

## Motifs et adjoints

BRUNO KAHN (\*)

RÉSUMÉ – On démontre dans de nombreux cas l’existence d’adjoints à l’extension des scalaires sur des catégories de nature motivique, dans le cadre d’extensions de corps. Cette situation est différente de celle, étudiée habituellement, d’un morphisme de type fini de schémas. On en tire diverses applications, dont une construction d’un “motif de Tate–Šafarevič” attaché à une variété abélienne sur un corps de fonctions. On en déduit aussi une approche possible de la conjecture de Bloch sur les surfaces, par réduction aux courbes.

SUMMARY – We show in many cases the existence of adjoints to extension of scalars on categories of motivic nature, in the framework of field extensions. This is to be contrasted with the more classical situation where one deals with a finite type morphism of schemes. Among various applications, one is a construction of a “Tate–Šafarevič motive” attached to an abelian variety over a function field. We also deduce a possible approach to Bloch’s conjecture on surfaces, by reduction to curves.

MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION (2010). 14C25, 14E05, 18F99.

KEYWORDS. Motifs, adjonctions, géométrie birationnelle.

(\*) *Indirizzo dell’A.*: Institut de Mathématiques de Jussieu - PRG, Case 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France  
E-mail: [bruno.kahn@imj-prg.fr](mailto:bruno.kahn@imj-prg.fr)

## TABLE DES MATIÈRES

1. Notations et conventions . . . . .	83
2. Exemples . . . . .	85
3. Généralités sur les adjoints . . . . .	91
4. Cas d'une extension finie. . . . .	94
5. Motifs numériques . . . . .	98
6. Catégories birationnelles . . . . .	105
7. Non existence d'adjoints . . . . .	111
8. Quelques calculs . . . . .	116
9. Motifs au point générique . . . . .	120
RÉFÉRENCES . . . . .	125

**Introduction**

Le formalisme des six opérations, imaginé par Grothendieck, est au cœur des techniques cohomologiques et motiviques en géométrie algébrique : étant donné une catégorie de schémas  $\mathcal{C}$ , il s'agit d'un système de pseudo-foncteurs

$$f^*, f_*, f_!, f^! : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Cat}$$

où  $\mathbf{Cat}$  est la 2-catégorie des catégories, les quatre foncteurs prennent la même valeur  $\mathcal{M}(X)$  sur un objet  $X \in \mathcal{C}$ , et pour un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  :

- $f^*, f^!$  envoient  $\mathcal{M}(Y)$  vers  $\mathcal{M}(X)$  ;
- $f_*, f_!$  envoient  $\mathcal{M}(X)$  vers  $\mathcal{M}(Y)$  ;
- $f_*$  est adjoint à droite de  $f^*$  ;  $f^!$  est adjoint à droite de  $f_!$ .

On a des propriétés supplémentaires : théorèmes de changement de base, structures tensorielles, dualité ; je n'entrerai pas dans les détails, renvoyant à [15], SGA4 et [4].

Le but de cet article est d'étudier une situation plus simple qui conduit à un nombre surprenant de résultats : celle où  $\mathcal{C}$  est une *catégorie de corps*. Plus précisément, soit  $\mathcal{M}$  un pseudo-foncteur de la catégorie des corps commutatifs vers une 2-catégorie. Si  $K/k$  est une extension, on a donc un 1-morphisme

$$(*) \quad \mathcal{M}(k) \longrightarrow \mathcal{M}(K).$$

Les questions que je me propose d'étudier dans cet article sont :

- (1) Quand le 1-morphisme  $(*)$  admet-il un adjoint (à gauche ou à droite) ?
- (2) Si  $\mathcal{M}'$  est un autre pseudo-foncteur (à valeurs dans la même 2-catégorie) et qu'on a un morphisme de pseudo-foncteurs  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ , quel est l'effet de ce morphisme sur les adjoints de (1) (s'ils existent) ?

Bien entendu, ces questions ont peu de chances d'avoir une réponse intéressante dans une telle généralité. Précisons donc que les pseudo-foncteurs auxquels je m'intéresse sont de type motivique : par exemple les motifs de Chow, les 1-motifs, une catégorie de motifs triangulés de Voevodsky... mais aussi d'autres. Le premier exemple non trivial dans cette direction est la  $K/k$ -trace des variétés abéliennes.

Le premier problème est un problème d'existence, le second est un problème de changement de base. Nous allons voir que le premier a une réponse positive dans un grand nombre de cas intéressants, et que la réponse au second n'est pas toujours celle qu'on pourrait penser.

Concernant (1), on utilisera essentiellement trois méthodes pour prouver l'existence d'un adjoint :

- Un argument catégorique abstrait.
- Un calcul concret.
- Supposant  $K/k$  de type fini (condition plus ou moins nécessaire pour l'existence d'un adjoint), soit  $U$  un modèle de  $K$  de type fini sur  $k$ . On suppose que  $\mathcal{M}$  s'étend en un (pseudo-)foncteur sur la catégorie des  $k$ -schémas de type fini : au morphisme  $f: U \rightarrow \text{Spec } k$  est donc associé un foncteur

$$f^*: \mathcal{M}(k) \longrightarrow \mathcal{M}(U).$$

Supposons que  $f^*$  ait un adjoint (à gauche pour fixer les idées)  $f_{\#}$ . On peut faire varier  $U$ . Si  $\mathcal{M}(K) = 2\text{-}\varinjlim \mathcal{M}(U)$ , on a des chances d'obtenir l'adjoint de  $\mathcal{M}(k) \rightarrow \mathcal{M}(K)$  comme "limite" des  $f_{\#}$ , cf. proposition 3.7 pour un cas particulièrement simple.

Concernant (2), si  $\varphi$  est pleinement fidèle, le morphisme de changement de base (1.1) associé ci-dessous est en général un isomorphisme (lemme 3.1). La situation est totalement différente quand  $\varphi$  est, disons, plein et essentiellement surjectif mais pas fidèle : passant de  $\mathcal{M}$  à  $\mathcal{N}$ , on a alors tendance à "perdre de l'adjoint", cf. proposition 3.8 et remarque 8.2.

Passons aux principaux résultats de l'article.

**THÉORÈME 1.** *Soit  $\mathcal{M} = \mathbf{Mot}_{\text{num}}(-, \mathbf{Q})$  la théorie des motifs numériques à coefficients rationnels. Alors, pour toute extension primaire  $K/k$ , le foncteur*

$$\mathbf{Mot}_{\text{num}}(k, \mathbf{Q}) \longrightarrow \mathbf{Mot}_{\text{num}}(K, \mathbf{Q})$$

*admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite. Ces adjoints sont canoniquement isomorphes, commutent aux twists et respectent les poids.*

Voir théorème 5.6, proposition 5.7 et proposition 5.8. En se restreignant aux motifs effectifs de poids 1, on retrouve la  $K/k$ -trace et la  $K/k$ -image des variétés abéliennes (à isogénie près): exemple 5.9.

**THÉORÈME 2.** *Soit  $p = 1$  ou un nombre premier, et soit  $\mathcal{M} = S_b^{-1} \mathbf{Sm}, \mathbf{Chow}^0(-, \mathbf{Z}[1/p])$  ou  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^0$  la théorie des variétés lisses birationnelles [27], des motifs de Chow birationnels à coefficients  $\mathbf{Z}[1/p]$  [28] ou des motifs triangulés géométriques birationnels [29]. Alors, pour toute extension de type fini séparable  $K/k$  de corps d'exposant caractéristique  $p$ , le foncteur*

$$\mathcal{M}(k) \longrightarrow \mathcal{M}(K)$$

*admet un adjoint à gauche.*

Voir théorème 6.1, 6.6 et 6.9.

Une application de ces résultats a déjà été donnée dans [28, proposition 5.1.4]. Pour le corollaire suivant, on dit qu'une  $k$ -variété propre  $X$  est *universellement  $R$ -triviale* (resp. *universellement  $\mathbf{CH}_0 \otimes A$ -triviale*) si  $X(E)/R$  est réduit à un point pour toute extension  $E/k$ , où  $R$  est la  $R$ -équivalence (resp. si  $\mathbf{CH}_0(X_E) \otimes A \xrightarrow{\sim} A$  pour toute extension  $E/k$ , où  $A$  est un anneau commutatif). Soit  $p = 1$  ou un nombre premier.

**COROLLAIRE 1.** *Soit  $\pi: \mathcal{X} \dashrightarrow Y$  une application rationnelle dominante de  $k$ -variétés propres, lisses et connexes, dont la restriction à un ouvert de définition est propre. Supposons que la fibre générique  $X$  de  $\pi$  soit universellement  $R$ -triviale (resp. universellement  $\mathbf{CH}_0 \otimes A$ -triviale, où  $A$  est une  $\mathbf{Z}[1/p]$ -algèbre). Alors  $\pi$  induit un isomorphisme  $\mathcal{X}(L)/R \xrightarrow{\sim} Y(L)/R$  (resp.  $\mathbf{CH}_0(\mathcal{X}) \otimes A \xrightarrow{\sim} \mathbf{CH}_0(Y) \otimes A$ ) pour toute extension  $L/k$  de corps d'exposant caractéristique  $p$ .*

Voir corollaire 6.3 et 6.8. En particulier, si  $X$  et  $Y$  sont universellement  $R$ -triviales, il en est de même de  $\mathcal{X}$  : c’est une variante d’un célèbre théorème de Graber, Harris et Starr [12, corollaire 1.3], mais ici le corps de base est quelconque. Tandis que le présent contexte catégorique n’est pas trop difficile à éviter pour traiter le cas de  $\text{CH}_0$ , en utilisant le lemme de déplacement pour les 0-cycles [43], cela semble moins évident dans le cas des classes de  $R$ -équivalence.

Le théorème qui suit construit un “motif de Tate–Šafarevič”, introduit dans [22] de manière différente (voir remarque 9.4). Notons  $\mathbf{Chow}^{\text{eff}}$  (resp.  $\mathbf{Mot}_H^{\text{eff}}$ ) la théorie des motifs de Chow effectifs (resp. celle des motifs effectifs modulo l’équivalence homologique relative à une cohomologie de Weil  $H$ ).

**THÉORÈME 3.** *Soit  $K/k$  un corps de fonctions d’une variable, et soit  $A$  une variété abélienne sur  $K$ . Alors il existe un motif  $\mathbb{I}(A, K/k) \in \mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k, \mathbf{Q})$ , dont l’image dans  $\mathbf{Mot}_H^{\text{eff}}(k, \mathbf{Q})$  est de poids 2 pour toute cohomologie de Weil  $H$  classique (§ 2.2.2), et tel que*

$$H_l(\mathbb{I}(A, K/k)) \simeq V_l(\mathbb{I}(A^*, Kk_s))(-1)$$

*pour tout nombre premier  $l \neq \text{car } k$ , où  $\mathbb{I}(A^*, Kk_s)$  est le groupe de Tate–Šafarevič “géométrique” de la duale de  $A$  et  $H_l$  est la réalisation  $l$ -adique. Ce motif est fonctoriel en  $A$  pour les homomorphismes de variétés abéliennes.*

Voir corollaire 8.4 et théorème 8.6.

Le dernier résultat a trait aux “correspondances au point générique” étudiées par Bloch, Rovinsky et Beilinson. Pour toute  $k$ -variété projective lisse  $X$ , on note  $\text{End}_{\text{gen}}(X)$  la  $\mathbf{Q}$ -algèbre de ces correspondances [5].

**THÉORÈME 4.** *Soient  $K/k$  une extension de type fini,  $X$  une  $K$ -variété projective lisse et  $\mathcal{X}$  un  $k$ -modèle projectif lisse de  $X$ . Alors il existe un homomorphisme canonique d’algèbres*

$$\text{End}_{\text{gen}}(X) \longrightarrow \text{End}_{\text{gen}}(\mathcal{X})$$

*dont on peut expliciter le conoyau.*

Voir théorème 9.3.

En particulier, si  $\text{degtr}(K/k) = 1$  et si  $X$  est une courbe (donc  $\mathcal{X}$  est une surface),  $\text{End}_{\text{gen}}(X)$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre semi-simple de dimension finie ; ceci donne une approche possible de la conjecture de Bloch sur les surfaces (remarque 9.5).

Dans la première section, on fait des “rappels” sur les théories motiviques et on fixe quelques notations. La seconde section est une liste d’exemples qui interviennent dans la suite de l’article. La troisième est une collection de sorites sur les adjonctions. Dans la section 4, on traite le cas d’une extension finie : ces résultats ne sont ni difficiles ni surprenants (pour certaines théories motiviques, ils sont des cas extrêmement particuliers de ceux de [4]), mais ils ont déjà une application non triviale à un résultat d’effectivité pour les motifs purs : le théorème 4.8.

La section 5 est consacrée aux motifs numériques. Vu le théorème de semi-simplicité de Jannsen [19], l’existence des adjoints est ici un cas particulier de leur existence pour tout foncteur pleinement fidèle entre catégories semi-simples (proposition 5.3).

Dans la section 6, on s’attaque aux catégories birationnelles étudiées dans [27, 28, 29]. Ici, la technique utilisée pour montrer l’existence d’un adjoint à gauche est celle de la proposition 3.7. Elle marche de manière remarquablement aisée et uniforme. On donne aussi d’autres démonstrations, fondées sur le calcul explicite des ensembles de morphismes dans ces catégories et qui fournissent peut-être une meilleure intuition de ce qui se passe ; ces démonstrations ont toutefois l’inconvénient d’utiliser la résolution des singularités, sous la forme de Hironaka ou sous celle de de Jong.

Dans la section 7, on donne des exemples où les adjoints n’existent pas : extensions algébriques infinies, extension régulières infinies pour les motifs de Chow effectifs. Ce dernier cas (théorème 7.4) n’est pas entièrement trivial et repose sur le fait qu’une variété abélienne non nulle a un rang positif sur un corps algébriquement clos de dimension de Kronecker  $> 0$ . Le cas où la base de l’extension est algébrique sur un corps fini est d’ailleurs une exception, voir proposition 7.5.

Dans la section 8, on fait quelques calculs explicites d’adjoints dans le cas des motifs de Chow birationnels. On en déduit le corollaire 8.4 (et donc une partie du théorème 3).

Enfin, dans la section 9, on applique ces résultats aux catégories de “motifs au point générique” développées dans [24, §7.8] à partir de l’idée de Bloch–Rovinsky–Beilinson.

Il reste à décrire ce qui n’est pas fait dans cet article. J’avais initialement prévu de traiter les 1-motifs : cela s’avère beaucoup plus délicat que je ne le pensais, et devra faire l’objet d’un autre travail. Dans le cas des motifs purs, l’existence ou l’inexistence d’adjoints n’est claire que pour l’équivalence rationnelle et l’équivalence numérique : je ne sais rien dans le cas d’une relation intermédiaire

(voir §5.7 pour le cas des motifs homologiques). Dans le cas des motifs effectifs, un analogue du théorème 7.4 pour l'équivalence algébrique semble particulièrement intéressant à décider : je soupçonne que le groupe de Griffiths donne une obstruction à l'existence d'un adjoint, mais je n'ai pas réussi à fabriquer un argument convaincant pour le démontrer. Enfin, la démonstration du théorème 8.6 est incomplète.

### *Remerciements*

Ces résultats ont été initialement inspirés par mon travail avec R. Sujatha sur les motifs birationnels [25, 26, 27, 28, 29]. Une partie de cet article a été imaginée au cours d'un séjour à l'IMPA en août 2008, financé par la Coopération France-Brésil. Je tiens à remercier cette dernière de son soutien, l'IMPA de son hospitalité, et Marc Hindry et Amílcar Pacheco pour des échanges lors de ce séjour. Je remercie également Ahmed Abbes, Joseph Ayoub, Daniel Bertrand, Mikhail Bondarko, Antoine Chambert-Loir, Denis-Charles Cisinski, Pierre Colmez, Frédéric Déglise, Mathieu Florence, V. Srinivas, Claire Voisin et Jörg Wildeshaus pour des discussions autour de cet article. Finalement, je remercie le rapporteur pour ses commentaires qui m'ont permis d'améliorer la présentation.

## 1. Notations et conventions

1.1 – Pour toute catégorie  $\mathcal{A}$ , on note  $\text{Ob}(\mathcal{A})$  (resp.  $\text{Fl}(\mathcal{A})$ ) la classe des objets (resp. des morphismes) de  $\mathcal{A}$ ; si  $X, Y \in \mathcal{A}$ , on note  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  ou  $\mathcal{A}(X, Y)$  l'ensemble des morphismes de  $X$  vers  $Y$ , en choisissant la notation la plus pratique selon le contexte.

Soit **corps** la catégorie des corps commutatifs (morphisms : les extensions de corps). On se donne une sous-catégorie  $\mathcal{K} \subset \mathbf{corps}$ . Exemples : la sous-catégorie pleine des corps d'une caractéristique donnée, la sous-catégorie non pleine formée des extensions finies séparables, etc.

1.2 – Soit  $\mathcal{C}$  une 2-catégorie (par exemple la 2-catégorie **Cat** des catégories, la 2-catégorie des catégories additives, celle des catégories triangulées, celle des catégories  $\mathbf{Q}$ -linéaires tensorielles rigides...). On s'intéresse aux pseudo-foncteurs covariants [14, VI.8]

$$\mathcal{M}: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Un tel pseudo-foncteur consiste donc en

- un objet  $\mathcal{M}(k) \in \mathcal{C}$  pour tout  $k \in \mathcal{K}$ ;
- un 1-morphisme  $\mathcal{M}(f) = f_{\mathcal{M}}^* = f^*: \mathcal{M}(k) \rightarrow \mathcal{M}(K)$  pour toute extension  $f: k \rightarrow K$  de  $\mathcal{K}$ ;
- étant donné deux extensions composables  $f: k \rightarrow K$  et  $g: K \rightarrow L$ , un 2-isomorphisme

$$c_{f,g}^{\mathcal{M}} = c_{f,g}: (g \circ f)^* \xrightarrow{\sim} g^* \circ f^*$$

où les  $c_{f,g}$  satisfont aux relations de 2-cocycle habituelles. (En particulier,  $(1_k)^* = \text{Id}_{\mathcal{M}(k)}$ .)

On dira que  $\mathcal{M}$  est une *théorie motivique* (définie sur  $\mathcal{K}$ , à valeurs dans  $\mathcal{C}$ ). On précisera “théorie motivique additive, triangulée”, etc. si  $\mathcal{C}$  est (etc.).

1.3 – Si  $\mathcal{M}, \mathcal{N}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  sont deux théories motiviques, un *morphisme de théories motiviques*  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  est donné par

- pour tout  $k \in \mathcal{K}$ , un 1-morphisme  $\varphi_k: \mathcal{M}(k) \rightarrow \mathcal{N}(k)$ ;
- si  $f: k \rightarrow K$  est un morphisme de  $\mathcal{K}$ , un 2-isomorphisme

$$v_f^\varphi = v_f: \varphi_K f_{\mathcal{M}}^* \xrightarrow{\sim} f_{\mathcal{N}}^* \varphi_k$$

satisfaisant aux relations de 1-cocycle habituelles (relativement à  $c^{\mathcal{M}}$  et  $c^{\mathcal{N}}$ ).

1.4 – Nous n’utiliserons pas la notion d’(iso)morphisme entre morphismes de théories motiviques (qui existe).

