cas $m = 0$, on a $\xi^{\langle k\rangle_{(0)}} = (\xi - k + 1)(\xi - k + 2)\cdots(\xi - 1)\xi$ pour tout k et alors $\xi^{\langle k\rangle_{(0)}} \neq \xi^k$ pour $k \geq 2$. On constate aussi dans ce cas pour $f \in V[T, T^{-1}]$

$$\xi^{\langle k\rangle}(f) = \partial_T^{\langle k\rangle}(f)(1).$$

Revenons maintenant au cas d'un schéma en groupes général G, et rappelons que $\mathrm{Lie}(G)^* := I/I^2$ et que l'algèbre symétrique de niveau m, $\mathbf{S}^{(m)}(\mathrm{Lie}(G))$, est construite en (4).

Proposition 4.1.13. (i) *Il existe un isomorphisme canonique de V-algèbres graduées*
$$c_m\colon \mathrm{gr}_\bullet\, D^{(m)}(G) \simeq \mathbf{S}^{(m)}(\mathrm{Lie}(G)).$$

(ii) *Les algèbres* $\mathrm{gr}_\bullet\, D^{(m)}(G)$ *et* $D^{(m)}(G)$ *sont noethériennes.*

(iii) *Si I est engendré par une suite régulière de paramètres sur S, l'algèbre $D^{(m)}(G)$ est engendrée par les éléments $\xi^{\langle p^i\rangle}$ pour $i \le m$ décrits dans la proposition* 4.1.5.

Démonstration. Montrons la première proposition. La filtration décroissante de l'algèbre $P^{(m)}(G)$ par les idéaux $I^{\{n\}}$ permet de considérer l'algèbre graduée
$$\mathrm{gr}_\bullet\, P^{(m)}(G) = \bigoplus_{n\ge 0} I^{\{n\}}/I^{\{n+1\}},$$
dont l'idéal I/I^2 est muni d'une m-PD-structure. Le module $\mathrm{Lie}(G)^* = I/I^2 = \mathrm{gr}_1\, P^{(\infty)}(G)$ s'envoie vers $\mathrm{gr}_1\, P^{(m)}(G)$ pour tout entier m, voir (22). On dispose donc d'une flèche $\mathrm{Lie}(G)^* \to \mathrm{gr}_\bullet\, P^{(m)}(G)$ et, par la propriété universelle des algèbres symétriques, d'un morphisme d'algèbres commutatives $\mathbf{S}(\mathrm{Lie}(G)^*) \to \mathrm{gr}_\bullet\, P^{(m)}(G)$, qui envoie $\mathrm{Lie}(G)^*$ dans un m-PD-idéal, de sorte que cette application se factorise d'une unique façon en un homomorphisme de m-PD-algèbres :
$$c_m^*\colon \Gamma_{(m)}(\mathrm{Lie}(G)^*) \longrightarrow \mathrm{gr}_\bullet\, P^{(m)}(G).$$
Voir que cette application est un isomorphisme est une question locale sur S : on peut donc supposer que I est engendré par une suite régulière de paramètres $t_1, \dots, t_N$. En reprenant la description donnée en § 2.1.2, on voit que ces deux algèbres sont des V-modules libres gradués de base les éléments $\underline{t}^{\{\underline{r}\}}$. Or le morphisme considéré envoie l'élément noté $\underline{t}^{\{\underline{r}\}}$ de $\Gamma_{(m)}(\mathrm{Lie}(G)^*)$ (théorème 3.9 in [BO78]) sur l'élément noté de la même façon de $\mathrm{gr}_\bullet\, P^{(m)}(G)$, donc c'est un isomorphisme gradué.

En dualisant, cette application donne un isomorphisme V-linéaire
$$c_m\colon \mathrm{Hom}_V(\mathrm{gr}_\bullet\, P_{(m)}(G), V) \longrightarrow \mathbf{S}^{(m)}(\mathrm{Lie}(G)).$$
On a des suites exactes courtes
$$0 \longrightarrow I^{\{n\}}/I^{\{n+1\}} \longrightarrow P^{n+1}_{(m)}(G) \longrightarrow P^n_{(m)}(G) \longrightarrow 0.$$
En dualisant on trouve des injections
$$gr_{n+1} D^{(m)}(G) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_V(I^{\{n\}}/I^{\{n+1\}}, V).$$

Voir que cette flèche est un isomorphisme est une question locale sur S : on peut donc supposer que I a une suite régulière de paramètres, et dans ce cas l'assertion est claire. Comme cette flèche est un isomorphisme, on trouve l'assertion (i) de l'énoncé.

Vérifions maintenant que cette application est un homomorphisme d'algèbres. De nouveau, cela se vérifie localement sur S et on peut supposer que I a une suite régulière de paramètres, $t_1, \dots, t_N$. On reprend les notations de la proposition 4.1.5. Dans l'algèbre symétrique de niveau m, on a l'égalité

$$\underline{\xi}^{\langle \underline{k}' \rangle} \cdot \underline{\xi}^{\langle \underline{k}'' \rangle} = \left\langle \begin{matrix} \underline{k}' + \underline{k}'' \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle \underline{\xi}^{\langle \underline{k}' + \underline{k}'' \rangle}.$$

Effectuons le calcul dans l'algèbre $\mathrm{gr}_\bullet\, D^{(m)}(G)$. Le produit $\underline{\xi}^{\langle \underline{k}' \rangle} \cdot \underline{\xi}^{\langle \underline{k}'' \rangle}$ est d'ordre $\leq |\underline{k}'| + |\underline{k}''|$. Il suffit donc de calculer, pour $|\underline{r}| = |\underline{k}'| + |\underline{k}''|$

$$\begin{aligned}
(\underline{\xi}^{\langle \underline{k}' \rangle} \cdot \underline{\xi}^{\langle \underline{k}'' \rangle})(\underline{t}^{\{\underline{r}\}}) &= (\underline{\xi}^{\langle \underline{k}' \rangle} \otimes \underline{\xi}^{\langle \underline{k}'' \rangle}) \Bigg(\sum_{\underline{\alpha} \leq \underline{r}} \left\langle \begin{matrix} \underline{r} \\ \underline{\alpha} \end{matrix} \right\rangle \underline{t}^{\{\underline{\alpha}\}} \otimes \underline{t}^{\{\underline{r} - \underline{\alpha}\}} \Bigg) + \gamma_{\underline{r}} \\
&= \delta_{\underline{r}, \underline{k}' + \underline{k}''} \left\langle \begin{matrix} \underline{k}' + \underline{k}'' \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle,
\end{aligned}$$

puisque l'élément $\gamma_{\underline{k}' + \underline{k}''}$ est dans $\sum_{s + s' \geq |\underline{k}' + \underline{k}''| + 1} I^{\{s\}} \otimes I^{\{s'\}}$, de sorte que $(\underline{\xi}^{\langle \underline{k}' \rangle} \otimes \underline{\xi}^{\langle \underline{k}'' \rangle})(\gamma_{\underline{r}}) = 0$. On voit ainsi que la formule du produit est exactement la même pour les deux algèbres considérées et donc qu'on a l'isomorphisme d'algèbres annoncé.

L'assertion (iii) provient de l'isomorphisme précédent et de l'observation (1.3.6 de [Huy03]) que l'algèbre symétrique de niveau m, $\mathbf{S}^{(m)}(\mathrm{Lie}(G))$, est engendrée par les éléments $\xi_l^{\langle p^i \rangle}$ avec $i \leq m$ et ξ_l les éléments d'une base de $\mathrm{Lie}(G)$. Finalement, $\mathrm{gr}_\bullet\, D^{(m)}(G) \simeq \mathbf{S}^{(m)}(\mathrm{Lie}(G))$ est un anneau noethérien, car c'est une V-algèbre de type fini. Par un argument standard, on en déduit que $D^{(m)}(G)$ est noethérien (e.g. [MR87], Thm. 1.6.9). Cela montre (ii) et (iii). □

4.2 – *PD-stratifications de niveau m*

Nous retournons au cas où G est un schéma en groupes quelconque affine et lisse sur S. Grâce au formalisme présenté ici, nous pouvons décrire la donnée d'une structure de $D^{(m)}(G)$-module de façon analogue au cas classique en utilisant la notion de stratification. Il s'agit essentiellement de reproduire le 2.3 de [Ber96].

DÉFINITION 4.2.1. Soit E un V-module. On appelle *G-m-PD-stratification* sur E la donnée d'une famille compatible d'isomorphismes, $P^n_{(m)}(G)$-linéaires,

$$\varepsilon_n \colon P^n_{(m)}(G) \otimes_V E \xrightarrow{\sim} E \otimes_V P^n_{(m)}(G),$$

tels que

(i) $\varepsilon_0 = \mathrm{Id}_E$,

(ii) pour tous n, n', le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} P^n_{(m)}(G) \otimes_V P^{n'}_{(m)}(G) \otimes_V E \arrow[r, "\delta^{n,n'*}(\varepsilon_{n+n'})"] \arrow[d, "q_1^{n,n'*}(\varepsilon_{n+n'})"', "\sim"] & E \otimes_V P^n_{(m)}(G) \otimes_V P^{n'}_{(m)}(G) \\ P^n_{(m)}(G) \otimes_V E \otimes_V P^{n'}_{(m)}(G), \arrow[ur, "\sim", "q_0^{n,n'*}(\varepsilon_{n+n'})"'] & \end{tikzcd}$$

dont les flèches sont obtenues par extension des scalaires à partir des applications $\delta^{n,n'}$ (voir (26)) et des applications

$$q_0^{n,n'} \colon P^{n+n'}_{(m)}(G) \twoheadrightarrow P^n_{(m)}(G) \longrightarrow P^n_{(m)}(G) \otimes_V P^{n'}_{(m)}(G),$$

et

$$q_1^{n,n'} \colon P^{n+n'}_{(m)}(G) \twoheadrightarrow P^{n'}_{(m)}(G) \longrightarrow P^n_{(m)}(G) \otimes_V P^{n'}_{(m)}(G),$$

est commutatif.

On dispose de la caractérisation suivante de la structure de $D^{(m)}(G)$-module.

PROPOSITION 4.2.2. *Soit E un V-module. Il y a équivalence entre*

(i) *se donner une structure de $D^{(m)}(G)$-module sur E prolongeant sa structure de V-module,*

(ii) *se donner une famille compatible d'homomorphismes V-linéaires*

$$\theta_n \colon E \longrightarrow E \otimes_V P^n_{(m)}(G),$$

telle que $\theta_0 = \mathrm{Id}_E$, et pour tous n, n' le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} E \otimes P^{n+n'}_{(m)}(G) \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes \delta^{n,n'}"] & E \otimes P^n_{(m)}(G) \otimes P^{n'}_{(m)}(G) \\ E \arrow[u, "\theta_{n+n'}"] \arrow[r, "\theta_{n'}"] & E \otimes P^{n'}_{(m)}(G), \arrow[u, "\theta_n \otimes \mathrm{Id}"'] \end{tikzcd}$$

(iii) *se donner une G-m-PD-stratification sur E.*

De plus, un homomorphisme V-linéaire $\lambda\colon E \to F$ entre deux $D^{(m)}(G)$-modules à gauche est $D^{(m)}(G)$-linéaire si et seulement s'il commute aux homomorphismes θ_n (resp. aux isomorphismes ε_n). Dans ce cas, on dit qu'il est horizontal.

La démonstration de ces résultats est rigoureusement identique à celle de Grothendieck dans le cas des opérateurs différentiels usuels (cf. proposition 2.3.2 de [Ber96]) et nous ne la donnons pas. Signalons seulement comment sont définis les θ_n. Si E est un $D^{(m)}(G)$-module, l'homomorphisme θ_n est obtenu comme le composé

$$\theta_n\colon E \longrightarrow \mathrm{Hom}_V(D^{(m)}(G), E) \xrightarrow{\sim} E \otimes P^n_{(m)}(G).$$

Remarquons que comme d'habitude, le deuxième isomorphisme provient du fait que les V-modules considérés sont localement libres sur S.

La commutativité du diagramme imposée dans la proposition précédente correspond alors à l'associativité de l'action de $D^{(m)}(G)$ sur E.

Supposons que I soit engendré sur S par une suite régulière de paramètres, et reprenons les notations de la proposition 4.1.6, on voit que si $x \in E$,

$$\theta_n(x) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle} x \otimes \underline{t}^{\{\underline{k}\}},$$

et que les isomorphismes ε_n obtenus par extension des scalaires ont un inverse défini par

$$\varepsilon_n^{-1}(x \otimes 1) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} (-1)^{|\underline{k}|} \underline{t}^{\{\underline{k}\}} \otimes \underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle}.$$

Cette description en termes de G-m-PD-stratification pour les $D^{(m)}(G)$-modules nous donne le corollaire suivant comme en 1.2.3.3 de [Ber96].

Corollaire 4.2.3. *Supposons que I soit engendré sur S par une suite régulière de paramètres, et reprenons les notations de la proposition 4.1.6. Soient E, F deux $D^{(m)}(G)$-modules à gauche. Alors*

(i) *Il existe sur $E \otimes_V F$ une unique structure de $D^{(m)}(G)$-module à gauche telle que, pour tout $\underline{k}$ et $x \in E$, $y \in F$, on ait*

$$\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle} \cdot (x \otimes y) = \sum_{\underline{l} \leq \underline{k}} \left\langle \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{l} \end{matrix} \right\rangle \underline{\xi}^{\langle \underline{l} \rangle} x \otimes \underline{\xi}^{\langle \underline{k}-\underline{l} \rangle} y.$$

(ii) *Il existe sur $\mathrm{Hom}_V(E, F)$ une unique structure de $D^{(m)}(G)$-module à gauche telle que, pour tout $\underline{k}$, tout morphisme $\varphi\colon E \to F$, tout $x \in E$, on ait*

$$(\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle} \varphi)(x) = \sum_{\underline{l} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{l}|} \left\langle \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{l} \end{matrix} \right\rangle \underline{\xi}^{\langle \underline{k}-\underline{l} \rangle} (\varphi(\underline{\xi}^{\langle \underline{l} \rangle} x)).$$

Corollaire 4.2.4. *Sous les hypothèses de § 3.1, on dispose d'un foncteur de la catégorie des G-modules vers la catégorie des $D^{(m)}(G)$-modules.*

Démonstration. Soit M un G-module dont la structure est définie par une application $\Delta_M \; M \to M \otimes V[G]$ vérifiant (20). Il suffit de montrer que l'on peut munir M d'une G-m-PD-stratification. Pour cela on vérifie le critère de la proposition 4.2.2 (pour les $D^{(m)}(G)$-modules), en posant

$$\theta_n = (\mathrm{Id}_M \otimes \rho_m) \circ \Delta_M \colon M \longrightarrow M \otimes P^n_{(m)}(G).$$

Pour $n = 0$, l'algèbre $P^n_{(m)}(G)$ est égale à V et on vérifie comme dans le cas classique que $\theta_0 = \mathrm{Id}_M$ en utilisant les relations (20). Nous vérifions à présent que le diagramme donné en (ii) de la proposition 4.2.2 commute, en utilisant la commutation du diagramme ci-dessous (par définition de l'application $\delta^{n,n'}$, voir (26))

$$\begin{tikzcd} V[G] \arrow[r, "\mu^\sharp"] \arrow[d, "\rho_m"'] & V[G] \otimes V[G] \arrow[d, "\rho_m \otimes \rho_m"'] \\ P^{n+n'}_{(m)}(G) \arrow[r, "\delta^{n,n'}"] & P^n_{(m)}(G) \otimes P^{n'}_{(m)}(G), \end{tikzcd}$$

et les égalités qui suivent, lesquelles font intervenir les relations vérifiées par l'application Δ_M

$$\begin{aligned} &\mathrm{Id} \otimes \delta^{n,n'} \circ (\mathrm{Id}_M \otimes \rho_m) \circ \Delta_M \\ &\quad = (\mathrm{Id}_M \otimes (\rho_m \otimes \rho_m) \circ \mu^\sharp) \circ \Delta_M \\ &\quad = (\mathrm{Id}_M \otimes (\rho_m \otimes \rho_m)) \circ (\Delta_M \otimes \mathrm{Id}_{V[G]}) \circ \Delta_M \\ &\quad = ((\mathrm{Id}_M \otimes \rho_m) \circ \Delta_M \otimes \mathrm{Id}_{P^{n'}_{(m)}(G)}) \circ (\mathrm{Id}_M \otimes \rho_m) \circ \Delta_M . \end{aligned}$$ □

Toutes les constructions sont fonctorielles.

