

Filtration relative, l'idéal de Bernstein et ses pentes

PHILIPPE MAISONOBE (*)

RÉSUMÉ – Soit $f_i: X \rightarrow \mathbf{C}$, pour i entier compris entre 1 et p , des fonctions analytiques définies sur une variété analytique complexe X . Considérons \mathcal{D}_X l'anneau des opérateurs différentiels et $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] = \mathbf{C}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_X$. Soit m une section d'un \mathcal{D}_X -module holonome, notons $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ l'idéal de $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ des polynômes b vérifiant au voisinage de x_0 :

$$b(s_1, \dots, s_p) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} .$$

C. Sabbah montre l'existence pour tout $x_0 \in X$ d'un ensemble fini \mathcal{H} de formes linéaires à coefficients premiers entre eux dans \mathbf{N} telles que

$$\prod_{H \in \mathcal{H}} \prod_{i \in I_{\mathcal{H}}} (H(s_1, \dots, s_p) + \alpha_{H,i}) \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p) ,$$

où $\alpha_{H,i}$ sont des nombres complexes. L'objet de cet article est notamment de montrer l'existence d'un ensemble \mathcal{H} minimal. De plus, lorsque m est une section d'un module holome régulier, nous expliciterons cet ensemble géométriquement à partir de la variété caractéristique du système différentiel engendré par m . Nous étudions en particulier les variétés caractéristiques relatives des $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -modules liés à notre problème, ce qui nous permet de préciser la structure des idéaux de Bernstein.

ABSTRACT – Let $f_i: X \rightarrow \mathbf{C}$, for i integer between 1 and p , be analytic functions defined on a complex analytic variety X . Let us consider \mathcal{D}_X , the ring of linear differential operators and $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] = \mathbf{C}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_X$. Let m be a section of a holonomic \mathcal{D}_X -module. We denote $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ the ideal of $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ constituted by the polynomials b satisfying in the neighborhood of $x_0 \in X$:

$$b(s_1, \dots, s_p) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} .$$

(*) *Indirizzo dell'A.*: Université Côte d'Azur, Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, Unité Mixte de Recherche du CNRS 7351, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France;
philippe.maisonobe@univ-cotedazur.fr

This ideal is called *Bernstein's ideal*. C. Sabbah showed the existence for every $x_0 \in X$ of a finite set \mathcal{H} of linear forms with coefficients in \mathbf{N} , such that

$$\prod_{H \in \mathcal{H}} \prod_{i \in I_{\mathcal{H}}} (H(s_1, \dots, s_p) + \alpha_{H,i}) \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p),$$

where $\alpha_{H,i}$ are complex numbers. The purpose of this article is to show in particular the existence of a minimal set \mathcal{H} . In addition, when m is a section of a holonomic regular \mathcal{D}_X -module, we will precise geometrically this set from the characteristic variety of \mathcal{D}_X -module generated by m . We introduce and study especially the relative characteristic variety of the $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -modules related to our problem. This allows to specify the structure of the Bernstein's ideals.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE (2020) – 14F10.

MOTS-CLÉS – Opérateurs différentiels, \mathcal{D}_X -module holonome, variété caractéristique, idéal de Bernstein.

Introduction

Soit $f_i: X \rightarrow \mathbf{C}$, pour i entier compris entre 1 et p , des fonctions analytiques définies au voisinage d'un compact K d'une variété analytique complexe X . Notons F le produit des f_i et posons si $\phi: X \rightarrow \mathbf{C}$ désigne une fonction C^∞ à support compact dans K :

$$I_\phi(s_1, \dots, s_p) = \int_X |f_1(x)|^{s_1} \dots |f_p(x)|^{s_p} \phi(x) dx \wedge d\bar{x}.$$

Tout comme dans le cas $p = 1$, en utilisant le théorème de résolution des singularités d'H. Hironaka, on peut montrer que $I_\phi(s_1, \dots, s_p)$ qui est une fonction définie à priori pour $\operatorname{Re} s_i > 0$ se prolonge en fonction méromorphe avec des pôles situés sur des hyperplans de \mathbf{C}^p (théorème 1 de [16]). F. Loeser étudie ces intégrales dans [17] et appelle *pente* de (f_1, \dots, f_p) les directions de leurs hyperplans polaires. Dans certains cas géométriques, il majore cet ensemble de pentes par un ensemble de formes linéaires liées à la géométrie du discriminant du morphisme $(f_1, \dots, f_p): X \rightarrow \mathbf{C}^p$.

Considérons \mathcal{D}_X l'anneau des opérateurs différentiels et

$$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] = \mathbf{C}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_X.$$

Soit m une section d'un \mathcal{D}_X -module holonome, notons $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ l'idéal de $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ des polynômes b vérifiant au voisinage de x_0 :

$$b(s_1, \dots, s_p) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}.$$

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Bernstein de* (m, f_1, \dots, f_p) *au voisinage de* x_0 . Suivant J. Bernstein [2], ils permettent de construire un prolongement des intégrales $I_\phi(s_1, \dots, s_p)$. Dans [23], C. Sabbah montre l'existence pour tout $x_0 \in X$ d'un ensemble fini \mathcal{H} de formes linéaires à coefficients premiers entre eux dans \mathbb{N} telles que

$$\prod_{H \in \mathcal{H}} \prod_{i \in I_{\mathcal{H}}} (H(s_1, \dots, s_p) + \alpha_{H,i}) \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p),$$

où $\alpha_{H,i}$ sont des nombres complexes. Dans [24], C. Sabbah montre comment en déduire des résultats analogues à ceux de F. Loeser. Notons que pour $p > 1$, J. Briançon et H. Maynadier montrent dans [8] que l'idéal $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ n'est en général pas principal.

L'objet de cet article est notamment de montrer l'existence d'un ensemble \mathcal{H} minimal. De plus, lorsque m est une section d'un module holonome régulier, nous expliciterons cet ensemble géométriquement à partir de la variété caractéristique du système différentiel engendré par m .

Sur $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$, nous considérons la filtration dièse (resp. la filtration relative) qui étend la filtration de \mathcal{D}_X en donnant à s_i le poids un (resp. zéro). Si M est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent muni d'une bonne filtration dièse (resp. relative), nous notons $\text{gr}^\# M$ (resp. $\text{gr}^{\text{rel}} M$) son gradué pour cette filtration. La racine de l'anneau de $\text{gr}^\# M$ (resp. $\text{gr}^{\text{rel}} M$) est indépendante de la bonne filtration et définit un sous-espace analytique de $T^*X \times \mathbb{C}^p$ appelé *variété caractéristique dièse* (resp. *relative*) de M et notée $\text{car}^\# M$ (resp. $\text{car}^{\text{rel}} M$).

Si M est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent, nous expliquons que les dimensions des variétés caractéristiques dièse et relative de M se déterminent à l'aide des nombres grade des fibres de M . Ces résultats généralisent ceux des \mathcal{D}_X -modules cohérents (voir pour ce cas [3, 11, 15]). En utilisant le théorème d'involativité de O. Gabber, nous montrons alors que pour toute section m d'un module holonome :

RÉSULTAT 1. Il existe une variété lagrangienne conique Λ de T^*X non lisse en général telle que

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbb{C}^p.$$

Il en résulte en particulier que la dimension du $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

est inférieure ou égale à $\dim X + p - 1$.

RÉSULTAT 2. Il existe une famille de couples (S_α, X_α) où les S_α sont des sous-variétés algébriques de \mathbf{C}^p de dimensions inférieures ou égales à $p - 1$ et les X_α des sous-espaces analytiques de X telles que

$$\text{car}^{\text{rel}} \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha.$$

Par définition de la variété caractéristique relative, la réunion des S_α pour $x_0 \in X_\alpha$ est la variété des zéros de l'idéal $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$. Cette preuve (dans le cas analytique) nécessite un théorème des zéros relatif que nous établissons. Au passage, pour tout x_0 dans X , notre résultat donne une nouvelle démonstration de l'existence d'un polynôme non nul dans $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$. Cette démonstration n'est intéressante que dans le cas analytique. En effet, si les f_i sont des polynômes, la preuve de J. Bersntein donnée dans [2] se généralise sans modification et reste la meilleure référence.

Pour préciser la structure de l'idéal $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$, le problème est que les variétés algébriques S_α ne sont à priori pas toutes réunions d'hypersurfaces. En adaptant un résultat inspiré de O. Gabber et donné par J.E. Björk dans [3] sur le conoyau d'un endomorphisme injectif d'un module pur, nous montrons que si M est un \mathcal{D}_X -module holonome engendré par une section m , la famille \mathcal{G} des sous- $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -modules L de type fini de $M[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ contenant $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ et tels que, pour tout point $x_0 \in X$,

$$\text{grade} \frac{L_{x_0}}{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}} \geq \dim X + 2$$

admet un plus grand élément noté \tilde{L} . Ce module \tilde{L} est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent vérifiant :

- (1) $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \subset \tilde{L}$,
- (2) $\tau(\tilde{L}) \subset \tilde{L}$,
- (3) $\tilde{L}/\tau(\tilde{L})$ est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent dont les fibres non nulles sont des modules purs de grade $\dim X + 1$, c'est à dire des modules tels que tous leurs sous-modules non réduit à zéro aient même dimension.

Notons que, pour $p = 1$, $\tilde{L} = \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ et le quotient $\tilde{L}/\tau(\tilde{L})$ a des fibres non nulles pures de dimension la dimension de X (voir [14]).

Nous déduisons de notre résultat la précision suivante :

$$\text{RÉSULTAT 3. } \text{car}^{\text{rel}} \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha, \text{ avec :}$$

- Chaque variété algébrique S_α est de dimension $p - 1$.

- Les composantes irréductibles de dimension $p - 1$ de chaque S_α sont des hyperplans affines $H_{\alpha,\beta}$ dont les directions sont des noyaux de formes linéaires à coefficients entiers positifs et premiers entre eux dans \mathbf{N} .
- Les composantes irréductibles des S_α de dimension strictement inférieure à $p - 1$ sont contenues dans des hyperplans affines du type $\tau^k(H_{\alpha,\beta})$ où $k \in \mathbf{Z}$ et τ la translation $(s_1, \dots, s_p) \mapsto (s_1 + 1, \dots, s_p + 1)$.

Pour $x_0 \in X$, notons $\mathcal{H}(x_0, m)$ l'ensemble des directions des hyperplans $H_{\alpha,\beta}$ pour α tel que x_0 soit dans X_α . Nous appelons ces directions les pentes de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 .

Le fait que les composantes irréductibles de dimension $p - 1$ des S_α soient des hyperplans affines dont les directions sont les noyaux de formes linéaires à coefficients premiers entre eux dans \mathbf{N} se déduit en fait du résultat de C. Sabbah sur l'existence d'un polynôme de Bernstein qui soit un produit de formes linéaires.

Nous obtenons alors :

RÉSULTAT 4. Considérons un produit de formes linéaires affines $c(s_1, \dots, s_p)$ qui appartient à $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$. Alors, toute hyperplan vectoriel de $\mathcal{H}(x_0, m)$ est direction de l'un des facteurs de $c(s_1, \dots, s_p)$. De plus, il existe dans $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ un produit de formes linéaires affines dont les directions sont exactement l'ensemble $\mathcal{H}(x_0, m)$ des pentes de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 . Enfin, la variété des zéros de $\mathbf{in} \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$, l'idéal engendré par les parties homogènes de plus haut degré des éléments de $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$, est la réunion des pentes de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 . La racine de $\mathbf{in} \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ est en particulier un idéal principal.

Considérons l'application

$$\exp^{2i\pi\cdot}: \mathbf{C}^p \rightarrow (\mathbf{C}^*)^p, \quad (s_1, \dots, s_p) \mapsto (e^{2i\pi s_1}, \dots, e^{2i\pi s_p}).$$

RÉSULTAT 5. L'image par l'application $\exp^{2i\pi\cdot}$ de la variétés des zéros de $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ est une réunion de sous-ensembles de $(\mathbf{C}^*)^p$ où chaque sous-ensemble est défini par une équation du type

$$(\sigma_1)^{a_1} \dots (\sigma_p)^{a_p} = \alpha$$

où (a_1, \dots, a_p) est une famille d'éléments de \mathbf{N} premier entre eux et α un nombre complexe. L'ensemble des (a_1, \dots, a_p) est l'ensemble des coefficients des d'équations des pentes de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 .

Ce résultat répond à une question de N. Budur [9] posée pour le cas particulier $M = \mathcal{O}_X$.

Nous allons maintenant préciser $\mathcal{H}(x_0, m)$ lorsque m est une section d'un module holonome régulier. Rappelons pour cela quelques notations.

Soit Λ une variété lagrangienne conique de T^*X . Nous désignons par $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\#$ l'adhérence dans $T^*X \times \mathbf{C}^p$ de

$$\left\{ \left(x, \xi + \sum_{i=1}^p s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)}, s_1, \dots, s_p \right); s_i \in \mathbf{C}, (x, \xi) \in \Lambda \text{ et } F(x) \neq 0 \right\}.$$

Dans [5], avec J. Briançon et M. Merle, nous avons montré que si Λ n'est pas contenu dans $F^{-1}(0)$, les composantes irréductibles de $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0)$ sont toutes de dimension $\dim X + p - 1$. Leurs projections sur \mathbf{C}^p sont des hyperplans vectoriels dont les équations sont des formes linéaires à coefficients entiers positifs ou nuls. Nous appelons *pentés de $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$ au voisinage de x_0* les hyperplans vectoriels obtenus par projection sur \mathbf{C}^p des composantes irréductibles de $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0)$ qui rencontre la fibre de x_0 . Nous notons $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$ l'ensemble de ces pentés.