1.5 – Rappelons que la notion d’adjoint d’un foncteur se généralise directement au cas des 1-morphismes dans une 2-catégorie [4, 1.1]. Un adjoint est déterminé à 2-isomorphisme unique près. Étant donné une théorie motivique  $\mathcal{M}$  définie sur  $\mathcal{K}$ , nous rencontrerons de nombreux exemples où les morphismes  $f_{\mathcal{M}}^*$  admettent un adjoint à gauche  $f_{\#}^{\mathcal{M}}$  (ou à droite  $f_*^{\mathcal{M}}$ ). Rappelons que, dans ce cas, on peut relier ces adjoints de manière cohérente, de façon à munir  $\mathcal{M}$  d’une structure 1-contravariante sur  $\mathcal{K}$  [4, proposition 1.1.17].

Si  $f_{\#}^{\mathcal{M}}$  existe pour tout  $f$ , on dira que  $\mathcal{M}$  *admet des adjoints à gauche*.

1.6 – Soient  $\mathcal{M}, \mathcal{N}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  deux théories motiviques, et soit  $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un morphisme de théories motiviques. Supposons que, pour  $f: k \rightarrow K$  dans  $\mathcal{K}$ ,  $f_{\mathcal{M}}^*$

et  $f_{\mathcal{N}}^*$  admettent des adjoints à gauche  $f_{\#}^{\mathcal{M}}$  et  $f_{\#}^{\mathcal{N}}$ . On a donc des 2-morphismes d'adjonction

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{\eta_{\mathcal{M}}} f_{\mathcal{M}}^* f_{\#}^{\mathcal{M}}, & f_{\#}^{\mathcal{M}} f_{\mathcal{M}}^* &\xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{M}}} 1 \\ 1 &\xrightarrow{\eta_{\mathcal{N}}} f_{\mathcal{N}}^* f_{\#}^{\mathcal{N}}, & f_{\#}^{\mathcal{N}} f_{\mathcal{N}}^* &\xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{N}}} 1 \end{aligned}$$

satisfaisant les relations habituelles. On déduit alors du 2-isomorphisme  $v_f^\varphi$  de 1.3 le morphisme de changement de base [4, proposition 1.1.9]

$$(1.1) \quad w_f^\varphi: f_{\#}^{\mathcal{N}} \varphi_K \longrightarrow \varphi_k f_{\#}^{\mathcal{M}}$$

défini comme la composition

$$f_{\#}^{\mathcal{N}} \varphi_K \xrightarrow{f_{\#}^{\mathcal{N}} \varphi_K * \eta_{\mathcal{M}}} f_{\#}^{\mathcal{N}} \varphi_K f_{\mathcal{M}}^* f_{\#}^{\mathcal{M}} \xrightarrow{f_{\#}^{\mathcal{N}} * v_f^\varphi * f_{\#}^{\mathcal{M}}} f_{\#}^{\mathcal{N}} f_{\mathcal{N}}^* \varphi_k f_{\#}^{\mathcal{M}} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{N}} * \varphi_k f_{\#}^{\mathcal{M}}} \varphi_k f_{\#}^{\mathcal{M}}.$$

## 2. Exemples

Tous ces exemples sont utilisés dans la suite de l'article.

### 2.1 – Le modèle de base

Pour tout  $k \in \mathbf{corps}$ , soit  $\mathbf{Sm}(k) \in \mathbf{Cat}$  la catégorie des  $k$ -schémas lisses séparés de type fini, la structure de 2-foncteur étant donnée par l'extension des scalaires. Les catégories  $\mathbf{Sm}(k)$  possèdent produits et coproduits finis. **Variantes** : prendre les variétés projectives lisses  $\mathbf{Sm}^{\text{proj}}$ , etc. On peut aussi prendre les variétés lisses (ou projectives lisses) pointées (par un point rationnel) : cela définit de nouvelles théories motiviques  $\mathbf{Sm}_*$ ,  $\mathbf{Sm}_*^{\text{proj}}$ ...

### 2.2 – Motifs purs

Choisissons un couple adéquat  $(A, \sim)$  au sens de [28, 1.1] :  $A$  est un anneau commutatif et  $\sim$  est une relation d'équivalence adéquate sur les cycles algébriques à coefficients dans  $A$ . On a les théories motiviques suivantes, munies de morphismes de théories motiviques :

$$\mathbf{Sm}^{\text{proj}} \longrightarrow \mathbf{Cor}_{\sim}(-, A) \longrightarrow \mathbf{Mot}_{\sim}^{\text{eff}}(-, A) \longrightarrow \mathbf{Mot}_{\sim}(-, A)$$

où  $\mathbf{Cor}_{\sim}$  (resp.  $\mathbf{Mot}_{\sim}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{Mot}_{\sim}$ ) désigne la catégorie des correspondances (resp. des motifs purs effectifs, des motifs purs) avec la convention *covariante*. Lorsque  $\sim$  est l'équivalence rationnelle, on abrège  $\mathbf{Mot}_{\text{rat}}^{\text{eff}}$  et  $\mathbf{Mot}_{\text{rat}}$  en  $\mathbf{Chow}^{\text{eff}}$  et  $\mathbf{Chow}$ .

Pour que cette définition ait un sens, il faut que la relation  $\sim$  soit compatible à l'extension des scalaires. C'est clairement le cas pour la plupart des équivalences adéquates usuelles : par exemple équivalence rationnelle, algébrique, numérique ou smash-nilpotente au sens de Voevodsky. Dans le cas de l'équivalence homologique, on est amené à faire un peu de théorie.

### 2.2.1 – Une théorie motivique de réalisations

Nous aurons besoin d'un exemple très sommaire de telle théorie :

**DÉFINITION 2.1.** Pour  $p = 0$  ou un nombre premier, soit  $\mathbf{corps}_p$  la catégorie des corps de caractéristique  $p$ . Une *théorie de coefficients* est un foncteur

$$F: \mathbf{corps}_p \longrightarrow \mathbf{corps}_0 .$$

**EXEMPLES 2.2.** (i) Un foncteur constant :  $F(k) = F_0$  pour tout  $k$ , les morphismes étant égaux à l'identité.

(ii)  $F(k) = k$  si  $p = 0$ .

(iii)  $F(k) = \text{Frac}(W(k))$  si  $p > 0$ .

À une théorie de coefficients  $F$ , on associe la théorie motivique

$$R_F(k) = \mathbf{Vec}_{F(k)}^*$$

où  $\mathbf{Vec}_{F(k)}^*$  est la catégorie des  $F(k)$ -espaces vectoriels gradués de dimension finie. Pour une extension  $K/k$ , le foncteur  $\mathbf{Vec}_{F(k)}^* \rightarrow \mathbf{Vec}_{F(K)}^*$  est donné par l'extension des scalaires. (On considère les  $\mathbf{Vec}^*$  comme des catégories rigides pour le produit tensoriel gradué et la contrainte de commutativité donnée par la règle de Koszul.)

### 2.2.2 – Théories motiviques de motifs homologiques

Les cohomologies de Weil “classiques” fournissent des exemples de morphismes  $\mathbf{Chow} \rightarrow R_F$  :

- (i) Fixons un domaine universel  $\Omega \in \mathbf{corps}_p$  et “restreignons”-nous à la catégorie des sous-corps de  $\Omega$  (c'est-à-dire considérons la catégorie  $\mathbf{corps}/\Omega$ ). Pour  $l \neq p$ , on considère la réalisation  $l$ -adique  $X \mapsto H^*(X_{k_s}, \mathbf{Q}_l)$ , où  $k_s$  est la clôture séparable de  $k$  dans  $\Omega$ . Ici,  $F(k) = \mathbf{Q}_l$  pour tout  $k$ . L'invariance de la cohomologie étale par extension algébriquement close fournit les isomorphismes naturels nécessaires. On note cette réalisation  $\rho_l$ , et  $\mathbf{Mot}_l$  la théorie de motifs homologiques associée.

- (ii) Prenons  $p = 0$ , et restreignons-nous à la catégorie des sous-corps de  $\mathbf{C}$ . On peut alors prendre pour  $H^*$  la cohomologie de Betti. Ici,  $F(k) = \mathbf{Q}$  pour tout  $k$ . On note cette réalisation  $\rho_B$ , et  $\mathbf{Mot}_B$  la théorie de motifs purs homologiques associée.
- (iii) Toujours en caractéristique zéro, on peut prendre pour  $H^*$  la cohomologie de de Rham. Ici,  $F(k) = k$ . On note cette réalisation  $\rho_{dR}$  et  $\mathbf{Mot}_{dR}$  la théorie de motifs purs homologiques associée.
- (iv) En caractéristique  $p > 0$ , on peut prendre pour  $H^*$  la cohomologie cristalline. Ici,  $F(k) = \text{Frac}(W(k))$ . On note cette réalisation  $\rho_{\text{cris}}$ . et  $\mathbf{Mot}_{\text{cris}}$  la théorie de motifs purs homologiques associée.

Rappelons que si  $p = 0$ , les isomorphismes de comparaison montrent que les théories  $\mathbf{Mot}_l$ ,  $\mathbf{Mot}_B$  et  $\mathbf{Mot}_{dR}$  sont *égales*. On les note simplement  $\mathbf{Mot}_H$ .

### 2.2.3 – Réalisations enrichies

Je ne traiterai que le cas que je connais bien : celui de la cohomologie  $l$ -adique, laissant d'autres exemples aux experts. Si  $G$  est un groupoïde et  $F$  un corps, on note  $\mathbf{Rep}_F(G)$  (resp.  $\mathbf{Rep}_F^*(G)$ ) la catégorie des foncteurs de  $G$  vers  $\mathbf{Vec}_F$  (resp.  $\mathbf{Vec}_F^*$ ): ce sont les  $F$ -représentations (de dimension finie, graduées) de  $G$ . Si  $G$  et  $F$  sont munis de topologies, la notation sous-entend qu'on ne considère que les représentations continues (c'est-à-dire continues sur les ensembles de morphismes).

DÉFINITION 2.3. Soit  $p = 0$  ou un nombre premier, et soit  $l \neq p$  un nombre premier. Pour  $k \in \mathbf{corps}_p$ , de type fini sur son sous-corps premier, on définit :

$$F_l(k) = \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_l}^*(G_k)$$

où  $G_k$  est le groupoïde de Galois absolu de  $k$ .<sup>1</sup> Ceci définit une théorie motivique sur la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{corps}_p$  formée des corps de type fini. On l'étend à tout  $\mathbf{corps}_p$  en posant

$$F_l(k) = 2 - \varinjlim_{k' \subset k} F_l(k')$$

<sup>1</sup> Rappelons que la catégorie  $G_k$  a pour objets les clôtures séparables de  $k$  et pour morphismes les  $k$ -isomorphismes. Le choix d'une clôture séparable de  $k$  identifie ces données aux représentations  $l$ -adiques habituelles, mais on perd alors la functorialité en  $k$ . Je remercie Joseph Ayoub d'avoir attiré mon attention sur ce point.

où  $k'$  décrit les sous-corps de  $k$  de type fini sur le corps premier. On obtient alors un morphisme de théories motiviques

$$\tilde{\rho}_l: \mathbf{Mot}_l \longrightarrow F_l: \quad X/k \longmapsto (k_s \mapsto H^*(X_{k_s}, \mathbf{Q}_l))$$

(réalisation enrichie). Le choix d'un domaine universel  $\Omega$  fournit un "morphisme d'oubli"  $\omega_\Omega: F_l \rightarrow R_{\mathbf{Q}_l}$  sur  $\mathbf{corps}_p / \Omega$  tel que  $\rho_l = \omega_\Omega \circ \tilde{\rho}_l$ .

REMARQUE 2.4. On a une sous-théorie motivique pleine de  $F_l$  :

$$F_l^{\text{ss}}(k) = \{V \in F_l(k) \mid V \text{ est semi-simple}\}$$

(pour  $k$  de type fini; on l'étend ensuite par 2-limite inductive). La conjecture de semi-simplicité de Grothendieck-Serre prédit que  $\tilde{R}_l$  prend ses valeurs dans  $F_l^{\text{ss}}$ .

### 2.3 – Correspondances finies

Les catégories de correspondances finies de Voevodsky [45] définissent une théorie motivique  $\mathbf{Cor}_f$ .

### 2.4 – Théories de préfaisceaux et de faisceaux

Si  $\mathcal{M}$  est une théorie motivique,  $\widehat{\mathcal{M}}(k) = \mathbf{Hom}(\mathcal{M}(k)^{\text{op}}, \mathbf{Ens})$  définit une nouvelle théorie motivique  $\widehat{\mathcal{M}}$ , en prenant

$$\widehat{\mathcal{M}}(f) = \mathcal{M}(f)_!$$

adjoint à gauche du foncteur  $\mathcal{M}(f)^*: \widehat{\mathcal{M}}(K) \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}(k)$  défini par

$$\mathcal{M}(f)^*(X)(M) = X(\mathcal{M}(f)(M))$$

pour  $f: k \rightarrow K$  (lemme 3.4). Le foncteur de Yoneda définit un morphisme de théories motiviques  $y_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$ .

On peut aussi choisir  $k \mapsto \mathbf{Hom}(\mathcal{M}(k)^{\text{op}}, \mathcal{C})$ , où  $\mathcal{C}$  est une catégorie cocomplète, mais on n'a plus de foncteur de Yoneda. Exemples de  $\mathcal{C}$ : groupes abéliens, ensembles simpliciaux... Pour ces exemples on a un foncteur canonique  $\mathbf{Ens} \rightarrow \mathcal{C}$ , d'où un morphisme  $\widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbf{Hom}(\mathcal{M}^{\text{op}}, \mathcal{C})$ .

#### 2.4.1 – Le cas additif

Si  $\mathcal{M}$  est une théorie motivique additive, on remplace  $\mathbf{Ens}$  ci-dessus par  $\mathbf{Ab}$  (catégorie des groupes abéliens), en se restreignant aux préfaisceaux additifs; on a alors le plongement de Yoneda additif [1, §1.3].

2.4.2 – Faisceaux

Si  $\mathcal{M}(k)$  est munie pour tout  $k$  d'une topologie de Grothendieck et que le foncteur  $f^*: \mathcal{M}(k) \rightarrow \mathcal{M}(K)$  est continu pour tout  $f$ , on peut considérer la sous-théorie pleine  $\widetilde{\mathcal{M}} \subset \widehat{\mathcal{M}}$  des faisceaux. De même à coefficients dans une catégorie convenable.

2.5 – Théories homotopiques

D'autres théories motiviques munies de morphismes de théories motiviques sont

$$\mathbf{Sm} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{SH}^{\text{eff}} \longrightarrow \mathcal{SH}$$

où, pour tout corps  $k$ ,  $\mathcal{H}(k)$  (resp.  $\mathcal{SH}(k)$ ) est la catégorie homotopique (resp. homotopique stable) des schémas de Morel-Voevodsky et  $\mathcal{SH}^{\text{eff}}(k)$  est la catégorie notée  $\mathcal{SH}^{\text{A}^1}(k)$  dans [34, §3.2]. Rappelons [35] que  $\mathcal{H}(k)$  est une catégorie homotopique associée à la catégorie des faisceaux Nisnevich d'ensembles simpliciaux sur  $\mathbf{Sm}(k)$ , et que  $\mathcal{SH}^{\text{eff}}(k)$  et  $\mathcal{SH}(k)$  s'en déduisent par stabilisation [44].

2.6 – Théories triangulées

On dispose également des catégories triangulées de motifs définies par Voevodsky : par exemple

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Sm} & \longrightarrow & \mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}} & \longrightarrow & \mathbf{DM}^{\text{eff}} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbf{DM}_{\text{gm}} & \longrightarrow & \mathbf{DM}. \end{array}$$

2.7 – Il existe divers morphismes entre les exemples 2.2, 2.5 et 2.6, dont nous rappelons les principaux :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Chow}^{\text{eff}} & \longrightarrow & \mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}} & \longleftarrow & \mathbf{Corf}, \\ \mathcal{SH}^{\text{eff}} & \longrightarrow & \mathbf{DM}^{\text{eff}} & & . \end{array}$$

2.8 – Schémas en groupes commutatifs

Pour  $k \in \mathbf{corps}$ , soit  $\mathbf{Grp}(k)$  la catégorie des  $k$ -schémas en groupes commutatifs localement de type fini. C'est une théorie motivique additive. Elle contient des sous-théories pleines importantes :

- la théorie **SAb** des variétés semi-abéliennes (extensions d'une variété abélienne par un tore);
- la théorie **Ab** des variétés abéliennes;
- la théorie **tore** des tores;
- la théorie **res** des réseaux (schémas en groupes localement isomorphes à  $\mathbf{Z}^n$  pour la topologie étale).

## 2.9 – Localisation

Soit  $\mathcal{M}$  une théorie motivique à valeurs dans **Cat**. Supposons donné, pour tout  $k \in \mathcal{K}$ , un ensemble de morphismes  $S(k) \in \text{Fl}(\mathcal{M}(k))$ , contenant les isomorphismes et tels que  $f^*S(k) \subset S(K)$  pour tout  $f: k \rightarrow K$  de  $\mathcal{K}$ . Les catégories localisées  $S(k)^{-1}\mathcal{M}(k)$  forment alors une nouvelle théorie motivique, notée  $S^{-1}\mathcal{M}$ . On a un morphisme de théories motiviques

$$\mathcal{M} \longrightarrow S^{-1}\mathcal{M}.$$

Cette construction possède les variantes suivantes. Si  $\mathcal{M}$  prend ses valeurs dans une 2-catégorie avec structures supplémentaires, on peut souhaiter obtenir des localisations conservant ces structures supplémentaires. Par exemple, si  $\mathcal{M}$  prend ses valeurs dans la 2-catégorie des catégories triangulées, les catégories  $S(k)^{-1}\mathcal{M}(k)$  ne sont pas en général triangulées. Pour y remédier, on peut utiliser la *saturation triangulée* de  $S(k)$ : c'est le plus petit ensemble de morphismes  $\langle S(k) \rangle$  de  $\mathcal{M}(k)$  contenant  $S(k)$  et tel que la catégorie  $\langle S(k) \rangle^{-1}\mathcal{M}(k)$  soit triangulée (cf. [29, définition 4.2.1]). Concrètement, on considère la sous-catégorie (strictement) épaisse  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{M}(k)$  engendrée par les cônes des éléments de  $S(k)$ , et on prend pour  $\langle S(k) \rangle$  l'ensemble des morphismes dont le cône appartient à  $\mathcal{S}$ .

L'exemple principal ici est :

### 2.9.1 – Théories birationnelles

Soit  $\mathcal{M}$  une théorie motivique à valeurs dans **Cat**, munie d'un morphisme de théories motiviques  $\varphi: \mathbf{Sm} \rightarrow \mathcal{M}$  ou  $\varphi: \mathbf{Sm}^{\text{proj}} \rightarrow \mathcal{M}$ . Notons  $S_b$  l'ensemble des morphismes birationnels entre variétés (projectives) lisses. Le morphisme  $\varphi$  envoie  $S_b$  sur des ensembles de morphismes que nous continuerons à noter  $S_b$ . On obtient ainsi un carré naturellement commutatif de théories motiviques

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Sm} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_b^{-1}\mathbf{Sm} & \longrightarrow & S_b^{-1}\mathcal{M} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{Sm}^{\text{proj}} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_b^{-1}\mathbf{Sm}^{\text{proj}} & \longrightarrow & S_b^{-1}\mathcal{M}. \end{array}$$

Si  $\mathcal{M}$  est une théorie motivique de catégories triangulées, on remplacera  $S_b$  par  $\langle S_b \rangle$ .