Remarque. De façon analogue aux stratifications, nous pouvons donner une description des $D^{(m)}(G)$-modules à droite en définissant la notion de costratification comme dans le chapitre 1 de [Ber00]. Nous n'entrerons pas dans ces détails ici.

4.3 – *Liens avec les faisceaux différentiels sur G.*

Soient G un schéma en groupes lisse sur S, Δ l'immersion diagonale $G \hookrightarrow G \times G$, définie par l'idéal $\mathcal{I}_\Delta$, $e_G = e \times \mathrm{Id}_G$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} e_G \colon G &\hookrightarrow G \times G, \\ g &\longmapsto (e, g). \end{aligned}$$

Alors on a pour $t \in V[G]$, $(\varepsilon_G \otimes \mathrm{Id})(1 \otimes t - t \otimes 1) = t - \varepsilon_G(t) \in \mathcal{I}$, si bien que $(e_G)^*(\mathcal{I}_\Delta) = \mathcal{I}$, et le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "e"] \arrow[d, hook, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G \arrow[d, hook, "\Delta"] \\ G \arrow[r, "e_G"] & G \times G. \end{tikzcd} \tag{28}$$

Considérons la m-PD-enveloppe de $V[G]$ pour l'idéal I définissant e, $P^n_{(m)}(G)$ introduite au début de § 4. Le faisceau $\mathcal{I}_\Delta/\mathcal{I}^2_\Delta$ est localement libre sur G. Par la propriété de changement de base dans le cas régulier de 1.5.3 de [Ber96] par le morphisme e, on dispose de la proposition suivante.

Proposition 4.3.1. *Il existe des isomorphismes canoniques de m-PD-algèbres*

$$V[G]/I \otimes_{V[G]} \Gamma(G, \mathcal{P}^n_{G,(m)}) \simeq P^n_{(m)}(G),$$

pour cet isomorphisme $\Gamma(G, \mathcal{P}^n_{G,(m)})$ est un $V[G]$-module via $f \mapsto f \otimes 1$.

On en déduit des surjections

$$s_m \colon \Gamma(G, \mathcal{P}^n_{G,(m)}) \twoheadrightarrow P^n_{(m)}(G). \tag{29}$$

Soit r_m (voir (5)) le morphisme canonique $V[G] \otimes V[G] \to \Gamma(G, \mathcal{P}^n_{G,(m)})$, $d_1 \colon V[G] \to V[G] \otimes V[G]$ donné par $d_1(f) = 1 \otimes f$ et reprenons ρ_m de (23). L'énoncé se complète de l'observation suivante, qui résulte directement du changement de base car $(\varepsilon_G \otimes id)(1 \otimes f) = f$ pour $f \in V[G]$.

Proposition 4.3.2. *Le diagramme suivant de $V[G]$-modules est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} V[G] \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\rho_m"'] & \Gamma(G, \mathcal{P}^n_{G,(m)}) \arrow[dl, two heads, "s_m"] \\ P^n_{(m)}(G). & \end{tikzcd}$$

Fixons un entier m. En dualisant les isomorphismes de la proposition 4.3.1, on obtient la

Proposition 4.3.3. *Il existe des isomorphismes de V-modules*

$$\beta_m \colon D^{(m)}_n(G) \simeq V[G]/I \otimes_{V[G]} \Gamma(G, \mathcal{D}^{(m)}_{G,n}),$$

resp.

$$D^{(m)}(G) \simeq V[G]/I \otimes_{V[G]} \Gamma(G, \mathcal{D}^{(m)}_{G}).$$

REMARQUE. La surjection $\Gamma(G, \mathcal{D}^{(m)}_{G,n}) \to D^{(m)}_n(G)$ qui résulte de ces applications n'est pas un morphisme d'anneaux. Par exemple, dans le cas où $m = 0$, $p \neq 2$, $G = \mathbf{G}_m = \operatorname{Spec} V[T, T^{-1}]$, $T - 1$ est une coordonnée locale au voisinage de 1, et aussi un générateur de $\mathcal{I}_\kappa$. Ainsi, $\tau = 1 \otimes T - T \otimes 1$, et $e^*(\tau) = T - 1$, ce qui donne $e^*(\partial_T) = \xi^{\langle 1 \rangle} = \xi$. Dans ce cas, $\partial_T^{\langle 2 \rangle} = \partial_T^2$. Or, on a aussi $e^*(\partial_T^{\langle 2 \rangle}) = \xi^{\langle 2 \rangle}$. Et on calcule

$$e^*(\partial_T^2) = \xi^{\langle 2 \rangle} \neq \xi^2,$$

d'après la formule (27).

Soit $P \in \Gamma(G, \mathcal{D}^{(m)}_G)$, on note $P(e)$ l'image de P par la surjection canonique

$$\Gamma(G, \mathcal{D}^{(m)}_G) \twoheadrightarrow V[G]/I \otimes_{V[G]} \Gamma(G, \mathcal{D}^{(m)}_G). \tag{30}$$

De même, soit $f \in V[G]$, on note $f(e) = \varepsilon_G(f)$ l'image de f par la surjection $\varepsilon_G \colon V[G] \twoheadrightarrow V$ définissant la section identité de G, l'action de $P^n_{(m)}(G)$ se fait via ρ_m. Alors on a

PROPOSITION 4.3.4. *Soient f une section locale de $V[G]$ et $P \in \Gamma(G, \mathcal{D}^{(m)}_G)$. Alors*

$$(P(e))(f) = (P(f))(e).$$

DÉMONSTRATION. Notons $d_0 \colon V[G] \to V[G] \otimes_V V[G]$ l'application définie par $d_0(f) = f \otimes 1$. L'énoncé résulte du diagramme suivant. Par définition, dans ce diagramme, le carré de droite est commutatif, et le carré du milieu est commutatif car provient du changement de base par e_G :

$$\begin{tikzcd}
V[G] \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"] & V[G] \otimes_V V[G] \arrow[r, "r_m"] \arrow[d, two heads, "\varepsilon_G \otimes \mathrm{Id}"] & \Gamma(G, \mathcal{P}^n_{X,(m)}) \arrow[r, "P"] \arrow[d, two heads] & V[G] \arrow[d, two heads, "\varepsilon_G"] \\
 & V[G] \arrow[r, "\rho_m"] & P^n_{(m)}(G) \arrow[r, "P(e)"] & V.
\end{tikzcd}$$ □

4.4 – *Opérateurs différentiels sur des G-schémas*

Nous nous plaçons toujours sous les hypothèses de § 3.1. Le but est de montrer le théorème 4.4.9.2. On commence par construire, dans le cas où un schéma en groupes G agit à gauche sur un S-schéma lisse X, un anti-homomorphisme de l'algèbre des distributions de G, $D^{(m)}(G)$ vers d'algèbre de sections globales $\Gamma(X, \mathcal{D}_X^{(m)})$. Dans le cas d'une action à droite, la construction analogue fournit un *homomorphisme* entre ces deux algèbres, cf. II.§ 4. no. 4.5 de [DG70]. On en déduit un homomorphisme d'algèbres de l'algèbre des distributions de G, $D^{(m)}(G)$, vers l'algèbre des opérateurs différentiels globales de niveau m sur X.

On rappelle qu'on note l'action $\sigma\colon G\times X \to X$ et $\sigma^\sharp$ le morphisme de faisceaux

$$\sigma^\sharp\colon \mathcal{O}_X \longrightarrow V[G] \otimes_V \mathcal{O}_X.$$

Proposition 4.4.1. *Soient X un S-schéma lisse sur lequel G agit à gauche, et m un entier. Il existe un anti-homomorphisme d'algèbres filtrées Q_m de l'algèbre $D^{(m)}(G)$ vers l'algèbre des sections globales sur X du faisceau $\mathcal{D}_X^{(m)}$. Si X est muni d'une action à droite, on trouve un homomorphisme d'algèbres filtrées de l'algèbre $D^{(m)}(G)$ vers l'algèbre des sections globales sur X du faisceau $\mathcal{D}_X^{(m)}$.*

Démonstration. Pour la démonstration, on traite le cas de l'action de G à gauche sur X, le cas à droite étant symétrique. Soit $\sigma\colon G \times X \to X$ l'action de G sur X. On décompose

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_X\colon X &\overset{e_X}{\hookrightarrow} G \times X \xrightarrow{\sigma} X, \\ x &\longmapsto (e, x). \end{aligned}$$

Rappelons que d'après (9), on dispose d'un projecteur q_1, qui est un m-PD-morphisme, $q_1\colon \mathcal{P}^n_{G\times X,(m)} \twoheadrightarrow p_1^*\mathcal{P}^n_{G,(m)}$. Considérons le composé

$$q_1 \circ d\sigma\colon \sigma^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \longrightarrow \mathcal{P}^n_{G\times X,(m)} \twoheadrightarrow p_1^*\mathcal{P}^n_{G,(m)} \tag{31}$$

où $d\sigma$ est le m-PD-morphisme qui apparaît dans la preuve de la proposition 3.4.1. Comme $\mathrm{Id}_X = \sigma \circ e_X$, on trouve en appliquant e_X^* au morphisme précédent un morphisme de faisceaux d'algèbres $\mathcal{P}^n_{X,(m)} \to e_X^* p_1^*\mathcal{P}^n_{G,(m)}$. On voit que $p_1 \circ e_X = e \circ st_X$ où st_X est le morphisme structural de X vers S, de sorte que

$$\begin{aligned} e_X^* p_1^*\mathcal{P}^n_{G,(m)} &\simeq \mathcal{O}_X \otimes_V e^*\mathcal{P}^n_{G,(m)} \\ &\simeq \mathcal{O}_X \otimes_V P^n_{(m)}(G) \text{ d'après la proposition 4.3.1.} \end{aligned}$$

Avec cette identification, on voit que la flèche $p_1^*\mathcal{P}^n_{G,(m)} \to e_{X*}\mathcal{O}_X \otimes_V P^n_{(m)}(G)$ est la flèche $p_1^* s_m$ où s_m est donnée en (29). Ceci nous donne finalement une application

$$\sigma_m^{(n)}\colon \mathcal{P}^n_{X,(m)} \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes_V P^n_{(m)}(G). \tag{32}$$

La remarque suivante sera utile dans la suite.

Proposition 4.4.2. *Le faisceau $\mathcal{O}_X \otimes_V P^n_{(m)}(G)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres.*

En effet, le faisceau $\mathcal{O}_S \otimes_V P^n_{G,(m)}$ est localement libre sur S. Supposons que sur S, l'idéal I soit engendré par une suite régulière d'éléments $t_1, \ldots, t_N$, alors $P^n_{(m)}(G)$ est libre de base les éléments $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$ pour $|\underline{k}| \leq n$ et le faisceau $\mathcal{O}_X \otimes_V P^n_{(m)}(G)$ est un $\mathcal{O}_X$-module libre de base les éléments

$$1 \otimes \underline{t}^{\{\underline{k}\}} \quad \text{tels que } |\underline{k}| \leq n.$$

Introduisons ρ_m (resp. r_m) est l'application canonique de (23) (resp. (5)).

Dans la suite, on munit $\mathcal{O}_X \otimes_V P^n_{(m)}(G)$ de la m-PD-structure provenant de celle de $P^n_{(m)}(G)$. Les propriétés de $\sigma^{(n)}_m$ sont décrites par la

Proposition 4.4.3. (i) *L'application $\sigma^{(n)}_m$ est un m-PD-morphisme.*

(ii) *Le morphisme $\sigma^{(n)}_m$ est $\mathcal{O}_X$-linéaire pour la structure de $\mathcal{O}_X$-module à gauche de $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$.*

(iii) *Soit $b \in \mathcal{O}_X$, tel que $\sigma^\sharp(b) = \sum_i c_i \otimes d_i$, avec $c_i \in V[G]$, et $d_i \in \mathcal{O}_X$, alors*

$$\sigma^{(n)}_m(1 \otimes b) = \sum_i \rho_m(c_i) \otimes d_i \in P^n_{(m)}(G) \otimes \mathcal{O}_X,$$

où ρ_m est l'application canonique de (23) (*resp.* (5)).

(iv) *Les applications $\sigma^{(n)}_m$ sont compatibles entre elles pour n et m variables.*

Démonstration. Le (i) provient du fait que l'application $q_1 \circ d\sigma$, defini dans la preuve de la proposition précédente, est un m-PD-morphisme et du fait que la formation des m-PD-enveloppes commute aux extensions de base dans le cas où on considère des idéaux réguliers. La $\mathcal{O}_X$-linéarité de (ii) est automatique car q_1 et $d\sigma$ sont $\mathcal{O}_{G\times X}$-linéaires. Montrons (iii). Dans la suite, grâce à la section canonique 1 de $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$, on identifie $V[G] \otimes_V p_2^{-1}\mathcal{O}_X$, à un sous-faisceau de

$$\sigma^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \simeq (V[G] \otimes \mathcal{O}_X) \otimes_{\sigma^{-1}\mathcal{O}_X} \sigma^{-1}\mathcal{P}^n_{X,(m)}.$$

On a

$$d\sigma(1 \otimes 1 \otimes (1 \otimes \sigma^{-1}(b)) = \sum_i (c_i \otimes 1) \cdot (1 \otimes d_i).$$

Calculons maintenant le projecteur q_1 sur les éléments du type $1 \otimes d_i$. Soient $x_1, \ldots, x_M$ un système de coordonnées locales sur X, $x'_1, \ldots, x'_N$ des coordonnées locales sur G, $\tau_i = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$, $\tau'_j = 1 \otimes x'_j - x'_j \otimes 1$. Les opérateurs différentiels relatifs à ce choix de coordonnées sont alors notés $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}' \rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$ tandis que les éléments $\underline{\tau}^{\{\underline{k}'\}}\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$ forment une base locale de $\mathcal{P}^n_{G\times X,(m)}$ pour $|\underline{k}| + [\underline{k}'| \leq n$. Reprenons les notations de l'énoncé, la formule de Taylor donne

$$1 \otimes d_i = \sum_{|\underline{k}|\leq n} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}(d_i)\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}} \in \mathcal{P}^n_{G\times X,(m)},$$

de sorte que $q_1(1\otimes 1\otimes 1\otimes d_i) = 1\otimes d_i \in p_1^*\mathcal{P}^n_{G,(m)}$ et donc par les propriétés de linéarité des applications considérées, $q_1(1\otimes 1\otimes c_i\otimes d_i) = (1\otimes c_i)(1\otimes d_i) \in p_1^*\mathcal{P}^n_{G,(m)}$. Il résulte de la proposition 4.3.2, que $s_m(1\otimes c_i) = \rho_m(c_i)$, ce qui démontre la formule de (iii). L'assertion (iv) est claire. △

Dans la situation (iii) de la proposition, on notera dans la suite plus simplement

$$\sigma_m^{(n)}(1\otimes b) = \sum_i c_i \otimes d_i.$$

Indiquons maintenant comment calculer l'application graduée en degré 1 de $\sigma_m^{(n)}$ pour sa filtration m-PD-adique. Soient $\mathrm{gr}_1\ q_1$ et $\mathrm{gr}_1\ d\sigma$ les gradués de degré 1 des m-PD-morphismes q_1 et $d\sigma$. Donc, on dispose de

$$\mathrm{gr}_1\ q_1 \circ \mathrm{gr}_1\ d\sigma = \mathrm{gr}_1\,(q_1\circ d\sigma)\colon \sigma^*\Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{G\times X} \longrightarrow p_1^*\Omega^1_G.$$

Alors l'application $\mathrm{gr}_1\,\sigma_m^{(n)}$ est obtenue comme la composée

$$\text{(33)}\quad \mathrm{gr}_1\,\sigma_m^{(n)}\colon \Omega^1_X \xrightarrow{e_X^*\,\mathrm{gr}_1\ d\sigma} e_X^*\Omega^1_{G\times X} \xrightarrow{e_X^*\,\mathrm{gr}_1\ q_1} e_X^*p_1^*\Omega^1_G \twoheadrightarrow I/I^2\otimes_V \mathcal{O}_X,$$

où la dernière flèche est la surjection naturelle.