À l'aide d'un résultat de C. Sabbah sur les variétés caractéristiques d'un module relatif engendrant un module holonome régulier ([24, théorème 3.2]), nous avons établi les résultats suivants avec J. Briançon et M. Merle dans [6]. Soit M un \mathcal{D}_X -module holonome régulier M de variété caractéristique Λ et m une section engendrant M , alors :

- (1) $\text{car}^\#(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\#$,
- (2) $\text{car}^\# \left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0)$;
- (3) $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\#(0) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap (s_1 = \dots = s_p = 0)$ est une variété lagrangienne conique de T^*X .

Un premier résultat dans ce sens était donné par M. Kashiwara et T. Kawai dans [16]. Nous montrons :

RÉSULTAT 6. Si m est une section d'un module holonome régulier engendrant un \mathcal{D}_X -module de variété caractéristique Λ :

- les pentés de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 sont égales aux pentés de $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$ au voisinage de x_0 : $\mathcal{H}(x_0, m) = \mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$;
- $\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\#(0) \times \mathbf{C}^p$.

Nous avons obtenu avec J. Briançon et M. Merle dans [7] des résultats analogues pour $p = 2$ et pour p quelconque dans le cas où les pentés de $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$ sont contenues dans les hyperplans de coordonnées de \mathbf{C}^p . Dans [18], est développé une théorie des cycles évanescents de ces morphismes que nous appelons sans pente.

1. Filtration dièse et filtration relative d'un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module

Soit X une variété analytique complexe. Nous désignons par \mathcal{O}_X le faisceau des fonctions holomorphes sur X et par \mathcal{D}_X celui des opérateurs différentiels muni de sa filtration naturelle $(\mathcal{D}_X(k))_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'ordre des dérivations.

Localement, nous identifions X à \mathbb{C}^n au moyen d'un système (x_1, \dots, x_n) de coordonnées locales. Un opérateur $P \in \mathcal{D}_X(k)$ s'écrit alors

$$P = \sum_{|\beta| \leq k} c_\beta(x) \partial^\beta$$

où

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n, \quad c_\beta \in \mathcal{O}_X, \quad \partial^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n}.$$

Désignons $\pi: T^*X \rightarrow X$ le fibré cotangent à X . Le gradué $\text{gr } \mathcal{D}_X$ s'identifie au sous-faisceau de $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*X})$ des fonctions analytiques sur T^*X polynomiales par rapport aux fibres de π . Il est isomorphe localement au faisceau d'anneaux commutatifs gradués $\mathcal{O}_X[\xi_1 \dots \xi_n]$. Si $P \in \mathcal{D}_X(k) - \mathcal{D}_X(k-1)$, sa classe modulo $\mathcal{D}_X(k-1)$ définit une section de $\text{gr } \mathcal{D}_X$ appelé symbole principal de P et noté $\sigma(P)$.

Si M est un \mathcal{D}_X -module cohérent, nous notons $\text{car}_{\mathcal{D}_X} M$ sa variété caractéristique.

Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Dans cette section, nous allons étudier le faisceau d'anneaux $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] = \mathbb{C}_X[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_X$. Nous notons toujours $\pi: T^*X \times \mathbb{C}^p \rightarrow X$ la projection naturelle.

1.1 – Filtration dièse de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$

La filtration $(\mathcal{D}_X^\# [s_1, \dots, s_p](k))_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ est définie comme suit : un opérateur P appartient à $\mathcal{D}_X^\# [s_1, \dots, s_p](k)$ s'il s'écrit localement

$$P = \sum_{|\alpha| + |\beta| \leq k} a_{\alpha, \beta}(x) s^\alpha \partial^\beta \quad \text{où } a_{\alpha, \beta} \in \mathcal{O}_X, s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_p^{\alpha_p},$$

Nous l'appelons cette filtration la *filtration dièse* de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$.

Nous désignons par $\text{gr}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ le gradué de cette filtration. Ce gradué s'identifie au sous-faisceau de $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*X \times \mathbb{C}^p})$ des fonctions analytiques sur $T^*X \times \mathbb{C}^p$ polynomiales par rapport aux fibres de π . Il est isomorphe localement au faisceau d'anneaux commutatifs gradués $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, \xi_1, \dots, \xi_n]$. Il en résulte que $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ est un faisceau cohérent d'anneaux (voir par exemple [3, Appendix III, Theorem 2.7]).

$P \in \mathcal{D}_X^\# [s_1, \dots, s_p](k) - \mathcal{D}_X^\# [s_1, \dots, s_p](k-1)$ modulo $\mathcal{D}_X^\# [s_1, \dots, s_p](k-1)$ définit une section de $\text{gr}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ appelée symbole dièse de P et notée $\sigma^\#(P)$.

Localement,

$$\sigma^\sharp(P)(x, \xi, s) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} a_{\alpha,\beta}(x) s^\alpha \xi^\beta, \quad \text{où } P = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq k} a_{\alpha,\beta}(x) s^\alpha \partial^\beta.$$

Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent et $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une filtration de M pour la filtration dièse. Cette filtration est dite bonne si localement, il existe des sections m_1, \dots, m_l de M et des entiers relatifs k_1, \dots, k_l tels que

$$M_k = \sum_{i=1}^l \mathcal{D}_X^\sharp[s_1, \dots, s_p](k - k_i) m_i.$$

Nous notons $\text{gr}^\sharp M$ le gradué de M pour cette filtration et $\text{Ann gr}^\sharp M$ son annulateur comme $\text{gr}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module. La racine de $\text{Ann gr}^\sharp M$ est un idéal cohérent de $\text{gr}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ indépendante des bonnes filtrations dièses de M . Nous notons $J^\sharp(M)$ cet idéal. Nous appelons *variété caractéristique dièse* de M le sous-espace analytique de $T^*X \times \mathbb{C}^p$ défini par $J^\sharp(M)$. Nous le notons $\text{car}^\sharp M$.

Soit $x_0 \in X$. Au voisinage de x_0 , nous identifions X à \mathbb{C}^n et x_0 à l'origine au moyen d'un système de coordonnées locales. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$, notons $\mathcal{M}_{x_0, a, b}$ l'idéal maximal de $\text{gr}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]_{x_0}$ engendré par

$$x_1, \dots, x_n, \quad \xi_1 - a_1, \dots, \xi_n - a_n, \quad s_1 - b_1, \dots, s_p - b_p$$

où $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_p)$. Le localisé $((\text{gr}^\sharp M)_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0, a, b}}$ est un module de type fini sur l'anneau local $(\text{gr}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0, a, b}}$. Sa dimension est indépendante de la bonne filtration dièse de M et coïncide avec $\dim_{x_0, a, b} \text{car}^\sharp M$ la dimension en (x_0, a, b) de $\text{car}^\sharp M$ (assertion analogue à [11, chapitre 5, remarque 12]) :

$$\dim((\text{gr}^\sharp M)_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0, a, b}} = \dim_{x_0, a, b} \text{car}^\sharp M.$$

Comme les fibres de la restriction de π à $\text{car}^\sharp M$ sont coniques :

$$\dim_{x_0, 0, 0} \text{car}^\sharp M = \sup_{(a, b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p} \dim_{x_0, a, b} \text{car}^\sharp M.$$

Le module $(\text{gr}^\sharp M)_{x_0}$ est gradué et $\mathcal{M}_{x_0, 0, 0}$ est le seul idéal maximal gradué de $\text{gr}^\sharp \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]_{x_0}$. Il s'en suit que

$$\dim(\text{gr}^\sharp M)_{x_0} = \dim((\text{gr}^\sharp M)_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0, 0, 0}}.$$

Suivant J.-P Serre ([25, chapitre 4]), un anneau A commutatif noethérien est régulier si la borne supérieure $\text{gldh}(A)$ des entiers k tels que $\text{Ext}^k(M, N) \neq 0$ pour un couple

M, N de A -module est finie. Cette borne supérieure est appelée la dimension homologique globale de A . L'anneau des séries convergentes $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ est régulier de dimension homologique globale n . Des propriétés de transfert de la régularité ([25, chapitre 4, proposition 25]), il résulte que l'anneau $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}[s_1, \dots, s_p, \xi_1 \dots \xi_n]$ est régulier de dimension $2n + p$. L'anneau localisé $(\text{gr}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0,0,0}}$ est alors un anneau local régulier de dimension $2 \dim X + p$ ([25, Chapitre 4, proposition 23]). C'est donc un anneau de Cohen–Macaulay ([25, Chapitre 4, paragraphe D, corollaire 3]) : la longueur des suites régulières maximales formées d'éléments de son idéal maximal coïncide avec la dimension de l'anneau. Suivant D. Rees [21], si A est un anneau commutatif noethérien et E un A -module commutatif, nous appelons *nombre grade* de E l'entier :

$$\text{grade } E = \inf\{i \in \mathbf{N}; \text{Ext}_A^i(E, A) \neq 0\}.$$

Si $I = \text{ann } E$ est l'annulateur de E , $\text{grade } E = \text{grade } (A/I)$ et est le nombre maximum d'éléments d'une suite régulière de A formée d'éléments de I ([19, Chapter 6, Section 15 D]).

Si M est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent, pour tout $x_0 \in X$, les idéaux associés à $(\text{gr}^\# M)_{x_0}$ sont contenus dans $\mathcal{M}_{x_0,0,0}$. Nous obtenons alors en utilisant la platitude et la commutation des Ext à la localisation pour les modules de type finie ([25, chapitre 4, proposition 18]) :

$$\text{grade } (\text{gr}^\# M)_{x_0} = \text{grade } ((\text{gr}^\# M)_{x_0})_{\mathcal{M}_{x_0,0,0}}.$$

Rappelons que si E est un A -module de type fini sur un anneau A local commutatif noethérien de Cohen–Macaulay ([19, Chapter 6, Theorem 31]) :

$$\text{grade } E + \dim \frac{A}{\text{ann } E} = \dim A.$$

Il en résulte :

PROPOSITION 1. *Soit M est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent, pour tout $x_0 \in X$,*

$$\dim (\text{gr}^\# M)_{x_0} = 2 \dim X + p - \text{grade } (\text{gr}^\# M)_{x_0} = \dim_{x_0,0,0} \text{car}^\# M.$$

1.2 – Filtration relative de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$

La filtration $(\mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k))_{k \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ est définie comme suit : un opérateur $P \in \mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k)$ s'il s'écrit localement

$$P = \sum_{|\beta| \leq k} a_\beta(x, s) \partial^\beta \quad \text{où } a_\beta \in \mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p] \text{ et } \partial^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n}.$$

Nous appelons cette filtration la *filtration relative* de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$.

Nous désignons par $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ le gradué de cette filtration. Ce gradué s'identifie au sous-faisceau de $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*X \times \mathbf{C}^p})$ des fonctions analytiques sur $T^*X \times \mathbf{C}^p$ polynomiales par rapport aux fibres de π . Il est isomorphe localement au faisceau d'anneaux commutatifs gradués $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, \xi_1, \dots, \xi_n]$.

Un opérateur

$$P \in \mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k) - \mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k-1)$$

modulo $\mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k-1)$ définit une section de $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ appelée symbole relatif de P et noté $\sigma^{\text{rel}}(P)$. Localement,

$$\sigma^{\text{rel}}(P)(x, \xi, s) = \sum_{|\beta|=k} a_\beta(x, s) \xi^\beta \quad \text{où } P = \sum_{|\beta| \leq k} a_{\alpha, \beta}(x, s) \partial^\beta.$$

Le faisceau d'anneaux $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ s'identifie à $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, \xi_1 \dots \xi_n]$. C'est un faisceau cohérent d'anneaux commutatifs. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent et $(M_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ une filtration de M pour la filtration relative. Nous disons que cette filtration est bonne si localement, il existe des sections m_1, \dots, m_l de M et des entiers relatifs k_1, \dots, k_p tels que

$$M_k = \sum_{i=1}^p \mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k - k_i) m_i.$$

Nous notons $\text{gr}^{\text{rel}} M$ le gradué de M pour cette filtration et $\text{Ann } \text{gr}^{\text{rel}} M$ son annulateur comme $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module. La racine de $\text{Ann } \text{gr}^{\text{rel}} M$ est un idéal cohérent de $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ indépendant des bonnes filtrations relatives de M . Nous notons $J^{\text{rel}}(M)$ cet idéal. Nous appelons variété caractéristique relative de M le sous-espace analytique de $T^*X \times \mathbf{C}^p$ défini par $J^{\text{rel}}(M)$ et le notons $\text{car}^{\text{rel}} M$.

Soit $p: X \times \mathbf{C}^p \rightarrow X$ la projection sur X . Pour tout $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent M , posons $M^{\text{an}} = \mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} p^{-1}M$. Le faisceau

$$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]^{\text{an}} = \mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} p^{-1}\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$$

s'identifie au faisceau $\mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}$ des opérateurs différentiels relatifs. La filtration naturelle de $\mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}$ par l'ordre des dérivations n'est autre que

$$\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} p^{-1}\mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k).$$

Le faisceau M^{an} est un $\mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}$ -module cohérent. Si $(M_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est une bonne filtration relative de M , $\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} p^{-1}M_k$ est une bonne filtration de M^{an} . Le gradué de cette filtration s'identifie à $\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} p^{-1}\text{gr}^{\text{rel}} M$. Par platitude de $\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p}$ sur $p^{-1}\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$, son annulateur est $\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]}$

$p^{-1} \text{Ann gr}^{\text{rel}} M$ (voir [4, Chapitre 1, paragraphe 2, corollaire 2]). Nous notons $J(M^{\text{an}})$ la racine de cet annulateur qui ne dépend pas des bonnes filtrations de M^{an} . Le sous-espace analytique car M^{an} de $T^*X \times \mathbf{C}^p$ défini par $J(M^{\text{an}})$ coïncide avec $\text{car}^{\text{rel}} M$.