### 3. Généralités sur les adjoints

LEMME 3.1. *Soit  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un foncteur; soient  $\mathcal{M}'$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}'$  une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{N}$  telles que  $T(\mathcal{M}') \subset \mathcal{N}'$ . Supposons que  $T$  admette un adjoint (à gauche ou à droite)  $S$  et que  $S(\mathcal{N}') \subset \mathcal{M}'$ . Alors le foncteur  $T': \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{N}'$  induit par  $T$  a pour adjoint (à gauche ou à droite) le foncteur  $S': \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{M}'$  induit par  $S$ . De plus, le morphisme de changement de base correspondant est un isomorphisme.  $\square$*

LEMME 3.2. *Soit  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un foncteur additif entre catégories additives. Alors*

- a) *La sous-catégorie pleine  $\mathcal{N}_T$  de  $\mathcal{N}$  formée des objets  $N$  tels que l'adjoint à gauche (resp. à droite)  $S$  de  $T$  soit défini en  $N$  est additive; de plus,  $S$  est un foncteur additif de  $\mathcal{N}_T$  vers  $\mathcal{M}$ .*
- b) *Si  $\mathcal{M}$  est pseudo-abélienne,  $\mathcal{N}_T$  est épaisse (stable par facteurs directs représentables dans  $\mathcal{N}$ ).*
- c) *Si  $\mathcal{M}$  est stable par sommes directes infinies et si  $S$  est un adjoint à gauche,  $\mathcal{N}_T$  est stable par sommes directes infinies représentables dans  $\mathcal{N}$ . De plus,  $S$  commute à ces sommes directes.*

DÉMONSTRATION. a) Soient  $M, N \in \mathcal{N}$  tels que  $S$  soit défini en  $M$  et  $N$ . Clairement,  $S(M) \oplus S(N)$  représente  $S(M \oplus N)$ . Ceci montre que  $\mathcal{N}_T$  est additive et que  $S$  est additif.

b) Soit  $N \in \mathcal{N}_T$  et soit  $P$  un facteur direct de  $N$ . Soit  $e \in \text{End}(N)$  l'idempotent d'image  $P$ . Alors  $S(e)$  est un endomorphisme idempotent de  $S(N)$ : si  $\mathcal{M}$  est pseudo-abélienne, il admet une image qui représente  $S(P)$ .

c) Soit  $I$  un ensemble, et soit  $(N_i)_{i \in I}$  une famille d'objets de  $\mathcal{N}_T$ . Supposons que  $\bigoplus N_i$  soit représentable dans  $\mathcal{N}$ . Pour  $M \in \mathcal{M}$ , on a

$$\mathcal{N}\left(\bigoplus N_i, TM\right) = \prod \mathcal{N}(N_i, TM) = \prod \mathcal{M}(SN_i, M) = \mathcal{M}\left(\bigoplus SN_i, M\right)$$

ce qui montre que  $\bigoplus SN_i$  représente  $S(\bigoplus N_i)$ .  $\square$

LEMME 3.3 (généralisation de [36, lemma 5.3.6]). *Soit  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un foncteur triangulé entre catégories triangulées. Alors la sous-catégorie pleine  $\mathcal{N}_T$  de  $\mathcal{N}$  formée des objets  $N$  tels que l'adjoint à gauche (resp. à droite)  $S$  de  $T$  soit défini en  $N$  est triangulée. De plus,  $S$  est triangulé sur son domaine de définition.*

DÉMONSTRATION. Que  $\mathcal{N}_T$  soit triangulée se démontre comme dans la preuve de [36, lemma 5.3.6]: si  $N \in \mathcal{N}$ , on vérifie que  $N[i] \in \mathcal{N}$  pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ , et si  $f: M \rightarrow N$  est un morphisme de  $\mathcal{N}_T$  de cône  $P$ , on vérifie qu'un cône de  $S(f)$  représente  $S(P)$ . La preuve montre que  $S$  est triangulé.  $\square$

LEMME 3.4 ([3, I.5.3]). Soit  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un foncteur. Le foncteur  $T^*: \widehat{\mathcal{N}} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$  "composition avec  $T$ " entre les catégories de préfaisceaux d'ensembles a un adjoint à gauche  $T_!$ . Si  $T$  a un adjoint à gauche  $S$ ,  $T_!$  a pour adjoint à gauche  $S_!$ . Si  $T$  a un adjoint à droite  $U$ , alors  $U_! \simeq T^*$ . Mêmes énoncés pour les préfaisceaux à valeurs dans une catégorie cocomplète.  $\square$

Rappelons qu'une dualité sur une catégorie  $\mathcal{M}$  est un foncteur  $*$ :  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^{\text{op}}$  tel que  $*^{\text{op}}$  soit adjoint (à droite, et donc à gauche) de  $*$ . Cette dualité est parfaite si  $*$  est une équivalence de catégories; cf. [38, §1] dans le cas additif.

LEMME 3.5. Soient  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  deux catégories munies de dualités parfaites  $*$ , et soit  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un foncteur commutant à ces dualités. Soit  $N \in \mathcal{N}$ . Alors l'adjoint à gauche  $S$  de  $T$  est défini en  $N$  si et seulement si l'adjoint à droite  $U$  de  $T$  est défini en  $N$ . Plus précisément, on a la formule

$$U(N) = S(N^*)^*.$$

PROPOSITION 3.6. Soient  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  deux catégories monoïdales symétriques rigides, et soit  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un foncteur monoïdal symétrique. Supposons que  $T$  admette un adjoint à gauche  $S$ . Alors, pour tout  $(M, N) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ , on a la **formule de projection**

$$S(N \otimes TM) \simeq SN \otimes M.$$

DÉMONSTRATION. En utilisant le fait que  $T$  préserve le produit tensoriel et la dualité, on a des isomorphismes pour  $P \in \mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(S(N \otimes TM), P) &\simeq \mathcal{N}(N \otimes TM, TP) \\ &\simeq \mathcal{N}(N, (TM)^* \otimes TP) \\ &\simeq \mathcal{N}(N, T(M^* \otimes P)) \\ &\simeq \mathcal{M}(SN, M^* \otimes P) \\ &\simeq \mathcal{M}(SN \otimes M, P). \end{aligned}$$

La conclusion en résulte par Yoneda.  $\square$

**PROPOSITION 3.7.** a) Soit  $(\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha \in A}$  un 2-système inductif de catégories (c'est-à-dire un pseudo-foncteur  $A \rightarrow \mathbf{Cat}$ ), de 2-colimite  $\mathcal{C}$ . Pour tout  $\alpha$ , soit  $S_\alpha$  une classe de morphismes de  $\mathcal{C}_\alpha$ , et supposons que tout morphisme  $\alpha \rightarrow \beta$  de  $A$  envoie  $S_\alpha$  dans  $S_\beta$ . Soit  $S = \bigcup_\alpha \text{Im}(S_\alpha) \subset \text{Fl}(\mathcal{C})$ . Alors on a une équivalence canonique de catégories

$$S^{-1}\mathcal{C} \simeq 2 - \varinjlim S_\alpha^{-1}\mathcal{C}_\alpha.$$

b) Avec les notations précédentes, soient  $\mathcal{C}_0$  une autre catégorie et, pour tout  $\alpha$ ,  $f_\alpha: \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_\alpha$  un foncteur. Soit  $S_0$  une classe de morphismes de  $\mathcal{C}$ . On suppose que les  $f_\alpha$  envoient  $S_0$  dans  $S_\alpha$  et sont compatibles aux foncteurs de transition, d'où un foncteur induit  $f: S_0^{-1}\mathcal{C}_0 \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}$ . On suppose de plus que :

- (i) pour tout  $\alpha$ ,  $f_\alpha$  admet un adjoint à gauche qui envoie  $S_\alpha$  dans  $S_0$  ;
- (ii) pour tout morphisme  $\alpha \rightarrow \beta$ , le foncteur  $S_\alpha^{-1}\mathcal{C}_\alpha \rightarrow S_\beta^{-1}\mathcal{C}_\beta$  est une équivalence de catégories.

Alors  $f$  admet un adjoint à gauche.

**DÉMONSTRATION.** a) Les deux membres de l'équivalence ont chacun la propriété 2-universelle de l'autre. b) résulte immédiatement de a).  $\square$

Dans le dernier énoncé, nous nous cantonnons au cadre des théories motiviques pour éviter de perdre le lecteur dans une hypergénéralité inutile.

**PROPOSITION 3.8.** Dans la situation du §1.6, supposons  $\varphi_K$  plein et  $\varphi_k$  essentiellement surjectif. Alors, pour tout  $M \in \mathcal{M}(K)$ , le morphisme de changement de base  $w_f^\varphi(M): f_\#^{\mathcal{N}}\varphi_K(M) \rightarrow \varphi_k f_\#^{\mathcal{M}}(M)$  de (1.1) est un monomorphisme scindé.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $N \in \mathcal{M}(k)$ . Évaluant  $w_f^\varphi(M)$  sur  $\varphi_k(M)$ , on obtient :

$$\mathcal{N}(k)(\varphi_k f_\#^{\mathcal{M}}(M), \varphi_k(N)) \xrightarrow{w_f^\varphi(M)^*} \mathcal{N}(k)(f_\#^{\mathcal{N}}\varphi_K(M), \varphi_k(N)).$$

Par adjonction et commutation des  $f^*$  aux  $\varphi$ , le second membre se réécrit :

$$\mathcal{N}(K)(\varphi_K(M), f_{\mathcal{N}}^*\varphi_k(N)) \simeq \mathcal{N}(K)(\varphi_K(M), \varphi_K f_{\mathcal{M}}^*(N)).$$

On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(k)(f_\#^{\mathcal{M}}(M), N) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}(K)(M, f_{\mathcal{M}}^*(N)) \\ \varphi_k \downarrow & & \downarrow \text{"}\varphi_K\text{"} \\ \mathcal{N}(k)(\varphi_k f_\#^{\mathcal{M}}(M), \varphi_k(N)) & \xrightarrow{w_f^\varphi(M)^*} & \mathcal{N}(k)(f_\#^{\mathcal{N}}\varphi_K(M), \varphi_k(N)), \end{array}$$

où la flèche horizontale supérieure est l'isomorphisme d'adjonction et la flèche verticale de droite est surjective par hypothèse. Il en résulte que la flèche horizontale inférieure est *surjective*. Par hypothèse sur  $\varphi_k$ , on peut choisir  $N$  tel que  $\varphi_k(N) \simeq f_{\#}^N \varphi_K(M)$ . En relevant cet isomorphisme, on obtient la rétraction cherchée.  $\square$

#### 4. Cas d'une extension finie

##### 4.1 – Cas d'une extension finie séparable

Soit  $f: k \rightarrow K$  une extension finie séparable.

**THÉORÈME 4.1.**  $f_{\#}$  existe pour les théories motiviques suivantes :  $\mathbf{Sm}^{\text{proj}}$ ,  $\mathbf{Sm}$ ,  $\mathbf{Cor}_{\sim}(-, A)$ ,  $\mathbf{Cor}_{\mathbf{f}}$ ,  $\mathbf{Mot}_{\sim}^{\text{eff}}(-, A)$ ,  $\mathbf{Mot}_{\sim}(-, A)$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{SH}^{\text{eff}}$ ,  $\mathcal{SH}$ ,  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}$ ,  $\mathbf{DM}_{\sim}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{DM}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{DM}$ . De plus, les changements de base (1.1) relatifs aux divers morphismes entre ces théories motiviques sont des isomorphismes.

**DÉMONSTRATION.** Dans le cas de  $\mathbf{Sm}$  et  $\mathbf{Sm}^{\text{proj}}$ ,  $f_{\#}$  est donné par la restriction “naïve” des scalaires. Dans le cas de  $\mathbf{Cor}_{\sim}(-, A)$ , la formule donnant les Hom montre que  $f_{\#}h(X)$  existe et est donné par  $h(f_{\#}X)$  pour  $X \in \mathbf{Sm}^{\text{proj}}(K)$  (remarque que, pour  $Y \in \mathbf{Sm}^{\text{proj}}(k)$ ,  $X \times_K Y_K = f_{\#}X \times_k Y$ ). Même raisonnement pour  $\mathbf{Cor}_{\mathbf{f}}$ . D'après le lemme 3.2, cela définit  $f_{\#}$  sur  $\mathbf{Mot}_{\sim}^{\text{eff}}(-, A)$  tout entier. De même, dans le cas de  $\mathbf{Mot}_{\sim}(-, A)$ , la meilleure manière de prouver l'existence de  $f_{\#}$  est de considérer  $\mathbf{Mot}_{\sim}(-, A)$  comme l'enveloppe karoubienne de la catégorie des correspondances graduées, pour laquelle le raisonnement est le même que pour  $\mathbf{Cor}_{\sim}(-, A)$ . Ces constructions montrent que les morphismes de changement de base sont des isomorphismes.

Dans le cas de  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}$ ,  $\mathbf{DM}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{DM}$ ,  $\mathcal{SH}^{\text{eff}}$  et  $\mathcal{SH}$ , on a bien sûr une functorialité bien plus générale [4, 6]<sup>2</sup>; donnons néanmoins une démonstration élémentaire. La sous-catégorie pleine formée des  $M(X)$  pour  $X \in \mathbf{Sm}$  est dense; de plus, les catégories considérées vérifient les hypothèses du lemme 3.2 b) et c). En appliquant ce lemme et le lemme 3.3, on voit qu'il suffit de prouver que  $M(f_{\#}X)$  représente  $f_{\#}M(X)$  dans  $\mathbf{DM}(k)$ . De plus, en appliquant le lemme 3.1, il suffit de travailler dans  $\mathbf{DM}$  pour attraper toutes ses sous-théories pleines.

Soient donc  $X \in \mathbf{Sm}(K)$  et  $M \in \mathbf{DM}(k)$ . Par définition,  $M$  est donné par un  $\mathbf{Z}(1)$ -spectre  $(M_n, f_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  où  $M_n \in \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k)$  et  $f_n: M_n(1) \rightarrow M_{n+1}$ ; de plus

$$\mathbf{DM}(K)(M(X), M_K) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 0}} \mathbf{DM}^{\text{eff}}(K)(M(X)(n), (M_n)_K).$$

<sup>2</sup> La notation  $f_{\#}$  est inspirée de [4].

Pour montrer que  $M(f_{\#}X)$  représente  $f_{\#}M(X)$  dans  $\mathbf{DM}(k)$ , on est donc ramené à démontrer cette assertion dans  $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(k)$ . Pour  $M \in \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{DM}^{\text{eff}}(K)(M(X), M_K) &= H_{\text{Nis}}^0(X, M_K) \\ &= H_{\text{Nis}}^0(X, M) \\ &= DM^{\text{eff}}(k)(M(f_{\#}X), M) \end{aligned}$$

puisque  $M_K$  est simplement la restriction de  $M$  à  $\mathbf{Sm}(K)_{\text{Nis}}$  vu comme sous-site de  $\mathbf{Sm}(k)_{\text{Nis}}$  et que la cohomologie de Nisnevich de  $X$  est indépendante de la base.

Pour  $\mathcal{SH}^{\text{eff}}$  et  $\mathcal{SH}$ , on procède de même. Pour  $\mathcal{H}$ , l'idéal serait de développer une notion abstraite de catégorie homotopique instable et de généraliser le lemme 3.3 à ce cadre. À défaut, on peut raisonner directement et montrer que le foncteur  $f_{\#}: \mathbf{Sm}(K) \rightarrow \mathbf{Sm}(k)$  induit bien un foncteur  $f_{\#}: \mathcal{H}(K) \rightarrow \mathcal{H}(k)$ , adjoint à gauche de  $f^*$ .  $\square$

**THÉORÈME 4.2.**  *$f_*$  existe pour les théories motiviques suivantes :  $\mathbf{Sm}^{\text{proj}}$ ,  $\mathbf{Sm}$ ,  $\mathbf{Sm}^{\text{proj}}$ ,  $\mathbf{Sm}_{\bullet}$ ,  $\mathbf{Grp}$ ,  $\mathbf{SAb}$ ,  $\mathbf{Ab}$ , **tore**, **res**. De plus, les changements de base (1.1) relatifs aux divers morphismes entre ces théories motiviques sont des isomorphismes.*

**DÉMONSTRATION.** Pour  $\mathbf{Sm}$  et  $\mathbf{Sm}^{\text{proj}}$ ,  $f_*$  est donné (par définition !) par la restriction des scalaires à la Weil. Ceci fonctionne encore pour  $\mathbf{Sm}_{\bullet}$ ,  $\mathbf{Sm}^{\text{proj}}$  et  $\mathbf{Grp}$ , puisque ce foncteur commute aux produits (comme adjoint à droite). De plus, il est clair que  $f_*$  préserve les sous-catégories pleines  $\mathbf{SAb}$ ,  $\mathbf{Ab}$ , **tore** et **res**. On peut donc appliquer le lemme 3.1 à toutes ces théories motiviques.  $\square$

**THÉORÈME 4.3.** a)  *$f_*$  existe pour  $\mathbf{Cor}_{\sim}(-, A)$ ,  $\mathbf{Cor}_{\mathbf{f}}$ ,  $\mathbf{Mot}_{\sim}^{\text{eff}}(-, A)$ ,  $\mathbf{Mot}_{\sim}(-, A)$ ,  $\mathcal{SH}^{\text{eff}}$ ,  $\mathcal{SH}$ ,  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}$ ,  $\mathbf{DM}_{-}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{DM}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{DM}$ ; il coïncide avec  $f_{\#}$ .*

b)  *$f_{\#}$  existe pour les théories  $\mathbf{Grp}$ ,  $\mathbf{SAb}$ ,  $\mathbf{Ab}$ , **tore**, **res**; il coïncide avec  $f_*$ . Les changements de base (1.1) entre ces diverses théories sont des isomorphismes.*

**DÉMONSTRATION.** a) Comme  $\mathbf{Mot}_{\sim}(-, A)$  est munie d'une dualité, on applique le lemme 3.5; on obtient, pour  $X$  projective lisse de dimension  $d$  et  $n \in \mathbf{Z}$ :

$$f_*(h(X)(n)) = (f_{\#}h(X)(-d)(-n))^* = (h(f_{\#}X)(-d)(-n))^* = h(f_{\#}X)(n)$$

puisque  $\dim f_{\#}X = \dim X$ . En réappliquant le lemme 3.1 ceci montre que  $f_*$  préserve  $\mathbf{Mot}_{\sim}^{\text{eff}}$  et  $\mathbf{Cor}_{\sim}$ , et prend la même valeur que  $f_{\#}$  sur les objets. De même, si  $\varphi: h(X)(m) \rightarrow h(Y)(n)$  est un morphisme, on a

$$f_*(\varphi) = {}^t(f_{\#}({}^t\varphi)) = f_{\#}(\varphi)$$

par un calcul direct.

Pour  $\mathbf{Cor}_f$ , on procède aussi par calcul direct, en notant qu'un fermé intègre  $Z$  de  $X \times_k Y_{(k)} = X_K \times_K Y$ , pour  $X \in \mathbf{Cor}_f(k)$  et  $Y \in \mathbf{Cor}_f(K)$ , est fini et surjectif sur  $X$  si et seulement s'il l'est sur  $X_K$ . Ceci permet d'attraper d'abord  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}$  et  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}$ , y compris l'isomorphisme  $f_{\sharp} \simeq f_*$ .