Soit maintenant u un élément de $D_n^{(m)}(G)$, on lui associe l'opérateur différentiel $Q_{m,n}(u) \in \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}_{X,n})$ suivant (défini localement)

$$Q_{m,n}(u)\colon \mathcal{P}^n_{X,(m)} \xrightarrow{\sigma_m^{(n)}} P^n_{(m)}(G)\otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{u\otimes \mathrm{Id}} \mathcal{O}_X.$$

Ces applications $Q_{m,n}$ passent à la limite inductive sur m pour m variable en un morphisme filtré V-linéaire

$$\text{(34)}\qquad Q_m\colon D^{(m)}(G) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}_X).$$

Constatons enfin que $Q_m(1) = 1$. En effet, $P^0_{(m)}(G) \simeq V$ et $\sigma_m^{(0)}\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ est $\mathcal{O}_X$-linéaire et unitaire, donc vaut $\mathrm{Id}_{\mathcal{O}_X}$. Ainsi $Q_m(1) = 1$.

Pour compléter la preuve de la proposition 4.4.1, il nous reste à vérifier le lemme suivant.

LEMME 4.4.4. *L'application* $Q_m\colon D^{(m)}(G) \to \Gamma(X, \mathcal{D}_X^{(m)})$ *est un anti-homomorphisme d'algèbres, i.e.* $Q_m(uv) = Q_m(v)Q_m(u)$.

Soient $u \in D_n^{(m)}(G)$, $v \in D_{n'}^{(m)}(G)$, les applications $Q_m(uv)$ et $Q_m(v)Q_m(u)$ vus comme éléments de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)}, \mathcal{O}_X)$ sont $\mathcal{O}_X$-linéaires (pour l'action à gauche sur $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$). Pour les comparer, nous calculons d'abord $Q_m(uv)(1 \otimes b)$ pour $b \in \mathcal{O}_X$. Décomposons $\sigma^\sharp(b) = \sum_i c_i \otimes d_i$, avec $c_i \in V[G]$, $d_i \in \mathcal{O}_X$.

Rappelons que $\delta^{n,n'}$ est définie en (26). Pour calculer $Q_m(uv)(1 \otimes b)$, nous considérons l'application R_m, obtenue comme le composé suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)} & \xrightarrow{\sigma_m^{(n+n')}} & P^{n+n'}_{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\delta^{n,n'}\otimes \mathrm{Id}} & P^n_{(m)}(G) \otimes_V P^{n'}_{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X, \\
1 \otimes b & \longmapsto & \sum_i c_i \otimes d_i & \longmapsto & \sum_i \mu^\sharp(c_i) \otimes d_i,
\end{array}$$

qui est un m-PD-morphisme comme composé de m-PD-morphismes.

Reprenons la définition du produit des opérateurs différentiels de (11), qui fait intervenir $\delta^{n',n}\colon \mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)} \to \mathcal{P}^{n'}_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X,(m)}$, tel que $\delta^{n',n}(a \otimes b) = a \otimes 1 \otimes 1 \otimes b$.

Si $\mathcal{P}^{n'}_{X,(m)}$ est muni de la structure de $\mathcal{O}_X$ donnée par la multiplication à droite, nous identifions dans le diagramme qui suit $\mathcal{P}^{n'}_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} P^n_{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X$ à $P^n_{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{P}^{n'}_{X,(m)}$ en envoyant $(a \otimes b) \otimes (c \otimes d)$ sur $c \otimes (a \otimes db)$. Pour calculer $Q_m(v)Q_m(u)$ notons S_m le composé

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{P}^{n+n'}_{X,(m)} & \xrightarrow{\delta^{n',n}} & \mathcal{P}^{n'}_{X,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X,(m)} & \xrightarrow{\mathrm{Id}\,\bar{\otimes}\sigma_m^{(n)}} & P^n_{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{P}^{n'}_{X,(m)} \\
1 \otimes b & \longmapsto & 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes b & \longmapsto & \sum_i c_i \otimes (1 \otimes d_i) \\
 & & & \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\sigma_m^{(n')}} & P^n_{(m)}(G) \otimes_V P^{n'}_{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X, \\
 & & & \longmapsto & \sum_i c_i \otimes \sigma^\sharp(d_i),
\end{array}$$

qui est un m-PD-morphisme.

La relation de comodule (20) appliquée à $\mathcal{O}_X$ dit exactement que $R_m(1 \otimes b) = S_m(1 \otimes b)$ pour tout b de $\mathcal{O}_X$, et par $\mathcal{O}_X$-linéarité, on voit que $R_m(1 \otimes b - b \otimes 1) = S_m(1 \otimes b - b \otimes 1)$. Comme R_m et S_m sont des m-PD-morphismes, ils coïncident donc pour tout élément $x = 1 \otimes b - b \otimes 1$, sur les éléments $x^{\{q\}}$, pour tout entier q. Ces éléments engendrent $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ comme $\mathcal{O}_X$-algèbre (1.4.4 de [BER96]) de sorte que les m-PD-morphismes R_m et S_m sont égaux.

Soient u, v deux éléments de $D^{(m)}(G)$, et $\Phi_{u,v} = \mathrm{Id}\,\overline{\otimes} u \overline{\otimes} v$ l'homomorphisme d'évaluation $\mathcal{O}_X \otimes_V P^n_{(m)}(G) \otimes_V P^{n'}_{(m)}(G) \to \mathcal{O}_X$. L'opérateur différentiel $Q_m(uv)$ est égal à $\Phi_{u,v} \circ R_m$ et $Q_m(v)Q_m(u)$ est égal à $\Phi_{u,v} \circ S_m$, d'où l'égalité $Q_m(uv) = Q_m(v)Q_m(u)$. □

Donnons maintenant une variante à droite de ce lemme, dans le cas où G agit à droite sur un S-schéma lisse X. Dans ce cas la définition de Q_m est tout à fait analogue et on obtient le

Lemme 4.4.5. *Si G agit à droite sur un S-schéma lisse X, l'application $Q_m \colon D^{(m)}(G) \to \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}_X)$ est un homomorphisme d'algèbres, i.e. $Q_m(uv) = Q_m(u)Q_m(v)$.*

Dans la suite, on se donne une action à gauche de G sur un S-schéma lisse X. La version à droite s'obtient facilement à partir de la version à gauche. Les raisonnements faisant intervenir les gradués des algèbres $D^{(m)}(G)$ et $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}_X)$ sont complètement identiques.

Reprenons maintenant les notations de la proposition 4.1.6 et de § 2.2.2.

Corollaire 4.4.6. (i) *$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est un $D^{(m)}(G)$-module, dont la structure est compatible avec sa structure de $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}_X)$-module.*

(ii) *On suppose que l'idéal I est engendré par une suite régulière d'éléments $t_1, \dots, t_N$, alors $D^{(m)}(G)$ est libre de base les éléments $\xi^{\langle \underline{k} \rangle}$ et on peut considérer $\xi^{\langle \underline{k} \rangle}_X = Q_m(\xi^{\langle \underline{k} \rangle})$. On dispose du formulaire suivant pour $\underline{k}$ tel que $|\underline{k}| \leq n$, et $\underline{i}$ tel que $|\underline{i}| \leq n$,*

(35)
$$\sigma^{(n)}_m(1 \otimes f) = \sum_{|\underline{l}| \leq n} \underline{t}^{\{\underline{l}\}} \otimes \xi^{\langle \underline{l} \rangle}_X(f) \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{O}_X \ (\textit{formule de Taylor}),$$

$$\sigma^{(n)}_m(\tau) = \sum_{|\underline{l}| \leq n} \underline{t}^{\{\underline{l}\}} \otimes \xi^{\langle \underline{l} \rangle}_X(\tau) \quad \textit{pour tout } \tau \in \mathcal{P}^n_{X,(m)},$$

(36)
$$\xi^{\langle \underline{k} \rangle}_X f = \sum_{\underline{k}' + \underline{k}'' = \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\} \xi^{\langle \underline{k}' \rangle}_X(f) \xi^{\langle \underline{k}'' \rangle}_X \in \mathcal{D}^{(m)}_X.$$

Démonstration. Commençons par (i). La structure de $D^{(m)}(G)$-module de $\mathcal{O}_X$ est donnée par le morphisme composé, pour $u \in D^{(m)}(G)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X &\longrightarrow \mathcal{P}^n_{X,(m)} \xrightarrow{Q_m(u)} \mathcal{O}_X, \\ f &\longmapsto 1 \otimes f, \end{aligned}$$

et est donc par définition compatible avec l'anti-homomorphisme d'algèbres $D^{(m)}(G) \to \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}_X)$.

Montrons (ii). Comme $\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle}$ est la base duale de $\underline{t}^{\{\underline{k}\}}$, on a

$$\sigma^{(n)}_m(1 \otimes f) = \sum_{|\underline{l}| \leq n} \underline{t}^{\{\underline{l}\}} \otimes Q_m(\underline{\xi}^{\langle \underline{l} \rangle})(f),$$

ce qui donne (35). C'est exactement la même chose pour la formule suivante. Pour la dernière formule, il suffit de comparer ces deux opérateurs différentiels sur les sections locales τ de $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$. Soit τ une section locale de $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$,

$$(\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle}_X f)(\tau) = (\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes \mathrm{Id})(\sigma^{(n)}_m((1 \otimes f)\tau)).$$

Or on a

$$\begin{aligned} (\sigma^{(n)}_m((1 \otimes f)\tau)) &= \sigma^{(n)}_m(1 \otimes f)\sigma^{(n)}_m(\tau) \quad \text{(d'après (35))} \\ &= \Big(\sum_{|\underline{k}'| \leq n} \underline{t}^{\{\underline{k}'\}} \otimes \underline{\xi}^{\langle \underline{k}' \rangle}_X(f) \Big) \Big(\sum_{|\underline{k}''| \leq n} \underline{t}^{\{\underline{k}''\}} \otimes \underline{\xi}^{\langle \underline{k}'' \rangle}_X(\tau) \Big) \end{aligned}$$

et donc

$$(\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes \mathrm{Id})(\sigma^{(n)}_m((1 \otimes f)\tau)) = \sum_{\underline{k}' + \underline{k}'' = \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\} \underline{\xi}^{\langle \underline{k}' \rangle}_X(f) \underline{\xi}^{\langle \underline{k}'' \rangle}_X(\tau),$$

ce qui montre la dernière formule. □

Soit $D^{(m)}(G)^{\mathrm{op}}$ l'algèbre opposée à $D^{(m)}(G)$ (i.e munie du produit $PQ = QP$ dans $D^{(m)}(G)$). Considérons $\mathcal{A}^{(m)}_X = D^{(m)}(G)^{\mathrm{op}} \otimes_V \mathcal{O}_X$. L'application Q_m qui est un homomorphisme d'algèbres $D^{(m)}(G)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}^{(m)}_X$, s'étend par $\mathcal{O}_X$-linéarité en une application $Q_{m,X} \colon \mathcal{A}^{(m)}_X \to \mathcal{D}^{(m)}_X$. Dans la suite, nous utilisons la notion de $\mathcal{O}_X$-anneau en sens de Beilinson [Beil84]. Nous utilisons toujours les notations de la proposition 4.1.6. Nous tirons de la proposition 4.4.1 et du corollaire précédent le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.4.7. (i) *Le faisceau* $\mathcal{A}_X^{(m)}$ *est un faisceau de* $\mathcal{O}_X$*-modules localement libres.*

(ii) *Il existe une unique structure de* $\mathcal{O}_X$*-anneau filtré sur* $\mathcal{A}_X^{(m)}$ *compatible avec la structure d'algèbre de* $D^{(m)}(G)^{\mathrm{op}}$ *et telle que si l'idéal* I *est engendré par une suite régulière de paramètres* $t_1, \ldots, t_N$*, on ait, pour* $f \in \mathcal{O}_X$*,*

$$(1 \otimes f)(\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes 1) = \sum_{\underline{k}'+\underline{k}''=\underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\} \underline{\xi}^{\langle \underline{k}'' \rangle} \otimes \underline{\xi}_X^{\langle \underline{k}' \rangle}(f).$$

De plus, $Q_{m,X} \colon \mathcal{A}_X^{(m)} \to \mathcal{D}_X^{(m)}$ *est un homomorphisme de* $\mathcal{O}_X$*-anneaux filtrés.*

(iii) *Il existe un isomorphisme canonique de* $\mathcal{O}_X$*-algèbres graduées*

$$c_{m,X}^* \colon \mathrm{gr}_\bullet \mathcal{A}_X^{(m)} \simeq \mathbf{S}^{(m)}(\mathrm{Lie}(G)) \otimes_V \mathcal{O}_X.$$

En outre, les faisceaux $\mathcal{A}_X^{(m)}$ *resp.* $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{A}_X^{(m)}$ *sont des faisceaux de* $\mathcal{O}_X$*-anneaux resp. de* $\mathcal{O}_X$*-algèbres cohérents, à sections noethériennes sur les ouverts affines.*

DÉMONSTRATION. Le (i) vient du fait que

$$\mathcal{A}_X^{(m)} = D^{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X,$$

comme faisceau de groupes abéliens et du fait que $\mathcal{O}_S \otimes_V D^{(m)}(G)$ est localement libre sur S.