On observe que les faisceaux de modules $\text{gr}^{\text{rel}} M$ et $\text{gr}^{\text{rel}} M^{\text{an}}$ sur $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ et $\text{gr} \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}$ sont cohérents ([3, Appendix III, Theorem 2.17]). Par platitude, pour tout entier i ,

$$\text{Ext}_{\text{gr} \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}}^i(\text{gr} M^{\text{an}}, \text{gr} \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p})$$

et

$$\text{Ext}_{\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(\text{gr}^{\text{rel}} M, \text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])^{\text{an}}$$

sont isomorphes. Il en résulte que pour tout $x_0 \in X$, il existe U voisinage de x_0 tel que pour tout $(x, b) \in U \times \mathbf{C}^p$:

$$\text{grade}(\text{gr} M^{\text{an}})_{x,b} \geq \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0}$$

La même preuve que dans le cas de la filtration dièse portant sur le fait qu'un anneau local régulier est Cohen–Macaulay montre :

$$\begin{aligned} \text{grade}(\text{gr} M^{\text{an}})_{x,b} &= 2 \dim X + p - \dim_{x,0,b} \text{car}^{\text{rel}} M \\ &= 2 \dim X + p - \sup_{a \in \mathbf{C}^n} \dim_{x,a,b} \text{car}^{\text{rel}} M. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

REMARQUE 1. Si M est un un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent, pour tout $x_0 \in X$, il existe U voisinage de x_0 tel que, pour tout $(x, b) \in U \times \mathbf{C}^p$,

$$\begin{aligned} \dim_{x,0,b} \text{car}^{\text{rel}} M &= \sup_{a \in \mathbf{C}^n} \dim_{x,a,b} \text{car}^{\text{rel}} M \\ &\leq 2 \dim X + p - \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0}. \end{aligned}$$

Une difficulté de l'anneau $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ est d'une part que ses fibres n'ont pas même hauteur et d'autre part le défaut de fidèle platitude de $\mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p}$ sur $p^{-1} \mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$. Par exemple, l'anneau quotient

$$L = \frac{\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}[s_1, \dots, s_p]}{(1 - s_1 x_1)} \neq 0,$$

mais $\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_p\} \otimes_{\mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}[s_1, \dots, s_p]} L = 0$. Cette difficulté était déjà soulignée dans [20].

LEMME 1 (théorème des zéros relatifs). *Si N est un $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent, pour tout x_0 in X ,*

$$N_{x_0} = 0 \iff \exists U \text{ voisinage de } x_0 \text{ tel que } N^{\text{an}}|_{p^{-1}(U)} = 0.$$

DÉMONSTRATION. \implies est facile. Nous montrons l'autre implication dans le sous-paragraphe 4. ■

PROPOSITION 2. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent et $x_0 \in X$:

$$\begin{aligned} \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} &= \sup_U \text{voisinage de } x_0 \inf_{(x,b) \in p^{-1}(U)} \text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b} \\ &= 2 \dim X + p - \inf_{U \text{ voisinage de } x_0} \sup_{(x,b) \in p^{-1}(U)} \dim_{x_0,0,b} \text{car}^{\text{rel}} M. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in X$ et U voisinage de x_0 . Posons

$$k = \inf_{(x,b) \in p^{-1}(U)} \text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b}.$$

Pour $i < k$, pour tout $(x, b) \in p^{-1}(U)$,

$$\text{Ext}_{\text{gr } \mathcal{D}_{\frac{X \times \mathbb{C}^p}{\mathbb{C}^p}}}^i(\text{gr } M^{\text{an}}, \text{gr } \mathcal{D}_{\frac{X \times \mathbb{C}^p}{\mathbb{C}^p}})_{x,b} = 0.$$

Il résulte du lemme que pour $i < k$

$$\text{Ext}_{\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i(\text{gr}^{\text{rel}} M, \text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p])_{x_0} = 0.$$

Donc, pour tout U voisinage de x_0 ,

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \geq \inf_{(x,b) \in p^{-1}(U)} \text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b}.$$

et donc

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \geq \sup_U \text{voisinage de } x_0 \inf_{(x,b) \in p^{-1}(U)} \text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b}.$$

D'autre part, voir suivant la remarque 1, il existe U_0 voisinage de x_0 tel que pour tout $(x, a) \in U_0 \times \mathbb{C}^p$

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \leq \text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b}$$

Ainsi, sur ce voisinage U_0 ,

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \leq \inf_{(x,b) \in p^{-1}(U_0)} \text{grade}(\text{gr } M^{\text{an}})_{x,b},$$

ce qui montre la proposition. ■

1.3 – Dimension d'un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent

Soit B un anneau non nécessairement commutatif, nous disons qu'il est régulier s'il est noethérien à gauche et à droite et de dimension homologique globale finie. Si E est un B -module de type fini, par exemple à gauche, nous appelons *nombre grade de E* l'entier

$$\text{grade } E = \inf\{i \in \mathbf{N}; \text{Ext}_B^i(E, B) \neq 0\}.$$

Suivant J.-E. Björk ([3, Appendix IV]), nous disons qu'un anneau régulier B vérifie la condition d'Auslander si pour tout B -module à gauche E de type fini et tout sous-module N à droite de $\text{Ext}_B^k(E, B)$, $\text{grade } N$ est supérieur ou égal à k .

Tout anneau A régulier commutatif vérifie la condition d'Auslander ([1]). Rappelons une preuve de la démonstration. Tout d'abord, nous nous ramenons facilement au cas où A est local. Dans ce cas, pour tout module N de type fini, $\text{grade } N = \dim A - \dim N$. En utilisant cette égalité, il suffit de montrer que si M est un module de type fini, $\text{grade } \text{Ext}_A^k(M, A) \geq k$. Soit q un idéal premier appartenant au support de $\text{Ext}_A^k(M, A)$. Alors, $\text{Ext}_{A_q}^k(M_q, A_q) = \text{Ext}_A^k(M, A)_q \neq 0$. Ainsi, $\text{gl dim } A_q$, la dimension homologique globale de A_q , est supérieure ou égale à k . Or l'anneau A_q est régulier. Donc, suivant [25, chapitre IV, corollaire 2], $\text{gl dim } A_q = \dim A_q$. Choisissons q tel que $\dim A/q = \dim \text{Ext}_A^k(M, A)$. Comme A est Cohen Macaulay $\text{ht}(q) + \dim A/q = \dim A$ où $\text{ht}(q)$ désigne la hauteur de l'idéal, q . Nous obtenons

$$\text{grade } \text{Ext}_A^k(M, A) = \dim A - \dim \frac{A}{q} = \text{ht}(q) = \dim A_q = \text{gl dim } A_q \geq k.$$

Cette propriété d'Auslander est à la base des propriétés du nombre grade et de la filtration d'un module par son complexe bidualisant.

Suivant Björk ([3, Appendix IV, Theorem 4.15]), si B est un anneau filtré positivement dont le gradué est régulier et vérifie la condition d'Auslander, alors B est régulier et vérifie la condition d'Auslander. De plus, pour tout B module de type fini à gauche,

$$\text{grade}_B M = \text{grade}_{\text{gr } B} \text{gr } M,$$

où $\text{gr } M$ désigne le gradué d'une bonne filtration de M . L'application de ces résultats donnent :

PROPOSITION 3. *Les fibres de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ sont des anneaux réguliers qui vérifient la condition d'Auslander. De plus, pour tout $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent M et $x_0 \in X$,*

$$\text{grade } M_{x_0} = \text{grade}(\text{gr}^\# M)_{x_0} = \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \quad .$$

Compte-tenu des propositions 1 et 2, nous obtenons le théorème suivant qui établit le lien entre le grade d'un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent et les dimensions de ses variétés caractéristiques dièse et relative.

THÉORÈME 1. *Pour tout $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent M et $x_0 \in X$,*

$$\begin{aligned} \dim_{x_0,0,0} \text{car}^\# M &= \inf_{U \text{ voisinage de } x_0} \sup_{(x,b) \in p^{-1}(U)} \dim_{x_0,b,0} \text{car}^{\text{rel}} M \\ &= 2 \dim X + p - \text{grade } M_{x_0}. \end{aligned}$$

1.4 – Théorème des zéros relatifs

PROPOSITION 4. *Soit X une variété analytique et I un idéal cohérent de $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ tel que $V(I) = \{(x, s) \in X \times \mathbf{C}^p; \forall g \in I: g(x, s) = 0\}$ soit l'ensemble vide. Alors, $I = \mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$.*

DÉMONSTRATION. La question est locale sur X . Nous pouvons supposer que X est un voisinage de l'origine dans \mathbf{C}^n et $I = (g_1, \dots, g_l)$ où $g_i \in \mathcal{O}_X(X)[s_1, \dots, s_p]$. Par hypothèse, le système d'équations

$$g_1(x, s) = \dots = g_l(x, s) = 0, \quad (x, s) \in X \times \mathbf{C}^p$$

n'a pas de solution. Nous devons montrer qu'il existe U voisinage de l'origine dans \mathbf{C}^n et $a_1, \dots, a_l \in \mathcal{O}_X(U)[s_1, \dots, s_p]$ tels que

$$1 = \sum_{i=1}^l a_i g_i|_U.$$

Soit un entier d tel que pour tout $x \in X$, les degrés en s des polynômes $g_i(x, s)$ soient bornés par d . Chaque g_i s'écrit $\sum_{|\beta| \leq d} g_{i,\beta}(x) s^\beta$ où $g_{i,\beta} \in \mathcal{O}_X$. D'après le théorème des zéros effectif ([2, 13]), il existe un entier N tel que pour tout $x \in X$, il existe des polynômes $a_1(x)(s), \dots, a_l(x)(s)$ en s de degré inférieur ou égal à N tels que

$$1 = \sum_{i=1}^l a_i(x)(s) g_i(x, s).$$

Considérons alors l'équation polynomiale dont les inconnues sont les $a_{i,\alpha}$ où $i \in \{1, \dots, l\}$, $\alpha \in \mathbf{N}^p$ et $|\alpha| \leq N$:

$$\sum_{i=1}^l \left(\sum_{|\alpha| \leq N} a_{i,\alpha} s^\alpha \right) \left(\sum_{|\beta| \leq d} g_{i,\beta}(x) s^\beta \right) = 1,$$

Cette équation s'écrit

$$\sum_{|\gamma| \leq N+d} \left(\sum_{i=1}^l \left(\sum_{|\alpha| \leq N, |\beta| \leq d}^{\alpha+\beta=\gamma} a_{i,\alpha} g_{i,\beta}(x) \right) \right) s^\gamma = 1.$$

Elle est équivalente au système linéaire d'inconnues les $a_{i,\alpha}$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^l g_{i,0}(x) a_{i,0} = 1 \\ \sum_{i=1}^l \sum_{|\alpha| \leq N, |\beta| \leq d}^{\alpha+\beta \neq 0} g_{i,\beta}(x) a_{i,\alpha} = 0. \end{cases}$$

Nous avons vu que pour tout $x \in U$, ce système a des solutions. Après avoir ordonné les α et γ , ce système s'écrit

$$G(x)A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

où A est une matrice colonne de coefficients $a_{i,\alpha}$ et $G(x)$ une matrice dont les coefficients non nuls sont des $g_{i,\beta}(x)$.

Soit Δ_1 un mineur de la matrice $G(x)$ de taille maximum r_1 non identiquement nul dans un voisinage U de l'origine. Suivant les formules de Cramer, il existe des $b_{i,\alpha,1}(x)$ mineurs de taille $r_1 - 1$ de $G(x)$ tels que, pour tout $x \in U$ vérifiant $\Delta_1(x) \neq 0$,

$$\sum_{i=1}^l \left(\sum_{|\alpha| \leq N} \frac{b_{i,\alpha,1}(x)}{\Delta_1(x)} s^\alpha \right) g_i(x, s) = 1.$$

Ainsi, pour tout $x \in U$ tels que $\Delta_1(x) \neq 0$,

$$\Delta_1(x) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{|\alpha| \leq N} b_{i,\alpha,1}(x) s^\alpha \right) g_i(x, s).$$

Donc, pour tout $x \in U$,

$$\Delta_1^2(x) = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{|\alpha| \leq N} b_{i,\alpha,1}(x) \Delta_1(x) s^\alpha \right) g_i(x, s).$$

Si $\Delta_1(0) \neq 0$, quitte à diminuer U , nous obtenons l'existence de

$$a_1, \dots, a_p \in \mathcal{O}_X(U)[s_1, \dots, s_p]$$

tels que

$$1 = \sum_{i=1}^l a_i g_i|_U.$$

Si $\Delta_1(0) = 0$, considérons sur $\Delta_1^{-1}(0) \subset X$, un mineur Δ_2 de la matrice $G(x)$ de taille maximum r_2 non identiquement nul dans un voisinage U de l'origine. Suivant les formules de Cramer, il existe des $b_{i,\alpha,2}(x)$ mineurs de taille $r_2 - 1$ de $G(x)$ tels que, pour tout $x \in U$ vérifiant $\Delta_1(x) = 0$ et $\Delta_2(x) \neq 0$,

$$\sum_{i=1}^l \left(\sum_{|\alpha| \leq N} \frac{b_{i,\alpha,2}(x)}{\Delta_2(x)} s^\alpha \right) g_i(x, s) = 1.$$

Il en résulte :

$$\Delta_2^2(x) - \sum_{i=1}^l \left(\sum_{|\alpha| \leq N} b_{i,\alpha,2}(x) \Delta_2(x) s^\alpha \right) g_i(x, s)$$

nul sur $\Delta_1^{-1}(0)$. D'après le théorème des zéros analytiques, il existe quitte à diminuer U un entier k tel que

$$(\Delta_2^2(x) - \sum_{i=1}^l \left(\sum_{|\alpha| \leq N} b_{i,\alpha,2}(x) \Delta_2(x) s^\alpha \right) g_i(x, s))^k \in \mathcal{O}_X(U)[s_1, \dots, s_p](\Delta_1^2(x)).$$

Vu l'écriture de Δ_1^2 , nous en déduisons quitte à diminuer U , l'existence de

$$a_1, \dots, a_p \in \mathcal{O}_X(U)[s_1, \dots, s_p]$$

tels que

$$\Delta_2^{2k}(x) = \sum_{i=1}^l a_i g_i|_U.$$

Si $\Delta_2(0) \neq 0$, nous terminons comme précédemment. Sinon, nous itérons. Le processus aboutit car les mineurs de taille 1 de $G(x)$ ne sont pas tous nuls en zéro. ■

COROLLAIRE 1. *Soit X une variété analytique complexe, N un $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent tel que $N^{\text{an}} = \mathcal{O}_{X \times \mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]} p^{-1}N$ soit nul où p désigne la projection de $X \times \mathbf{C}^p$ sur \mathbf{C}^p . Alors, $N = 0$.*

DÉMONSTRATION. $(\text{Ann } N)^{\text{an}} = \text{Ann}(N^{\text{an}})$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 4 à l'idéal $\text{Ann } N$. ■

COROLLAIRE 2. Soit X une variété analytique et I un idéal cohérent de $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$. Soit $h \in \mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p]$ tel que h s'annule sur

$$V(I) = \{(x, s) \in X \times \mathbf{C}^p; \forall g \in I: g(x, s) = 0\}.$$

Alors, localement au voisinage de tout point de X , il existe k tel que $h^k \in I$.