Dans le cas de  $\mathcal{SH}^{\text{eff}}$ ,  $\mathcal{SH}$ ,  $\mathbf{DM}^{\text{eff}}$  et  $\mathbf{DM}$ , le théorème de représentabilité de Brown à la Neeman implique l'existence de  $f_*$ . Pour obtenir l'isomorphisme  $f_{\sharp} \simeq f_*$  sur ces grosses catégories, il suffit alors de vérifier que  $f_*$  commute aux sommes directes infinies, ce qui résulte formellement du fait que  $f^*$  préserve les objets compacts.

b) Toutes ces catégories sont des sous-catégories pleines de celle des faisceaux de groupes abéliens pour la topologie étale; l'énoncé résulte alors de [37, chapitre V, lemma 1.12]. La dernière affirmation résulte du lemme 3.1.  $\square$

REMARQUE 4.4. Le cas de  $\mathcal{H}$  n'est pas traité ci-dessus par manque de référence. Une variante (à dégager) du théorème de représentabilité de Brown devrait en donner de la même façon.

## 4.2 – Extensions radicielles

Ici, la situation est bien plus simple :

PROPOSITION 4.5. *Soit  $K/k$  une extension radicielle de corps de caractéristique  $p > 0$ . Alors, pour toute  $\mathbf{Z}[1/p]$ -algèbre commutative  $A$ , le foncteur d'extension des scalaires*

$$\mathbf{Cor}_f(k) \otimes A \longrightarrow \mathbf{Cor}_f(K) \otimes A$$

*est une équivalence de catégories. Ceci s'étend aux théories  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}$ ,  $\mathbf{DM}^{\text{eff}}$  et  $\mathbf{DM}$ .*

DÉMONSTRATION. Dans le cas de  $\mathbf{Cor}_f$ , la même que celle de [28, proposition 1.7.2]. On passe de là à  $K^b(\mathbf{Cor}_f)$ , puis à son quotient par les relations (Mayer-Vietoris +  $\mathbf{A}^1$ -invariance), puis à l'enveloppe pseudo-abélienne, puis en inversant l'objet de Tate.

Pour les grosses catégories, on commence par traiter le cas des préfaisceaux avec transferts  $\mathbf{PST}$  (2.4.1): notons que le cas de  $\mathbf{Cor}_f$  implique celui de  $\mathbf{PST}$  (cf. [27, lemma 6.5.1]). On passe ensuite aux faisceaux Nisnevich avec transferts, etc.  $\square$

REMARQUE 4.6. Ce résultat a été annoncé par Suslin en 2007 dans un exposé au Fields Institute de Toronto. Il est paru récemment; la démonstration est essentiellement la même [42].

4.3 – Cas général

**THÉORÈME 4.7.** *Soit  $K/k$  une extension finie, et soit  $A$  une  $\mathbf{Z}[1/p]$ -algèbre commutative, où  $p$  est l'exposant caractéristique de  $k$ . Alors le foncteur*

$$\mathcal{M}(k) \longrightarrow \mathcal{M}(K)$$

*admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite qui sont canoniquement isomorphes, pour les théories  $\mathcal{M}$  suivantes :  $\mathbf{Mot}_{\sim}(-, A)$ ,  $\mathbf{Mot}_{\sim}^{\text{eff}}(-, A)$ ,  $\mathbf{Cor}_{\mathbf{f}} \otimes A$ ,  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}} \otimes A$ ,  $\mathbf{DM}_{\text{gm}} \otimes A$ ,  $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(-, A)$  et  $\mathbf{DM}(-, A)$ . Les morphismes de changement de base entre ces diverses théories sont des isomorphismes.*

**DÉMONSTRATION.** Dans le cas des motifs purs, on empile [28, proposition 1.7.2] sur les théorèmes 4.1 et 4.3. De même pour les autres théories, en utilisant la proposition 4.5. □

4.4 – Application : un théorème d'effectivité

**THÉORÈME 4.8.** *Soit  $(A, \sim)$  un couple adéquat, où  $A$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre et où  $\sim$  est l'équivalence rationnelle, algébrique, smash-nilpotente, homologique (pour une cohomologie de Weil classique) ou numérique, et soit  $f:k \rightarrow K$  une extension. Soit  $M \in \mathbf{Mot}_{\sim}(k, A)$ . Si  $f^*M \in \mathbf{Mot}_{\sim}(K, A)$  est effectif, alors  $M$  est effectif.*

**DÉMONSTRATION.** Sauf dans le cas de l'équivalence numérique, tout ce que la démonstration utilise est que  $\sim$  se spécialise (cf. [23, théorème 6.8.3]). On se ramène d'abord à  $K/k$  de type fini, puis aux deux cas essentiels :

- (i)  $K/k$  finie ;
- (ii)  $K = k(t)$ .

Dans le cas (i), la proposition 3.6 montre que  $M$  est facteur direct de  $f_{\sharp} f^*M (= M \otimes f_{\sharp} \mathbf{1})$ , qui est effectif d'après le théorème 4.7.

Dans le cas (ii), supposons d'abord que  $\sim \neq \text{num}$ . Comme  $f^* \tilde{M}$  provient de  $k$ , il a bonne réduction partout, par exemple en  $t = 0$ . En y spécialisant  $f^* \tilde{M}$ , on obtient un motif effectif, qui est évidemment  $\tilde{M}$ .

Il n'est pas clair que les cycles modulo l'équivalence numérique se spécialisent ; pour traiter  $\sim = \text{num}$ , choisissons une théorie motivique associée à une cohomologie de Weil classique  $H$  (par exemple la cohomologie  $l$ -adique pour  $l \neq \text{car } k$ ). Comme le noyau de  $\mathbf{Mot}_H(k) \rightarrow \mathbf{Mot}_{\text{num}}(k)$  est localement nilpotent [2, proposition 5],  $M$  se relève en  $\tilde{M} \in \mathbf{Mot}_H(k)$ , et de plus  $M$  effectif  $\iff \tilde{M}$  effectif. En appliquant cette remarque sur  $k(t)$ , on se ramène à montrer que  $f^* \tilde{M}$  effectif  $\implies \tilde{M}$  effectif, ce qui vient d'être fait. □

## 5. Motifs numériques

### 5.1 – Adjointes dans les catégories semi-simples

Soit  $F$  un corps commutatif et soit  $\mathcal{A}$  une catégorie  $F$ -linéaire semi-simple [1, 2.1.1, 2.1.2]. On suppose  $\mathcal{A}$  *pseudo-abélienne* (donc abélienne, loc. cit.).

**DÉFINITION 5.1.** Soit  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Vec}_F$  un foncteur  $F$ -linéaire de  $\mathcal{A}$  vers la catégorie des  $F$ -espaces vectoriels (un  $\mathcal{A}$ -module à gauche au sens de [1, 1.3.3]). Le *support* de  $\Phi$  est

$$\text{Supp}(\Phi) = \{[S] \mid S \text{ simple, } \Phi(S) \neq 0\}$$

où  $[M]$  désigne la classe d'isomorphisme d'un objet  $M \in \mathcal{A}$ .

**LEMME 5.2.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\Phi$  est coreprésentable ;
- (ii)  $\text{Supp}(\Phi)$  est fini et, pour tout  $S$  simple,  $\dim_F \Phi(S) < \infty$ .

**DÉMONSTRATION.** (i)  $\implies$  (ii) : si  $\Phi(M) = \mathcal{A}(N, M)$  pour un  $N \in \mathcal{A}$ , alors pour  $S$  simple, on a  $\Phi(S) \neq 0$  si et seulement si  $S$  est facteur direct de  $N$  (lemme de Schur). La seconde condition est claire (de nouveau, lemme de Schur).

(ii)  $\implies$  (i) : pour tout  $S$  simple,  $\Phi(S)$  est un  $\text{End}_{\mathcal{A}}(S)$ -module à gauche : soit  $n_S$  sa dimension (qui est supposée finie). Posons

$$N = \bigoplus_{[T]} T^{n_T}$$

où on a choisi, pour chaque classe d'isomorphisme  $[T]$  d'objets simples, un représentant  $T \in [T]$ . Par construction, on a pour tout  $S$  simple un isomorphisme de  $\text{End}_{\mathcal{A}}(S)$ -modules :

$$\Phi(S) \simeq \mathcal{A}(N, S).$$

Comme  $\mathcal{A}$  est semi-simple, ces isomorphismes définissent un isomorphisme de foncteurs  $\Phi \simeq \mathcal{A}(N, -)$ .  $\square$

**PROPOSITION 5.3.** *Soit  $F$  un corps, et soit  $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur  $F$ -linéaire pleinement fidèle entre deux  $F$ -catégories abéliennes semi-simples.*

- a)  $T$  admet un adjoint à gauche  $T_{\#}$  et un adjoint à droite  $T_{*}$ .

b) Pour tout  $S \in \mathcal{B}$  simple, on a

$$T_{\#}S = \begin{cases} 0 & \text{si } S \text{ n'est pas de la forme } T(S'), S' \in \mathcal{A}; \\ S' & \text{si } S \text{ est de la forme } T(S'), S' \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

En particulier,  $T_{\#}(S)$  est nul ou simple. De même pour  $T_*(S)$ .

c) Le morphisme canonique de foncteurs

$$T_* \implies T_{\#}$$

(dédit par pleine fidélité de  $T$  de la composition

$$TT_* \implies \text{Id}_{\mathcal{B}} \implies TT_{\#}$$

de la coïtité de  $T_*$  et de l'unité de  $T_{\#}$ ) est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. a) Traitons le cas d'un adjoint à gauche (celui d'un adjoint à droite est dual). Soit  $N \in \mathcal{B}$  : il faut voir que le foncteur

$$\Phi(M) = \mathcal{B}(N, T(M))$$

est représentable. On peut évidemment supposer  $N$  simple.

Appliquons le critère du lemme 5.2 : on doit vérifier que, pour tout  $S \in \mathcal{A}$  simple,  $\dim_F \Phi(S)$  est finie et nulle pour presque tout  $S$ . Or, comme  $T$  est pleinement fidèle,  $T(S)$  est simple (lemme de Schur), donc  $\Phi(S) \neq 0 \iff T(S) \simeq N$ , et dans ce cas on a  $\Phi(S) \simeq \text{End}_{\mathcal{B}}(N)$  qui est évidemment de dimension finie.

b) Cela résulte de la formule donnant  $T_{\#}S$  ou  $T_*S$ , cf. preuve du lemme 5.2.

c) Il suffit de montrer que la composition

$$TT_*S \longrightarrow S \longrightarrow TT_{\#}S$$

est un isomorphisme pour tout  $S \in \mathcal{B}$  simple. Or d'après b), les deux termes extrêmes sont nuls si  $S$  n'est pas défini sur  $\mathcal{A}$ , et les deux flèches sont des isomorphismes si  $S$  est défini sur  $\mathcal{A}$ .  $\square$

REMARQUE 5.4. Cet argument s'étend au cas où  $T$  est seulement plein :  $T(S)$  est alors simple ou nul. Je laisse au lecteur le soin de décrire  $T_{\#}$  et  $T_*$  explicitement dans ce cas.

## 5.2 – Un résultat de pleine fidélité

**PROPOSITION 5.5.** *Soit  $(A, \sim)$  un couple adéquat, où  $A \supset \mathbf{Q}$  et  $\sim$  est moins fine que l'équivalence algébrique. Alors, pour toute extension **primaire**  $f: k \rightarrow K$  (extension radicielle d'une extension régulière), les foncteurs d'extension des scalaires*

$$\begin{aligned} f^*: \mathbf{Cor}_{\sim}(k, A) &\longrightarrow \mathbf{Cor}_{\sim}(K, A), \\ f^*: \mathbf{Mot}_{\sim}^{\text{eff}}(k, A) &\longrightarrow \mathbf{Mot}_{\sim}^{\text{eff}}(K, A), \\ f^*: \mathbf{Mot}_{\sim}(k, A) &\longrightarrow \mathbf{Mot}_{\sim}(K, A) \end{aligned}$$

sont pleinement fidèles.

**DÉMONSTRATION.** Il suffit de la faire pour le premier foncteur. Pour cela, on doit montrer que, pour deux  $k$ -variétés projectives lisses  $X, Y$ , le morphisme

$$\mathcal{Z}_{\sim}^d(X \times Y, A) \longrightarrow \mathcal{Z}_{\sim}^d((X \times Y)_K, A)$$

est bijectif, où  $d = \dim Y$ . La proposition 1.7.2 de [28] nous ramène au cas où  $K/k$  est régulière. Soit  $K_s$  une clôture séparable de  $K$ ,  $k_s$  la fermeture séparable de  $k$  dans  $K_s$ ,  $G_K = \text{Gal}(K_s/K)$  et  $G_k = \text{Gal}(k_s/k)$ . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{\sim}^d((X \times Y)_K, A) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{Z}_{\sim}^d((X \times Y)_{K_s}, A)^{G_K} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{Z}_{\sim}^d(X \times Y, A) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{Z}_{\sim}^d((X \times Y)_{k_s}, A)^{G_k}, \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes. De plus, il est bien connu que la flèche

$$\mathcal{Z}_{\sim}^d((X \times Y)_{k_s}, A) \longrightarrow \mathcal{Z}_{\sim}^d((X \times Y)_{K_s}, A)$$

est un isomorphisme, puisque  $\sim$  est moins fine que l'équivalence algébrique [31, p. 448]. Comme  $K/k$  est régulière,  $G_K \rightarrow G_k$  est surjectif, donc la flèche verticale de droite du diagramme est bijective, ainsi que celle de gauche.  $\square$

## 5.3 – Motifs numériques : existence de l'adjoint

À partir de maintenant,  $\sim = \text{num}$  (équivalence numérique) et  $A = \mathbf{Q}$ ; on l'omet des notations.

THÉORÈME 5.6. *Pour toute extension primaire  $f:k \rightarrow K$ , le foncteur*

$$f^*: \mathbf{Mot}_{\text{num}}(k) \longrightarrow \mathbf{Mot}_{\text{num}}(K)$$

*admet un adjoint à gauche  $f_{\#}$  et un adjoint à droite  $f_*$ ; ces adjoints sont canoniquement isomorphes.*

*Le même énoncé vaut en remplaçant  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}$  par  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}$  (motifs effectifs).*

DÉMONSTRATION. Résulte du théorème de semi-simplicité de Jannsen [19] et des propositions 5.3 et 5.5.  $\square$

#### 5.4 – Compatibilité aux twists

PROPOSITION 5.7. a) *Pour tout  $(M, N) \in \mathbf{Mot}_{\text{num}}(k) \times \mathbf{Mot}_{\text{num}}(K)$ , on a la formule de projection*

$$f_{\#}(N \otimes f^* M) \simeq f_{\#} N \otimes M.$$

b) *Pour tout  $M \in \mathbf{Mot}_{\text{num}}(K)$  et pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on a un isomorphisme*

$$f_{\#}(M(n)) \simeq (f_{\#} M)(n).$$

DÉMONSTRATION. a) Cela résulte de la proposition 3.6. b) C'est le cas particulier  $N = \mathbb{L}^{\otimes n}$  où  $\mathbb{L}$  est le motif de Lefschetz.  $\square$

#### 5.5 – Compatibilité aux poids

Pour énoncer le résultat, nous avons besoin de nous restreindre à une sous-théorie pleine convenable de  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}$  (conjecturalement égale à  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}$ ):

Pour une des théories motiviques homologiques hom de 2.2.2, notons comme dans [2, Remark 1]  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^*(k)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}(k)$  formée des objets dont un relevé dans  $\mathbf{Mot}_{\text{hom}}(k)$  a tous ses projecteurs de Künneth algébriques. D'après [2, proposition 6],  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^*(k)$  ne dépend pas du choix de la théorie homologique de 2.2.2. (La preuve de cette proposition, incomplète en caractéristique  $> 0$  dans [2], est complétée dans [1, appendice B].) Les projecteurs de Künneth définissent une  $\mathbf{Z}$ -graduation sur le foncteur identique de  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^*$ . Il est clair que l'extension des scalaires respecte  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^*$  et la graduation ci-dessus.

PROPOSITION 5.8. *Soit  $f:k \rightarrow K$  une extension primaire. Alors on a l'inclusion  $f_{\#} \mathbf{Mot}_{\text{num}}^*(K) \subset \mathbf{Mot}_{\text{num}}^*(k)$ , et  $f_{\#}$  respecte les  $\mathbf{Z}$ -graduations.*

(Comme  $f^*$  est pleinement fidèle,  $f_{\#} f^* \simeq \text{Id}$  et l'inclusion est une égalité.)

DÉMONSTRATION. Il est équivalent de montrer que, si  $M \in \mathbf{Mot}_{\text{num}}(K)$  est pur de poids  $w$ , alors  $f_{\#}M$  est pur de poids  $w$ . On peut supposer  $M$  simple. Si  $f_{\#}M = 0$ , il n'y a rien à démontrer. Sinon, d'après la preuve de la proposition 5.3,  $M \simeq f^*S$  avec  $S$  simple, et  $f_{\#}M \simeq S$ . Soit  $\tilde{S} \in \mathbf{Mot}_{\text{hom}}(k)$  un objet s'envoyant sur  $S$ . Alors  $f^*\tilde{S} \in \mathbf{Mot}_{\text{hom}}(K)$  s'envoie sur  $M$ , et

$$H^*(f^*\tilde{S}) \simeq H^*(\tilde{S}) \otimes_{F(k)} F(K).$$

Ceci montre que  $H^i(\tilde{S}) = 0$  pour  $i \neq w$ , donc, par définition, que  $S = f_{\#}M$  est pur de poids  $w$ .  $\square$

EXEMPLE 5.9. Via le foncteur  $A \mapsto h_1(A)$ , les adjoints  $f_{\#}$  et  $f_*$  étendent respectivement la  $K/k$ -image et la  $K/k$ -trace de Chow sur les variétés abéliennes, à isogénie près. Ceci résulte du lemme 3.1 et du fait que ce foncteur de  $\mathbf{Ab} \otimes \mathbf{Q}$  vers  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}$  est pleinement fidèle. L'isomorphisme entre  $f_*$  et  $f_{\#}$  redonne l'isogénie entre la  $K/k$ -trace et la  $K/k$ -image.

### 5.6 – Effectivité; motifs numériques birationnels

THÉORÈME 5.10. *Le morphisme de changement de base (1.1) associé au morphisme de théories motiviques  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}} \rightarrow \mathbf{Mot}_{\text{num}}$  est un isomorphisme pour toute extension primaire  $K/k$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $S \in \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(K)$ , simple. Si  $S$  n'est pas défini sur  $k$  en tant que motif non nécessairement effectif, il ne l'est a fortiori pas en tant que motif effectif, et  $f_*S = f_{\#}S = 0$  dans les deux catégories. Si  $S$  est défini sur  $k$  par  $S_0$  dans  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}$ , alors  $S_0 \in \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}$  d'après le théorème 4.8, donc  $f_*S = f_{\#}S = S_0$  dans  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(k)$  et dans  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}(k)$ .  $\square$

COROLLAIRE 5.11. *La proposition 5.7 reste valable en remplaçant la catégorie  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}$  par  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}$  (dans  $b$ ), prendre  $n \geq 0$ ).  $\square$*

Dans le corollaire qui suit, on utilise la théorie  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\circ}$  des motifs numériques birationnels, déjà utilisée dans [21, Part II] et [28] (cf. §2.9.1).