Passons au (ii). On observe que $Q_{m,X}(\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes 1) = Q_m(\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle})$ et si $f \in \mathcal{O}_X$, $Q_{m,X}(1 \otimes f) = f$. On définit une multiplication twistée sur le produit tensoriel $\mathcal{A}_X^{(m)}$ en utilisant l'application Q_m et l'action naturelle de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ sur $\mathcal{O}_X$. Cette multiplication induit sur $\mathcal{A}_X^{(m)}$ une structure de $\mathcal{O}_X$-anneau. En particulier, on peut former les produits $(1 \otimes f)(\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes 1)$ pour $f \in \mathcal{O}_X$. Et puisque, par définition, $\underline{\xi}_X^{\langle \underline{k} \rangle} = Q_m(\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle})$, la formule de l'énoncé implique que

$$\begin{aligned} Q_{m,X}((\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes 1)(1 \otimes f)) &= \sum_{\underline{k}'+\underline{k}''=\underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\} \underline{\xi}_X^{\langle \underline{k}' \rangle}(f) \underline{\xi}_X^{\langle \underline{k}'' \rangle} \\ &= \underline{\xi}_X^{\langle \underline{k} \rangle} f \quad \text{(d'après (36))} \\ &= Q_{m,X}(\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes 1) Q_{m,X}(1 \otimes f). \end{aligned}$$

Le $\mathcal{O}_X$-anneau $\mathcal{A}_X^{(m)}$ est filtrée par les sous-$\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{A}_{X,n}^{(m)} = D_n^{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X$, et, par définition du produit, la structure de $\mathcal{O}_X$-anneau est compatible à cette filtration. D'autre part, l'application Q_m étant filtrée, c'est aussi le cas de $Q_{m,X}$. Comme $\mathcal{O}_X$ est plat sur V, on voit que $\mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{A}_X^{(m)} \simeq \mathrm{gr}_\bullet\, D^{(m)}(G) \otimes \mathcal{O}_X$ et l'isomorphisme cherché suit alors de la proposition 4.1.13. Il en résulte que $\mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{A}_X^{(m)}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre de type fini, donc noethérienne sur les ouverts affines car X est noethérien, de sorte que $\mathcal{A}_X^{(m)}$ est aussi noethérien sur les ouverts affines par un argument standard. De plus, pour tout couple d'ouverts affines U, V de X tels que $V \subset U$, $\mathcal{O}_X(V)$ est plat sur $\mathcal{O}_X(U)$, si bien que $\mathcal{A}_X^{(m)}(V)$ est plat à droite et à gauche sur $\mathcal{A}_X^{(m)}(U)$. Les deux conditions du critère 3.1.1 de [Ber96] sont donc remplies, ce qui montre que $\mathcal{A}_X^{(m)}$ est un faisceau cohérent sur X. Le même raisonnement s'applique au faisceau $\mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{A}_X^{(m)}$. □

4.4.8 – Étude du gradué de $Q_{m,X}$

Comme le morphisme $Q_{m,X}$ est filtré, il induit par passage aux gradués un morphisme

$$\mathrm{gr}_\bullet\, Q_{m,X} \colon \mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{A}_X^{(m)} \longrightarrow \mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}_X^{(m)}.$$

En particulier, on dispose de $\mathrm{gr}_1\, Q_{m,X} \colon \mathrm{gr}_1\, D_m(G) \otimes_V \mathcal{O}_X \to \mathrm{gr}_1\, \mathcal{D}_X^{(m)}$. On en déduit via les identifications $\bar{A}_m$ de (25) et $\bar{B}_m$ de (15) que $\mathrm{gr}_1\, Q_{m,X}$ induit une unique application $\mathcal{Q}_{m,1}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}_1\, D^{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X \arrow[r, "\mathrm{gr}_1\, Q_{m,X}"] \arrow[d, "\bar{A}_m \otimes \mathrm{Id}", "\wr"'] & \mathrm{gr}_1\, \mathcal{D}_X^{(m)} \arrow[d, "\bar{B}_m", "\wr"'] \\
\mathrm{Lie}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X \arrow[r, "\mathcal{Q}_{m,1}"] & \mathcal{T}_X.
\end{tikzcd}$$

Nous avons alors le

Lemme 4.4.8.1. *Pour tout m, les applications $\mathcal{Q}_{m,1}$ coïncident en une même application $\mathcal{Q}_1 \colon \mathrm{Lie}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X \to \mathcal{T}_X$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{I}_X$ l'idéal diagonal de X, $\bar{A}_m^{*-1}$ la flèche obtenue par dualité à partir de $\bar{A}_m$ de (25) et $\mathcal{S}_{m,1} \colon \mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2 \to I/I^2 \otimes_V \mathcal{O}_X$, obtenu comme le composé, après les identifications (15),

$$\mathcal{S}_{m,1} \colon \mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2 \xrightarrow{\bar{B}_m^*} \mathrm{gr}_1\, \mathcal{P}_{X,(m)}^n \xrightarrow{\mathrm{gr}_1\, \sigma_m^{(n)}} \mathrm{gr}_1\, P_{(m)}^n(G) \otimes_V \mathcal{O}_X \xrightarrow{\bar{A}_m^{*-1} \otimes \mathrm{Id}} I/I^2 \otimes_V \mathcal{O}_X.$$

Alors l'application $\mathcal{Q}_{m,1}$ est donnée par le diagramme suivant

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X &\longrightarrow \mathcal{T}_X, \\ \bar{u} &\longmapsto \bar{u} \circ \mathcal{S}_{m,1}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que ces applications $\mathcal{S}_{m,1}$ sont égales à une même application $\mathcal{S}_1$, ce qui provient du fait que les morphismes σ_m sont compatibles pour m variable, de sorte que les $\mathrm{gr}_1\, \sigma_m$ sont tous égaux. □

Reprenons l'isomorphisme d_m de (12): $\mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X)$, construit de façon analogue à c_m dans la proposition 4.1.13 et qui provient par dualité de l'isomorphisme canonique de m-PD-algèbres $d_m^*\colon \Gamma_{X,(m)}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{P}_{X,(m)}$ de (7). On a alors la

Proposition 4.4.8.2. (i) *Le diagramme suivant est commutatif*:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{A}_X^{(m)} & \xrightarrow{\mathrm{gr}_\bullet\, Q_{m,X}} & \mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}_X^{(m)} \\ \wr\big\downarrow c_{m,X} & & \wr\big\downarrow d_m \\ \mathbf{S}^{(m)}(\mathrm{Lie}(G)) \otimes_V \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X), \end{array}$$

où la seconde flèche horizontale est l'application $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{Q}_{m,1})$.

(ii) *Si X est un espace homogène sous l'action de G, alors* $\mathrm{gr}_\bullet\, Q_{m,X}$ *est surjectif.*

Démonstration. On a les égalités

$$\mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}_X^{(m)} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\Big(\bigoplus_n \mathcal{I}_X^{\{n\}}/\mathcal{I}_X^{\{n+1\}}, \mathcal{O}_X\Big)$$

et

$$\mathrm{gr}_\bullet\, D^{(m)}(G) = \mathrm{Hom}_V\Big(\bigoplus_n I^{\{n\}}/I^{\{n+1\}}, V\Big).$$

Les applications $\sigma_m^{(n)}$ induisent une application

$$\mathrm{gr}_\bullet\, \sigma_m\colon \bigoplus_n \mathcal{I}_X^{\{n\}}/\mathcal{I}_X^{\{n+1\}} \longrightarrow \bigoplus_n I^{\{n\}}/I^{\{n+1\}} \otimes_V \mathcal{O}_X,$$

de sorte que l'application $\mathrm{gr}_\bullet\, Q_{m,X}$ est donnée par dualité

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{A}_X^{(m)} &\longrightarrow \mathrm{gr}_\bullet\, \mathcal{D}_X^{(m)}, \\ \bar{u} &\longmapsto \bar{u} \circ \mathrm{gr}_\bullet\, \sigma_m. \end{aligned}$$

De même l'application $\mathrm{gr}_1\, Q_{m,X}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}_1\, \mathcal{A}_X^{(m)} &\longrightarrow \mathrm{gr}_1\, \mathcal{D}_X^{(m)},\\ \bar{u} &\longmapsto \bar{u} \circ \mathrm{gr}_1\, \sigma_m.\end{aligned}$$

La commutativité du diagramme de l'énoncé revient donc à la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_n \mathcal{I}_X^{\{n\}}/\mathcal{I}_X^{\{n+1\}} \arrow[r, "\mathrm{gr}_\bullet \sigma_m"] & \bigoplus_n I^{\{n\}}/I^{\{n+1\}} \otimes_V \mathcal{O}_X \\ \Gamma_{X,(m)}(\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2) \arrow[u, "\mathrm{Id} \otimes c_m^*", "\wr"'] \arrow[r, "\Gamma_{(m)}(\mathcal{S}_1)"] & \Gamma_{(m)}(I/I^2) \otimes_V \mathcal{O}_X . \arrow[u, "d_m^*", "\wr"'] \end{tikzcd}$$

Nous devons comparer $d_m^* \circ \Gamma_{(m)}(\mathcal{S}_1)$ et $\mathrm{gr}_\bullet\, \sigma_m \circ (\mathrm{Id} \otimes c_m^*)$, qui sont des m-PD-morphismes de m-PD-algèbres graduées. En degré 1, $d_m^* = \overline{B}_m^*$ (resp. $c_m^* = \overline{A}_m^*$), si bien que ces morphismes sont égaux en degré 1 par définition de $\mathcal{S}_1$. Comme la m-PD-algèbre $\Gamma_{X,(m)}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ est engendrée par les éléments de degré 1, on voit ainsi que les morphismes $d_m^* \circ \Gamma_{(m)}(\mathcal{S}_1)$ et $\mathrm{gr}_\bullet\, \sigma_m \circ (\mathrm{Id} \otimes c_m^*)$ sont égaux.

Observons pour (ii) que $\mathcal{Q}_1$ est l'application habituelle $\mathrm{Lie}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X \to \mathcal{T}_X$, qui est surjective si X est un G-espace homogène, par un argument classique refait en 1.6 de [NH09]. Ceci montre par (i) que l'application $\mathrm{gr}_\bullet\, Q_{m,X}$ est surjective. □

4.4.9 – Opérateurs différentiels invariants sur G

On suppose ici que G est un schéma en groupes affine et lisse sur S. On rappelle les définitions pour le cas d'une action à droite $X \times G \to X$. Ces définitions s'adaptent de façon évidente pour le cas d'une action à gauche.

Comme G est plat, le morphisme de projection $p_1 \colon X \times G \to X$ est affine et plat. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules G-équivariant par un isomorphisme $\Phi \colon \sigma^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p_1^*\mathcal{E}$. La formule de Künneth donne un isomorphisme pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$H^k(X \times G, p_1^*\mathcal{E}) \simeq H^k(X, \mathcal{E}) \otimes_V V[G].$$

L'application composée suivante $u_G^k(\Phi)$, seulement notée u_G pour $k = 0$:

$$H^k(X, \mathcal{E}) \to H^k(X \times G, \sigma^*\mathcal{E}) \xrightarrow{H^k(\Phi)} H^k(X \times G, p_1^*\mathcal{E})$$

donne donc finalement un morphisme Δ^k, seulement notée Δ pour $k = 0$:

$$\Delta^k \colon H^k(X, \mathcal{E}) \longrightarrow H^k(X, \mathcal{E}) \otimes_V V[G],$$

dont le lecteur pourra vérifier qu'il définit une structure de G-module (à gauche) sur $H^k(X, \mathcal{E})$. Les relations de comodule viennent des relations de cocycles.

Définition 4.4.9.1. Les éléments G-*invariants* de $\Gamma(X,\mathcal{E})$ sont les éléments P de $\Gamma(X,\mathcal{E})$ tels que $\Delta(P)=P\otimes 1$. Le sous-espace de $\Gamma(X,\mathcal{E})$ formé par des éléments G-invariants est noté $\Gamma(X,\mathcal{E})^G$.

En particulier, on a $\Gamma(X,\mathcal{P}^n_{X,(m)})^G$, $\Gamma(X,\mathcal{D}^{(m)}_X)^G$, $\Gamma(X,\mathcal{D}^{(m)}_{X,n})^G$, etc.

Si X est égal à G, l'action des translations à droite de G sur lui-même ($g\in G$ opéré par $h\mapsto hg$) va donner une action à gauche sur $\Gamma(G,\mathcal{D}^{(m)}_G)$ et Q_m est alors à valeurs dans les opérateurs différentiels invariants pour cette action, ce qui étend la proposition classique (II, § 4, no. 6 de [DG70]) suivante. Pour énoncer cette proposition, on considère les applications Q_m de la proposition 4.4.1, ainsi que l'application d'évaluation $\mathrm{ev}_e\colon\Gamma(G,\mathcal{D}^{(m)}_G)^G\to D^{(m)}(G)$ qui est définie par $P\mapsto P(e)$, cf. (30).

Théorème 4.4.9.2. *Les applications canoniques Q_m et ev_e sont des isomorphismes d'algèbres filtrées, inverses l'un de l'autre entre $\Gamma(G,\mathcal{D}^{(m)}_G)^G$ et $D^{(m)}(G)$. Ces applications induisent des bijections canoniques entre $\Gamma(G,\mathcal{D}^{(m)}_{G,n})^G$ et $D^{(m)}_n(G)$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'énoncé à un ordre n fixé, le cas de $D^{(m)}(G)$ s'en déduit par passage à la limite. Observons d'abord que si $u\in D^{(m)}_n(G)$, alors $Q_m(u)$ est invariant.

Soit $P\in\Gamma(G,\mathcal{D}^{(m)}_{G,n})$, et $\Phi\colon\mu^*\mathcal{P}^n_{G,(m)}\to p_1^*\mathcal{P}^n_{G,(m)}$ l'isomorphisme donnant la G-équivariance des faisceaux $\mathcal{P}^n_{G,(m)}$ pour l'action des translations à droite de G sur G. La condition d'invariance de P s'écrit, pour tout $\tau\in\mu^{-1}\mathcal{P}^n_{G,(m)}$,

$$P(\tau)\otimes_{\mu^{-1}\mathcal{O}_X}1\otimes 1=(P\otimes_{p_1^{-1}\mathcal{O}_X}1\otimes 1)(\Phi(\tau\otimes 1\otimes 1))\ \in\mathcal{O}_{G\times G},$$

ou encore pour tout $\tau\in\mu^{-1}\mathcal{P}^n_{G,(m)}$

$$\mu^\sharp(P(\tau))=(P\otimes_{p_1^{-1}\mathcal{O}_X}1\otimes 1)(\Phi(\tau\otimes 1\otimes 1))\ \in\mathcal{O}_{G\times G}.$$

Considérons le m-PD-morphisme composé $\bar{U}_m$

$$\mu^{-1}\mathcal{P}^n_{G,(m)}\xrightarrow{\mu^{-1}\mu^{(n)}_m}P^n_{(m)}(G)\otimes_V\mu^{-1}V[G]\xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\mu^\sharp}P^n_{(m)}(G)\otimes_V\mathcal{O}_{G\times G},$$

que nous étendons par $\mu^{-1}\mathcal{O}_G$ linéarité en un m-PD-morphisme

$$U_m\colon\mu^*\mathcal{P}^n_{G,(m)}\longrightarrow P^n_{(m)}(G)\otimes_V\mathcal{O}_{G\times G}.$$

Ici, l'application $\mu_m^{(n)}$ est définie en (32) pour $X := G$ et $\sigma := \mu$. Considérons à présent le m-PD-morphisme composé $\overline{V}_m$

$$\mathcal{P}^n_{G,(m)} \xrightarrow{\Phi} p_1^*\mathcal{P}^n_{G,(m)} \xrightarrow{p_1^{-1}\mu_m^{(n)} o t_{p_1^{-1}V[G]} \mathrm{Id}_{G\times G}} P^n_{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{O}_{G\times G},$$

que nous étendons par $\mu^{-1}\mathcal{O}_G$ linéarité en un m-PD-morphisme

$$V_m\colon \mu^*\mathcal{P}^n_{G,(m)} \longrightarrow P^n_{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{O}_{G\times G}.$$

Nous observons que pour tout $\tau \in \mu^{-1}\mathcal{P}^n_{G,(m)}$, et $P = Q_m(u)$

$$Q_m(u)(\tau) \otimes_{\mu^{-1}\mathcal{O}_X} 1 \otimes 1 = (u \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \circ U_m,$$

$$(Q_m(u) \otimes_{p_1{}^{-1}\mathcal{O}_X} \otimes 1 \otimes 1)(\Phi(\tau \otimes 1 \otimes 1)) = (u \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \circ V_m.$$

Nous sommes donc ramenés à montrer que U_m et V_m coïncident, et, comme ce sont des m-PD-morphismes $\mathcal{O}_{G\times G}$-linéaires, à montrer que $U_m(\tau \otimes 1 \otimes 1) = V_m(\tau \otimes 1 \otimes 1)$ pour tout $\tau = 1 \otimes t - t \otimes 1$, où $t \in V[G]$. Dans ce cas le calcul provient en fait d'un calcul à valeurs dans $V[G] \otimes_V \mathcal{O}_{G\times G}$ et on compose avec $\rho_m \otimes \mathrm{Id}_{G\times G}$ pour l'avoir à valeurs dans $P^n_{(m)}(G) \otimes_V \mathcal{O}_{G\times G}$. Posons $\mu^\sharp(t) = \sum_i a_i \otimes b_i$, si bien que

$$\Phi(\tau \otimes 1 \otimes 1) = \sum_i (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i) \in p_1^*\mathcal{P}^n_{G,(m)},$$

$$\begin{aligned} U_m(\tau \otimes 1 \otimes 1) &= (\rho_m \otimes \mathrm{Id}_{G\times G}) \circ (\mathrm{Id} \otimes \mu^\sharp)\Big(\sum_i a_i \otimes b_i - 1 \otimes t\Big) \\ &= (\rho_m \otimes \mathrm{Id}_{G\times G})\Big(\sum_i b_i \otimes \mu^\sharp(a_i) - 1 \otimes \mu^\sharp(t)\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_m(\tau \otimes 1 \otimes 1) &= \sum_i \mu_m(1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) \otimes_{p_1^{-1}V[G]} (1 \otimes b_i) \\ &= (\rho_m \otimes \mathrm{Id}_{G\times G})\Big(\sum_i (\mu^\sharp(a_i) - 1 \otimes a_i) \otimes_{p_1^{-1}V[G]} (1 \otimes b_i)\Big) \\ &= (\rho_m \otimes \mathrm{Id}_{G\times G})\Big(\sum_i \mu^\sharp(a_i) \otimes b_i - \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i\Big) \\ &= (\rho_m \otimes \mathrm{Id}_{G\times G})\Big(\sum_i \mu^\sharp(a_i) \otimes b_i - 1 \otimes \mu^\sharp(t)\Big), \end{aligned}$$

d'où l'égalité cherchée.