DÉMONSTRATION. L'astuce de Rabinowitch s'adapte sans problème. ■

2. $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module majoré par une lagrangienne

2.1 – Conséquence du théorème d'involutivité

Considérons sur $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ la filtration dièse. Le faisceau $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ est un faisceau de \mathbf{Q} -algèbres et $\text{gr}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ est un faisceau d'anneaux commutatifs. Si $P \in \mathcal{D}_X^\# [s_1, \dots, s_p](k)$ et $Q \in \mathcal{D}_X^\# [s_1, \dots, s_p](l)$,

$$PQ - QP \in \mathcal{D}_X^\# [s_1, \dots, s_p](k + l - 1).$$

Dans un système de coordonnées locales, si $PQ - QP \notin \mathcal{D}_X^\# [s_1, \dots, s_p](k + l - 2)$,

$$\sigma^\#(PQ - QP) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma(P)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \sigma(Q)}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma(P)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \sigma(Q)}{\partial x_i}.$$

Cette formule étend le crochet de Poisson défini sur les symboles des opérateurs de \mathcal{D}_X . Si α et β sont des fonctions sur $\text{gr}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$, nous appelons crochet de Poisson de α et β :

$$\{\alpha, \beta\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_i}.$$

Le théorème de O. Gabber [10] assure que si M est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent à gauche, $J^\#(M)$ la racine de l'annulateur du gradué de M pour toutes bonnes filtrations dièses est stable par crochet de Poisson.

Si nous considérons sur $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ la filtration relative, $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ est encore un faisceau d'anneaux commutatifs. Par le même théorème, nous obtenons que pour tout $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent à gauche M , $J^{\text{rel}}(M)$ la racine de l'annulateur du gradué de M pour toutes bonnes filtrations relatives est stable par crochet de Poisson. Et si α et β sont des fonctions sur $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$, le crochet de Poisson est toujours donné par la formule

$$\{\alpha, \beta\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_i}.$$

Soit $\pi_2: T^*X \times \mathbf{C}^p \rightarrow \mathbf{C}^p$, la projection sur \mathbf{C}^p . Pour tout sous-ensemble Z de $T^*X \times \mathbf{C}^p$ et $c \in \mathbf{C}^p$, nous notons $Z(c)$ la fibre au dessus de c de la restriction de π_2 à Z .

PROPOSITION 5. *Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent. Pour tout $c \in \mathbf{C}^p$, les fibres non vides $(\text{car}^\sharp M)(c)$ et $(\text{car}^{\text{rel}} M)(c)$ ont leurs composantes irréductibles de dimension au moins égales à la dimension de X .*

DÉMONSTRATION. En un point lisse de $\text{car}^\sharp M$ où la restriction de π_2 est de rang localement constant, la fibre $(\text{car}^\sharp M)(c)$ est lisse réduite. Par le théorème d'involutivité, $(\text{car}^\sharp M)(c)$ que nous identifions à un sous-espace de T^*X est involutive. Elle est donc de dimension supérieure ou égale à la dimension de X . Par semi-continuité de la dimension des fibres, nous en déduisons la propriété annoncée sur $(\text{car}^\sharp M)(c)$. Le même raisonnement s'applique pour $(\text{car}^{\text{rel}} M)(c)$. ■

2.2 – $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module majoré par une lagrangienne

PROPOSITION 6. *Pour tout $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent M ,*

$$\text{car}^{\text{rel}} M \subset (\text{car}^\sharp M)(0) \times \mathbf{C}^p.$$

DÉMONSTRATION. Observons que si $P \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$, $\sigma^\sharp(P)(x, \xi, 0) \neq 0$ implique $\sigma^\sharp(P)(x, \xi, 0) = \sigma^{\text{rel}}(P)(x, \xi, s)$. Pour démontrer la proposition, nous pouvons supposer que M est le quotient de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ par un idéal à gauche cohérent I . Nous déduisons de notre observation :

$$\text{car}^{\text{rel}} M \subset V(\{\sigma^\sharp(P)(x, \xi, 0); P \in I\}) = (\text{car}^\sharp M)(0) \times \mathbf{C}^p. \quad \blacksquare$$

DÉFINITION 1. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent. Nous disons que M est majoré par une lagrangienne Λ si $\text{car}^{\text{rel}} M \subset \Lambda \times \mathbf{C}^p$ où Λ est une sous-variété lagrangienne conique éventuellement singulière de T^*X .

Suivant la proposition 6 :

REMARQUE 2. Si $(\text{car}^\sharp M)(0)$ est une variété lagrangienne de T^*X , alors M est majoré par la lagrangienne $(\text{car}^\sharp M)(0)$

Si M est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent, pour tout $c \in \mathbf{C}^p$, notons :

$$M(c) = \frac{M}{\sum_{i=1}^p (s_i - c_i)M}.$$

Ces ensembles $M(c)$ sont naturellement des \mathcal{D}_X -modules cohérents et nous notons $\text{car}_{\mathcal{D}_X} M(c)$ leurs variétés caractéristiques comme \mathcal{D}_X -modules.

Nous avons clairement :

REMARQUE 3. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent, pour tout $c \in \mathbf{C}^p$, $\text{car}^\# M(c) \subset (\text{car}^\# M)(0)$ et $\text{car}^{\text{rel}} M(c) \subset (\text{car}^{\text{rel}} M)(c)$. Nous identifions ces sous-espaces à des sous-ensembles de T^*X .

Soit localement, m_1, \dots, m_l un système de générateurs de M . Posons, pour tout entier k ,

$$M(c)(k) = \frac{\sum_{j=1}^l \mathcal{D}_X(k)m_j + \sum_{i=1}^p (s_i - c_i)M}{\sum_{i=1}^p (s_i - c_i)M}.$$

Les $M(c)(k)$ sont à la fois une bonne filtration dièse, une bonne filtration relative de $M(c)$, mais aussi une bonne filtration de $M(c)$ comme \mathcal{D}_X -module. L'idéal engendré par s_1, \dots, s_p (resp. $(s_1 - c_1, \dots, s_p - c_p)$) et par les symboles des opérateurs de \mathcal{D}_X annihilant $\text{gr}(M(c))$ est l'idéal des symboles dièses (resp. relatifs) des opérateurs de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ annihilant $\text{gr}(M(c))$. Nous en déduisons avec les identifications évidentes :

REMARQUE 4. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent, pour tout $c \in \mathbf{C}^p$,

$$\text{car}_{\mathcal{D}_X} M(c) = \text{car}^\# M(c) = \text{car}^{\text{rel}} M(c).$$

En particulier, nous obtenons :

PROPOSITION 7. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent majoré par une lagrangienne Λ , alors pour tout $c \in \mathbf{C}^p$, les \mathcal{D}_X -modules $M(c)$ sont holonomes de variétés caractéristiques contenues dans Λ .

Nous allons préciser maintenant la structure de la variété caractéristique relative d'un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent majoré par une lagrangienne.

PROPOSITION 8. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent majoré par une lagrangienne de composantes irréductibles $(T_{X_\alpha}^* X)_{\alpha \in A}$, alors il existe des sous-variétés algébriques S_α de \mathbf{C}^p telles que

$$\text{car}^{\text{rel}} M = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha.$$

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, pour tout $c \in \mathbf{C}^p$, $(\text{car}^{\text{rel}} M)(c)$ est contenu dans la réunion des $T_{X_\alpha}^* X$. D'après le théorème d'involativité, ses composantes irréductibles sont de dimensions supérieures à la dimension de X . Il en résulte que pour tout $c \in \mathbf{C}^p$,

les composantes irréductibles de $(\text{car}^{\text{rel}} M)(c)$ sont certaines des lagrangiennes $T_{X_\alpha}^* X$. Il existe donc des sous-ensembles S_α de \mathbf{C}^p tels que

$$\text{car}^{\text{rel}} M = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha.$$

Il reste à montrer que les S_α sont des sous-variétés algébriques de \mathbf{C}^p . Soit (x_α, ξ_α) un point générique de $T_{X_\alpha}^* X$, nous avons

$$S_\alpha = (\text{car}^{\text{rel}} M) \cap \{(x, \xi, s) \in T^* X \times \mathbf{C}^p; x = x_\alpha \text{ et } \xi = \xi_\alpha\}.$$

Comme $\text{car}^{\text{rel}} M$ est localement défini par un nombre fini d'équations polynomiales en s , les S_α sont des sous-variétés algébriques de \mathbf{C}^p . ■

DÉFINITION 2. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent et $x_0 \in X$. Nous appelons *idéal de Bernstein* de M en x_0 l'idéal noté $\mathcal{B}_{x_0}(M)$ de $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ défini par

$$\mathcal{B}_{x_0}(M) = \{b(s_1, \dots, s_p) \in \mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]; b(s_1, \dots, s_p)M_{x_0} = 0\}.$$

PROPOSITION 9. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent de variété caractéristique relative $\bigcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha$ où X_α (resp. S_α) sont des sous-espaces analytiques de X (resp. sous-variétés algébriques de \mathbf{C}^p). Alors $V(\mathcal{B}_{x_0}(M))$ la variété des zéros de l'idéal de Bernstein de M en x_0 est

$$V(\mathcal{B}_{x_0}(M)) = \bigcup_{\alpha \in A, x_0 \in X_\alpha} S_\alpha.$$

DÉMONSTRATION. Soit $b(s_1, \dots, s_p) \in \mathcal{B}_{x_0}(M)$. Nous pouvons voir b comme un opérateur différentiel relatif de degré zéro. Son symbole relatif coïncide avec lui même. Il s'annule d'après l'hypothèse sur $\text{car}^{\text{rel}} M$. Ainsi, $b(s_1, \dots, s_p)$ s'annule sur les S_α telles que $x_0 \in X_\alpha$. Inversement, supposons que $b(s_1, \dots, s_p)$ s'annule sur les S_α telles que $x_0 \in X_\alpha$. Il s'annule donc sur $\text{car}^{\text{rel}} M$ au voisinage de x_0 . D'après le corollaire 2 du théorème des zéros relatif, il existe un entier k tel que $b^k \in \mathcal{J}^{\text{rel}}(M)$ au voisinage de x_0 . Nous en déduisons pour toute section m de M_{x_0} , l'existence d'un entier k tel que $b^k m = 0$. Il en résulte que pour k assez grand $b^k \in \mathcal{B}_{x_0}(M)$ et que b s'annule sur $V(\mathcal{B}_{x_0}(M))$. ■

COROLLAIRE 3. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent majoré par une lagrangienne et $x_0 \in X$. Si $\text{grade } M_{x_0} \geq \dim X + 1$, l'idéal de Bernstein de M en x_0 est non réduit à zéro.

DÉMONSTRATION. Suivant la remarque 1, pour tout $a \in \mathbf{C}^p$,

$$\dim_{x_0, a, 0} \text{car}^{\text{rel}} M \leq 2 \dim X + p - \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \leq \dim X + p - 1.$$

Or, suivant la proposition 8, il existe des sous-variétés algébriques S_α de \mathbf{C}^p telles que

$$\text{car}^{\text{rel}} M = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha.$$

Donc, pour $x_0 \in X_\alpha$, la variété algébrique S_α est donc de dimension strictement inférieure à p . Il reste à utiliser la proposition 9. ■

2.3 – $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module majoré par une lagrangienne sans $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ -torsion

DÉFINITION 3. Soit B un anneau régulier qui vérifie la condition d'Auslander. Soit M un B -module, nous disons que M est pur si tous les sous-modules de M non réduit à zéro ont même nombre grade.

PROPOSITION 10. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent majoré par une lagrangienne. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) les sections non nulles des fibres de M sont sans $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ -torsion ;
- (2) les fibres non nulles de M sont des modules purs de nombre grade $\dim X$.

De plus, si l'une de ces assertions est vérifiée, il existe une variété lagrangienne conique Λ de T^*X telle que $\text{car}^{\text{rel}} M = \Lambda \times \mathbf{C}^p$.

DÉMONSTRATION. 1 \implies 2. D'après la proposition 8, il existe des sous-espaces analytiques (resp. algébriques) X_α de X (resp. S_α de \mathbf{C}^p) telles que

$$\text{car}^{\text{rel}} M = \bigcup T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha.$$

Soit $x_0 \in X$, suivant la proposition 2,

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} = 2 \dim X + p - \sup\{\dim S_\alpha; x_0 \in X_\alpha\}.$$

Il en résulte, $\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0} \geq \dim X$. Rappelons que suivant la proposition 3, $\text{grade} M_{x_0} = \text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} M)_{x_0}$. Soit N un sous-module de M_{x_0} , l'anneau $\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p]$ étant régulier et vérifiant la condition d'Auslander : $\text{grade} N \geq \text{grade} M_{x_0}$ ([3, Appendic IV, Proposition 2.3]). Le module N est majoré par une lagrangienne comme sous-module d'un module majoré par une lagrangienne. Si $\text{grade} N \geq \dim X + 1$, il résulterait du corollaire 3 que N aurait de la $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ -torsion ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi, M_{x_0} est pur de grade $\dim X$.