COROLLAIRE 5.12. *Pour tout corps  $k$ , soit  $i_k: \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\circ}(k) \rightarrow \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(k)$  l'adjoint à gauche et à droite de la projection  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(k) \rightarrow \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\circ}(k)$  (cf. [21, proposition 7.7 b])). Alors, pour toute extension primaire  $f: k \rightarrow K$ ,*

a) *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{o}}(K) & \xrightarrow{i_K} & \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(K) \\
 f^{*\text{o}} \uparrow & & f^{*\text{eff}} \uparrow \\
 \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{o}}(k) & \xrightarrow{i_k} & \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(k)
 \end{array}$$

*est naturellement commutatif. (Autrement dit,  $i$  définit un **morphisme de théories motiviques** au sens de 1.3.)*

- b) *Le foncteur  $f^{*\text{o}}$  est pleinement fidèle et admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite, canoniquement isomorphes.*
- c) *Le morphisme de changement de base relatif au morphisme de projection  $\pi: \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}} \rightarrow \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{o}}$  est un isomorphisme.*
- d) *De même pour celui relatif à son adjoint  $i$ .*
- e) *La formule de projection de la proposition 5.7 a) reste valable pour  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{o}}$ .*

DÉMONSTRATION. a) Soit  $\mathbb{L}$  le motif de Lefschetz. Rappelons [21, proposition 7.7 c)] que pour tout corps  $k$ ,  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(k)$  est le coproduit de ses sous-catégories pleines  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(k) \otimes \mathbb{L}$  et  $i_k(\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{o}}(k))$ , i.e. tout objet s'écrit de manière unique comme somme directe d'objets de ces deux sous-catégories. En particulier,  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{o}}(k)$  est abélienne semi-simple et  $i_k$  est pleinement fidèle, d'image engendrée par les objets simples  $S \in \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(k)$  tels que  $S(-1)$  ne soit pas effectif. On appelle ces derniers motifs *primitifs*.

Le foncteur  $f^{*\text{eff}}$  envoie  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(k) \otimes \mathbb{L}$  dans  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(K) \otimes \mathbb{L}$ , et le point est de montrer qu'il envoie aussi  $i_k(\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{o}}(k))$  dans  $i_K(\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{o}}(K))$ .

Soit  $S \in \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{o}}(k)$  un objet simple. Supposons que le motif  $f^{*\text{eff}}(i_k S)(-1) = f^{*\text{eff}}(i_k S(-1))$  soit effectif. D'après le théorème 4.8,  $(i_k S)(-1)$  est effectif, ce qui est absurde.

Comme  $K/k$  est primaire,  $f^{*\text{eff}}$  est pleinement fidèle (théorème 5.6). En particulier,  $f^{*\text{eff}}(i_k S)$  est simple. Par conséquent,  $f^{*\text{eff}}(i_k S) \simeq i_K S'$  pour un  $S' \in \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{o}}(K)$  simple.

Dans b), la pleine fidélité résulte de a). Le reste résulte de la proposition 5.3.

c) Il suffit de tester sur un objet simple  $S \in \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(K)$ . Si  $S \simeq S'(1)$  (avec  $S'$  effectif), alors  $f_{\#}^{\text{eff}} S \simeq (f_{\#}^{\text{eff}} S')(1)$  par le corollaire 5.11, et dans le morphisme

$$f_{\#}^{\text{o}} \pi_K S \longrightarrow \pi_k f_{\#}^{\text{eff}} S$$

les deux membres sont nuls. Supposons maintenant  $S$  primitif. D'après a),  $S$  est défini sur  $k$  si et seulement si  $\pi_K S$  est défini sur  $k$ . Si ce n'est pas le cas, les deux

membres sont encore nuls. Si  $S \simeq f^{*\text{eff}} S'$ , alors  $\pi_K S \simeq f^{*o} \pi_k S'$ , les deux membres s'identifient à  $\pi_k S'$  et la flèche à l'identité.

d) Résulte soit de la démonstration de c), soit de la compatibilité des adjoints à la composition.

e) Soit  $(M, N) \in \mathbf{Mot}_{\text{num}}^o(K) \times \mathbf{Mot}_{\text{num}}^o(k)$ . D'après le corollaire 5.11, on a un isomorphisme dans  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(k)$

$$f_{\#}^{\text{eff}}(i_K M \otimes f^{*\text{eff}} i_k N) \simeq (f_{\#}^{\text{eff}} i_K M) \otimes i_k N.$$

On obtient la formule voulue en appliquant  $\pi_k$  à cet isomorphisme, en utilisant que  $\pi_k$  commute au produit tensoriel et en utilisant c).  $\square$

### 5.7 – Motifs homologiques

Conjecturalement, équivalences homologique et numérique coïncident; les adjoints à gauche et à droite du foncteur d'extension des scalaires devraient donc exister pour les motifs homologiques. Voici tout ce que je sais dire :

**PROPOSITION 5.13.** *Soient  $p = 0$  ou un nombre premier,  $l \neq p$  un nombre premier, et  $F_l$  la théorie motivique de la définition 2.3. Alors, pour toute extension  $f: k \rightarrow K$  de type fini dans  $\mathbf{corps}_p$ , le foncteur d'“extension des scalaires”  $f^*: F_l(k) \rightarrow F_l(K)$  admet un adjoint à gauche  $f_{\#}$  et un adjoint à droite  $f_*$ . Ces adjoints sont compatibles aux poids et respectent la sous-théorie  $F_l^{\text{ss}}$  de la remarque 2.4; le morphisme canonique  $f_* \implies f_{\#}$ , restreint à  $F_l^{\text{ss}}(K)$ , est un isomorphisme.*

**DÉMONSTRATION.** On se ramène au cas où  $k$  est de type fini sur son sous-corps premier, puis en utilisant le théorème 4.7 au cas où  $K/k$  est régulière. Soit  $H = \text{Ker}(G_K \rightarrow G_k)$ : on voit tout de suite que  $f_{\#}$  et  $f_*$  sont donnés par

$$f_{\#} V = V_H, \quad f_* V = V^H.$$

La compatibilité aux poids est évidente, ainsi que le fait que ces foncteurs envoient  $F_l^{\text{ss}}(K)$  dans  $F_l^{\text{ss}}(k)$  (une sous-représentation et une représentation quotient d'une représentation semi-simple sont semi-simples).  $\square$

Malheureusement, la conjecture de Tate ne semble pas suffisante pour en déduire l'existence d'adjoints pour les motifs homologiques: outre le problème de descendre les coefficients de  $\mathbf{Q}_l$  à  $\mathbf{Q}$ , se pose un problème d'essentielle surjectivité. Quand  $k$  est un corps fini, on peut le résoudre grâce à Weil I et au théorème de Honda: en effet, les valeurs propres de Frobenius opérant sur  $V^H$  sont des

nombres de Weil, comme on le voit par un argument de spécialisation. Si  $k$  est un corps de nombres, on peut peut-être utiliser la conjecture de Fontaine-Mazur (en plus de la conjecture de Tate !) pour conclure. Pour d'autres corps  $k$ , je ne sais pas. Peut-on remplacer ces rustines un peu fortes par, disons, la conjecture de Tate généralisée ?

## 6. Catégories birationnelles

### 6.1 – Catégorie birationnelle des variétés lisses

THÉORÈME 6.1. *Soit  $f: k \rightarrow K$  une extension de type fini séparable. Soit  $S_b$  l'ensemble des morphismes birationnels. Alors le foncteur*

$$f^*: S_b^{-1} \mathbf{Sm}(k) \longrightarrow S_b^{-1} \mathbf{Sm}(K)$$

*admet un adjoint à gauche  $f_{\#}$ . Pour  $X \in S_b^{-1} \mathbf{Sm}(K)$ , on a  $f_{\#} X = \mathcal{X}$  pour tout  $k$ -modèle lisse  $\mathcal{X}$  de  $X$ .*

Nous allons donner deux démonstrations. La première utilise la résolution des singularités de Hironaka, et n'est donc valable qu'en caractéristique zéro; la seconde est valable en toute caractéristique.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION. D'après [27, théorème 6.6.3], on a une bijection canonique

$$(6.1) \quad S_b^{-1} \mathbf{Sm}(k)(V, W) \simeq W(k(V))/R$$

pour tout couple  $(V, W)$  de  $k$ -variétés lisses, avec  $W$  propre, où le membre de droite est l'ensemble des classes de  $R$ -équivalence. Supposons maintenant  $k$  de caractéristique 0. D'après [26, proposition 8.5], on peut remplacer les variétés lisses  $\mathbf{Sm}$  par les variétés projectives lisses  $\mathbf{Sm}^{\text{proj}}$ . Soit  $X \in S_b^{-1} \mathbf{Sm}^{\text{proj}}(K)$ . On veut montrer que le foncteur

$$Y \mapsto \text{Hom}(X, Y_K)$$

de  $S_b^{-1} \mathbf{Sm}^{\text{proj}}(k)$  vers la catégorie des ensembles est coreprésentable. D'après (6.1), la valeur de ce foncteur sur  $Y$  est

$$Y_K(K(X))/R$$

où  $R$  désigne la  $R$ -équivalence. Soit  $\mathcal{X}$  une  $k$ -variété projective lisse telle que  $k(\mathcal{X}) \simeq K(X)$  (résolution des singularités de Hironaka). On a alors

$$Y_K(K(X))/R \simeq Y(k(\mathcal{X}))/R$$

et notre foncteur est coreprésenté par  $\mathcal{X}$ . □

SECONDE DÉMONSTRATION. Rappelons que

“séparable de type fini”  $\iff$  “admet un modèle lisse”

[27, lemma 4.8.1]. Pour tout modèle lisse  $U$  de  $K/k$ , soit  $\mathbf{Sm}(U)$  la catégorie des  $U$ -schémas lisses séparés de type fini. On a

$$2 - \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U}} \mathbf{Sm}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sm}(K)$$

(limite prise sur les immersions ouvertes). Si  $p_U: U \rightarrow \text{Spec } k$  est le morphisme structural, on a un couple de foncteurs adjoints :

$$p_U^*: \mathbf{Sm}(k) \longleftrightarrow \mathbf{Sm}(U): (p_U)_\#$$

donnés par l’extension et la restriction des scalaires ( $(p_U)_\#$  est adjoint à gauche de  $p_U^*$ ). De même, si  $j: U' \rightarrow U$  est une immersion ouverte, on a un couple de foncteurs adjoints

$$j^*: \mathbf{Sm}(U) \longleftrightarrow \mathbf{Sm}(U'): j_\#.$$

Tous ces foncteurs respectent les morphismes birationnels. D’après la proposition 3.7, pour conclure il suffit de démontrer que les foncteurs

$$(6.2) \quad S_b^{-1} j^*: S_b^{-1} \mathbf{Sm}(U) \longrightarrow S_b^{-1} \mathbf{Sm}(U')$$

induits par les immersions ouvertes  $j$  sont des équivalences de catégories. Mais c’est évident : l’adjonction  $(j_\#, j^*)$  induit une adjonction  $(S_b^{-1} j_\#, S_b^{-1} j^*)$  et il suffit de montrer que son unité et sa coïunité sont des isomorphismes naturels. Or l’unité  $\text{Id}_{\mathbf{Sm}(U')} \implies j^* j_\#$  est déjà un isomorphisme naturel, et la coïunité  $j_\# j^* \implies \text{Id}_{\mathbf{Sm}(U)}$  est une immersion ouverte quand on l’évalue sur tout  $X \in \mathbf{Sm}(U)$ . La dernière assertion du théorème est évidente par construction.  $\square$

Pour le corollaire suivant, soient  $K/k$  une extension séparable de type fini et  $X_1, X_2$  deux  $K$ -variétés propres et lisses munies de  $k$ -modèles propres et lisses  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$ . Soit  $\alpha: X_1 \dashrightarrow X_2$  une  $K$ -application rationnelle : rappelons que  $\alpha$  définit un morphisme dans  $S_b^{-1} \mathbf{Sm}(K)$ , donc une application  $\alpha_*(L): X_1(L)/R \rightarrow X_2(L)/R$  pour toute extension séparable de type fini  $L/K$  ([8, proposition 10] en caractéristique zéro, [27, 6.3 et corollaire 6.6.6] en général).

**COROLLAIRE 6.2.** *Supposons que  $\alpha_*(L)$  soit bijective pour tout  $L/K$ . Alors  $\alpha$  induit un isomorphisme  $X_1(L)/R \xrightarrow{\sim} X_2(L)/R$  pour toute extension séparable de type fini  $L/k$ .*

DÉMONSTRATION. Vu (6.1) et Yoneda, l'hypothèse et la conclusion sont respectivement équivalentes à  $\alpha: X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$  dans  $S_b^{-1} \mathbf{Sm}(K)$  (resp.  $\mathcal{X}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_2$  dans  $S_b^{-1} \mathbf{Sm}(k)$ ). Via le théorème 6.1, le corollaire résulte alors du fait que l'image d'un isomorphisme par un foncteur est un isomorphisme.  $\square$

Comme cas particulier, notons l'analogie suivant d'un théorème de Graber, Harris et Starr [12, corollaire 1.3]: disons qu'une  $k$ -variété propre et lisse  $X$  est *universellement  $R$ -triviale* si l'ensemble  $X(L)/R$  est un singleton pour toute extension séparable  $L/k$ .

COROLLAIRE 6.3. *Soit  $\pi: \mathcal{X} \dashrightarrow Y$  une application rationnelle dominante de  $k$ -variétés propres, lisses et connexes, dont la restriction à un ouvert de définition est **propre** (cf. [9, déf. 5.12]). Supposons que la fibre générique de  $\pi$  soit universellement  $R$ -triviale. Alors  $\mathcal{X}(L)/R \xrightarrow{\sim} Y(L)/R$  pour toute extension  $L/k$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $K = k(Y)$ : on prend  $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$  et  $\mathcal{X}_2 = Y$  dans le corollaire 6.2.  $\square$

REMARQUE 6.4. On pourrait penser utiliser les équivalences de catégories (6.2) pour définir des morphismes de spécialisation, mais les choses ne sont pas si simples. Plus précisément, soit  $i: Z \hookrightarrow U$  une immersion fermée. On a un morphisme de changement de base

$$i^*: \mathbf{Sm}(U) \longrightarrow \mathbf{Sm}(Z)$$

mais ce morphisme n'envoie pas  $S_b$  dans  $S_b$ . Par exemple, soit  $j: U - Z \hookrightarrow U$  l'immersion ouverte complémentaire. Alors  $i^*j$  est l'inclusion du vide dans  $Z$ . Pour avoir un bon foncteur sur les localisations, il faut donc se restreindre aux morphismes birationnels "en bonne position par rapport à  $i$ ": par définition, un  $U$ -morphisme birationnel  $f: X \rightarrow Y$  est en bonne position par rapport à  $i$  si  $i^*f$  est encore un morphisme birationnel.

### 6.2 – Correspondances finies birationnelles

THÉORÈME 6.5. *Soit  $K/k$  une extension de type fini séparable. Soit  $S_b$  l'ensemble des morphismes birationnels. Alors le foncteur*

$$S_b^{-1} \mathbf{Corf}(k) \longrightarrow S_b^{-1} \mathbf{Corf}(K)$$

*admet un adjoint à gauche. Ceci s'étend au cas d'une extension  $K/k$  de type fini quelconque, si on inverse l'exposant caractéristique.*

DÉMONSTRATION. La proposition 4.5 nous ramène au cas séparable. On procède alors comme dans la seconde démonstration du théorème 6.1. Pour tout modèle lisse  $U$  de  $K/k$ , on a la catégorie  $\mathbf{Cor}_f(U)$  des correspondances finies de base  $U$  : ses objets sont les  $U$ -schémas  $X/U$  lisses séparés de type fini, et

$$\mathbf{Cor}_f(U)(X/U, Y/U) = c_{\text{equi}}(X \times_U Y/X, 0)$$

([33, app. 1A], [17, définition 1.2], [10]). On a

$$2 - \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U}} \mathbf{Cor}_f(U) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Cor}_f(K)$$

[17, corollaire 4.12]. On peut alors reprendre mot pour mot la démonstration ci-dessus.  $\square$

### 6.3 – Motifs de Chow birationnels

THÉORÈME 6.6. *Soit  $K/k$  une extension de type fini. Soit  $A$  un anneau commutatif dans lequel  $p$  est inversible, où  $p$  est l'exposant caractéristique de  $k$ . Alors le foncteur d'extension des scalaires  $\mathbf{Chow}^0(k, A) \rightarrow \mathbf{Chow}^0(K, A)$  admet un adjoint à gauche.*

DÉMONSTRATION. D'après [29, théorème 3.4.1], on a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Chow}^0(k, A) \xrightarrow{\sim} (S_b^{-1} \mathbf{Cor}_f(k) \otimes A)^{\natural}$$

et de même pour  $K$ , où  $()^{\natural}$  désigne l'enveloppe pseudo-abélienne. La conclusion résulte donc de la proposition 4.5 b) et du lemme 3.2 b).  $\square$

REMARQUE 6.7. Comme dans le cas du théorème 6.1, on peut donner une autre démonstration du théorème 6.6, en utilisant la formule

$$(6.3) \quad \mathbf{Chow}^0(k, \mathbf{Z})(h^0(X), h^0(Y)) \simeq \text{CH}_0(Y_{k(X)})$$

de [28, lemme 2.3.7] pour deux  $k$ -variétés projectives lisses  $X, Y$ . En caractéristique 0, cette démonstration utilise la résolution des singularités ; en caractéristique  $> 0$ , elle devient extrêmement compliquée et je ne sais la faire marcher qu'en recourant au théorème de de Jong équivariant [18, théorème 7.3] ; en particulier, il faut supposer que  $A$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre. La reproduire ici ne présente donc aucun intérêt.

Voici un analogue du corollaire 6.2, qui redonne et précise le résultat de Vial [43, théorème 1.3] et une application de Sebastian [41, §3.2] :

**COROLLAIRE 6.8.** a) Soient  $K/k$  une extension séparable de type fini,  $X_1, X_2$  deux  $K$ -variétés projectives lisses munies de  $k$ -modèles projectifs lisses  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ , et soit  $A$  une  $\mathbf{Z}[1/p]$ -algèbre commutative. Soit  $\alpha \in \mathrm{CH}_{\dim X_1}(X_1 \times_K X_2)$  une correspondance algébrique. Supposons que  $\alpha_*: \mathrm{CH}_0((X_1)_L) \otimes A \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}_0((X_2)_L) \otimes A$  pour toute extension séparable de type fini  $L/K$ . Alors  $\alpha$  induit un isomorphisme  $\mathrm{CH}_0((\mathcal{X}_1)_L) \otimes A \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}_0((\mathcal{X}_2)_L) \otimes A$  pour toute extension de type fini  $L/k$ .

b) Soit  $\pi: \mathcal{X}_1 \dashrightarrow \mathcal{X}_2$  un  $k$ -“quotient rationnel” au sens de Campana [9, chapitre 5] (= “MRCC fibration” de Kollár [32, IV.5, définition 5.1]), et soit  $A = \mathbf{Q}$ . Alors  $\pi$  induit un isomorphisme de motifs birationnels

$$h^0(\mathcal{X}_1) \xrightarrow{\sim} h^0(\mathcal{X}_2)$$

et un isomorphisme  $\mathrm{CH}_0((\mathcal{X}_1)_L) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}_0((\mathcal{X}_2)_L) \otimes \mathbf{Q}$  pour toute extension de type fini  $L/k$ .