Ainsi l'application Q_m est à valeurs dans l'algèbre $\Gamma(G, \mathcal{D}^{(m)}_{G,n})^G$. Construisons maintenant une application réciproque $\Gamma(G, \mathcal{D}^{(m)}_{G,n})^G \to D^{(m)}_n(G)$ pour terminer la démonstration du théorème.

Soit P un opérateur différentiel de $\Gamma(G, \mathcal{D}^{(m)}_{G,n})$, qui définit une application $V[G]$-linéaire à gauche $\mathcal{P}^n_{G,(m)} \to V[G]$. Comme dans la proposition 4.3.3, on note $P(e)$ l'élément de $D^{(m)}_n(G)$, induit par $\varepsilon^*_G P$.

Observons tout de suite que si $u \in D^{(m)}_n(G)$, alors

$$Q_m(u)(e) = u.$$

L'opérateur $Q_m(u)$ est en effet donné par le diagramme

$$\mathcal{P}^n_{G,(m)} \xrightarrow{\mu_m} P^n_{(m)}(G) \otimes V[G] \xrightarrow{u \otimes \mathrm{Id}} V[G],$$

et donc $Q_m(u)(e)$ par le diagramme

$$\varepsilon^*_G \mathcal{P}^n_{G,(m)} \simeq P^n_{(m)}(G) \xrightarrow{u} V,$$

ce qui montre notre assertion.

Soit maintenant P un élément de $\Gamma(G, \mathcal{D}^{(m)}_{G,n})^G$, nous allons vérifier que

$$Q_m(P(e)) = P.$$

Considérons $e \times \mathrm{Id}_G \colon G \to G \times G$, qui envoie g sur (e, g) introduit en § 4.3. Alors le faisceau $(e \times \mathrm{Id}_G)^*(p_1^* \mathcal{P}^n_{G,(m)})$ est égal à $P^n_{(m)}(G) \otimes_V V[G]$ et $(e \times \mathrm{Id}_G)^*(p_1^* \mathcal{P}^n_{G,(m)})$ à $\mathcal{P}^n_{G,(m)}$. Reprenons le m-PD-morphisme

$$\Phi \colon \mu^* \mathcal{P}^n_{G,(m)} \longrightarrow p_1^* \mathcal{P}^n_{G,(m)}$$

donnant la G-équivariance des faisceaux $\mathcal{P}^n_{G,(m)}$ et le m-PD-morphisme $\mu^{(n)}_m$ de (32) (pour $X := G$ et $\sigma := \mu$). Nous disposons alors du lemme suivant.

Lemme 4.4.9.3. *Les applications* $(e \times \mathrm{Id}_G)^* \Phi$ *et* $\mu^{(n)}_m$ *coïncident.*

Démonstration. Comme on doit comparer deux m-PD-morphismes $\mathcal{O}_G$-linéaires, de $\mathcal{P}^n_{G,(m)} \to P^n_{(m)}(G) \otimes_V V[G]$, il suffit de comparer ces applications sur les éléments τ avec $\tau = 1 \otimes t - t \otimes 1$ et t une section locale de $V[G]$. Posons $\mu^\sharp(t) = \sum_i a_i \otimes b_i$.

Calculons

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon_G^* \otimes \mathrm{Id}_G)^* \circ \Phi(\tau \otimes 1 \otimes 1)\\
&\quad = (\varepsilon_G^* \otimes \mathrm{Id}_G)^* \Big(\sum_i (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) \otimes_{p_1^{-1} V[G]} (1 \otimes b_i) \Big)\\
&\quad = (\rho_m \otimes \mathrm{Id}_G) \Big(\sum_i (a_i - a_i(e)) \otimes_V b_i \Big)\\
&\quad = (\rho_m \otimes \mathrm{Id}_G)(\mu^\sharp(t) - 1 \otimes t),
\end{aligned}$$

qui est bien égal à $\mu_m^{(n)}(\tau)$, comme cela a déjà été calculé. △

Considérons maintenant le diagramme suivant, où P est un opérateur différentiel sur G :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}^n_{G,(m)} \arrow[rr, "P"] & & V[G] \\
\mu^* \mathcal{P}^n_{G,(m)} \arrow[u, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & p_1^* \mathcal{P}^n_{G,(m)} \arrow[r, "P \otimes \mathrm{Id}_{G\times G}"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{O}_{G\times G} \arrow[u, two heads] \arrow[d, two heads] \\
\mathcal{P}^n_{G,(m)} \arrow[r, "\mu_m^{(n)}"] & P^n_{(m)}(G) \otimes_V V[G] \arrow[r, "P(e)\otimes \mathrm{Id}_G"] & V[G].
\end{tikzcd}$$

Les flèches de la ligne du haut et de la ligne du bas se déduisent de la ligne du milieu par application de $\varepsilon_G^* \otimes \mathrm{Id}_G$. Le carré en bas à gauche est commutatif grâce au lemme précédent, le carré en bas à droite est commutatif par définition de $P(e)$. La ligne du bas calcule donc $Q_m(P(e))$.

Supposons que P est invariant, alors pour toute section locale τ de $\mathcal{P}^n_{G,(m)}$, on a

$$\mu^\sharp(P(\tau)) = (P \otimes 1 \otimes 1) \circ \Phi(\tau \otimes 1 \otimes 1).$$

Comme $P(\tau) = (\varepsilon_G^* \otimes \mathrm{Id}_G) \circ \mu^\sharp(P(\tau))$, la condition d'invariance dit précisément que le rectangle du haut est commutatif.

Et donc, si P est invariant, on a bien $P = Q_m(P(e))$.

Comme l'application d'évaluation restreinte à $\Gamma(G, \mathcal{D}_G^{(m)})^G$ est un inverse de Q_m, il est automatique que cette application est un homomorphisme d'algèbres. Ceci montre finalement le théorème. □

Terminons par deux exemples. D'abord le cas du groupe additif de dimension 1, $\mathbf{G}_a = \operatorname{Spec} V[T]$, $\partial^{\langle k\rangle}$ les opérateurs différentiels relatifs au choix de la coordonnée T.

Proposition 4.4.9.4. *Reprenons la base de $D^{(m)}(\mathbf{G}_a)$ de la proposition 4.1.11. Alors*

$$Q_m(\xi^{\langle k\rangle}) = \partial^{\langle k\rangle}.$$

Démonstration. Notons $u = T\otimes 1$, $v = 1\otimes T \in V[T]\otimes V[T]$, $\tau = 1\otimes T - T\otimes 1 \in \mathcal{P}^n_{G,(m)}$, $\tau_u = 1\otimes 1\otimes u - u\otimes 1\otimes 1$, $\tau_v = 1\otimes 1\otimes v - v\otimes 1\otimes 1 \in \mathcal{P}^n_{G\times G,(m)}$. On note $t = T$ définissant l'idéal de l'élément neutre de $\mathbf{G}_a$. Ainsi les éléments $t^{\{k\}}$ forment une base de $P^n_{\mathbf{G}_a,(m)}$. Rappelons l'application $q_1\circ d\mu$ de (31) pour $\sigma := \mu$ égal à l'action à droite de $\mathbf{G}_a$ sur lui-même.

Comme la loi de groupes est donnée par $\mu^\sharp(T) = 1\otimes T + T\otimes 1$, on a

$$\begin{aligned} d\mu(\tau) &= \tau_u + \tau_v \\ d\mu(\tau^{\{k\}}) &= (\tau_u + \tau_v)^{\{k\}} \end{aligned}$$

(par (1))

$$= \sum_{k'+k''=k} \left\langle {k \atop k'} \right\rangle \tau_u^{\{k'\}} \tau_v\{k''\}$$

et donc $q_1\circ d\mu(\tau^{\{k\}}) = \tau_u^{\{k\}}$, ce qui, en appliquant la description explicite de $\tilde{\beta}_m$ de la proposition 4.3.1, donne

$$\mu_m^{(n)}(\tau^{\{k\}}) = t^k\otimes 1 \in P^n_{\mathbf{G}_a,(m)}\otimes V[T].$$

Par définition, les $\xi^{\{l\}}$ sont la base duale des T^k, ce qui implique que les $Q_m(\xi^{\{l\}})$ sont la base duale des $\tau^{\{k\}}$, d'où l'énoncé. $\square$

Prenons maintenant $G = \mathbf{G}_m$, qu'on identifie à $\operatorname{Spec} V[T, T^{-1}]$. Soit $t = T-1$, $I = tV[T, T^{-1}]$ est l'idéal définissant l'élément neutre. Soient $\partial^{\langle k\rangle}$ les opérateurs différentiels relatifs au choix de la coordonnée T.

Proposition 4.4.9.5. *Reprenons la base de $D^{(m)}(\mathbf{G}_m)$ donnée dans la proposition 4.1.12. Alors*

$$Q_m(\xi^{\langle k\rangle}) = T^k\partial^{\langle k\rangle}.$$

Démonstration. Notons $u = T \otimes 1$, $v = 1 \otimes T \in V[T, T^{-1}] \otimes V[T, T^{-1}]$, $\tau = 1 \otimes T - T \otimes 1 \in \mathcal{P}^n_{G,(m)}$, $\tau_u = 1 \otimes 1 \otimes u - u \otimes 1 \otimes 1$, $\tau_v = 1 \otimes 1 \otimes v - v \otimes 1 \otimes 1 \in \mathcal{P}^n_{G \times G,(m)}$. Avec ces notations, l'immersion fermée e_G correspond à la surjection

$$\begin{aligned} \varepsilon_G \otimes \mathrm{Id}_G \colon V[u, u^{-1}, v, v^{-1}] &\twoheadrightarrow V[T, T^{-1}], \\ u &\longmapsto 1, \\ v &\longmapsto T. \end{aligned}$$

Comme la loi de groupes est donnée par $\mu^\sharp(T) = T \otimes T$, on a

$$\begin{aligned} d\mu(\tau) &= (v + \tau_v)\tau_u + u\tau_v \\ q_1 \circ d\mu(\tau^{\{k\}}) &= v^k \tau_u^{\{k\}}. \end{aligned}$$

Et finalement on trouve

$$\mu_m^{(n)}(\tau^{\{k\}}) = t^{\{k\}} \otimes T^k \in P^n_{\mathbf{G}_m,(m)} \otimes V[T, T^{-1}],$$

ce qui permet de montrer la formule de l'énoncé. □

Passons à une variante twistée de ce qui précède.

4.5 – *Opérateurs différentiels twistés sur des G-schémas*

Reprenons ici la situation de § 4.4 : G agit à gauche sur un schéma X, lisse sur S, via un morphisme $\sigma \colon G \times X \to X$. On note aussi $p_2 \colon G \times X \to X$ la deuxième projection. Supposons de plus que X est muni d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$, G-équivariant. Suivant § 2.2.4, nous considérons les faisceaux d'opérateurs différentiels twistés par $\mathcal{L}$

$${}^t\mathcal{D}_X^{(m)} \simeq \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X,g}} \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}^{-1}.$$

Dans cette sous-section, nous allons démontrer que tous les énoncés précédents restent vrais dans le cas de ces faisceaux. Pour ce faire, définissons en suivant les notations de § 2.2.1, le fibré vectoriel associé à $\mathcal{L}$

$$Y = \operatorname{Spec} \mathbf{S}(\mathcal{L}),$$

et q le morphisme canonique : $Y \to X$. Comme $\mathcal{L}$ est équivariant, il existe d'après § 3.3.1 un isomorphisme $\Phi_{\mathcal{L}} \colon \sigma^*\mathcal{L} \simeq p_2^*\mathcal{L}$ vérifiant certaines conditions de cocycle. Cet isomorphisme s'étend en un isomorphisme gradué $\Phi \colon \sigma^*\mathbf{S}(\mathcal{L}) \simeq p_2^*\mathbf{S}(\mathcal{L})$, qui permet de définir une action à gauche $\sigma_Y \colon G \times Y \to Y$. On notera p_2' la deuxième projection, $p_2' \colon G \times Y \to Y$. Par définition, $\Phi_{|\sigma^{-1}\mathcal{O}_X}$ est le morphisme $\sigma^\sharp \colon \sigma^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{G \times X}$ donnant l'action de G sur X. Le faisceau $\mathcal{D}_Y^{(m)}$ est

G-équivariant d'après la proposition 3.4.1. De même, le faisceau twisté ${}^t\mathcal{D}_X^{(m)}$ est G-équivariant comme produit tensoriel de faisceaux G-équivariants d'après les résultats de § 3.3.

Introduisons sur X le faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$ de (19) avec son morphisme de restriction $r_{\mathcal{L}}$.

Proposition 4.5.1. (i) *Le faisceau $\mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$ est un sous-faisceau G-équivariant de $q_*\mathcal{D}_Y^{(m)}$, ce faisceau étant vu comme faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules G-équivariant.*

(ii) *Le morphisme de restriction $r_{\mathcal{L}}$ est un morphisme de G-faisceaux équivariants, c'est-à-dire qu'il commute à l'action de G.*

Démonstration. Soient

$$q' = \mathrm{Id}_G \times q \colon G \times Y \longrightarrow G \times X, \quad \Psi_X \colon \sigma^*\mathcal{P}^n_{X,(m)} \simeq p_2^*\mathcal{P}^n_{X,(m)},$$

décrivant l'action de G sur $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$. Comme σ_Y, (resp. p_2') est lisse, on dispose d'isomorphismes canoniques $q'_*\sigma_Y^*\mathcal{D}_Y^{(m)} \simeq \sigma^*q_*\mathcal{D}_Y^{(m)}$, (resp. $q'_*p'^*_2\mathcal{D}_Y^{(m)} \simeq p_2^*q_*\mathcal{D}_Y^{(m)}$). Comme $\mathcal{D}_Y^{(m)}$ est G-équivariant, il existe un isomorphisme $\sigma_Y^*\mathcal{D}_Y^{(m)} \simeq p'^*_2\mathcal{D}_Y^{(m)}$, vérifiant les conditions de cocycle (21). Par fonctorialité, on en déduit un isomorphisme $\Phi_Y \colon \sigma^*q_*\mathcal{D}_Y^{(m)} \simeq p_2^*q_*\mathcal{D}_Y^{(m)}$ définissant la structure de G-module équivariant de $q_*\mathcal{D}_Y^{(m)}$. Pour montrer (i), il suffit de montrer que Φ_Y induit un isomorphisme $\sigma^*\mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L}) \simeq p_2^*\mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$. La vérification est formelle. Montrons par exemple que si $P \in \mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$,

$$\Phi_Y^{-1}(1 \otimes P)(\sigma^*(\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes \mathcal{L})) \subset \sigma^*\mathcal{L},$$

l'autre vérification étant analogue. Le morphisme Φ_Y^{-1} s'obtient après application de $\mathcal{H}om_{q_*\mathcal{O}_Y}(\cdot, q_*\mathcal{O}_Y)$ à $\Psi_Y \colon \sigma^*q_*\mathcal{P}^n_{Y,(m)} \simeq p_2^*q_*\mathcal{P}^n_{Y,(m)}$, décrivant l'action de G sur $q_*\mathcal{P}^n_{Y,(m)}$. Par définition de Ψ_Y, $\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes \mathcal{L}$ est un sous-G-module équivariant de $q_*\mathcal{P}^n_{Y,(m)}$. Finalement, si $T \in \mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes \mathcal{L}$,

$$\Phi_Y^{-1}(1 \otimes P)(1 \otimes T) = \Phi^{-1}\left((1 \otimes P)(\Psi_Y(1 \otimes T))\right).$$

Or, $\Psi_Y(1 \otimes T) \in p_2^*(\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes \mathcal{L})$, donc $(1 \otimes P)(\Psi_Y(1 \otimes T)) \in p_2^*\mathcal{L}$, et le terme de droite de l'égalité précédente appartient à $\Phi^{-1}(p_2^*\mathcal{L}) \subset \sigma^*\mathcal{L}$. Finalement, on voit que $\Phi_Y^{-1}(1 \otimes P)$ vérifie la condition annoncée. Le fait que $r_{\mathcal{L}}$ est un morphisme de G-modules équivariants provient du fait que ψ_Y, restreint à $\mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes \mathcal{L}$, est induit par Ψ_X et Φ. □

Nous en déduisons le résultat suivant.