2 \implies 1. Si, pour $x_0 \in X$, une section non nulle M_{x_0} avait de la $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ -torsion, M admettrait au voisinage de x_0 un sous-module N tel que $\mathcal{B}_{x_0}(N) \neq 0$. Il résulterait des propositions 8 et 9 que les variétés algébriques S_α pour $x_0 \in X_\alpha$ intervenant dans la variété caractéristique relative de N seraient toutes de dimensions

inférieures ou égales à $p - 1$. Il résulterait de la proposition 2 que $\text{grade } N \geq \dim X + 1$ ce qui contredit l'hypothèse de pureté.

Fin de la preuve. Supposons vérifiées ces conditions équivalentes. Suivant [3, Appendix IV, Theorem 4.11], il existe une bonne filtration relative Γ de M_{x_0} dont le gradué $\text{gr}_\Gamma M_{x_0}$ est un $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]$ pur de grade $\dim X$. Rappelons ([3, Appendix IV, Proposition 2.6]) que si B est un anneau régulier vérifiant la condition d'Auslander, un B module E de type fini est pur de grade l si et seulement si $\text{Ext}_A^j(\text{Ext}_A^j(E, A), A) = 0$ équivaut à $j \neq l$. Il en résulte que pour $j \neq \dim X$,

$$\text{Ext}^j(\text{Ext}^j(\text{gr } M, \text{gr } \mathcal{D}_{X,[s_1, \dots, s_p]}), \text{gr } \mathcal{D}_{X,[s_1, \dots, s_p]})_{x_0} = 0.$$

En analysant pour la filtration déduite de Γ , nous obtenons pour tout $a \in \mathbf{C}^p$ et $j \neq \dim X$

$$\text{Ext}_{\text{gr } \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}}^j(\text{Ext}_{\text{gr } \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}}^j(\text{gr } M^{\text{an}}, \text{gr } \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p}), \text{gr } \mathcal{D}_{X \times \mathbf{C}^p / \mathbf{C}^p})_{x_0, a} = 0.$$

Ainsi, les fibres $(\text{gr } M^{\text{an}})_{x_0, a}$ non nulles sont pures de grade $\dim X$. Rappelons que sur un anneau commutatif régulier, si un module de type fini est pur de grade l , tous les idéaux premiers minimaux de son support sont de hauteur l ([3, Appendix IV, Proposition 3.7]). Nous obtenons ainsi que les composantes irréductibles de $\text{car}^{\text{rel}} M$ au voisinage de x_0 sont de dimension $\dim X + p$. Et pour tout α tel que $x_0 \in X_\alpha$, $S_\alpha = \mathbf{C}^p$. ■

PROPOSITION 11. *Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent tel que $\text{car}^{\text{rel}} M = \Lambda \times \mathbf{C}^p$ où Λ est une variété lagrangienne de T^*X . Alors, pour tout $c \in \mathbf{C}^p$,*

$$\text{car}_{\mathcal{D}_X}(M(c)) = \Lambda.$$

DÉMONSTRATION. Il résulte du fait que $\text{car}^{\text{rel}} M = \Lambda \times \mathbf{C}^p$ que $\mathcal{J}^{\text{rel}}(M) = I[s_1, \dots, s_p]$ l'idéal de $\mathcal{O}_X[\xi_1, \dots, \xi_n, s_1, \dots, s_p]$ engendré par l'idéal I de $\mathcal{O}_X[\xi_1, \dots, \xi_n]$ des fonctions nulles sur Λ . L'inclusion $\mathcal{J}^{\text{rel}}(M) \subset I[s_1, \dots, s_p]$ est claire. L'autre inclusion résulte du théorème des zéros relatifs, proposition 4 modulo l'astuce de Rabinowitch. Soit p_i pour $i = 1, \dots, l$, les idéaux premiers minimaux contenant I_{x_0} , les $p_i[s_1, \dots, s_p]$ sont alors les idéaux premiers minimaux de $\mathcal{J}^{\text{rel}}(M)_{x_0}$. Considérons le complexe à deux termes de multiplication par $s_1 - c_1$:

$$\text{gr}^{\text{rel}} M_{x_0} \xrightarrow{s_1 - c_1} \text{gr}^{\text{rel}} M_{x_0}.$$

Notons L_1 (resp. K_1) son conoyau (resp. noyau). Soit $(\mathcal{J}^{\text{rel}}(M)_{x_0}, s_1 - c_1)$ l'idéal de $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]$ engendré par $\mathcal{J}^{\text{rel}}(M)_{x_0}$ et $s_1 - c_1$. Ses idéaux premiers minimaux sont les $q_i = (p_i[s_1, \dots, s_p], s_1 - c_1)$ pour $i = 1, \dots, l$. Les localisés

$(L_1)_{q_i}$ et $(K_1)_{q_i}$ sont de longueur finie. Notons pour tout idéal premier q d'un anneau commutatif A , $e_q(E)$ la multiplicité d'un A module E de type fini. Un calcul de multiplicité donne :

$$e_{q_i}(L_1) - e_{q_i}(K_1) = e_{p_i}(\text{gr}^{\text{rel}} M)$$

De plus, M étant muni d'une bonne filtration le complexe

$$M \xrightarrow{s_1 - c_1} M$$

de multiplication par $s_1 - c_1$ est filtré. Le fait que cette filtration soit bonne implique la convergence de la suite spectrale de ce complexe filtré. La filtration de M induit sur L_1 et K_1 des filtrations à gradués noethériens, donc de bonnes filtrations. Nous obtenons

$$e_{q_i}(\text{gr}^{\text{rel}} L_1) - e_{q_i}(\text{gr}^{\text{rel}} K_1) = e_{p_i}(\text{gr}^{\text{rel}} M) > 0.$$

Il en résulte

$$e_{q_i}(\text{gr}^{\text{rel}} L_1) > 0.$$

Ainsi, les q_i sont des idéaux premiers minimaux du support de $\text{gr}^{\text{rel}} L_1$. D'autre part, $(\mathcal{J}^{\text{rel}}(M)_{x_0}, s_1 - c_1) \subset \mathcal{J}^{\text{rel}}(L_1)$. Donc, chaque q_i est contenu dans un idéal premier minimal du support de $\text{gr}^{\text{rel}} L_1$. Il en résulte que les q_i sont les idéaux premiers minimaux de $\text{gr}^{\text{rel}} L_1$. On obtient ainsi,

$$\text{car}^{\text{rel}} L_1 = \Lambda \times \{c_1\} \times \mathbf{C}^{p-1}.$$

Il reste à itérer pour obtenir $\text{car}^{\text{rel}}(M(c)) = \Lambda$. ■

PROPOSITION 12. *Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent dont les fibres sont des modules purs de grade $\dim X$ et tel que $(\text{car}^{\#} M)(0)$ soit lagrangienne. Alors, pour tout $c \in \mathbf{C}^p$,*

$$(\text{car}^{\#} M)(0) = \text{car}^{\#}(M(c)) = \text{car}_{\mathcal{D}_X}(M)(c)$$

DÉMONSTRATION. Il faut montrer que $(\text{car}^{\#} M)(0) = \text{car}^{\#}(M(0))$. Par hypothèse, $(\text{car}^{\#} M)(0)$ est lagrangienne et toutes les composantes irréductibles de $\text{car}^{\#} M$ sont de dimension $\dim X + p$. Il en résulte qu'aucune composante de $\text{car}^{\#} M$ n'est contenue dans $s_i = 0$. Filtrons M par une bonne filtration dièse. La proposition s'obtient par récurrence en considérant la suite spectrale du complexe filtré de multiplication par $s_1 - c_1$:

$$M \xrightarrow{s_1 - c_1} M. \quad \blacksquare$$

3. Equations fonctionnelles associées à module holonome relativement à plusieurs fonctions analytiques

Soit f_1, \dots, f_p , des fonctions analytiques sur X . Notons $F = f_1 f_2 \dots f_p$ leur produit. Soit M un \mathcal{D}_X -module holonome. Considérons $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, 1/F]f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ le $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, 1/F]$ -module libre de rang 1 de base $f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$. Le produit tensoriel

$$M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, 1/F]f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$$

est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module définie pour toute section n de M et a de $\mathcal{O}_X[s_1, \dots, s_p, 1/F]$ par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (n \otimes a f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} n \right) \otimes a f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} + n \otimes \frac{\partial a}{\partial x_i} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \\ &\quad + \sum_{j=1}^p n \otimes s_j a \frac{\partial f_j}{\partial x_i} f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}. \end{aligned}$$

Nous notons, $n \otimes a f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = a n f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ et $f_1^{s_1+r} \dots f_p^{s_p+r} = F^r f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ pour tout entier r .

Nous supposons M engendré par une section m .

3.1 – Variété caractéristique relative de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$

Dans ce paragraphe, M désigne un module holonome engendré par une section m . En dehors de $F = 0$, pour toute section m de M ,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (n \otimes f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^p \frac{s_i}{f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) n \right] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}.$$

Munissons M de la bonne filtration $\mathcal{D}_X(k)m$ et $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ de la bonne filtration relative $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](k)m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$. En dehors de $F = 0$, nous obtenons

$$\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \simeq (\text{gr}_{\mathcal{D}_X} M)[s_1, \dots, s_p].$$

Comme M est holonome, pour tout x_0 dans le support de M , le grade de $(\text{gr}_{\mathcal{D}_X} M)_{x_0}$ est égal à $\dim X$. Il en résulte que si $F(x_0) \neq 0$

$$\text{grade} (\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})_{x_0} = \text{grade} (\text{gr}_{\mathcal{D}_X} M)_{x_0} = \dim X.$$

Nous obtenons ainsi :

LEMME 2. Pour tout x_0 dans le support de M tel que $F(x_0) \neq 0$,

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})_{x_0} = \dim X.$$

Notons $\mathcal{G}_k(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})$ le sous-module formé des sections de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ dont les fibres sont de grade supérieure ou égal à k . Les faisceaux $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ et $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ vérifient la condition de Noether : sur tout espace localement compact, les suites croissantes de sous-modules cohérents stationnent. Cela permet d'assurer ([3, Appendix IV, Theorem 2.30]) que pour tout entier k , les $\mathcal{G}_k(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})$ sont des $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -modules cohérents. En effet, le gradué de cette filtration \mathcal{G} s'obtient comme limite d'une suite spectrale associée à un complexe double filtré dont le deuxième tableau est composé des $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -modules cohérents :

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s]}^j(\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s]}^j(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]), \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]).$$

LEMME 3. Pour tout x_0 dans le support de $M[1/F]$,

$$\text{grade}(\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})_{x_0} \geq \dim X.$$

DÉMONSTRATION. Le quotient

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{G}_{\dim X}(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})}$$

est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ module cohérent supporté par $F = 0$. Du théorème des zéros, au voisinage de tout $x_0 \in X$, il résulte l'existence d'un entier l tel que

$$m F^l f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = m f_1^{s_1+l} \dots f_p^{s_p+l} \in \mathcal{G}_{\dim X}(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}).$$

Comme pour tout $P(x, \partial_x, s) \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$

$$P(x, \partial_x, s) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = 0 \iff P(x, \partial_x, s_1 + l, \dots, s_p + l) m f_1^{s_1+l} \dots f_p^{s_p+l} = 0,$$

nous déduisons d'une résolution libre locale de $\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ une résolution libre locale de $\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1+l} \dots f_p^{s_p+l}$ et les bijections de translations entre

$$\text{Ext}^i(\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}, \mathcal{D}_X[s])$$

et

$$\text{Ext}^i(\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1+l} \dots f_p^{s_p+l}, \mathcal{D}_X[s]).$$

Il en résulte que les fibres en x_0 de $\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ et $\mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1+l} \dots f_p^{s_p+l}$ ont même grade et donc le lemme. ■

PROPOSITION 13. *Il existe une variété lagrangienne conique Λ de T^*X tel que*

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbf{C}^p.$$

DÉMONSTRATION. Commençons par donner une preuve géométrique. Noton $1_i = (0 \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$ où le 1 est placé à la i -ème place et appelons τ_i la translation de $T^*X \times \mathbf{C}^p$ définie par $(x, \xi, s) \mapsto (x, \xi, s + 1_i)$. Nous avons, pour tout $P(x, \partial_x, s) \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$,

$$P(x, \partial_x, s)mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = 0 \iff P(x, \partial_x, s + 1_i)mf_i f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = 0.$$

Ainsi,

$$\text{car}^{\text{rel}} (\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_i f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) = \tau_i^{-1}(\text{car}^{\text{rel}} (\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})).$$

D'autre part, il est clair que $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_i f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ est un sous-module de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$. Donc, $\text{car}^{\text{rel}} (\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})$ est stable par les translations τ_i^{-1} et donc par toutes translations $(x, \xi, s) \mapsto (x, \xi, s - k)$ de $T^*X \times \mathbf{C}^p$ où $k \in \mathbf{N}^p$. Nous en déduisons l'existence d'un sous-ensemble analytique conique Λ de T^*X tel que

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbf{C}^p.$$

D'après le lemme 3 et la remarque 1 de la section 1.2, pour tout x_0 du support de $M[1/F]$ et $a \in \mathbf{C}^p$,

$$\dim_{x_0, a, 0} \text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \leq \dim X + p.$$

Donc, $\dim_{x_0, 0} \Lambda \leq n$. Comme Λ est conique, la dimension de Λ en tout point est inférieure à n . En tout point lisse de Λ , la projection de $\Lambda \times \mathbf{C}^p$ sur \mathbf{C}^p est une submersion. Il résulte du théorème d'involutivité rappelé au paragraphe 2.1 que Λ est un sous espace involutif conique de T^*X . C'est donc une variété lagrangienne.