**DÉMONSTRATION.** a) La même que celle du corollaire 6.2, en utilisant (6.3) et le théorème 6.6 au lieu de (6.1) et du théorème 6.1. b) Soient  $K = k(\mathcal{X}_2)$ ,  $X_1$  la fibre générique de  $\pi$ ,  $X_2 = \mathrm{Spec} K$  et  $\alpha$  le graphe de l’application rationnelle  $\pi$ . Par définition du quotient rationnel,  $X_1$  est rationnellement connexe par chaînes, donc  $\alpha$  induit un isomorphisme  $\mathrm{CH}_0((X_1)_L) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}$  pour toute extension  $L/K$ . L’énoncé est donc un cas particulier de a). □

#### 6.4 – Motifs birationnels triangulés

**THÉORÈME 6.9.** Soit  $K/k$  une extension de type fini, et soit  $A$  un anneau commutatif. Si  $K/k$  est séparable, le foncteur d’extension des scalaires  $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}^0(k, A) \rightarrow \mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}^0(K, A)$  admet un adjoint à gauche. En général, ceci reste vrai pourvu que l’exposant caractéristique de  $k$  soit inversible dans  $A$ .

**DÉMONSTRATION.** Lorsque  $K/k$  est séparable, on procède comme dans la seconde preuve du théorème 6.1 en utilisant pour tout modèle lisse  $U$  de  $K/k$  la catégorie triangulée  $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(U, A)$  des motifs géométriques de base  $U$  [17, déf. 1.14]. On peut alors copier mot pour mot la démonstration citée<sup>3</sup>, le point clé

$$2 - \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U}} \mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(U, A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(K, A)$$

étant [17, proposition 4.16]. □

<sup>3</sup> Plus précisément, l’inversibilité des morphismes d’adjonction apparaissant dans cette démonstration se teste sur des générateurs : les motifs des  $U$ -schémas lisses.

REMARQUE 6.10. Cette démonstration est légèrement incorrecte pour la raison suivante. Dans [45],  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}$  est défini pour les corps en utilisant les “relations” de  $\mathbf{A}^1$ -invariance et de Mayer-Vietoris pour les recouvrements par deux ouverts de Zariski. Dans [17, déf. 1.11],  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}$  est défini pour les schémas de la même manière, mais en remplaçant les recouvrements de Zariski par les recouvrements de Nisnevich élémentaires. Les deux définitions coïncident sur un corps parfait par un théorème hautement non trivial de Voevodsky (cf. [29, théorème 4.4.1 (2)]). Voici deux manières de contourner ce problème en caractéristique  $p > 0$  :

- utiliser la proposition 4.5 pour étendre la coïncidence précédente aux corps imparfaits, quitte à inverser  $p$  ;
- définir des catégories  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(U)$  “à la Zariski” pour  $U$  lisse, et vérifier que la démonstration ci-dessus marche dans ce cas, ce qui est immédiat.

Dans les deux cas, un sous-produit de la démonstration est une équivalence de catégories

$$S_b^{-1} \mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(U) \xrightarrow{\sim} S_b^{-1} \mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$$

pour tout modèle lisse  $U$  de  $K/k$ .

### 6.5 – Comparaison des adjoints

Soit  $A$  une  $\mathbf{Z}[1/p]$ -algèbre commutative, où  $p = 1$  ou un nombre premier. Pour tout corps  $k$  d’exposant caractéristique  $p$ , on a des foncteurs [29, corollaire 3.4.2 et théorème 4.2.2]

$$S_b^{-1} \mathbf{Sm}(k) \longrightarrow \mathbf{Chow}^0(k, A) \longrightarrow \mathbf{DM}_{\text{gm}}^0(k, A)$$

qui définissent des morphismes de théories motiviques (sur  $\mathbf{corps}_p$  si  $p \neq 1$ , sur  $\mathbf{corps}_0$  si  $p = 1$ )

$$(6.4) \quad S_b^{-1} \mathbf{Sm} \longrightarrow \mathbf{Chow}^0(-, A) \longrightarrow \mathbf{DM}_{\text{gm}}^0(-, A).$$

PROPOSITION 6.11. *Les morphismes de changement de base associés à (6.4) via les théorèmes 6.1, 6.6 et 6.9 sont des isomorphismes pour toute extension séparable  $K/k$ .*

DÉMONSTRATION. Étant donné les démonstrations des trois théorèmes cités, il suffit de le vérifier pour les adjoints relatifs à un modèle lisse  $U$  de  $K/k$  (en remplaçant  $\mathbf{Chow}^{\text{eff}}$  par  $\mathbf{Cor}_{\mathbf{f}}$ ). Dans le cas de  $S_b^{-1} \mathbf{Sm}$  et de  $\mathbf{Cor}_{\mathbf{f}}$ , l’adjoint à gauche envoie un  $U$ -schéma-lisse  $X$  sur lui-même ; c’est encore le cas pour le motif de  $X$  dans  $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(U)$ .  $\square$

## 7. Non existence d'adjoints

Après avoir montré l'existence d'adjoints dans des situations variées, il peut être instructif de donner des exemples de non existence. En voici de deux sortes, avec des catégories de motifs purs :

### 7.1 – Motifs purs numériques, extension algébrique séparable infinie

On a :

LEMME 7.1. *Si  $f:k \rightarrow K$  est une telle extension, l'adjoint à gauche  $f_{\#}$  de  $f^*:\mathbf{Mot}_{\text{num}}(k) \rightarrow \mathbf{Mot}_{\text{num}}(K)$  n'est pas défini en  $\mathbf{1} \in \mathbf{Mot}_{\text{num}}(K)$ .*

DÉMONSTRATION. Pour simplifier, supposons  $K/k$  galoisienne (on pourrait généraliser l'argument). Il s'agit de voir que le foncteur

$$\mathbf{Mot}_{\text{num}}(k) \ni M \longmapsto \mathbf{Mot}_{\text{num}}(K)(\mathbf{1}, f^*M)$$

n'est pas représentable. Pour  $M = h(X)$  ( $X$  projective lisse), le terme de droite est  $A_0^{\text{num}}(X_K)$ . Pour  $X$  de dimension zéro, soit  $X = \text{Spec } E$  avec  $E$  étale sur  $k$ , cet espace vectoriel est de dimension  $[E : k]$ . Si le foncteur était représentable par un objet  $N$ , on aurait donc, pour tout tel  $E$

$$\dim \mathbf{Mot}_{\text{num}}(k)(N, h(\text{Spec } E)) = [E : k].$$

Or  $\mathbf{Mot}_{\text{num}}(k)(N, h(\text{Spec } E)) = \mathbf{Mot}_{\text{num}}(k)(h_0(N), h(\text{Spec } E))$ . Si on écrit  $h_0(N)$  comme facteur direct de  $h(\text{Spec } F)$  où  $F$  est une  $k$ -algèbre étale, cet espace vectoriel est facteur direct de

$$\mathbf{Mot}_{\text{num}}(k)(h(\text{Spec } F), h(\text{Spec } E)) = \mathbf{Mot}_{\text{num}}(k)(\mathbf{1}, h(\text{Spec}(E \otimes_k F)))$$

et le membre de droite est de dimension égale au nombre de facteurs de l'algèbre étale  $E \otimes_k F$ .

Choisissons pour  $E$  une extension galoisienne de  $k$  qui contient tous les facteurs de  $F$ . On a alors  $E \otimes_k F \simeq E^{[F:k]}$ , donc

$$\begin{aligned} [E : k] &= \dim \mathbf{Mot}_{\text{num}}(k)(N, h(\text{Spec } E)) \\ &\leq \dim \mathbf{Mot}_{\text{num}}(k)(h(\text{Spec } F), h(\text{Spec } E)) \\ &= [F : k] \end{aligned}$$

donc  $[E : k]$  serait borné, ce qui est absurde. □

## 7.2 – Motifs de Chow effectifs, extension régulière infinie

Commençons par deux lemmes :

LEMME 7.2. a) Soit  $A$  une algèbre semi-primaire sur un corps  $F$  : le radical  $R$  de  $A$  est nilpotent et  $A/R$  est semi-simple. Soit  $(e_i)$  une famille d'idempotents de  $A$ , orthogonaux et de somme 1, telle que leurs images  $\bar{e}_i \in A/R$  soient **centrales**. Soit d'autre part  $\varepsilon$  un idempotent de  $A$ . Alors il existe une décomposition  $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$  en somme d'idempotents orthogonaux et un élément  $r \in R$  tel que, pour tout  $i$ ,  $\varepsilon_i$  divise  $(1+r)e_i(1+r)^{-1}$  (c'est-à-dire que  $(1+r)e_i(1+r)^{-1} - \varepsilon_i$  est idempotent).

b) Soit  $A$  une catégorie  $F$ -linéaire pseudo-abélienne, où  $F$  est un corps. Soit  $M \in \mathcal{A}$ , tel que  $A = \text{End}(M)$  soit une  $F$ -algèbre primaire. Soit  $M = \bigoplus M_i$  une décomposition de  $M$  en somme directe, et soit  $N$  un facteur direct de  $M$ . Si les idempotents de  $A$  de noyaux  $M_i$  sont **centraux modulo  $R$**  (radical de  $A$ ), alors il existe une décomposition  $N = \bigoplus N_i$ , où chaque  $N_i$  est isomorphe à un facteur direct de  $M_i$ .

DÉMONSTRATION. a) Soient  $B = \varepsilon A \varepsilon$  et  $C = (1 - \varepsilon)A(1 - \varepsilon)$ . Les  $F$ -algèbres  $B$  et  $C$  sont primaires, d'unités respectives  $\varepsilon$  et  $(1 - \varepsilon)$  et de radicaux respectifs  $\varepsilon R \varepsilon$  et  $(1 - \varepsilon)R(1 - \varepsilon)$ . Si  $\bar{\varepsilon}$  est l'image de  $\varepsilon$  dans  $A/R$ , les  $\bar{\varepsilon}\bar{e}_i$  sont des idempotents orthogonaux de somme  $\bar{\varepsilon}$  dans  $B/\varepsilon R \varepsilon$ , et les  $(1 - \bar{\varepsilon})\bar{e}_i$  sont des idempotents orthogonaux de somme  $1 - \bar{\varepsilon}$  dans  $C/(1 - \varepsilon)R(1 - \varepsilon)$ . Relevons-les respectivement en  $(\varepsilon_i)$  et  $(\eta_i)$ , systèmes d'idempotents orthogonaux de somme  $\varepsilon$  et  $1 - \varepsilon$  dans  $B$  et  $C$  [20, lemma 5.4]. On a  $\varepsilon_i \eta_j = \eta_j \varepsilon_i = 0$  pour tout  $(i, j)$ , donc les  $\varepsilon_i + \eta_i$  forment un système d'idempotents orthogonaux de somme 1, relevant les  $\bar{e}_i$ . En réappliquant [20, lemma 5.4], on voit qu'il existe donc  $n \in R$  tel que  $\varepsilon_i + \eta_i = (1 + r)e_i(1 + r)^{-1}$  pour tout  $i$ .

b) C'est une simple traduction de a). □

LEMME 7.3. Soit  $k$  un corps algébriquement clos, et soit  $A \neq 0$  une variété abélienne sur  $k$ . Si  $k$  n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini, alors  $A(k) \otimes \mathbf{Q} \neq 0$ .

DÉMONSTRATION. Ce lemme bien connu a un grand nombre de démonstrations non triviales. L'une utilise les hauteurs, et une autre le théorème de spécialisation de Néron : voir [40, appendice] pour le cas où  $k = \bar{\mathbf{Q}}$  (les arguments passent au cas où  $k$  est la clôture algébrique d'un corps  $k_0(C)$  pour  $C$  une courbe). On peut aussi raisonner en utilisant la partie facile du critère de Néron-Ogg-Šafarevič, etc. □

Soit maintenant  $f: k \rightarrow K$  une extension régulière infinie : Nous allons montrer que l'adjoint à gauche  $f_{\#}$  de  $f^*: \mathbf{Chow}(k, \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Chow}(K, \mathbf{Q})$  n'existe pas en général. Il suffit de montrer :

**THÉORÈME 7.4.** *Soient  $k$  un corps algébriquement clos,  $C$  une courbe projective lisse de genre  $g > 0$  sur  $k$  et  $K = k(C)$ . Supposons que  $k$  ne soit pas la clôture algébrique d'un corps fini. Alors  $f_{\#}$  n'est pas défini en  $\mathbf{1} \in \mathbf{Chow}(K, \mathbf{Q})$ , ni en  $\mathbf{1} \in \mathbf{Chow}^{\text{eff}}(K, \mathbf{Q})$ .*

(Pour attraper le cas de genre zéro, on peut ensuite projeter  $C$  sur  $\mathbf{P}^1$  ; si on note  $k \xrightarrow{f} k(\mathbf{P}^1) \xrightarrow{g} k(C)$  les extensions correspondantes,  $f_{\#}$  n'est pas défini en  $g_{\#}\mathbf{1}$ , autrement sa valeur définirait  $(gf)_{\#}\mathbf{1}$ .)

**DÉMONSTRATION.** Pour simplifier, laissons tomber les coefficients  $\mathbf{Q}$ . Pour a), il s'agit de voir que le foncteur

$$\mathbf{Chow}(k) \ni M \longmapsto \mathbf{Chow}(K)(\mathbf{1}, f^*M)$$

n'est pas coreprésentable. Soit  $n \geq 0$ . Pour  $M = h(X)(-n)$  ( $X$  projective lisse), le terme de droite est  $\text{CH}_n(X_K) \otimes \mathbf{Q}$ . Si le foncteur était coreprésentable par un objet  $N$ , on aurait donc un isomorphisme fonctoriel en  $X$

$$\text{CH}_n(X_K) \otimes \mathbf{Q} \simeq \mathbf{Chow}(k)(N, h(X)(-n)).$$

Soit  $\varphi \in \mathbf{Chow}(K)(\mathbf{1}, h(C_K)) = \text{CH}_0(C_K)$  donné par le point générique de  $C$ . Ce morphisme donne par adjonction un morphisme

$$\tilde{\varphi}: N \longrightarrow h(C)$$

qui induit la surjection fonctorielle en  $X$

$$\begin{aligned} \mathbf{Chow}(k)(h(C), h(X)(-n)) &\simeq \text{CH}_{n+1}(C \times X) \otimes \mathbf{Q} \\ &\longrightarrow \text{CH}_n(X_K) \otimes \mathbf{Q} \simeq \mathbf{Chow}(k)(N, h(X)(-n)). \end{aligned}$$

Par le lemme de Yoneda, cela montre que  $\tilde{\varphi}$  est scindée, donc que  $N$  est *facteur direct* de  $h(C)$ . En particulier,  $N$  est *effectif* s'il existe ; dans ce cas, il définit donc aussi  $f_{\#}\mathbf{1}$  dans  $\mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k)$ .

Soit  $h(C) = h_0(C) \oplus h_1(C) \oplus h_2(C)$  une décomposition de Chow–Künneth déterminée par un point rationnel de  $C$ . On sait que  $\text{End}(h(C))$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre primaire, et que les idempotents définissant la décomposition ci-dessus sont centraux modulo le radical. En appliquant le lemme 7.2 b), on peut donc écrire  $N = N_0 \oplus N_1 \oplus N_2$ , où  $N_i$  est isomorphe à un facteur direct de  $h_i(C)$ .

Rappelons que  $h_0(C) = \mathbf{1}$  et  $h_2(C) = \mathbb{L}$ . Nous utiliserons les formules

$$\begin{aligned}\mathbf{Chow}(k)(\mathbf{1}, \mathbb{L}) &= \mathbf{Chow}(k)(\mathbb{L}, \mathbf{1}) = 0, \\ \mathbf{Chow}(k)(\mathbf{1}, h_1(A)) &= \mathbf{Chow}(k)(h_1(A), \mathbb{L}) = A(k) \otimes \mathbf{Q}, \\ \mathbf{Chow}(k)(\mathbb{L}, h_1(A)) &= \mathbf{Chow}(k)(h_1(A), \mathbf{1}) = 0\end{aligned}$$

si  $A/k$  est une variété abélienne.

Pour  $X = \text{Spec } k$ , on obtient

$$\mathbf{Chow}(k)(N_0, \mathbf{1}) = \mathbf{Chow}(k)(N, \mathbf{1}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}$$

ce qui montre que  $N_0 = \mathbf{1}$ .

En appliquant l'adjonction à  $h_1(B)$ , où  $B$  est une variété abélienne, on obtient aussi

$$\mathbf{Chow}(k)(N, h_1(B)) = \mathbf{Chow}(K)(\mathbf{1}, h_1(B_K)) = B(K) \otimes \mathbf{Q}$$

et donc

$$\mathbf{Chow}(k)(N_1, h_1(B)) = (B(K)/B(k)) \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{Chow}(k)(h_1(C), h_1(B)).$$

Comme cet isomorphisme est compatible à l'inclusion  $N_1 \hookrightarrow h_1(C)$ , cela implique par Yoneda que  $N_1 = h_1(C)$ .

En appliquant enfin l'adjonction à  $\mathbb{L} \in \mathbf{Chow}(k)$ , on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{Chow}(k)(N_1, \mathbb{L}) \oplus \mathbf{Chow}(k)(N_2, \mathbb{L}) &= \mathbf{Chow}(k)(N, \mathbb{L}) \\ &= \mathbf{Chow}(K)(\mathbf{1}, \mathbb{L}) \\ &= 0\end{aligned}$$

d'où  $N_2 = 0$ . Cela donne également

$$\mathbf{Chow}(k)(N_1, \mathbb{L}) = \mathbf{Chow}(k)(h_1(C), \mathbb{L}) = \text{Pic}^0(C) \otimes \mathbf{Q} = 0$$

ce qui contredit  $g > 0$  si  $k$  n'est pas la clôture algébrique d'un corps fini (lemme 7.3).  $\square$

En revanche :

**PROPOSITION 7.5.** *Supposons que  $k$  soit algébrique sur un corps fini.*

a) *Supposons vraie la conjecture de Beilinson (et Tate) :*

$$\mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mot}_{\text{num}}^{\text{eff}}(k).$$

*Alors  $f_{\#}\mathbf{1}$  existe pour toute extension de type fini  $K/k$ .*

b) *Si  $\text{degr}(K/k) = 1$ ,  $f_{\#}\mathbf{1}$  existe inconditionnellement, et même dans  $\mathbf{Chow}(k)$ .*

DÉMONSTRATION. a) Le foncteur  $\mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k) \rightarrow \mathbf{Chow}^0(k)$  a un adjoint à gauche  $i$  (celui qui existe sans hypothèse sur  $k$  au niveau des motifs numériques, cf. corollaire 5.12). En testant sur  $h(X)$  pour  $X/k$  projective lisse, on voit immédiatement que le motif  $if_{\#}^0 \mathbf{1}$  fait l'affaire, où  $f_{\#}^0$  est l'adjoint à gauche du théorème 6.6.

b) L'énoncé signifie que le foncteur  $\mathbf{Chow}(k) \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbf{Q}}$  donné par  $N \mapsto \mathbf{Chow}(\mathbf{1}, N_K)$  est coreprésentable (sans supposer vraie la conjecture de Beilinson). Comme tout motif de  $\mathbf{Chow}(k)$  est de la forme  $M(-n)$  pour  $M \in \mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k)$  et  $n \in \mathbf{N}$ , il suffit de montrer que  $f_{\#} \mathbb{L}^n$  est représentable dans  $\mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k)$  pour tout  $n \geq 0$ .