Corollaire 4.5.2. *Soient X un S-schéma lisse sur lequel G agit à gauche, et m un entier. Il existe un anti-homomorphisme d'algèbres filtrées ${}^tQ_m$ de l'algèbre $D^{(m)}(G)$ vers l'algèbre des sections globales sur X du faisceau ${}^t\mathcal{D}_X^{(m)}$.*

Démonstration. Comme le fibré vectoriel Y est muni d'une action de G, on dispose d'après la proposition 4.4.1 d'un anti-homomorphisme d'anneaux : $Q_{m,Y}\colon D^{(m)}(G) \to \Gamma(Y, \mathcal{D}_Y^{(m)})$. Montrons que $Q_{m,Y}$ est à valeurs dans $\mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$. Reprenons pour cela la construction de loc. cit. ainsi que le morphisme de m-PD-algèbres (32) $q_*\sigma_{m,Y}^{(n)}\colon q_*\mathcal{P}^n_{Y,(m)} \to P^n_{(m)}(G)\otimes_V q_*\mathcal{O}_Y$, resp. $\sigma_{m,X}^{(n)}$ sur le schéma X. On rappelle que si $u \in D_n^{(m)}(G)$, $Q_{m,n}(u)$ est le composé

$$Q_{m,n}(u)\colon \mathcal{P}^n_{Y,(m)} \xrightarrow{\sigma_m^{(n)}} P^n_{(m)}(G)\otimes\mathcal{O}_Y \xrightarrow{u\otimes\mathrm{Id}} \mathcal{O}_Y.$$

Pour montrer que $Q_{m,n}(u) \in \mathcal{D}_Y^{(m)}(\mathcal{L})$, il suffit donc de montrer les deux inclusions

$$\sigma_{m,Y}^{(n)}(\mathcal{P}^n_{X,(m)}) \subset P^n_{(m)}(G)\otimes_V \mathcal{O}_X, \tag{37}$$

$$\sigma_{m,Y}^{(n)}(\mathcal{P}^n_{X,(m)}\otimes\mathcal{L}) \subset P^n_{(m)}(G)\otimes_V \mathcal{L}.$$

La première inclusion résulte du fait que la construction est fonctorielle et donc

$$q_*\sigma^{(n)}_{m,Y\,|\mathcal{P}^n_{X,(m)}} = \sigma^{(n)}_{m,X}.$$

Pour la deuxième inclusion, comme $\sigma_{m,Y}^{(n)}$ est un morphisme de m-PD-algèbres et par la formule ci-dessus (37), il suffit de vérifier que pour tout $f\in\mathcal{L}$, $\sigma_{m,Y}^{(n)}(1\otimes f)\in p_2^*(\mathcal{L})$. Or, c'est le cas, puisque, par construction, $\sigma_{m,Y}^{(n)}(1\otimes f) = \Phi_{\mathcal{L}}(1\otimes f) \in p_2^*(\mathcal{L})$. Notons à présent

$${}^t\sigma^{(n)}_{m,X} = q_*\sigma^{(n)}_{m,Y\,|\mathcal{P}^n_{X,(m)}(1\otimes\mathcal{L})}, \tag{38}$$

qui est $\mathcal{O}_X$-linéaire, puisque $\sigma_{m,Y}^{(n)}$ est $\mathcal{O}_Y$-linéaire. On définit maintenant ${}^tQ_m = r_{\mathcal{L}}\circ Q_m$, qui définit un anti-homomorphisme d'algèbres filtrées

$${}^tQ_m\colon D^{(m)}(G) \longrightarrow \Gamma(X, {}^t\mathcal{D}_X^{(m)}). \qquad \square$$

Remarque. Par définition, ${}^t\sigma^{(n)}_{m,X}$ est aussi défini comme suit. Soient $T\in\mathcal{P}^n_{X,(m)}$, $f\in\mathcal{L}$, alors

$${}^t\sigma^{(n)}_{m,X}(T\otimes f) = \sigma^{(n)}_{m,X}(T)\Phi_{\mathcal{L}}(1\otimes f),$$

où on prend le produit dans la $\mathcal{O}_Y$-algèbre $P^n_{(m)}(G)\otimes_V\mathcal{O}_Y$, produit qui est en fait à valeurs dans $P^n_{(m)}(G)\otimes_V\mathcal{L}$.

Reprenons le faisceau $\mathcal{A}_X^{(m)} = \mathcal{O}_X \otimes_V D^{(m)}(G)^{\mathrm{op}}$ du corollaire 4.4.7. Comme ${}^t Q_m$ est filtré, il induit une application $\mathrm{gr}_\bullet\, {}^t Q_m \colon \mathrm{gr}_\bullet \mathcal{A}_X^{(m)} \to \mathrm{gr}_\bullet\, {}^t\mathcal{D}_X^{(m)}$. Nous avons vu en (17), que $\mathrm{gr}_\bullet\, {}^t\mathcal{D}_X^{(m)}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)}$. Montrons maintenant la proposition suivante.

Proposition 4.5.3. *Via l'isomorphisme canonique de* (17)*, on a l'égalité* $\mathrm{gr}_\bullet\, {}^t Q_m = \mathrm{gr}_\bullet Q_m$. *En particulier, si X est un G-espace homogène, le morphisme gradué* $\mathrm{gr}_\bullet\, {}^t Q_m$ *est surjectif.*

Démonstration. Nous reprenons les notations de § 4.4.8. Soient ${}^t Q_{m,1}$ l'application induite sur les gradués de degré 1 par ${}^t Q_m$, soit

$$ {}^t\mathcal{Q}_{m,1} \colon \mathrm{Lie}(G) \otimes_V \mathcal{O}_X \xrightarrow{\bar{\otimes}^t Q_{m,1} \bar{\otimes} \mathrm{Id}} \mathcal{T}_X . $$

Alors, en refaisant la démonstration de la proposition 4.4.8.2, on voit qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{gr}_\bullet \mathcal{A}_X^{(m)} \arrow[r, "\mathrm{gr}_\bullet {}^t Q_{m,X}"] \arrow[d, "c_{m,X}", "\wr"'] & \mathrm{gr}_\bullet\, {}^t\mathcal{D}_X^{(m)} \arrow[d, "{}^t d_m", "\wr"'] \\ \mathbf{S}^{(m)}(\mathrm{Lie}(G)) \otimes_V \mathcal{O}_X \arrow[r] & \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X), \end{tikzcd}$$

où la seconde flèche horizontale est l'application $\mathbf{S}^{(m)}({}^t\mathcal{Q}_{m,1})$. Pour conclure, il suffit donc vérifier que ${}^t\mathcal{Q}_{m,1} = \mathcal{Q}_{m,1}$. Soient

$$ h_m \colon \Omega_X^1 \otimes \mathcal{L} \xrightarrow{\mathrm{gr}_1 \sigma_{m,Y}^{(n)}} \mathcal{I}_\kappa/\mathcal{I}_\kappa^2 \otimes \mathcal{L}, $$

et $g_m = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}^{-1}} \bar{\otimes} h_m \colon \Omega_X^1 \to \mathcal{I}_\kappa/\mathcal{I}_\kappa^2$. Alors la flèche ${}^t\mathcal{Q}_{m,1}$ s'obtient après application de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\cdot, \mathcal{O}_X)$ à la flèche g_m. Il suffit donc finalement de montrer que $g_m = \mathrm{gr}_1 \sigma_{m,X}^{(n)}$. Or, $\sigma_{m,Y}^{(n)}$ est $\mathcal{O}_Y$ linéaire. Soient $\omega \in \Omega_X^1$, $f \in \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_1 \sigma_{m,Y}^{(n)}(\omega \otimes (1 \otimes f)) &= \mathrm{gr}_1 \sigma_{m,Y}^{(n)}((f \otimes 1)\omega) \\ &= \mathrm{gr}_1 \sigma_{m,X}^{(n)}(\omega) \otimes f, \end{aligned}$$

ce qui donne bien que $g_m = \mathrm{gr}_1 \sigma_{m,X}^{(n)}$.

Comme $\mathrm{gr}_\bullet Q_m$ est surjectif si X est un G-espace homogène par (ii) de la proposition 4.4.8.2, on trouve que $\mathrm{gr}_\bullet\, {}^t Q_m$ est surjectif dans ce cas. □

Remarque. On peut retrouver ce résultat à partir de (iv) de la proposition 2.2.5.1, en utilisant la description locale de $r_{\mathcal{L}}$.

5. Algèbres de distributions arithmétiques (faiblement) complétées

Dans toute cette section, V est un AVDC. Rappelons que $S = \operatorname{Spec} V$ et $\mathcal{S} = \operatorname{Spf} V$. Dans ce cas p-adique ou dans le cas d'un quotient de V, nous avons déjà remarqué que les algèbres de distributions $D_n^{(m)}(G)$ sont des V-modules libres (proposition 4.1.6), dont une base s'exprime facilement à partie d'une base de $\operatorname{Lie}(G)$.

5.1 – *Définitions*

Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{S}$-schéma formel. On dit que $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{S}$-schéma formel en groupes, si tous les S-schémas G_i sont des schémas en groupes, et si tous les morphismes $G_{i+1} \hookrightarrow G_i$ sont des morphismes de schémas en groupes. Dans la suite, on suppose que $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{S}$-schéma formel en groupes affine et lisse, i.e., tous les G_i sont des schémas en groupes affines et lisses sur S (de la même dimension relative). Ainsi, l'algèbre des sections globales $\mathcal{O}(\mathcal{G}) := \Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})$ est une algèbre topologiquement de type fini sur V et donc π-adiquement complète. On a $\mathcal{G} = \operatorname{Spf} \mathcal{O}(\mathcal{G})$ comme $\mathcal{S}$-schéma formel, et les $\mathcal{O}(\mathcal{G})/\pi^{i+1}\mathcal{O}(\mathcal{G})$ sont les algèbres des groupes G_i, i.e. $\mathcal{O}(\mathcal{G})/\pi^{i+1}\mathcal{O}(\mathcal{G}) = V[G_i]$.

Un cas particulier est le complété formel $\mathcal{G}$ d'un schéma en groupes affine et lisse $G \to S$ le long de sa fibre spéciale.

Donnons maintenant les définitions des algèbres de distributions complètes et faiblement complètes pour $\mathcal{G}$, un $\mathcal{S}$-schéma formel en groupes affine et lisse. Le morphisme $G_{i+1} \hookrightarrow G_i$ induit un homomorphisme $D^{(m)}(G_{i+1}) \to D^{(m)}(G_i)$, cf. proposition 4.1.10.

Définition 5.1.1. On pose $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G}) := \varprojlim_i D^{(m)}(G_i)$.

Soient $t_1, \dots, t_N$ une suite régulière de générateurs de l'idéal complet

$$I = \operatorname{Ker}(\mathcal{O}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\varepsilon_G} V).$$

Nous pouvons alors reprendre les notations de § 4.1, et on a

$$\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G}) = \Big\{ \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle} \;\Big|\; a_{\underline{k}} \in V,\ \mathrm{v}_p(a_{\underline{k}}) \longrightarrow +\infty \text{ si } |\underline{k}| \to +\infty \Big\}.$$

Si $m' \geq m$, on a le morphismes d'algèbres canoniques $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G}) \to \widehat{D}^{(m')}(\mathcal{G})$, ce qui permet de donner la définition des algèbres de distributions suivantes.

DÉFINITION 5.1.2. On pose $D^\dagger(\mathcal{G}) := \varinjlim_m \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})$ et $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}} := D^\dagger(\mathcal{G}) \otimes \mathbf{Q}$.

L'algèbre $D^\dagger(\mathcal{G})$ est séparée et est faiblement complète comme limite inductive d'algèbres complètes (voir par exemple la remarque (ii) de [HUY03]). C'est naturellement une sous-algèbre de la complétion π-adique

$$\widehat{\mathrm{Dist}}(\mathcal{G}) := \varprojlim_i \mathrm{Dist}(\mathcal{G})/\pi^{i+1}\,\mathrm{Dist}(\mathcal{G}) \simeq \varprojlim_i \mathrm{Dist}(G_i)$$

de l'algèbre des distributions classiques $\mathrm{Dist}(\mathcal{G})$ sur $\mathcal{G}$. Cette complétion est décrite explicitement par

$$\widehat{\mathrm{Dist}}(\mathcal{G}) = \left\{ \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\xi}^{[\underline{k}]} \;\middle|\; \mathrm{v}_p(a_{\underline{k}}) \longrightarrow +\infty \text{ si } |\underline{k}| \to +\infty \right\}$$

en utilisant les notations de la proposition 4.1.6. La proposition suivante est dans l'esprit de la proposition 2.4.4 de [BER96] et montre que les éléments de la sous-algèbre $D^\dagger(\mathcal{G}) \subseteq \widehat{\mathrm{Dist}}(\mathcal{G})$ peuvent être caractérisés par des conditions de croissance des coefficients $a_{\underline{k}}$ qui sont du type de Monsky–Washnitzer [MW68].

PROPOSITION 5.1.3. *Pour*

$$P = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\xi}^{[\underline{k}]}$$

dans $\widehat{\mathrm{Dist}}(\mathcal{G})$, *soit* $P_i \in \mathrm{Dist}(G_i)$ *sa réduction modulo* π^{i+1} . *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'élément* P *appartient à* $D^\dagger(\mathcal{G})$;

(ii) *il existe des constantes réelles* α, β *avec* $\alpha > 0$ *ayant la propriété* $\mathrm{ord}(P_i) \leq \alpha i + \beta$ *pour tout* i. *Ici,* $\mathrm{ord}(P_i)$ *désigne l'ordre fini de la distribution* P_i ;

(iii) *il existe des constantes réelles* c, η *avec* $\eta > 0$ *ayant la propriété* $\mathrm{v}_p(a_{\underline{k}}) \geq \eta|\underline{k}| + c$ *pour tout* $\underline{k}$.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 4.1.6 on a $\underline{\xi}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} = q_{\underline{k}}^{(m)}! \underline{\xi}^{[\underline{k}]}$. On peut donc utiliser les arguments donnés dans la démonstration de la proposition 2.4.4 dans [BER96]. □

REMARQUE. Il est immédiat d'après la fonctorialité (proposition 4.1.10) établie à un niveau fini que la formation des algèbres $D^\dagger(\mathcal{G})$ et $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})$ est fonctorielle par rapport au groupe $\mathcal{G}$.

5.2 – *Liens avec les faisceaux différentiels sur un $\mathcal{G}$-schéma*

Nous revenons ici à la situation de § 5.1. On note encore e l'immersion fermée de schémas formels définissant l'élément neutre $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{G}$. Nous donnons d'abord les énoncés reliant les algèbres de distributions et les opérateurs différentiels invariants. Il s'agit de passer à la limite pour tous les résultats obtenus à un niveau fini.