Donnons une preuve plus algébrique. Soit $P(s) \in \mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k)$ tel que $P(s)mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = 0$. Remarquons que, pour tout $r \in \mathbf{N}^p$,

$$\begin{aligned} P(s-r)mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} &= P(s-r)mf^r f_1^{s_1-r_1} \dots f_p^{s_p-r_p} \\ &= (P(s-r)f^r - f^r P(s-r))mf_1^{s_1-r_1} \dots f_p^{s_p-r_p} \\ &\in \mathcal{D}_X^{\text{rel}}[s_1, \dots, s_p](k-1)mf_1^{s_1-r_1} \dots f_p^{s_p-r_p}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\sigma^{\text{rel}}(P(s-r))$ annule le gradué de $\mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ pour la bonne filtration induite par la filtration naturelle de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1-r_1} \dots f_p^{s_p-r_p}$. Donc, $\sigma^{\text{rel}}(P(s-r)) \in \mathcal{J}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})$ pour tout $r \in \mathbf{N}^p$. Cela montre que cet

idéal est engendré par des symboles indépendants de s . Suivant le théorème d'involutive sa racine est stable par crochet de Poisson. Nous en déduisons :

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbf{C}^p,$$

où Λ est une variété involutive conique de T^*X . Le même argument sur la dimension que précédemment utilisant le lemme 3 et la remarque 1 de la section 1.2 permet de conclure que Λ est lagrangienne. ■

PROPOSITION 14. *Pour tout x_0 dans le support de $M[1/F]$, le module*

$$\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$$

est pur de grade $\dim X$: tout sous module non nul de $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ est de grade $\dim X$.

DÉMONSTRATION. La proposition 13 dit que le module $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ est majorée par une lagrangienne. Or, $(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})_{x_0}$ est sans $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ -torsion. Le résultat résulte de la proposition 10. ■

LEMME 4. *Pour tout x_0 dans le support de $M[1/F]$ tel que $F(x_0) = 0$,*

$$\text{grade} \left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right)_{x_0} \geq \dim X + 1.$$

DÉMONSTRATION. Soit Λ la variété lagrangienne conique de T^*X telle que

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbf{C}^p.$$

L'idéal $\mathcal{J}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})$ est l'idéal $I \otimes_{\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X} \text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s]$ où I est l'idéal de $\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X$ des fonctions nulles sur Λ . Soit P un idéal premier définissant une composante irréductible de Λ . Cet idéal P est de dimension $\dim X$. Par un argument de translation, les multiplités de $\text{gr}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p})_{x_0}$ et $\text{gr}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1})_{x_0}$ en $\mathcal{P} \otimes_{\text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X} \text{gr}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s]$ coïncident. Il en résulte qu'aucune composant irréductible de $\Lambda \times \mathbf{C}^p$ n'est une composante de la variété caractéristique relative du quotient

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

Ce quotient a donc une variété caractéristique relative de dimension inférieure ou égale à $\dim X + p - 1$. Il reste à utiliser la proposition 2. ■

DÉFINITION 4. Soit m une section d'un \mathcal{D}_X -module holonome et $x_0 \in X$. Nous appelons *idéal de Bernstein de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0* l'idéal $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ de $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ formé des polynômes b vérifiant au voisinage de x_0

$$b(s_1, \dots, s_p) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1},$$

qui sont appelés polynômes de Bernstein de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 .

Notons que l'idéal $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ n'est autre que l'idéal de Bernstein, au sens de la définition 2, du $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent :

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}.$$

COROLLAIRE 4 (une preuve de l'existence d'une équation fonctionnelle de Bernstein dans le cas analytique). *Si m est une section d'un \mathcal{D}_X -module holonome, au voisinage de tout $x_0 \in X$, il existe un polynôme $b(s_1, \dots, s_p)$ non nul*

$$b(s_1, \dots, s_p) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}.$$

DÉMONSTRATION. Par le lemme 3, le quotient

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

a ses fibres de de grade supérieur ou égal à $\dim X + 1$. Il est majoré par une lagrangienne, car quotient d'un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module majoré par une lagrangienne (proposition 13). Il reste à utiliser le corollaire 3. ■

3.2 – Construction d'un quotient pur d'un sous-facteur de $\mathcal{D}_X[s] m f^s$

Soit m une section d'un \mathcal{D}_X -module holonome M . Considérons les applications bijectives τ :

$$M \left[\frac{1}{F} s_1, \dots, s_p \right] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \xrightarrow{\tau} M \left[\frac{1}{F} s_1, \dots, s_p \right] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$$

et

$$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \xrightarrow{\tau} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$$

définies respectivement par

$$\tau(n(s_1, \dots, s_p) f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) = n(s_1 + 1, \dots, s_p + 1) f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}$$

et

$$\tau(P(x, \partial_x, s_1, \dots, s_p)) = P(x, \partial_x, s_1 + 1, \dots, s_p + p).$$

Nous désignons également par τ l'application

$$T^*X \times \mathbf{C}^p \xrightarrow{\tau} T^*X \times \mathbf{C}^p(x, \xi, s_1, \dots, s_p) \mapsto (x, \xi, s_1 + 1, \dots, s_p + 1).$$

Pour toutes sections n de M et tout $P \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$:

$$Pn f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = 0 \iff \tau(P)n f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} = 0.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} \text{car}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} &= \text{car}^\# \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}, \\ \text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1} &= \tau^{-1}(\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}). \end{aligned}$$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante et d'en donner les premières conséquences.

PROPOSITION 15. *Soit M un holonome engendré par une section m . Considérons la famille \mathcal{G} des sous $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -modules L de type fini de $M[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ contenant $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ et tels que, pour tout point $x_0 \in X$,*

$$\text{grade} \frac{L_{x_0}}{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}} \geq \dim X + 2.$$

Cette famille admet un plus grand élément noté \tilde{L} . Ce module \tilde{L} est un sous $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module cohérent de $M[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ vérifiant

- (1) $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \subset \tilde{L}$,
- (2) $\tau(\tilde{L}) \subset \tilde{L}$,
- (3) $\tilde{L}/\tau(\tilde{L})$ est un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module dont les fibres non nulles sont des modules purs de grade $\dim X + 1$.

La preuve est une adaptation de celle du [3, Appendix IV, Theorem 2.12]. Cette adaptation est nécessaire car τ n'est pas un morphisme de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module.

Rappels sur les anneaux réguliers. Soit A un anneau régulier (non nécessairement commutatif) qui vérifie la condition d'Auslander : pour tout module à gauche de type fini, tout sous-module à droite de $\text{Ext}_A^k(E, A)$ est de grade supérieur ou égal à k . Notons que cette condition est automatiquement vérifiée si A est un anneau commutatif régulier et qu'elle est à la base des propriétés du nombre grade et de la filtration d'un module par le complexe bidualisant. Rappelons ces propriétés (voir [3, Appendix IV]) :

- (1) Si $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de A -module à gauche de type fini, $\text{grade } E = \inf(\text{grade } E', \text{grade } E'')$.
- (2) Soit $0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_0 = E$ la filtration d'un A -module à gauche de type fini par le complexe bidualisant, il existe une suite exacte fonctorielle en E

$$0 \rightarrow \frac{G_k}{G_{k+1}} \rightarrow \text{Ext}_A^k(\text{Ext}_A^k(E, A), A) \rightarrow Q_k \rightarrow 0,$$

où $\text{grade } Q_k \geq k + 2$.

- (3) Si $\text{grade } E = k$, alors $\text{grade } \text{Ext}_A^k(E, A) = k$.
- (4) Si $\text{Ext}_A^v(\text{Ext}_A^v(E, A), A) \neq 0$, ce module est A -module pur de grade v .
- (5) E est pur de grade k si et seulement si $0 = G_1 = \dots = G_{k+1}$ et $G_k = \dots = G_0 = E$.
Dans ce cas nous avons la suite exacte

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{i(E)} \text{Ext}_A^k(\text{Ext}_A^k(E, A), A) \rightarrow Q_k \rightarrow 0,$$

où $\text{grade } Q_k \geq k + 2$.

DÉFINITION 5. Soit E un A -module de type fini pur de grade k , nous disons que (ϕ, E') est une *extension pure docile* de E si $\phi: E \rightarrow E'$ est un morphisme injectif de A -modules, si E' est pur de grade $E' = k$ et $\text{grade}(E'/\phi(E)) \geq k + 2$.

La terminologie extension pure docile est une traduction de *tame pure extension* (voir [3, Appendix IV]). Suivant les rappels, si E est pur de grade k , le morphisme naturel

$$E \xrightarrow{i(E)} \text{Ext}_A^k(\text{Ext}_A^k(E, A), A)$$

est une extension pure docile. En fait, cette extension naturelle est universelle au sens suivant :

PROPOSITION 16. Soit E un A -module de type fini pur de grade k et (ϕ, E') une extension pure docile de E . Alors, il existe un unique morphisme de A -module $\tilde{\phi}: E \hookrightarrow \text{Ext}_A^k(\text{Ext}_A^k(E, A), A)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ i(E) \downarrow & & \downarrow \tilde{\phi} \\ \text{Ext}_A^k(\text{Ext}_A^k(E, A), A) & \xlongequal{\quad} & \text{Ext}_A^k(\text{Ext}_A^k(E, A), A) \end{array}$$

De plus, $\tilde{\phi}$ est une extension pure docile.

PREUVE ([3, Appendix IV, Proposition 2.9]). Ce résultat est la clef de la proposition 15. Donnons une preuve. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\phi} E' \rightarrow \frac{E'}{\phi(E)} \rightarrow 0.$$

Nous obtenons, vu les hypothèses sur les nombres grade,

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Ext}_A^k\left(\frac{E'}{\phi(E)}, A\right) \rightarrow \text{Ext}_A^k(E', A) \\ &\xrightarrow{\text{Ext}_A^k(\phi, A)} \text{Ext}_A^k(E, A) \rightarrow \text{Ext}_A^{k+1}\left(\frac{E'}{\phi(E)}, A\right) = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\text{Ext}_A^k(\phi, A)$ est un isomorphisme. Il en résulte le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ i(E) \downarrow & & \downarrow i(E') \\ \text{Ext}_A^k(\text{Ext}_A^k(E, A), A) & \xrightarrow[\simeq]{\text{Ext}_A^k(\text{Ext}_A^k(\phi, A), A)} & \text{Ext}_A^k(\text{Ext}_A^k(E', A), A) \end{array}$$

L'existence de $\tilde{\phi}$ s'en déduit. L'application $\tilde{\phi}$ est clairement une extension pure docile. Il reste à montrer l'unicité de $\tilde{\phi}$. Si $\tilde{\phi}'$ est un deuxième morphisme vérifiant $\tilde{\phi}' \circ \phi = i(E)$, nous avons $(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi}) \circ \phi = 0$ et $\phi(E) \subset \ker(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi})$. Comme $E'/\ker(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi})$ s'injecte par $\tilde{\phi}' - \tilde{\phi}$ dans $\text{Ext}_A^k(\text{Ext}_A^k(E', A), A)$, nous déduisons de la pureté du double ext que si $E'/\ker(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi})$ est non nul, il est de grade k . Mais $E'/\phi(E)$ est de grade supérieur ou égal à $k + 2$ et se surjecte dans $E'/\ker(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi})$. Il en résulte $\ker(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi}) = E$ et $\tilde{\phi}' = \tilde{\phi}$. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 15. Nous détaillons la preuve au niveau des fibres de M en un point x_0 de X . La cohérence de \tilde{L} résultera du fait que les sous-modules de ma famille \mathcal{E} peuvent être considérés en utilisant une version faisceautique de la proposition 16 comme des sous-modules de

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^{\dim X + 1}(\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^{\dim X + 1}(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]) \quad .$$

• Si

$$\frac{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1 - 1} \dots f_p^{s_p - 1}}{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}$$

est pur de grade $k + 1$, nous vérifions que

$$\tilde{L}_{x_0} = \mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}.$$

Nous notons en utilisant l'action de τ que les quotients

$$\frac{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+k} \dots f_p^{s_p+k}}{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+k+1} \dots f_p^{s_p+k+1}}$$

ont même nombre grade.

- *Sinon*, nous avons vu que

$$\frac{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1-1} \dots f_p^{s_p-1}}{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}$$

est de grade supérieur ou égal à $k + 1$. Ce quotient admettrait donc un sous-module de grade supérieur ou égal à $k + 2$. Il existerait ainsi L un $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]$ -module tel que

$$\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \subsetneq L \subset \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1-1} \dots f_p^{s_p-1}$$

et

$$\text{grade} \frac{L}{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}} \geq k + 2.$$

Considérons alors la famille \mathcal{G}_{x_0} des $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]$ modules L de type fini vérifiant

$$\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \subsetneq L \subset M_{x_0}[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$$

et

$$\text{grade} \frac{L}{\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}} \geq k + 2.$$

Le module $M_{x_0}[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ n'est pas de type fini. Mais pour tout sous-module N de type fini, il existe un entier r tel que N est un sous-module de $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1-r} \dots f_p^{s_p-r}$ qui est un module pur de grade $\dim X$ (voir proposition 14). Ainsi, tous les sous-modules de type fini de $M_{x_0}[\frac{1}{F}, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ sont purs de grade $\dim X$.

LEMME 5. \mathcal{G}_{x_0} admet un unique plus grand élément.

Preuve du lemme ([3, Appendix IV, Proposition 2.10]). Rappelons cette preuve qui repose sur le problème universel des extensions pures dociles. Par les propriétés des nombres grade, la somme de deux éléments de \mathcal{G}_{x_0} est dans \mathcal{G}_{x_0} . Il suffit donc de montrer que toute suite croissante d'éléments de \mathcal{G}_{x_0} stationne. Soit L_v une telle suite, notons j_v et $j_{v,v+1}$ les inclusions

$$E = \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \xrightarrow{j_v} L_v \xrightarrow{j_{v,v+1}} L_{v+1}.$$

Suivant le problème universel des extensions pures dociles, nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 E = \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} & \xrightarrow{j_v} & L_v \\
 \downarrow i(E) & \swarrow \tilde{j}_v & \\
 \text{Ext}^{\dim X+1}(\text{Ext}^{\dim X+1}(E, \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]), \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]) & &
 \end{array}$$

Par unicité de \tilde{j}_v , nous obtenons $\tilde{j}_v = \tilde{j}_{v+1} \circ j_{v,v+1}$. Ainsi, les images des morphismes \tilde{j}_v forment une suite croissante de sous-modules d'un module noethérien de type fini. Cette suite d'images et donc les L_v stationnent.