Un calcul analogue à celui de la démonstration de la proposition 7.4 (en testant sur les motifs du type  $\mathbb{L}^n, h(A)(n)$  et  $\mathbb{L}^{n+1}$ ) montre que, nécessairement, on a  $f_{\#} \mathbb{L}^n = (f_{\#} \mathbf{1})(n) = (\mathbf{1} \oplus h_1(C))(n)$ . Il suffit de voir que, pour toute variété projective lisse  $X$  de dimension  $d$ , l'application naturelle

$$\begin{aligned} & \mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k)((\mathbf{1} \oplus h_1(C))(n), h(X)) \\ & \longrightarrow \mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k)(\mathbb{L}^n, h(X_K)) = \text{CH}^{d-n}(X_K) \otimes \mathbf{Q} \end{aligned}$$

est bijective.

Le membre de gauche est facteur direct de

$$\mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k)(h(C)(n), h(X)) = \text{CH}^{d-n}(C \times X)_{\mathbf{Q}}.$$

La suite exacte de localisation

$$\bigoplus_{c \in C} \text{CH}^{d-n-1}(X_{k(c)}) \longrightarrow \text{CH}^{d-n}(C \times X) \longrightarrow \text{CH}^{d-n}(X_K) \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$\bigoplus_{[E:k] < \infty} \text{CH}^1(C_E) \otimes \text{CH}^{d-n-1}(X_E) \xrightarrow{(\alpha_E)} \text{CH}^{d-n}(C \times X) \longrightarrow \text{CH}^{d-n}(X_K) \longrightarrow 0$$

où  $\alpha_E$  est le produit d'intersection suivi du transfert. En appliquant la décomposition motivique de  $C$ , on trouve une suite exacte

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{[E:k] < \infty} \text{Pic}^0(C_E)_{\mathbf{Q}} \otimes \text{CH}^{d-n-1}(X_E)_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{(\alpha_E)} \mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k)(h_1(C)(n), h(X)) \\ & \longrightarrow \text{CH}^{d-n}(X_K)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Mais  $\text{Pic}^0(C_E)$  est de torsion pour tout  $E$ . □

## 8. Quelques calculs

Dans cette section, *tous les motifs sont à coefficients rationnels*. On abrège  $\mathbf{Chow}(k, \mathbf{Q})$  en  $\mathbf{Chow}(k)$ , etc.

### 8.1 – Motifs purs birationnels

PROPOSITION 8.1. *Soit  $C$  une courbe projective lisse, géométriquement connexe sur un corps parfait  $k$ , et soit  $K = k(C)$ . Considérons le foncteur*

$$f_{\#} : \mathbf{Chow}^{\circ}(K) \longrightarrow \mathbf{Chow}^{\circ}(k)$$

du théorème 6.6.

a) On a  $f_{\#}\mathbf{1} = \mathbf{1} \oplus h_1^{\circ}(C)$ .

b) Soit  $\Gamma$  une courbe projective lisse connexe sur  $K$ , et soit  $S$  une surface projective lisse géométriquement connexe sur  $k$ , fibrée sur  $C$  de fibre générique  $\Gamma$ . Soit  $J$  la jacobienne de  $\Gamma$ . Alors on a une suite exacte scindée

$$(8.1) \quad 0 \longrightarrow t_2^{\circ}(S) \longrightarrow f_{\#}h_1^{\circ}(\Gamma) \longrightarrow h_1^{\circ}(\mathrm{Im}_{K'/k} J) \longrightarrow 0$$

naturelle en  $\Gamma$  (pour les correspondances birationnelles), où  $K'$  est le corps des constantes de  $\Gamma$ .

REMARQUE 8.2. En utilisant la proposition 5.8 et le corollaire 5.12, on voit que pour le morphisme de théories motiviques  $\mathbf{Mot}_{\mathrm{rat}}^{\circ} \rightarrow \mathbf{Mot}_{\mathrm{num}}^{\circ}$ , l'effet du morphisme de changement de base sur  $\mathbf{1}$  (resp.  $h_1(\Gamma)$ ) est

$$\mathbf{1} \longmapsto \mathbf{1} \oplus h_1^{\circ}(C) \quad (\text{resp. } h_1^{\circ}(\mathrm{Im}_{K'/k} J) \longmapsto h_1^{\circ}(\mathrm{Im}_{K'/k} J) \oplus t_2^{\circ}(S))$$

ce qui illustre spectaculairement la proposition 3.8 et fournit un scindage canonique de (8.1) dans  $\mathbf{Mot}_{\mathrm{num}}^{\circ}$ . Ce dernier point n'est pas surprenant,  $\mathbf{Mot}_{\mathrm{num}}^{\circ}$  étant semi-simple et les termes de poids différents.

DÉMONSTRATION. a) C'est clair, puisque  $f_{\#}\mathbf{1} = f_{\#}h^{\circ}(\mathrm{Spec} K) = h^{\circ}(C)$  d'après la preuve du théorème 6.6, et que  $h^{\circ}(C) = \mathbf{1} \oplus h_1^{\circ}(C)$ .

b) De même, on a

$$f_{\#}h^{\circ}(\Gamma) = h^{\circ}(S) = \mathbf{1} \oplus h_1^{\circ}(S) \oplus t_2^{\circ}(S).$$

Pour clarifier les calculs qui suivent, rappelons la formule suivante [24, corollaire 7.8.5 (ii)]: si  $X, Y \in \mathbf{Sm}^{\mathrm{proj}}(k)$  avec  $\dim X, \dim Y \leq 2$ , alors

$$(8.2) \quad \mathbf{Chow}^{\circ}(k)(h_i^{\circ}(X), h_j^{\circ}(Y)) = 0 \quad \text{si } i > j.$$

Ceci montre que  $h^0(X)$  est muni d'une *filtration canonique*

$$(8.3) \quad 0 \subset h_{>1}^0(X) \subset h_{>0}^0(X) \subset h^0(X)$$

où les “inclusions” sont des monomorphismes scindés, de supplémentaires successifs

$$h_2^0(X) = t_2^0(X), \quad h_1^0(X), \quad h_0^0(X).$$

La filtration (8.3) est fonctorielle en  $X$  (pour les correspondances birationnelles) et ne dépend pas du choix d'une décomposition de Chow–Künneth de  $X$ .

Appliquons maintenant  $f_{\#}$  à cette filtration pour  $h^0(\Gamma)$ , qu'on peut écrire comme une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow h_1^0(\Gamma) \longrightarrow h^0(\Gamma) \longrightarrow h_0^0(\Gamma) \longrightarrow 0.$$

On obtient ainsi une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow f_{\#}h_1^0(\Gamma) \longrightarrow f_{\#}h^0(\Gamma) \longrightarrow f_{\#}h_0^0(\Gamma) \longrightarrow 0$$

soit

$$(8.4) \quad 0 \longrightarrow f_{\#}h_1^0(\Gamma) \longrightarrow h^0(S) \longrightarrow h^0(C') \longrightarrow 0$$

où  $C'$  est la courbe projective lisse de modèle  $K'$ . Comme  $k(S)/k$  est régulière, on a  $h_0^0(S) \xrightarrow{\sim} h_0^0(C') = \mathbf{1}$ . Par functorialité de la filtration (8.3), on déduit donc de (8.4) une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow f_{\#}h_1^0(\Gamma) \longrightarrow h_{>0}^0(S) \longrightarrow h_{>0}^0(C') \longrightarrow 0$$

qu'on peut insérer dans un diagramme commutatif de suites exactes scindées

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & t_2^0(S) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & f_{\#}h_1^0(\Gamma) & \longrightarrow & h_{>0}^0(S) & \longrightarrow & h_{>0}^0(C') \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \wr \\
 & & & & h_1^0(S) & \longrightarrow & h_1^0(C') \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

D'après la suite exacte à isogénie près [16, proposition 3.4]

$$0 \longrightarrow \text{Pic}_{C'/k}^0 \longrightarrow \text{Pic}_{S/k}^0 \longrightarrow \text{Tr}_{K'/k} J \longrightarrow 0$$

qu'on dualise, on a une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow h_1^0(\text{Im}_{K'/k} J) \longrightarrow h_1^0(S) \longrightarrow h_1^0(C') \longrightarrow 0$$

d'où on déduit immédiatement la suite exacte (8.1); sa construction montre qu'elle est fonctorielle pour l'action des correspondances de Chow (birationnelles).  $\square$

## 8.2 – Le motif de Tate–Šafarevič

**PROPOSITION 8.3.** *Soit  $A$  une  $K$ -variété abélienne. Alors on a une suite exacte scindée dans  $\mathbf{Chow}^0(k)$ , naturelle en  $A$  (pour les homomorphismes de variétés abéliennes)*

$$(8.5) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{H}^0(A, K/k) \longrightarrow f_{\#} h_1^0(A) \longrightarrow h_1^0(\text{Im}_{K/k} A) \longrightarrow 0$$

où  $\mathfrak{H}^0(A, K/k)$  est facteur direct de  $t_2^0(S)$  pour une surface  $S$  convenable.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\Gamma$  une courbe ample tracée sur  $A$ , de sorte que le morphisme

$$J = \text{Alb}(\Gamma) \longrightarrow \text{Alb}(A) = A$$

soit surjectif. On a donc un épimorphisme scindé

$$h_1^0(J) \twoheadrightarrow h_1^0(A)$$

d'où un épimorphisme scindé

$$f_{\#} h_1^0(J) \twoheadrightarrow f_{\#} h_1^0(A).$$

Choisissons une surface  $S$  comme dans la proposition 8.1 b). Si  $A \rightarrow J$  est une section de  $J \rightarrow A$  à isogénie près, de projecteur associé  $\pi \in \text{End}^0(J) = \text{End}_{\mathbf{Chow}^0(K)}(h_1^0(\Gamma)) \subset \text{End}_{\mathbf{Chow}^0(K)}(h^0(\Gamma))$ , alors le projecteur  $f_{\#}(\pi)$  opère sur la suite exacte (8.1), y découpant une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow f_{\#}(\pi) t_2^0(S) \longrightarrow f_{\#} h_1^0(A) \longrightarrow f_{\#}(\pi) h_1^0(\text{Im}_{K/k} J) \longrightarrow 0$$

de la forme (8.5). Comme  $\text{Hom}(f_{\#}(\pi) t_2^0(S), f_{\#}(\pi) h_1^0(\text{Im}_{K'/k} J)) = 0$  par (8.2), cette filtration est unique; en particulier, elle est indépendante du choix de  $S$ , puis de  $\Gamma$ , et est fonctorielle en  $A$  (pour les homomorphismes de variétés abéliennes).

Il reste à identifier  $f_{\#}(\pi) h_1^0(\text{Im}_{K/k} J)$  à  $h_1^0(\text{Im}_{K/k} A)$ : cela résulte du fait que le projecteur  $\pi$  opère (à isogénie près) sur  $\text{Im}_{K/k} J$  et y découpe  $\text{Im}_{K/k} A$ , par fonctorialité de la  $K/K$ -image.  $\square$

Rappelons maintenant que le foncteur de projection

$$d_{\leq n} \mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k) \longrightarrow d_{\leq n} \mathbf{Chow}^0(k)$$

admet un adjoint à droite  $P_n^\sharp$  pour  $n \leq 2$  [24, théorème 7.8.8].<sup>4</sup> Plus précisément, la même référence donne, avec les notations précédentes :

$$P^\sharp \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad P^\sharp h_1^0(A) = h_1(A), \quad P^\sharp t_2^0(S) = t_2(S).$$

On en déduit :

**COROLLAIRE 8.4.** *Soit  $A$  une  $K$ -variété abélienne. Alors on a une suite exacte scindée dans  $\mathbf{Chow}^{\text{eff}}(k)$ , naturelle en  $A$  (pour les homomorphismes de variétés abéliennes)*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{III}(A, K/k) \longrightarrow P^\sharp f_\sharp h_1^0(A) \longrightarrow h_1(\text{Im}_{K/k} A) \longrightarrow 0$$

où  $\mathfrak{III}(A, K/k)$  est facteur direct de  $t_2(S)$  pour une surface  $S$  convenable.  $\square$

**DÉFINITION 8.5.** On appelle  $\mathfrak{III}(A, K/k)$  le *motif de Tate–Šafarevič* de  $A$ .

Soit  $H$  une cohomologie de Weil classique (§2.2.2). Il est connu qu'alors  $\dim H^1(X) = 2 \dim \text{Alb}(X)$ . Cette condition implique que  $H^i(h_2(S)) = 0$  pour  $i \neq 2$  [30, théorème 2A9]. Il en est donc de même pour  $\mathfrak{III}(A, K/k)$ , qui est ainsi “de poids 2” pour  $H$ .

Soit  $l$  un nombre premier inversible dans  $k$ , et fixons une clôture séparable  $k_s$  de  $k$ . En composant  $\mathfrak{III}(-, K/k)$  avec le foncteur réalisation  $l$ -adique  $\tilde{\rho}_l$  de la définition 2.3, on obtient un foncteur contravariant

$$\mathfrak{III}_l = \tilde{\rho}_l \circ \mathfrak{III}(-, K/k) : \mathbf{Ab}(K, \mathbf{Q}) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_l}^*(G_k)$$

où  $G_k = \text{Gal}(k_s/k)$ . On a un autre tel foncteur, covariant :

$$\mathfrak{III}'_l = V_l(\mathfrak{III}(-, Kk_s)) : \mathbf{Ab}(K, \mathbf{Q}) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_l}^*(G_k)$$

où

$$\mathfrak{III}(A, Kk_s) = \text{Ker}(H^1(k_s(C), A) \longrightarrow \prod_{v \in C(0)} H^1(k_s(C)_v, A))$$

est le *groupe de Tate–Šafarevič géométrique* de  $A \in \mathbf{Ab}(K)$ , muni de l'action canonique de  $G_k$ . Comme remarqué dans [13, (4.9)], on peut remplacer ci-dessus les complétés  $k_s(C)_v$  par les hensélisés correspondants, et le produit par une somme directe.

<sup>4</sup> Attention ! Cela devient faux pour  $n \geq 3$ , cf. [28, théorème 4.3.2 et 4.3.3].

Le théorème suivant justifie la terminologie de la définition 8.5 :

THÉORÈME 8.6. *On a un isomorphisme dans  $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_l}^*(G_k)$  :*

$$u_A: \mathbb{H}_l(A) \simeq \mathbb{H}'_l(A^*)(-1).$$

naturel en  $A \in \mathbf{Ab}(K, \mathbf{Q})$ .

La démonstration dépasserait le cadre de cet article : elle sera donnée ailleurs. Contentons-nous ici de rendre l'énoncé plausible en traitant le cas particulier  $A = J(\Gamma)$ , où  $\Gamma$  est une  $K$ -courbe projective lisse géométriquement connexe. Soit  $S$  un modèle projectif lisse de  $\Gamma$  sur  $k$ , fibré sur  $C$  par un morphisme plat  $f$ . Les calculs de [13, §4], utilisant la suite spectrale de Leray pour  $f$ , donnent alors un isomorphisme

$$(8.6) \quad \mathrm{Br}(S_{k_s}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}(J(\Gamma), Kk_s)$$

dans le quotient de la catégorie des  $G_k$ -modules par la sous-catégorie de Serre formée des  $G_k$ -modules finis. Cela fournit  $u_A$  dans ce cas, compte tenu de l'isomorphisme

$$\tilde{\rho}_l(t_2(S)) \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{NS}(S_{k_s}) \otimes \mathbf{Q}_l(-1) \xrightarrow{\mathrm{cl}} H^2(S_{k_s}, \mathbf{Q}_l)) \simeq V_l(\mathrm{Br}(S_{k_s}))(-1)$$

[24, Proposition 7.2.3], et de l'autodualité de  $J(\Gamma)$ .

Le point délicat est de montrer que  $u_A$  s'étend en un isomorphisme naturel sur  $\mathbf{Ab}(K, \mathbf{Q})$ . Pour pouvoir procéder comme dans la preuve de la proposition 8.3, il faut au moins savoir que (8.6) est compatible à l'action des endomorphismes de  $J(\Gamma)$  via le foncteur  $P^\#_{f\#}$  intervenant dans le corollaire 8.4. Pour cela, il faut utiliser la catégorie des "motifs de Chow sur  $C$ " définie par Corti et Hanamura [7], et leur foncteur de réalisation  $l$ -adique.

REMARQUE 8.7. En utilisant [28, proposition 1.7.2], on peut se débarrasser de l'hypothèse que  $k$  est parfait dans toute cette section. La surface  $S$  qui intervient dans la proposition 8.3 est alors définie sur une extension finie radicielle convenue de  $k$ .

## 9. Motifs au point générique

DÉFINITION 9.1. Soit  $(A, \sim)$  un couple adéquat, et soit  $k$  un corps. Pour tout  $n \geq 0$ , on note  $d_{\leq n} \mathbf{Mot}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k, A)$  (resp.  $d_{\leq n} \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(k, A)$ ) la sous-catégorie épaisse de  $\mathbf{Mot}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k, A)$  (resp. de  $\mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(k, A)$ ) engendrée par les motifs des variétés de dimension  $\leq n$ . On note  $d_n \mathbf{Mot}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k, A)$  (resp.  $d_n \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(k, A)$ ) le quotient de  $d_{\leq n} \mathbf{Mot}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k, A)$  (resp. de  $d_{\leq n} \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(k, A)$ ) par l'idéal des morphismes se factorisant à travers un objet de  $d_{\leq n-1} \mathbf{Mot}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k, A)$  (resp. de  $d_{\leq n-1} \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(k, A)$ ).

Ces catégories ont été étudiées dans [24, §7.8.3] : on a pour tout  $n \geq 0$  un diagramme commutatif de catégories et foncteurs :

$$(9.1) \quad \begin{array}{ccc} & d_{\leq n} \mathbf{Mot}_{\sim}^{\text{eff}}(k, A) & \\ R_n \swarrow & & \searrow P_n \\ d_n \mathbf{Mot}_{\sim}^{\text{eff}}(k, A) & & d_{\leq n} \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(k, A) \\ Q_n \searrow & & \swarrow S_n \\ & d_n \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(k, A) & \end{array}$$

Rappelons de [24] que la “dualité de Cartier supérieure”  $M \mapsto \underline{\text{Hom}}(M, \mathbb{L}^{\otimes n})$  induit une dualité sur  $d_n \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(k, A)$ . De plus, si  $\sim = \text{rat}$  et  $A$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre, on a pour deux variétés projectives lisses  $X, Y$  de dimension  $n$

$$(9.2) \quad d_n \mathbf{Chow}^{\circ}(k, A)(\bar{h}^{\circ}(X), \bar{h}^{\circ}(Y)) = \text{CH}^n(X \times Y) \otimes A / \equiv$$

où  $\equiv$  est le sous- $A$ -module engendré par les classes de sous-variétés irréductibles qui ne sont pas dominantes sur l’un des facteurs  $X, Y$  ([24, (7.19)]; maintenant  $\mathbf{Q}$  pourrait être remplacé par  $\mathbf{Z}[1/p]$ ). Autrement dit,  $d_n \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(k, A)(\bar{h}^{\circ}(X), \bar{h}^{\circ}(Y))$  est le  $A$ -module des *correspondances au point générique* de Bloch, Rovinsky et Beilinson [5]. Ces groupes de correspondances apparaissent aussi dans Fulton [11, ex. 16.1.2 (b)].