Fixons un entier m. En passant à la limite projective sur i à partir de la proposition 4.3.3, on trouve l'énoncé suivant.

Proposition 5.2.1. (i) *Il existe un isomorphisme de V-modules $\beta_m\colon \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G}) \simeq \mathcal{O}(\mathcal{G})/I \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{G})} \Gamma(\mathcal{G}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{G}})$.*

(ii) *Il existe un isomorphisme de V-modules $\beta^\dagger\colon D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}} \simeq \mathcal{O}(\mathcal{G})/I \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{G})} \Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{G},\mathbf{Q}})$.*

Notons que le (ii) s'obtient par passage à la limite inductive sur m à partir de (i). Ceci permet d'introduire la morphisme d'évaluation ev_e.

On définit $P(e)$ la distribution obtenue par $P(e) = \beta_m^{-1}(e^*P)$ (resp. $P(e) = {\beta^\dagger}^{-1}(e^*P)$). On déduit alors de la proposition 4.3.4 par passage au complété p-adique, puis par passage à la limite inductive sur m la

Proposition 5.2.2. *Soit $P \in \Gamma(\mathcal{G}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{G}})$ (resp. $P \in \Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{G},\mathbf{Q}})$). Alors*

$$(P(e))(f) = (P(f))(e) \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{O}(\mathcal{G}).$$

Supposons maintenant que X est un S-schéma lisse muni d'une action à droite de G et $\mathcal{X}$ est le schéma formel obtenu par complétion le long de $\pi\mathcal{O}_X$. Donc, $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{S}$-schéma lisse muni d'une action à droite de $\mathcal{G}$. En passant à la limite à partir des homomorphismes d'algèbres Q_m du lemme 4.4.5, on voit aussi qu'il existe des homomorphismes d'algèbres toujours notés Q_m

$$Q_m\colon \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}). \tag{39}$$

En passant à la limite sur m et en tensorisant par $\mathbf{Q}$, on trouve un homomorphisme d'algèbres

$$Q\colon D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}). \tag{40}$$

Les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ sont alors $\mathcal{G}$-équivariants (au sens où les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$ sont G_i-équivariants pour tout i et de façon compatible). Par passage à la limite inductive sur m, les faisceaux $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$ sont eux aussi $\mathcal{G}$-équivariants.

D'après § 4.4.9, on dispose donc d'applications

$$\Gamma(X_i, \mathcal{D}^{(m)}_{X_i}) \longrightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{D}^{(m)}_{X_i}) \otimes_{V_i} V_i[G_i],$$

qui, en passant à la limite projective sur i donnent un morphisme

$$\hat{u}_G \colon \varprojlim_i (\Gamma(X_i, \mathcal{D}^{(m)}_{X_i})) \longrightarrow \varprojlim_i (\Gamma(X_i, p^*_{1,i}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i})),$$

et, compte tenu de l'identification habituelle une flèche

$$\hat{u}_G \colon \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{H}^0 p^!_1 \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}).$$

On notera ι l'injection canonique $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{H}^0 p^!_1 \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$. En passant à la limite sur m et en tensorisant par $\mathbf{Q}$, on obtient une application

$$u^{\dagger}_G \colon \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}) \longleftrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{H}^0 p^!_1 \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}).$$

On continue de noter ι l'injection canonique $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{H}^0 p^!_1 \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})$ (resp. $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{H}^0 p^!_1 \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$). Ceci nous permet de définir les éléments $\mathcal{G}$-invariants de la façon suivante.

Définition 5.2.2.1. (i) Les éléments *G-invariants* de $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X})$ sont les éléments P de $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$ tels que $\hat{u}_G(P) = \iota(P)$.

(ii) Les éléments G-invariants de $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$ sont les éléments P de $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}})$ tels que $u^{\dagger}_G = \iota(P)$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $\mathcal{X} = \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ opère sur lui-même par translation à droite. Comme au niveau fini, Q_m et Q sont en fait des homomorphismes d'algèbres à valeurs dans les modules des opérateurs différentiels invariants sur $\mathcal{G}$. Par passage à la limite projective sur i, puis limite inductive sur m, on dispose, à partir du théorème 4.4.9.2 du résultat suivant.

Théorème 5.2.3. *Les applications canoniques Q_m et ev_e sont des isomorphismes d'algèbres filtrées, inverses l'un de l'autre entre les algèbres $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})$ et $\Gamma(\mathcal{G}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{G}})^{\mathcal{G}}$ (resp. les applications canoniques Q et ev_e sont des isomorphismes d'algèbres filtrées, inverses l'un de l'autre entre les algèbres $D^{\dagger}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ et $\Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{G},\mathbf{Q}})^{\mathcal{G}}$).*

Retournons au cas général et supposons donné sur $\mathfrak{X}$ (muni d'une action à gauche) un faisceau inversible de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-modules $\mathcal{L}$. On note $\mathcal{L}_i$ le faisceau induit sur X_i par $\mathcal{L}$. Supposons de plus que $\mathcal{L}$ est $\mathcal{G}$-équivariant au sens où pour tout $i \geq 0$, les faisceaux $\mathcal{L}_i$ sont G_i-équivariant, de façon compatible pour tout i. On dispose alors des faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{G}$-équivariants ${}^t\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X,g}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}^{-1}$, resp. ${}^t\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}} = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X,g}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,d}} \mathcal{L}^{-1}$. En passant à la limite projective sur i à partir du corollaire 4.5.2, on dispose de la

Proposition 5.2.4. *Il existe un anti-homomorphisme d'algèbres filtrées*

$$ {}^tQ_m \colon \widehat{D}^{(m)}(G) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{X}, {}^t\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \quad (\textit{resp. } {}^tQ \colon D^{\dagger}(G)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{X}, {}^t\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbf{Q}})). $$

Si $\mathfrak{X}$ est muni d'une action à droite, on obtient un homomorphisme d'algèbres filtrées.

5.3 – *Distributions analytiques rigides*

Nous supposons ici que V est un AVDC dont le corps des fractions $K = \mathrm{Frac}(V)$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Nous utiliserons [Schn02] pour des notions élémentaires d'analyse fonctionelle non-archimédienne. Soit $\mathcal{G}$ le complété formel d'un schéma en groupes affine et lisse $G \to S$ le long de sa fibre spéciale G_κ. Soit $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ l'algèbre affine de $\mathcal{G}$. Soit $\widehat{G}$ la complétion de G relativement au point fermé correspondant à l'élément neutre de G_κ. Donc, $\widehat{G}$ un schéma en groupes affine formel sur $\mathcal{S}$ (mais pas un $\mathcal{S}$-schéma formel car, en général, $\pi\mathcal{O}_{\widehat{G}}$ n'est pas un idéal de définition !). On écrit

$$ G^\circ := \widehat{G}^{\mathrm{rig}} $$

pour sa fibre générique au sens de Berthelot, cf. 7.1 de [dJ96]. C'est un groupe analytique rigide, en général non-affinoïde, sur K avec $\mathrm{Lie}(G^\circ) = \mathrm{Lie}(G) \otimes K$. On peut décrire ces objets comme suit. Prenons $t_1, \ldots, t_N$ une suite régulière de générateurs de $\mathcal{I}_\kappa$ qui engendrent $V[G]$ comme V-algèbre, i.e. $V[G] = V[t_1, \ldots, t_N]$ et $\mathcal{O}(\mathcal{G}) = V\langle t_1, \ldots, t_N\rangle$. Il suit que $\mathcal{O}(\widehat{G}) = V[[t_1, \ldots, t_N]]$ est isomorphe à l'anneau des séries formelles sur V en N variables et l'espace G° est isomorphe au disque unité ouvert de dimension N, cf. Lemme 7.4.3 de [dJ96]. En particulier, il existe un recouvrement admissible croissant formé par des ouverts affinoïdes $(G^\circ)_r = Sp(A_r), r < 1$ qui sont associés aux algèbres de Tate

$$ A_r := \Big\{ \sum_{\underline{k}} b_{\underline{k}}\, \underline{t}^{\underline{k}} \;\Big|\; b_{\underline{k}} \in K, |b_{\underline{k}}| r^{|\underline{k}|} \to 0 \Big\}, $$

si $|\underline{k}| \to \infty$. Il en résulte que $\mathcal{O}(G^\circ) = \varprojlim_{r<1} A_r$ est une algèbre de Fréchet nucléaire sur K, cf. proposition 19.9 de [Schn02]. Remarquons que $t_1, \dots, t_N \in \mathcal{O}(G^\circ)$ sont des sections globales sur G°. On note

$$D^{\mathrm{an}}(G^\circ) := \mathcal{O}(G^\circ)' := \mathrm{Hom}_K^{\mathrm{ct}}(\mathcal{O}(G^\circ), K)$$

le dual continu de l'espace Fréchet $\mathcal{O}(G^\circ)$. On équipe $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$ avec la topologie forte, i.e. $D^{\mathrm{an}}(G^\circ) = \mathcal{O}(G^\circ)'_b$ au sens de [Schn02], §6. Cette topologie est égale à la topologie limite inductive via l'isomorphisme canonique et topologique

$$(\varprojlim_{r<1} A_r)'_b \xrightarrow{\simeq} \varinjlim_{r<1} (A_r)'_b,$$

cf. proposition 16.5 de [Schn02]. La topologie forte sur $(A_r)'_b$ est simplement la topologie de Banach, Remarque 6.7 de [Schn02]. Par conséquent, $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$ est un espace localement convexe de type compact et le produit de convolution fait de $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$ une K-algèbre topologique, cf. 5.2 de [Em04]. Il y a un homomorphisme canonique $\delta\colon G^\circ(K) \hookrightarrow D^{\mathrm{an}}(G^\circ)^\times$ du groupe des points de G° à valeurs dans K dans le groupe des éléments inversibles où δ_g est la forme linéaire continue $f \mapsto f(g)$ de $\mathcal{O}(G^\circ)$. De plus, à $\xi \in \mathrm{Lie}(G^\circ)$ on peut associer la forme linéaire continue

$$f \longmapsto \xi.f := \frac{d}{dt} f(e^{t\xi})|_{t=0} \tag{41}$$

de $\mathcal{O}(G^\circ)$ où e est l'application exponentielle de G° définie près de $1 \in G^\circ$. Il en résulte un homomorphisme d'anneaux $U(\mathrm{Lie}(G^\circ)) \to D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$.

D'un autre côté, chaque $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})$ est muni de la topologie π-adique. Munissons $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ de la topologie d'espace de Banach dont $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})$ est la boule unité. La limite inductive $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ est alors une K-algèbre topologique sur un espace localement convexe.

Proposition 5.3.1. *L'application* $U(\mathrm{Lie}(G^\circ)) \to D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$ *s'étend en un isomorphisme d'anneaux topologiques*

$$D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\simeq} D^{\mathrm{an}}(G^\circ).$$

Démonstration. Nous généralisons les arguments de 2.3.3 de [PSS13] dans le cas $G = GL_2$ et $V = \mathbf{Z}_p$. On reprend les notations de § 5.1. Soit $\xi_1, \dots, \xi_N$ la base de $\mathrm{Lie}(G)$ duale de $t_1, \dots, t_N$. Par définition des éléments $\underline{\xi}^{[\underline{k}]}$,

$$\underline{\xi}^{[\underline{k}]}.\underline{t}^{\underline{k}'} = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{k} = \underline{k}'2 \\ 0 & \text{si } \underline{k} \neq \underline{k}'. \end{cases}$$

Par conséquent, on peut identifier l'espace dual A'_r, avec le produit convolution, via l'application $U(\mathrm{Lie}(G^\circ)) \to D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$, à l'algèbre de Banach formée des sommes infinies

$$\lambda = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\xi}^{[\underline{k}]}$$

avec $a_{\underline{k}} \in K$ et $|a_{\underline{k}}| \leq C r^{|\underline{k}|}$ pour tout $\underline{k}$ et une certaine constante $C = C(\lambda)$ dépendant sur λ. Il résulte alors de (iii) de la proposition 5.1.3 que la limite inductive des A'_r est égale à $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$. □

Corollaire 5.3.2. *Soit e l'indice de ramification de K sur $\mathbf{Q}_p$. Si $e < p-1$, alors l'anneau $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ est cohérent.*

Démonstration. Soient $G^\circ(K) \subset G(K)$ les groupes des points de G° et G à valeurs dans K. Le groupe de Lie p-adique $G^\circ(K)$ est un groupe standard au sens de III.§7.3 dans [B-L]. La hypothèse sur e implique que $G^\circ(K) = \exp(\pi\,\mathrm{Lie}(G))$ où exp est l'application exponentielle du groupe de Lie $G(K)$, cf. III.§7. proposition 14 dans [B-L]. Donc, le sous-groupe $G^\circ(K) \subset G(K)$ est un « good analytic subgroup » au sens de 5.2 dans [Em04] et $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$ est cohérent, cf. 5.3.12 de [Em04]. □

Remarques. (i) Pour chaque m, il existe un $m' > m$ tel que que la flèche naturelle $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}} \to \widehat{D}^{(m')}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ soit une application linéaire *compacte* entre espaces de Banach. En fait, par la proposition, cette application se factorise par une application $(A_r)'_b \to (A_{r'})'_b$ avec $r' > r$ convenable et on peut appliquer remarque 16.7 de [Schn02].

(ii) Dans le cas où $\mathcal{G}$ est le complété formel d'un groupe algébrique G réductif et déployé sur S, on peut montrer que l'anneau $D^\dagger(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ est cohérent sans hypothèse sur l'indice de ramification de V.

Soit $\mathcal{G}^{\mathrm{rig}}$ la fibre générique de $\mathcal{G}$ au sens usuel de Raynaud [BL93]. Ainsi, $\mathcal{G}^{\mathrm{rig}}$ est un groupe affinoïde sur K avec $\mathcal{G}^{\mathrm{rig}}(K) = G(V)$ comme groupe de points à valeurs dans K. L'inclusion naturelle $V\langle t_1, \ldots, t_N\rangle \hookrightarrow V[[t_1, \ldots, t_N]]$ induit une immersion ouverte $G^\circ \subseteq \mathcal{G}^{\mathrm{rig}}$. Cette immersion établit une bijection de $G^\circ(K)$ avec le sous-groupe des points de $G(V)$ qui se spécialisent en $1_\kappa \in G_\kappa$ (i.e. avec les S-morphismes $f: S \to G$ qui ayant la propriété que f_κ factorise via l'immersion $1_\kappa \hookrightarrow G_\kappa$). On dit que $G^\circ(K)$ est le « premier groupe de congruence » de $G(V)$.

Par exemple, si $G = \mathrm{GL}_n$ est le groupe linéaire général et M_n son algèbre de Lie, on a $G^\circ(L) = 1 + \mathrm{M}_n(\mathfrak{m}_L)$ pour toute extension de corps valués complets $K \subseteq L$ où $\mathfrak{m}_L$ désigne l'idéal maximal de l'anneau de valuation de L. Donc, $G^\circ(K) = 1 + \pi\mathrm{M}_n(V)$ est le premier groupe de congruence de $\mathrm{GL}_n(V)$ au sens usuel.

5.4 – *Représentations analytiques rigides*

Nous utilisons les notations de la section précédente et supposons encore que le corps K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Nous donnons ici une interprétation de la catégorie des $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$-modules de présentation finie en termes de certaines représentations π-adiques du groupe π-adique $G^\circ(K)$, (groupe des points de G° à valeurs dans K). Rappelons comment est définie la topologie π-adique sur $G(V)$. L'espace V^{n^2} est muni de la topologie produit, qui induit la topologie produit sur l'ouvert $\mathrm{GL}_n(V) \subset V^{n^2}$. La topologie π-adique sur $G(V)$ est définie comme la topologie induite relative à une immersion fermée $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ quelconque. Cette topologie est plus fine que la topologie de Zariski et elle est localement compacte parce que V est localement compact, e.g. 0.6 de [La96]. Finalement, $G^\circ(K) \subset G(V)$ ainsi muni de la topologie induit.