NOTATION. Nous notons \tilde{L}_{x_0} le plus grand élément de \mathcal{G}_{x_0} .

Par finitude de \tilde{L}_{x_0} , il existe un entier r tel que

$$\tilde{L}_{x_0} \subset \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1-r} \dots f_p^{s_p-r}.$$

Nous allons montrer que \tilde{L}_{x_0} satisfait les propriétés de la proposition 15.

Posons, pour simplifier, pour tout entier r et $s = (s_1, \dots, s_p)$,

$$E(s+r) = \mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+r} \dots f_p^{s_p+r}.$$

Preuve de $\tau(\tilde{L}_{x_0}) \subset \tilde{L}_{x_0}$. Considérons le morphisme surjectif

$$\frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} \rightarrow \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0}) + E(s)}{E(s)}.$$

Mais

$$\frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} = \tau\left(\frac{\tilde{L}_{x_0}}{E(s)}\right)$$

(nous passons au quotient l'action de τ) et donc

$$\text{grade} \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0}) + E(s)}{E(s)} \geq \text{grade} \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} = \text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{E(s)} \geq \dim X + 2.$$

Ainsi,

$$\tau(\tilde{L}_{x_0}) + E(s) \in \mathcal{G}, \quad \tau(\tilde{L}_{x_0}) + E(s) \subset \tilde{L}_{x_0}, \quad \tau(\tilde{L}_{x_0}) \subset \tilde{L}_{x_0}.$$

Preuve de grade $\frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} = \text{grade} \frac{E(s)}{E(s+1)} \geq \dim X + 1$. Considérons maintenant les inclusions $E(s) \subset \tilde{L}_{x_0} \subset E(s-r)$ et $\tau(\tilde{L}_{x_0}) \subset \tilde{L}_{x_0}$:

$$\begin{aligned} \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} &\hookrightarrow \frac{\tilde{L}_{x_0}}{E(s+1)} \hookrightarrow \frac{E(s-r)}{E(s+1)}, \\ \frac{E(s+1)}{\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})} &\hookrightarrow \frac{E(s)}{\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})} \hookrightarrow \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})}. \end{aligned}$$

Donc, $\tilde{L}_{x_0}/\tau(\tilde{L}_{x_0})$ (resp. $E(s)/E(s+1)$) est un sous-facteur de $E(s-r)/E(s+1)$ (resp. $\tilde{L}_{x_0}/\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})$). Nous en déduisons :

$$\text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \geq \text{grade} \frac{E(s-r)}{E(s+1)} \quad \text{et} \quad \text{grade} \frac{E(s)}{E(s+1)} \geq \text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})}.$$

Par action de τ , pour k entier, les grades de

$$E(s+k)/E(s+k+1) \quad \text{et} \quad \tau^k(\tilde{L}_{x_0})/\tau^{k+1}(\tilde{L}_{x_0})$$

sont indépendants de k . Nous en déduisons par récurrence que $E(s-r)/E(s+1)$ (resp. $\tilde{L}_{x_0}/\tau^{r+1}(\tilde{L}_{x_0})$) est de même grade que $E(s)/E(s+1)$ (resp. $\tilde{L}_{x_0}/\tau(\tilde{L}_{x_0})$). Il en résulte

$$\text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} = \text{grade} \frac{E(s)}{E(s+1)}.$$

Enfin, nous avons montré que $\text{grade} \frac{E(s)}{E(s+1)} \geq \dim X + 1$ (voir lemme 3).

Preuve de $\frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})}$ pur de grade $\dim X + 1$. Considérons un $\mathcal{D}_{X,x_0}[s_1, \dots, s_p]$ -module L' tel que

$$E(s+1) \subset \tau(\tilde{L}_{x_0}) \subsetneq L' \subset \tilde{L}_{x_0}.$$

Nous avons la suite exacte

$$0 \rightarrow \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} \rightarrow \frac{L'}{E(s+1)} \rightarrow \frac{L'}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \rightarrow 0.$$

Par maximalité de \tilde{L}_{x_0} ,

$$\text{grade} \frac{L'}{E(s+1)} = \text{grade} \frac{\tau^{-1}(L')}{E(s)} \leq \dim X + 1.$$

Or,

$$\text{grade} \frac{\tau(\tilde{L}_{x_0})}{E(s+1)} = \text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{E(s)} \geq \dim X + 2.$$

Il en résulte

$$\text{grade} \frac{L'}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \leq \dim X + 1$$

et, en prenant $L' = \tilde{L}_{x_0}$,

$$\text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \leq \dim X + 1$$

Mais

$$\text{grade} \frac{L'}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \geq \text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} \geq \dim X + 1.$$

Ainsi,

$$\text{grade} \frac{L'}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} = \text{grade} \frac{\tilde{L}_{x_0}}{\tau(\tilde{L}_{x_0})} = \dim X + 1.$$

Tout sous-module non nul de $\tilde{L}_{x_0}/\tau(\tilde{L}_{x_0})$ est donc de grade $\dim X + 1$ et $\tilde{L}_{x_0}/\tau(\tilde{L}_{x_0})$ est donc pur de grade $\dim X + 1$. ■

REMARQUE 5. Notons que $\tilde{L} = \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$ si et seulement si les les fibres de

$$\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

sont des modules purs de grade $\dim X + 1$. Cette condition équivaut encore à

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i \left(\text{Ext}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}^i \left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}, \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] \right) \right) \neq 0 \implies i = \dim X + 1.$$

DÉMONSTRATION. Voir la définition de \tilde{L} . ■

Donnons maintenant quelques propriétés de \tilde{L} .

PROPOSITION 17. *Le $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module \tilde{L} construit dans la proposition précédente vérifie :*

$$(1) \text{car}^\# \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} = \text{car}^\# \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}},$$

(2) *localement au voisinage de tout point x_0 de X , il existe un entier r tel que*

$$\text{car}^{\text{rel}} \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} \subset \bigcup_{k=0}^r \text{car}^{\text{rel}} \tau^k \left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]mf_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right),$$

(3) *localement au voisinage de tout point x_0 de X , il existe un entier r tel que*

$$\text{car}^{\text{rel}} \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \subset \bigcup_{k=0}^r \text{car}^{\text{rel}} \tau^{-k} \left(\text{car}^{\text{rel}} \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} \right).$$

DÉMONSTRATION. Localement au voisinage de tout point x_0 de X , il existe un entier r tel que $\tilde{L}/\tau(\tilde{L})$ (resp. $E(s)/E(s+1)$) est quotient de sous-modules de $E(s-r)/E(s+1)$ (resp. $\tilde{L}/\tau^{r+1}(\tilde{L})$). Nous utilisons de plus que pour L sous-module cohérent de $M[1/F, s_1, \dots, s_p] f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}$:

$$\text{car}^{\#} \frac{L}{\tau(L)} = \text{car}^{\#} \frac{\tau^k(L)}{\tau^{k+1}(L)} \quad \text{et} \quad \text{car}^{\text{rel}} \frac{\tau^k(L)}{\tau^{k+1}(L)} = \tau^{-k} \left(\text{car}^{\text{rel}} \frac{L}{\tau(L)} \right). \quad \blacksquare$$

Rappelons quelques propriétés des modules purs sur un anneau A filtré positivement dont le gradué $\text{gr } A$ est commutatif régulier. Si un $\text{gr } A$ -module de type fini est pur, ses idéaux associés coïncident avec les idéaux premiers minimaux de son support et la hauteur de ces idéaux est constante égale au grade du module (voir [3, Appendix IV, Proposition 3.7]). Cette condition caractérise en fait les modules purs (voir [3, Appendix IV, Remark 3.8]). Si N est un A -module pur, il existe une bonne filtration de N tel que le gradué de N soit un $\text{gr } A$ -module pur (voir [3, Appendix IV, Theorem 4.11]). La conséquence est que $\mathcal{J}(N)$ la racine de l'annulateur de $\text{gr } N$ a tous ses idéaux associés de même hauteur. Prendre garde que pour p idéal premier de $\text{gr } A$, nous n'avons pas nécessairement $\dim(\text{gr } A/p) + \text{ht } p = \dim \text{gr } A$.

En particulier, si N est un $\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p]$ -module pur de grade $\dim X + 1$, il existe une bonne filtration dièse de N tel que $\text{gr}^{\#} N$ soit pur de même grade. Les idéaux premiers associés de $\text{gr}^{\#} N$ sont homogènes en (ξ, s) et leurs hauteurs coïncident avec la codimension des germes des espaces analytiques qu'ils définissent sur $T^*X \times \mathbf{C}^p$. De la proposition 17, nous déduisons en prenant $N = \tilde{L}/\tau(\tilde{L})$:

COROLLAIRE 5. *Les composantes irréductibles de*

$$\text{car}^{\#} \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} = \text{car}^{\#} \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}.$$

sont toutes de dimension $\dim X + p - 1$.

COROLLAIRE 6. *Il existe une famille $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de sous-espaces analytiques de X et une famille $(S'_\alpha)_{\alpha \in A}$ de réunion d'hypersurfaces algébriques de \mathbf{C}^p telles que*

$$\text{car}^{\text{rel}} \left(\frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} \right) = \bigcup_{\alpha \in A'} T_{Y_\alpha}^* X \times S'_\alpha.$$

DÉMONSTRATION. Le $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module $\tilde{L}/\tau(\tilde{L})$ étant majoré par une lagrangienne, il existe suivant la proposition 8 une famille $(Y_\alpha)_{\alpha \in A'}$ (resp. S'_α) de sous-espaces analytiques (resp. variétés algébriques de \mathbf{C}^p) telle que $\text{car}^{\text{rel}}(\tilde{L}/\tau(\tilde{L})) = \bigcup_{\alpha \in A'} T_{Y_\alpha}^* X \times S'_\alpha$. Alors, pour tout α , les S'_α sont de dimension $p - 1$. Nous considérons le module pur $N = \tilde{L}/\tau(\tilde{L})$. Il admet donc une bonne filtration relative tel que $\text{gr}^{\text{rel}} N$ soit pur. Si p est un idéal premier minimal du support de ce gradué, le quotient $\text{gr}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p])/p$ est pur de grade $\dim X + 1$. Il en résulte que le sous-espaces analytique qu'il définit est de dimension $\dim X + p - 1$. Toutes les composantes de $\text{car}^{\text{rel}} N$ sont donc de dimension $\dim X + p - 1$. Les S'_α sont donc de dimension $p - 1$. ■

REMARQUE 6. Nous verrons dans le paragraphe suivant que les S'_α sont en fait des hyperplans affines. Il en résultera que la variété des zéros de l'idéal de Bernstein $\mathcal{B}_{x_0}(\tilde{L}/\tau(\tilde{L}))$ est une réunion d'hyperplans affines.

3.3 – Remarques sur l'idéal de Bernstein $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$

3.3.1. Cas où m est une section d'un module holonome. M désigne toujours un \mathcal{D}_X -module holonome engendré par une section m et f_1, \dots, f_p sont des fonctions analytiques sur X .

Rappelons, voir définition 4, que $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ désigne l'idéal des polynômes b de $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ vérifiant au voisinage de x_0

$$b(s_1, \dots, s_p)m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}.$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernstein de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 .

PROPOSITION 18 (C. Sabbah [24, proposition 1.2]). *Pour toute section m d'un module holonome, pour tout $x_0 \in X$, il existe un nombre fini de formes linéaires \mathcal{H} à coefficients premiers entre eux dans \mathbf{N} telles que*

$$\prod_{H \in \mathcal{H}} \prod_{i \in I_H} (H(s) + \alpha_{H,i}) \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$$

où $\alpha_{H,i}$ sont des nombres complexes.

La preuve de C. Sabbah repose sur la [23, proposition 2.2.3], voir également [22]. Si $M = \mathcal{O}_X$, comme indiqué dans [22], les complexes peuvent être pris rationnels positifs (voir une preuve dans l'article [12] de A. Gyoja).

PROPOSITION 19. *Il existe $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ (resp. S_α) une famille finie de sous-espaces analytiques (resp. variétés algébriques de \mathbf{C}^p telles que*

$$\text{car}^{\text{rel}} \left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right) = \bigcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha.$$

avec les conditions :

- chaque variété algébrique S_α est de dimension $p - 1$,
- les composantes irréductibles de dimension $p - 1$ de chaque S_α sont des hyperplans affines $H_{\alpha, \beta}$ de directions les noyaux de formes linéaires à coefficients premiers entre eux dans \mathbf{N} ,
- toute composante irréductible des S_α de dimension strictement inférieure à $p - 1$ est contenue dans un hyperplan affine $\tau^k(H_{\alpha, \beta})$ où $k \in \mathbf{Z}$ et τ la translation $(s_1, \dots, s_p) \mapsto (s_1 + 1, \dots, s_p + 1)$.