Voici une autre expression de ce groupe de correspondances en termes de 0-cycles :

LEMME 9.2. *On a*

$$\begin{aligned} & d_n \mathbf{Chow}^{\circ}(k, A)(\bar{h}^{\circ}(X), \bar{h}^{\circ}(Y)) \\ &= \text{Coker} \left( \bigoplus_{Z \subsetneq Y} \text{CH}_0(Z_{k(X)}) \longrightarrow \text{CH}_0(Y_{k(X)}) \right) \otimes A \end{aligned}$$

où  $Z$  décrit les fermés propres de  $Y$ .

DÉMONSTRATION. C’est clair en écrivant l’idéal  $\equiv$  comme somme de deux idéaux : l’un “à droite” et l’autre “à gauche”.  $\square$

THÉORÈME 9.3. Soit  $f:k \rightarrow K$  une extension de type fini, de degré de transcendance  $d$ . Soit  $A$  une  $\mathbf{Z}[1/p]$ -algèbre, où  $p$  est l'exposant caractéristique. Alors, pour tout  $n \geq 0$ ,

- a)  $f_{\#}d_{\leq n} \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(K, A) \subset d_{\leq n+d} \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(K, A)$ .
- b)  $f_{\#}$  induit un foncteur  $f_{\#}^n: d_n \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(K, A) \rightarrow d_{n+d} \mathbf{Mot}_{\sim}^{\circ}(K, A)$ .
- c) Soient  $X, Y \in \mathbf{Sm}^{\text{proj}}(K)$  de dimension  $n$ . Supposons que  $K/k$  admette un modèle projectif lisse  $S$  et que  $X$  et  $Y$  se prolongent en des  $S$ -schémas projectifs  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ , lisses sur  $k$ . Alors le conoyau de

$$\begin{aligned} d_n \mathbf{Chow}^{\circ}(K, A)(\bar{h}^{\circ}(X), \bar{h}^{\circ}(Y)) \\ \longrightarrow d_{n+d} \mathbf{Chow}^{\circ}(k, A)(f_{\#}^n \bar{h}^{\circ}(X), f_{\#}^n \bar{h}^{\circ}(Y)) \end{aligned}$$

est isomorphe à

$$\frac{\mathbf{CH}^{n+d}(\mathcal{X} \times_k \mathcal{Y} - \mathcal{X} \times_S \mathcal{Y}) \otimes A}{\equiv}$$

où  $\equiv$  désigne l'image de  $\equiv \subset \mathbf{CH}^{n+d}(\mathcal{X} \times_k \mathcal{Y}) \otimes A$ . Il est aussi isomorphe à

$$\text{Coker} \left( \bigoplus_{Z \subsetneq \mathcal{Y}} \mathbf{CH}_0(Z_{k(X)}) \longrightarrow \mathbf{CH}_0(\mathcal{Y}_{k(X)} - Y_{K(X)}) \right) \otimes A$$

(noter que  $k(\mathcal{X}) = K(X)$ ).

DÉMONSTRATION. a) est clair vu la preuve du théorème 6.6, et b) résulte immédiatement de a). Démontrons c): pour commencer, l'homomorphisme

$$(9.3) \quad \mathbf{Chow}^{\circ}(K, A)(h^{\circ}(X), h^{\circ}(Y)) \xrightarrow{f_{\#}} \mathbf{Chow}^{\circ}(k, A)(f_{\#}h^{\circ}(X), f_{\#}h^{\circ}(Y))$$

est induit par l'unité

$$h^{\circ}(Y) \longrightarrow f^* f_{\#} h^{\circ}(Y)$$

elle-même décrite par l'immersion fermée

$$(9.4) \quad Y \longrightarrow \mathcal{Y}_K$$

fibre générique du morphisme graphe

$$\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y} \times_k S.$$

L'homomorphisme (9.3) est donc donné par

$$\mathrm{CH}_0(Y_{K(X)}) \otimes A \longrightarrow \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_{k(x)}) \otimes A$$

où le  $K(X)$ -morphisme  $Y_{K(X)} \rightarrow \mathcal{Y}_{k(x)}$  est déduit du  $K$ -morphisme (9.4) par extension des scalaires de  $K$  à  $K(X)$ . Ce  $K(X)$ -morphisme est la fibre générique de l'immersion fermée

$$\mathcal{Y} \times_S \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y} \times_k \mathcal{X}.$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{CH}_n(\mathcal{X} \times_S \mathcal{Y}) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_n(\mathcal{X} \times_k \mathcal{Y}) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_n(\mathcal{X} \times_k \mathcal{Y} - \mathcal{X} \times_S \mathcal{Y}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{CH}_0(Y_{K(X)}) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_{k(x)}) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_{k(x)} - Y_{K(X)}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \frac{\mathrm{CH}_n(X \times_K Y)}{\equiv} & \longrightarrow & \frac{\mathrm{CH}_{n+d}(\mathcal{X} \times_k \mathcal{Y})}{\equiv} & & & & \end{array}$$

où la suite supérieure est exacte et où les flèches verticales sont surjectives. D'où le premier isomorphisme de c); le second se déduit du lemme 9.2.  $\square$

REMARQUE 9.4. Pour  $d = n = 1$ , on obtient la “description plus fonctorielle” de l'homomorphisme  $r$  de [22, proposition 3.1 a)], promise dans la preuve de loc. cit. Ceci permet de montrer que le motif  $\mathfrak{M}(A, K/k)$  de la définition 8.5 coïncide avec celui introduit dans [22, proposition 3.2] (ce qui démontre l'unicité de ce dernier à isomorphisme unique près, et sa fonctorialité en  $A$ ). En effet, en appliquant le foncteur  $S_2$  de (9.1) à (8.5) et en tenant compte du théorème 9.3 b), on obtient

$$f_{\#}^2(S_1(h_1^0(A))) \simeq S_2(\mathfrak{M}^0(A, K/k)).$$

Revenant à la démonstration de la proposition 8.3, on voit avec ses notations que  $S_2(\mathfrak{M}^0(A, K/k))$  est découpé sur  $S_2(t_2^0(S))$  par le projecteur  $f_{\#}^2(S_1(\pi))$  qui, vu (9.2), n'est autre que celui de [22, dém. de la proposition 3.2]. On conclut en observant que

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Mot}_{\mathrm{rat}}^{\mathrm{eff}}(k, \mathbf{Q})}(t_2(S)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{d_2 \mathrm{Mot}_{\mathrm{rat}}^0(k, \mathbf{Q})}(S_2(t_2^0(S)))$$

via  $S_2 P_2$ , d'après [24, théorème 7.4.3].

REMARQUE 9.5. On peut comparer équivalences rationnelle et numérique. Avec les notations du théorème 9.3 et  $A = \mathbf{Q}$  (qu'on omet dorénavant), cela donne un diagramme commutatif :

$$(9.5) \quad \begin{array}{ccc} d_n \mathbf{Chow}^0(K)(\bar{h}^0(X), \bar{h}^0(Y)) & \xrightarrow{f_{\#}^n} & d_{n+d} \mathbf{Chow}^0(k)(\bar{h}^0(\mathcal{X}), \bar{h}^0(\mathcal{Y})) \\ \pi_K \downarrow & & \pi_k \downarrow \\ d_n \mathbf{Mot}_{\text{num}}^0(K)(\bar{h}^0(X), \bar{h}^0(Y)) & \xrightarrow{f_{\#}^n} & d_{n+d} \mathbf{Mot}_{\text{num}}^0(k)(\bar{h}^0(\mathcal{X}), \bar{h}^0(\mathcal{Y})). \end{array}$$

Prenons  $d = n = 1$  et  $X = Y$ ; donc  $X$  est une courbe sur  $K$  et  $\mathcal{X}$  est une surface sur  $k$ , modèle projectif lisse de  $X$ . Dans (9.5), le premier membre est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre semi-simple d'après le théorème de Weil [46, chapitre VI, théorème 22] et la théorie des variétés abéliennes (complète réductibilité de Poincaré); plus précisément,  $\pi_K$  est un isomorphisme. Les morphismes horizontaux sont des homomorphisme de  $\mathbf{Q}$ -algèbres, puisqu'il proviennent de foncteurs. Si celui du haut est surjectif, alors son second membre est aussi semi-simple (en particulier de dimension finie); mais alors  $\pi_k$  est un homomorphisme surjectif de  $\mathbf{Q}$ -algèbres semi-simples, ce qui nous rapprocherait fortement de la conjecture de Bloch pour  $\mathcal{X}$  sous la forme reformulée par ce dernier, Rovinsky et Beilinson [5, 1.4].

Partant de  $\mathcal{X}$ , cette stratégie est sans espoir si on choisit la fibration  $\mathcal{X} \rightarrow S$  au hasard. Prenons par exemple la projection  $\pi: \mathcal{X} = E_1 \times E_2 \rightarrow E_1 = S$ , où  $E_1$  et  $E_2$  sont deux courbes elliptiques sur  $\mathbf{C}$ , non isogènes. On calcule facilement que  $t_2(E_1 \times E_2) = h_1(E_1) \otimes h_1(E_2)$ . En tant que motif numérique, son algèbre d'endomorphismes est donc  $\text{End}^0(E_1) \otimes \text{End}^0(E_2)$ ; en particulier, cette algèbre est toujours un corps et donc  $t_2(E_1 \times E_2)$  est simple. D'autre part, l'anneau des endomorphismes de  $h_1((E_2)_{k(E_1)})$  (fibre générique de  $\pi$ ) est  $\text{End}^0((E_2)_{k(E_1)}) = \text{End}^0(E_2)$ , et on calcule facilement que l'homomorphisme  $\text{End}^0(E_2) \rightarrow \text{End}^0(E_1) \otimes \text{End}^0(E_2)$  induit par  $f_{\#}^2$  est donné par  $f \mapsto 1 \otimes f$ . Si  $E_1$  est à multiplication complexe, il n'est pas surjectif; a fortiori, le morphisme horizontal supérieur de (9.5) ne peut pas être surjectif.

À l'autre extrême, si l'on fibre  $\mathcal{X}$  sur  $\mathbf{P}^1$  à l'aide d'un pinceau de Lefschetz (à un éclatement de  $\mathcal{X}$  près), la jacobienne de la fibre générique est produit à isogénie près de sa partie constante,  $\text{Pic}_{\mathcal{X}/k}^0$ , et d'une variété abélienne dont le corps des endomorphismes est  $\mathbf{Q}$  pour des raisons de monodromie: je remercie Claire Voisin de m'avoir fait observer ce point. Dans l'exemple  $\mathcal{X} = E_1 \times E_2$ , le morphisme horizontal inférieur de (9.5) n'est encore pas surjectif. Trouver une bonne fibration telle que la jacobienne de la fibre générique ait un corps d'endomorphismes assez gros semble être une question difficile.

## RÉFÉRENCES

- [1] Y. ANDRÉ – B. KAHN, *Nilpotence, radicaux et structures monoïdales*, Avec un appendice de P. O’Sullivan, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **108** (2002), pp. 107–291.
- [2] Y. ANDRÉ – B. KAHN, *Construction inconditionnelle de groupes de Galois motiviques*, C. R. Acad. Sci. Paris **334** (2002), pp. 989–994.
- [3] E. ARTIN – A. GROTHENDIECK – J.-L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Tome I: Théorie des topos, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, 269. Springer-Verlag, Berlin et New York, 1972.
- [4] J. AYOUB, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique*, I, Astérisque **314** (2007).
- [5] A. BEILINSON, *Remarks on  $n$ -motives and correspondences at the generic point*, dans F. Bogomolov and L. Katzarkov (eds.), *Motives, polylogarithms and Hodge theory*, I, International Press Lecture Series, 3, I. International Press, Somerville, MA, 2002, pp. 35–46.
- [6] D.-C. CISINSKI – F. DÉGLISE, *Triangulated categories of motives*, prépublication, 2012. [arXiv:0912.2110](https://arxiv.org/abs/0912.2110) [math.AG]
- [7] A. CORTI – M. HANAMURA, *Motivic decomposition and intersection Chow groups*, I, Duke Math. J. **103** (2000), pp. 459–522.
- [8] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – J.-J. SANSUC *La  $R$ -équivalence sur les tores*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **10** (1977), pp. 175–229.
- [9] O. DEBARRE, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [10] F. DÉGLISE, *Finite correspondences and transfers over a regular base*, dans J. Nagel and Ch. Peters (eds.), *Algebraic cycles and motives*, Proceedings of the EAGER Conference held in Leiden, August 30–September 4, 2004, London Mathematical Society Lecture Note Series, 343, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, pp. 138–205.
- [11] W. FULTON, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. 2. Berlin etc., 1984.
- [12] T. GRABER – J. HARRIS – J. STARR, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), pp. 57–67.
- [13] A. GROTHENDIECK, *Le groupe de Brauer*, III: *exemples et compléments*, dans J. Giraud, A. Grothendieck, S. L. Kleiman, M. Raynaud et J. Tate, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced Studies in Pure Mathematics, 3. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, et Masson & Cie, Editeur, Paris, 1968, pp. 88–188.
- [14] A. GROTHENDIECK, *Revêtements étales et groupe fondamental* (SGA1), Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61, nouvelle édition, Documents Mathématiques (Paris), 3. Société Mathématique de France, Paris, 2003.

- [15] R. HARTSHORNE, *Residues and duality*, Lecture Notes in Mathematics, 20, Springer-Verlag, Berlin etc., 1966.
- [16] M. HINDRY – A. PACHECO, *Sur le rang des jacobiniennes sur les corps de fonctions*, Bull. Soc. Math. France **133** (2005), no. 2, 275–295.
- [17] F. IVORRA, *Réalisation  $l$ -adique des motifs triangulés géométriques*, I, Doc. Math. **12** (2007), pp. 607–671.
- [18] A. J. DE JONG, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **83** (1996), pp. 51–93.
- [19] U. JANNSEN, *Motives, numerical equivalence and semi-simplicity*, Invent. Math. **107** (1992), pp. 447–452.
- [20] U. JANNSEN, *Motivic sheaves and filtrations on Chow groups*, dans U. Jannsen, S. Kleiman et J.-P. Serre (eds.), *Motives*, Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference held at the University of Washington, Seattle, Washington, July 20–August 2, 1991, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 55, Part 1. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1994, pp. 245–302.
- [21] B. KAHN, *Zeta functions and motives*, Pure Appl. Math. Quarterly **5** (2009), pp. 507–570.
- [22] B. KAHN, *A motivic formula for the  $L$ -function of an abelian variety over a function field*, prépublication, 2014. [arXiv:1401.6847](https://arxiv.org/abs/1401.6847) [math.NT]
- [23] B. KAHN, *Fonctions zêta et  $L$  de variétés et de motifs*, prépublication, 2015. [arXiv:1512.09250](https://arxiv.org/abs/1512.09250) [math.NT]
- [24] B. KAHN – J.-P. MURRE – C. PEDRINI, *On the transcendental part of the motive of a surface*, dans J. Nagel et Ch. Peters (eds.), *Algebraic cycles and motives*, Vol. II, Proceedings of the EAGER Conference held in Leiden, August 30–September 4, 2004, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, pp. 143–202.
- [25] B. KAHN – R. SUJATHA, *Birational motives*, I, preliminary version, prépublication, 2002, <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0596/>.
- [26] B. KAHN – R. SUJATHA, *A few localisation theorems*, Homology, Homotopy Appl. **9** (2007), pp. 137–161.
- [27] B. KAHN – R. SUJATHA, *Birational geometry and localisation of categories*, Doc. Math. – Extra Volume Merkurjev (2015), pp. 277–334.
- [28] B. KAHN – R. SUJATHA, *Birational motives*, I: *pure birational motives*, Annals of K-theory **1** (2016), pp. 379–440.
- [29] B. KAHN – R. SUJATHA, *Birational motives*, II: *triangulated birational motives*, International Mathematics Research Notices **2017**, pp. 6778–6831.
- [30] S. L. KLEIMAN, *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, dans J. Giraud, A. Grothendieck, S. L. Kleiman, S. L.; M. Raynaud et J. Tate (eds.) *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced Studies in Pure Mathematics, 3. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, et Masson & Cie, Editeur, Paris, 1968.

- [31] S. KLEIMAN, *Equivalence relations between algebraic cycles*, Actes ICM 1970, Nice, I, pp. 445–449.
- [32] J. KOLLÁR, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge. A, 32. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [33] C. MAZZA – V. VOEVODSKY – C. WEIBEL, *Lecture notes on Motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, 2. American Mathematical Society, Providence, R.I., et Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006.
- [34] F. MOREL, *On the motivic  $\pi_0$  of the sphere spectrum*, dans J. P. C. Greenlees (ed.), *Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Cambridge, September 9–20, 2002, NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, 131, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.
- [35] F. MOREL – V. VOEVODSKY,  *$A^1$ -homotopy theory of schemes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 90 (1999), pp. 45–143.
- [36] A. NEEMAN, *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies, 148, Princeton University Press, Princeton, N.J., 2001.
- [37] J. S. MILNE, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [38] H.-G. QUEBBEMANN – W. SCHARLAU – M. SCHULTE, *Quadratic and Hermitian forms in additive and abelian categories*, J. Algebra **59** (1979), 264–289.
- [39] N. RAMACHANDRAN, *Duality of Albanese and Picard 1-motives*, K-Theory **22** (2001), pp. 271–301.
- [40] D. ROY – M. WALDSCHMIDT, *Autour du théorème du sous-groupe algébrique*, Canad. Math. Bull. **36** (1993), pp. 358–367.
- [41] R. SEBASTIAN, *Examples of smash nilpotent cycles on rationally connected varieties*, J. of Algebra **438** (2015), pp. 119–129.
- [42] A. SUSLIN, *Motivic complexes over nonperfect fields*, Ann. of K-theory **2** (2017), pp. 277–302.
- [43] C. VIAL, *Chow–Künneth decomposition for 3- and 4-folds fibred by varieties with trivial Chow group of zero cycles*, J. Algebraic Geom. **24** (2015), pp. 51–80.
- [44] V. VOEVODSKY,  *$A^1$ -homotopy theory*, dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. I, invited plenary lectures, appendix, held in Berlin, August 18–27, 1998, Doc. Math. 1998, Extra Vol. I. Documenta Mathematica, Bielefeld, 1998, pp. 579–604.
- [45] V. VOEVODSKY, *Triangulated categories of motives over a field*, dans E. Friedlander, A. Suslin, V. Voevodsky (eds.), *Cycles, transfers and motivic cohomology theories*, Annals of Mathematics Studies, 143. Princeton University Press, Princeton, N.J., 2000, pp. 188–238.

- [46] A. WEIL, *Variétés abéliennes et courbes algébriques*. Actualités Sci. Ind., no. 1064 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 8 (1946). Hermann & Cie., Paris, 1948.

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 novembre 2015.