Remarquons que l'involution $\tau \colon g \mapsto g^{-1}$ sur G° s'étend par fonctorialité en un anti-automorphisme de $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$. On a donc une équivalence entre les $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$-modules à gauche et à droite et on va considérer seulement des modules à gauche dans la suite. Le groupe G agit à gauche sur lui-même par conjugaison (i.e. g agit par $h \mapsto g^{-1}hg$) et par fonctorialité sur G° et $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$. Nous notons cette action « adjointe » par $g \mapsto Ad(g)$. Nous appelons $(D^{\mathrm{an}}(G^\circ), G(V))$*-module de présentation finie* un $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$-module M de présentation finie qui est aussi muni d'une action K-linéaire ρ du groupe $G(V)$, qui est compatible au sens que pour tous $x \in D^{\mathrm{an}}(G^\circ), g \in G(V), m \in M$,

$$x\rho(g)m = \rho(g)(\mathrm{Ad}(g)x)m.$$

Du côté des représentations, pour un sous-groupe ouvert H de $G(V)$ et un K-espace vectoriel topologique W, nous appelons *action topologique* de H sur W une action du groupe H sur W par des applications linéaires et continue, cf. (0.11) de [Em04]. En particulier, pour chaque $w \in W$ on a une application $o_w \colon H \to W$ définie par $h \mapsto hw$. Suivant 2.1.18/19 de [Em04], nous introduisons l'espace des fonctions analytiques rigides sur G° en valeurs dans un espace Fréchet W quelconque,

$$C^{\mathrm{an}}(G^\circ, W) := \mathcal{O}(G^\circ)\widehat{\otimes}_K W.$$

Ici, on prend comme produit tensoriel topologique le produit tensoriel projectif, cf. 17.B de [Schn02]. Par évaluation aux points de $G^\circ(K) \subset G^\circ$, on obtient une inclusion de $C^{\mathrm{an}}(G^\circ, W)$ dans l'espace des fonctions (continues) $G^\circ(K) \to W$, cf. 2.1.20 de [Em04]. En fait, comme G° est isomorphe à un polydisque ouvert, l'ensemble $G^\circ(K)$ est Zariski-dense dans G°. Nous avons la définition suivante, cf. Théorème 3.4.3 et Définition 3.6.1 de [Em04].

Définition 5.4.1. Soit W un espace nucléaire Fréchet avec une action topologique de $G^\circ(K)$ où $G(V)$. On appelle W une représentation G°-*analytique* (ou simplement *analytique*) si, pour tout $w \in W$, la fonction $o_w \colon G^\circ(K) \to W$ est dans l'espace $C^{\mathrm{an}}(G^\circ, W)$.

Soit W une représentation analytique de $G^\circ(K)$. Nous notons

$$W' := \mathrm{Hom}_K^{\mathrm{ct}}(W, K)$$

le dual continu de W. En appliquant [Em04], corollaire 5.1.8 à un recouvrement affinoïde convenable de G° on voit que W' est un module sur l'anneau des distributions $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$ de la manière suivante

$$\langle \lambda(w'), w \rangle := \lambda(w' \circ o_w)$$

pour $w \in W, w' \in W', \lambda \in D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$. Ici, $w' \circ o_w$ est vu comme élément de l'espace $C^{\mathrm{an}}(G^\circ, K) = \mathcal{O}(G^\circ)$. Supposons maintenant que l'anneau $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$ est cohérent. C'est vrai dans la situation du corollaire 5.3.2, et nous espérons que ce résultat reste vrai en général. En suivant la stratégie de Schneider et Teitelbaum de [ST03] nous disons que la représentation analytique W est *admissible*, si W' est de présentation finie comme $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$-module. On dit qu'une représentation analytique de $G(V)$ est *admissible*, si elle l'est comme représentation de $G^\circ(K)$. Les morphismes dans ces catégories sont par définition les applications K-linéaires continues et équivariantes.

Proposition 5.4.2. *Le foncteur $W \mapsto W'$ donne une anti-équivalence de catégories entre des représentations analytiques admissibles de $G^\circ(K)$ et les $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$-modules de présentation finie. Le foncteur induit une équivalence entre les sous-catégories des $G(V)$-représentations analytiques admissibles et celle des $(D^{\mathrm{an}}(G^\circ), G(V))$-modules de présentation finie.*

Démonstration. Le corps K est complet relativement à une valuation discrète et il est donc sphériquement complet, cf. Lemme 1.6 de [Schn02]. Le passage au dual fort est donc une anti-équivalence involutive entre les espaces nucléaires Fréchet et les espaces de type compact, cf. [ST03], corollaire 1.4. Si M est un $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$-module de type fini, engendré par des générateurs $x_1, \ldots, x_n$, on pose $M_m := \sum_i \widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}} x_i \subseteq M$. Comme $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$ est une algèbre de Banach noethérienne, M_m a une unique structure de $\widehat{D}^{(m)}(\mathcal{G})_{\mathbf{Q}}$-module de Banach et l'inclusion $M_m \to M_{m'}$, pour $m' > m$, est continue et compact. Munissons $M = \varinjlim_m M_m$ de la topologie limite inductive. Il est facile de voir que cette topologie ne dépend pas du choix des générateurs x_i pour M, et qu'elle fait de

M un $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$-module séparément continu sur un espace de type compact. De plus, chaque application $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$-linéaire entre deux modules M, M' de type fini est automatiquement continue. Soit maintenant $W := M'_b$ le dual fort de M. Par les arguments dans corollaire 3.3 de [ST01] l'espace W est un $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$-module séparément continue via la structure contragredient

$$\langle \lambda.w, x\rangle := w(\lambda^\tau.x)$$

pour $w \in W$, $x \in M$ et $\lambda \in D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$. Utilisant l'inclusion naturelle $\delta\colon G^\circ(K) \hookrightarrow D^{\mathrm{an}}(G^\circ)^\times$ on a une action topologique de $G^\circ(K)$ sur W donné par

$$\langle g.w, x\rangle := w(\delta_{g^{-1}}.x)$$

pour $w \in W$, $x \in M$. Par construction l'application o_w s'étend à une application linéaire continue $D^{\mathrm{an}}(G^\circ) \to W$. L'isomorphisme canonique

$$C^{\mathrm{an}}(G^\circ, W) = \mathcal{O}(G^\circ)\hat{\otimes}_K W \simeq \mathrm{Hom}_K^{\mathrm{ct}}(\mathcal{O}(G^\circ)'_b, W),$$

[Schn02], corollaire 18.8, implique que $o_w \in C^{\mathrm{an}}(G^\circ, W)$ pour $w \in W$. Cela montre que W est une représentation analytique de $G^\circ(K)$. Par réflexivité on a $W' = M$ et la correspondance $M \mapsto W$ induit donc un quasi-inverse pour le foncteur $W \mapsto W'$ considéré dans l'assertion. La proposition en résulte. □

Remarque. Soit Z_K le centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathrm{Lie}(G_K))$ de $\mathrm{Lie}(G_K)$. Comme G est connexe, l'action adjointe de G sur $\mathrm{Lie}(G_K)$ stabilise les éléments de Z_K, cf. [DG70], II.§6.1.5. Si θ est un caractère de Z_K à valeurs dans K, on voit que l'action $g \mapsto Ad(g)$ donne une action de G sur l'anneau quotient

$$D^{\mathrm{an}}(G^\circ)_\theta := D^{\mathrm{an}}(G^\circ)/(\ker\theta)D^{\mathrm{an}}(G^\circ).$$

Finalement, $\mathrm{Lie}(G_K)$ agit sur une représentation analytique W par une formule analogue à (41), cf. [Em04], p. 69, et on voit que W est à caractère infinitésimal θ si et seulement si le $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$-module W' est en fait un module sur $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)_\theta$. Dans cette situation, on a une version évidente de la proposition précédente pour des représentations ayant θ comme caractère infinitésimal.

On déduit immédiatement de cette proposition le corollaire suivant.

Corollaire 5.4.3. *La catégorie des représentations analytiques admissibles de $G^\circ(K)$ est abélienne.*

Terminons par quelques exemples. Considérons le groupe fini de type de Lie $G(k)$ où k est le corps résiduel de V, dans ce cas les $G(k)$-représentations de dimension finie sont analytiques admissibles (en fait, on a $G(k) \simeq G(V)/G^\circ(K)$). Comme premiers exemples de dimension infinie sur K, notons qu'il y a un foncteur de la catégorie des $U(\mathrm{Lie}(G_K))$-modules de type fini M vers celle des $D^{\mathrm{an}}(G^\circ)$-modules de présentation finie, qui à M associe

$$M \longmapsto D^{\mathrm{an}}(G^\circ) \otimes_{U(\mathrm{Lie}(G_K))} M.$$

Ce foncteur est donc à valeurs dans la catégorie des représentations analytiques admissibles. Pour des représentations algébriques de dimension finie du schéma en groupes G, ce foncteur est simplement la restriction aux points rationnels $G(V) \subset G$.

Remerciements. Christine Huyghe remercie Michel Gros, et Adriano Marmora pour leurs encouragements à rédiger ce travail, ainsi que King Fai Lai pour l'avoir initiée à ces problèmes. Nous remercions d'autre part Pierre Berthelot pour ses réponses à nos questions.

Tobias Schmidt remercie Deepam Patel et Matthias Strauch pour quelques conversations intéressantes sur certains points de ce travail.

Tobias Schmidt a accompli une partie de ce travail alors qu'il était lauréat d'une bourse Heisenberg attribuée par la Deutsche Forschungsgemeinschaft. Il remercie cette institution pour son soutien financier, ainsi que le laboratoire IRMA de l'Université de Strasbourg pour avoir financé un séjour scientifique à Strasbourg durant l'élaboration de cet article.

Références

[AW13] K. Ardakov – S. Wadsley, *On irreducible representations of compact p-adic analytic groups,* Ann. of Math. (2) **178** (2013), no. 2, pp. 453–557.

[Beil84] A. Beilinson, *Localization of representations of reductive Lie algebras,* Dans Z. Ciesielski and C. Olech (eds.), *Proceedings of the international congress of mathematicians,* Warsaw, August 16–24, 1983, Vol. 1, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, and North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984, pp. 699–710.

[BB81] A. Beilinson – J. Bernstein, *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **292** (1981), no. 1, pp. 15–18.

[Ber89] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules,* dans F. Baldassarri, S. Bosch, et B. Dwork (eds.), *p-adic analysis,* Lecture Notes in Mathematics, 1454. Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. 80–124.

[Ber96] P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques.* I. *Opérateurs différentiels de niveau fini,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **29** (1996), no. 2, pp. 185–272.

[Ber00] P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques.* II. *descente par Frobenius,* Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **81** (2000).

[Ber02] P. Berthelot, *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules,* dans P. Berthelot, J.-M. Fontaine, L. Illusie, K. Kato et M. Rapoport (eds.), *Cohomologies p-adiques et application arithmétiques* II, Astérisque, 279. Société Mathématique de France, Paris, 2002, pp. 1–80.

[BO78] P. Berthelot – A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology,* Princeton University Press, Princeton, N.J., et University of Tokyo Press, Tokyo, 1978.

[Bor87] A. Borel – P.-P. Grivel – B. Kaup – A. Haefliger – B. Malgrange – F. Ehlers, *Algebraic D-modules,* Perspectives in Mathematics, 2. Academic Press, Boston, MA, 1987.

[BL93] S. Bosch – W. Lütkebohmert, *Formal and rigid geometry.* I. Rigid spaces, Math. Ann. **295** (1993), no. 2, pp. 291–317.

[B-L] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique.* Fasc. XXXVII. Groupes et algèbres de Lie, Chapitre II : Algèbres de Lie libres, Chapitre III : Groupes de Lie, Actualités Scientifiques et Industrielles, 1349. Hermann, Paris, 1972.

[dJ96] A. J. de Jong, *Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **82** (1995), 5–96.

[DG70] M. Demazure – P. Gabriel, *Groupes algébriques.* Tome I. Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs. avec un appendice Corps de classes local par Michiel Hazewinkel, Masson & Cie, Éditeur, Paris, et North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970.

[Em04] M. Emerton, Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups, Mem. Amer. Math. Soc. **248** (2017), no. 1175.

[Gro60] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique.* I. Le langage des schémas, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4** (1960).

[Gro65] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique,* IV. *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* II, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **24** (1965).

[Gro67] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique,* IV. *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* IV, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **32** 1967.

[Huy97] Ch. Huyghe, *$\mathcal{D}^\dagger$-affinité de l'espace projectif,* avec un appendice de P. Berthelot, Compositio Math. **108** (1997), no. 3, pp. 277–318.

[Huy03] Ch. Huyghe, *Un théorème de comparaison entre les faisceaux d'opérateurs différentiels de Berthelot et de Mebkhout–Narváez–Macarro,* J. Algebraic Geom. **12** (2003), no. 1, pp. 147–199.

[NH09] CH. HUYGHE, *Un théorème de Beilinson–Bernstein pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques,* Bull. Soc. Math. France **137** (2009), no. 2, pp. 159–183.

[HS15] CH. HUYGHE – T. SCHMIDT, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur la variété de drapeaux,* J. reine angew. Math., DOI 10.1515 / crelle-2017-0021.

[Jan03] J. C. JANTZEN, *Representations of algebraic groups,* deuxième édition, Mathematical Surveys and Monographs, 107, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2003.

[Jan87] J. C. JANTZEN, *Restricted Lie algebra cohomology,* dans A. M. Cohen, W. H. Hesselink, W. L. J. van der Kallen, et J. R. Strooker (eds.), *Algebraic groups Utrecht 1986,* Lecture Notes in Mathematics, 1271, Springer-Verlag, Berlin, 1987, pp. 91–108.

[KY07] M. KANEDA – J. YE, Equivariant localization of $\bar{D}$-modules on the flag variety of the symplectic group of degree 4. *J. Algebra* **309** (2007), no. 1, pp. 236–281.

[Kas89] M. KASHIWARA, *Representation theory and D-modules on flag varieties,* Orbites unipotentes et représentations, III. Astérisque **173-174** (1989), no. 9, pp. 55–109.

[La96] E. LANDVOGT, *A compactification of the Bruhat–Tits building,* Lecture Notes in Mathematics, 1619. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[LSQ08] B. LE STUM – A. QUIRÓS, *The filtered Poincaré lemma in higher level* (*with applications to algebraic groups*)*,* Nagoya Math. J. **191** (2008), pp. 79–110.

[MR87] J. C. MCCONNELL – J. C. ROBSON, *Noncommutative Noetherian rings,* avec la cohopération de L. W. Small, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Chichester, 1987.

[MW68] P. MONSKY – G. WASHNITZER, *Formal cohomology* I, Ann. of Math. (2) **88** (1968), pp. 181–217.

[MFK94] D. MUMFORD – J. FOGARTY – F. KIRWAN, *Geometric invariant theory,* troisième édition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), 34. Springer-Verlag, Berlin, 1994

[PSS12] D. PATEL – T. SCHMIDT – M. STRAUCH, Locally analytic representations and sheaves on the Bruhat–Tits building. Algebra Number Theory **8** (2014), no. 6, pp. 1365–1445.

[PSS13] D. PATEL – T. SCHMIDT – M. STRAUCH, Integral models of P^1 and analytic distribution algebras for GL_2. Münster J. Math. **7** (2014), no. 1, pp. 241–271.

[Schn02] P. SCHNEIDER, *Nonarchimedean functional analysis,* Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[ST01] P. SCHNEIDER – J. TEITELBAUM, *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to* GL_2*,* J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, pp. 443–468.

[ST03] P. Schneider – J. Teitelbaum, *Algebras of p-adic distributions and admissible representations,* Invent. Math. **153** (2003), no. 1, pp. 145–196.

Manoscritto pervenuto in redazione il 13 ottobre 2015.