DÉMONSTRATION. Considérons le $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ -module \tilde{L} construit à la proposition 15. Au voisinage de tout point x_0 , il existe un entier r tel que

$$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \subset \tilde{L} \subset \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1-r} \dots f_p^{s_p-r}.$$

Suivant le corollaire 6, il existe $(X'_\alpha)_{\alpha \in A}$ (resp. S'_α) une famille de sous-espaces analytiques (resp. de variétés algébriques de \mathbf{C}^p de dimension $p - 1$) tels que

$$\text{car}^{\text{rel}}(\tilde{L}/\tau(\tilde{L})) = \bigcup_{\alpha \in A'} T_{X'_\alpha}^* X \times S'_\alpha.$$

Considérons b_S un polynôme de $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ parmi ceux dont l'existence est assurée dans la proposition 18. Comme

$$b_S(s - r) \dots b_S(s) \tilde{L} \subset \tau(\tilde{L}),$$

ce produit $b_S(s - r) \dots b_S(s)$ s'annule sur les S'_α tels que $x_0 \in X_\alpha$. Vu la dimension des S'_α , cela montre que les S'_α sont des réunions d'hyperplans affines.

D'autre part suivant la proposition 13, il existe une variété lagrangienne Λ de T^*X telle que

$$\text{car}^{\text{rel}} \mathcal{D}_X[s] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} = \Lambda \times \mathbf{C}^p.$$

Il existe donc $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ (resp. S_α) une famille de sous-espaces analytiques (resp. de variétés algébriques de \mathbf{C}^p) telles que

$$\text{car}^{\text{rel}} \left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right) = \bigcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha.$$

Nous déduisons alors de la proposition 17 que $A' = A$ et $X_\alpha = Y_\alpha$ et

$$\bigcup S'_\alpha \subset \bigcup_{k=0}^r \tau^k \left(\bigcup S_\alpha \right) \text{ et } \bigcup S_\alpha \subset \bigcup_{k=0}^r \tau^{-k} \left(\bigcup S'_\alpha \right).$$

La proposition en résulte. ■

DÉFINITION 6. Pour tout $x_0 \in X$, notons $\mathcal{H}(x_0, m)$ l'ensemble des directions des hyperplans $H_{\alpha, \beta}$ pour les α tels que $x_0 \in X_\alpha$. Nous appelons ces directions les *pent*es de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 .

Suivant la proposition 9, $\bigcup_{x_0 \in X_\alpha} S_\alpha$ est la variété des zéros de l'idéal de Bernstein de (m, f_1, \dots, f_p) . Nous en déduisons :

COROLLAIRE 7. *Si un produit de formes linéaires affines appartient à $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$, tout hyperplan vectoriel de $\mathcal{H}(x_0, m)$ est direction de l'un des facteurs. De plus, il existe dans $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ un produit de formes linéaires affines dont les directions sont exactement l'ensemble $\mathcal{H}(x_0, m)$ des pentes de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 .*

DÉMONSTRATION. Pour le premier point, il suffit d'observer que si $b \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$, il s'annule sur les S_α intervenant dans la proposition 19, donc sur ceux de dimension $p - 1$ dont les directions sont les directions des hyperplans de \mathcal{H} . Pour le deuxième point, il suffit de prendre un produit de formes linéaires nulles sur les S_α intervenant dans la proposition 19 et d'utiliser la proposition 9. ■

COROLLAIRE 8. *La variété des zéros de $\mathbf{in} \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ l'idéal engendré par les parties homogènes de plus haut degré des éléments de $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ est la réunion des pentes de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 . La racine de $\mathbf{in} \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ est en particulier un idéal principal.*

DÉMONSTRATION. Résulte du corollaire 7. ■

PROPOSITION 20. *Soit $x_0 \in X$. Si le $\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p]$ -module*

$$\frac{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}$$

est un module pur de grade $\dim X + 1$, la racine de l'idéal de Bernstein $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ est principal. C'est notamment le cas sous la condition

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p]}^i \left(\text{Ext}_{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p]}^i \left(\frac{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}, \mathcal{D}_{X, x_0}[s_1, \dots, s_p] \right) \right) \neq 0 \implies i = \dim X + 1.$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte de la remarque 5 et du corollaire 6. La deuxième partie de la proposition est un critère de pureté (voir [3, Appendix IV, Proposition 2.6]). ■

Pour terminer ce paragraphe, considérons l'application

$$\exp^{2i\pi\cdot}: \mathbf{C}^p \rightarrow (\mathbf{C}^*)^p, \quad (s_1, \dots, s_p) \mapsto (e^{2i\pi s_1}, \dots, e^{2i\pi s_p}).$$

COROLLAIRE 9. L'image par l'application $\exp^{2i\pi\cdot}$ de la variétés des zéros de $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ est une réunion de sous-ensembles de $(\mathbf{C}^*)^p$ où chaque sous-ensemble est défini par une équation du type

$$(\sigma_1)^{a_1} \dots (\sigma_p)^{a_p} = \alpha$$

où (a_1, \dots, a_p) est une famille d'éléments de \mathbf{N} premier entre eux et α un nombre complexe. L'ensemble des (a_1, \dots, a_p) est l'ensemble des coefficients d'équations des pentes de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 .

DÉMONSTRATION. Cela se déduit de la proposition 19. En effet, si $a_1 s_1 + \dots + a_p s_p = a$ où (a_1, \dots, a_p) est une famille d'éléments de \mathbf{N} premier entre eux et a un nombre complexe est l'équation d'un hyperplan affine H , les images par $\exp^{2i\pi\cdot}$ des $\tau^k(H)$ pour $k \in \mathbf{Z}$ coïncident et ont pour équation

$$(\sigma_1)^{a_1} \dots (\sigma_p)^{a_p} = e^{2i\pi a}. \quad \blacksquare$$

Ce résultat répond à une question de N. Budur [9] posée pour le cas particulier $M = \mathcal{O}_X$.

3.3.2. Cas où m est une section d'un module holonome régulier. Nous supposons maintenant que $M = \mathcal{D}_X m$ est un module holonome régulier de variété caractéristique Λ . Notons F le produit $f_1 \dots f_p$ et désignons par $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\#$ l'adhérence dans $T^*X \times \mathbf{C}^p$ de

$$\Omega = \left\{ \left(x, \xi + \sum_{i=1}^p s_i \frac{df_i(x)}{f_i(x)}, s_1, \dots, s_p \right); s_i \in \mathbf{C}, (x, \xi) \in \Lambda \text{ et } F(x) \neq 0 \right\}.$$

Nous avons établi les résultats suivants avec J. Briançon et M. Merle dans [5] :

- (1) Les fibres réduites de la restriction de π_2 à $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\#$ sont des sous-espaces lagrangiens de T^*X . La fibre au-dessus de l'origine est un sous-espace lagrangien conique notée $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\#(0)$.

- (2) Les composantes irréductibles de $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0)$ sont toutes de dimension $\dim X + p - 1$. Leurs projections par π_2 sont des hyperplans vectoriels de \mathbf{C}^p dont les équations sont des formes linéaires à coefficients entiers positifs ou nuls. Plus précisément, si G une composante irréductible de $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0)$, si n_j désigne la multiplicité de f_j le long de G , $\pi_2(G)$ est l'hyperplan de \mathbf{C}^p d'équation $n_1 s_1 + \dots + n_p s_p = 0$.

DÉFINITION 7. Nous appelons *pent*es de $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$ les hyperplans vectoriels obtenus par projection par π_2 des composantes irréductibles de $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0)$. Pour tout $x_0 \in X$, nous notons $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$ l'ensemble de ces pentes au voisinage de x_0 .

Avec l'aide d'un résultat de C. Sabbah sur les variété caractéristiques d'un module relatif engendrant un module holonome régulier ([24, théorème 3.2]), nous avons établi avec J. Briançon et M. Merle dans [6] les résultats suivants :

PROPOSITION 21 ([6, théorèmes 2.1, 2.4 et 2.6]). *Soit M un \mathcal{D}_X -module holonome régulier M de variété caractéristique Λ et m une section de M engendrant M . Alors,*

- (1) $\text{car}^\#(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\#;$
- (2) $\text{car}^\#\left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}\right) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0);$
- (3) pour tout $c = (c_1, \dots, c_p) \in \mathbf{C}^p$,

$$\text{car}^\#\left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\sum_{j=1}^p (s_j - c_j) \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}}\right) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\#(0).$$

Nous déduisons des propositions 11, 12 et 13.

PROPOSITION 22. *Soit $M = \mathcal{D}_X m$ un module holonome régulier de variété caractéristique Λ . Alors,*

$$\text{car}^{\text{rel}}(\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}) = W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\#(0) \times \mathbf{C}^p.$$

PROPOSITION 23. *Soit $M = \mathcal{D}_X m$ un module holonome régulier de variété caractéristique Λ . Il existe un polynôme de Bernstein de m , f_1, \dots, f_p au voisinage de x_0 non nul qui soit produit de formes linéaires dont l'ensemble des directions vectorielles est exactement $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$.*

Cette proposition avait été obtenu pour $p = 2$ dans [6, théorème 3.2].

DÉMONSTRATION. Suivant C. Sabbah, considérons un $b_S \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ non nul produit de formes linéaires affines à coefficients rationnels. Ecrivons $b_S = c_1 c_2$

où c_1 (resp. c_2) est produit de formes linéaires affines de directions vectorielles formées par de pentes de $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$ (resp. non formées). Nous avons vu qu'au voisinage de x_0 , $b_S(s-r) \dots b_S(s) \tilde{L} \subset \tau(\tilde{L})$. Nous en déduisons que le sous-module

$$c_1(s-r) \dots c_1(s) \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} \subset \tilde{L}/\tau(\tilde{L})$$

est annulé par $c_2(s-r) \dots c_2(s)$. Il en résulte

$$\text{car}^\# \left(c_1(s-r) \dots c_1(s) \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} \right) \subset W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0) \cap (\text{in } c_2)^{-1}(0)$$

qui est de dimension strictement inférieure à $\dim X + p - 2$. Comme $\tilde{L}/\tau(\tilde{L})$ est pur de grade $\dim X + 1$, il s'en suit

$$c_1(s_1-r, \dots, s_p-r) \dots c_1(s_1, \dots, s_p) \frac{\tilde{L}}{\tau(\tilde{L})} = 0.$$

Posons $b_1(s) = c_1(s-r) \dots c_1(s)$, nous obtenons

$$b_1(s+r) \dots b_1(s) \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p).$$

Comme $b_1(s+r) \dots b_1(s)$ est produit de formes linéaires affines de directions vectorielles formées par des pentes de $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$, nous avons montré l'existence dans $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ d'un tel polynôme non nul. Inversement, la partie homogène de plus haut degré de ce polynôme s'annule sur $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0)$ au voisinage de x_0 et donc sur toutes les pentes de $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$.

Si $c(s_1, \dots, s_p)$ est un polynôme, désignons par $\text{in } c$ la partie homogène de c de plus haut degré. Si b appartient à l'idéal de Bernstein de m, f_1, \dots, f_p au voisinage de x_0 , $\text{in } b$ s'annule sur

$$\text{car}^\# \left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right).$$

Il résulte de la proposition 21 que $\text{in } b$ s'annule sur $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$. ■

La proposition 23 permet de montrer que les pentes $\mathcal{H}(x_0, m)$ de (m, f_1, \dots, f_p) au voisinage de x_0 ne sont autres que $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$ l'ensemble de ces pentes au voisinage de x_0 . Ainsi, nous obtenons :

PROPOSITION 24. *Soit $M = \mathcal{D}_X m$ un module holonome régulier de variété caractéristique Λ . Au voisinage de tout $x_0 \in X$, il existe $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ (resp. S_α) une famille finie de sous-espaces analytiques (resp. variétés algébriques de \mathbf{C}^p)*

telle que

$$\text{car}^{\text{rel}} \left(\frac{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}} \right) = \bigcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X \times S_\alpha.$$

avec les conditions

- Chaque variété algébrique S_α est de dimension $p - 1$.
- Les composantes irréductibles de dimension $p - 1$ de chaque S_α sont des hyperplans affines $H_{\alpha, \beta}$ de directions les noyaux de formes linéaires à coefficients premiers entre eux dans \mathbf{N} .
- Toute composante irréductible des S_α de dimension strictement inférieure à $p - 1$ est contenue dans un hyperplan affine $\tau^k(H_{\alpha, \beta})$ où $k \in \mathbf{Z}$ et τ la translation $(s_1, \dots, s_p) \mapsto (s_1 + 1, \dots, s_p + 1)$.
- l'ensemble des directions des hyperplans affines $H_{\alpha, \beta}$ pour $x_0 \in X_\alpha$ est l'ensemble $\mathcal{H}(\Lambda, x_0, f_1, \dots, f_p)$.

COROLLAIRE 10. Soit $M = \mathcal{D}_X m$ un module holonome régulier de variété caractéristique Λ . La variété des zéros de $\mathbf{in} \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ l'idéal engendré par les parties homogènes de plus haut degré des éléments de $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ est la réunion est la réunion des pentes de $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$ au voisinage de x_0 .

DÉMONSTRATION. Si $b \in \mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$, in b la partie homogène de plus haut degré de b s'annule sur la variété caractéristique dièse de

$$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} / \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}$$

et donc, suivant la proposition 21, s'annule sur $W_{f_1, \dots, f_p, \Lambda}^\# \cap F^{-1}(0)$. Il en résulte une inclusion. L'autre inclusion est donnée par la proposition 23. ■

Enfin, nous avons :

COROLLAIRE 11. Soit $M = \mathcal{D}_X m$ un module holonome régulier de variété caractéristique Λ . L'image par l'application $\exp^{2i\pi \cdot}$ de la variétés des zéros de $\mathcal{B}(m, x_0, f_1, \dots, f_p)$ est une réunion de sous-ensembles de $(\mathbf{C}^*)^p$ où chaque sous-ensemble est défini par une équation dun type

$$(\sigma_1)^{a_1} \dots (\sigma_p)^{a_p} = \alpha$$

où α est un nombre complexe et (a_1, \dots, a_p) (a_1, \dots, a_p) est une famille d'éléments de \mathbf{N} premier entre eux. Cette famille est exactement la famille des coefficients des formes linéaires dont les des zéros sont les pentes de $(\Lambda, f_1, \dots, f_p)$ au voisinage de x_0 .

RÉFÉRENCES

- [1] M. AUSLANDER – M. BRIDGER, *Stable module theory*. Mem. Am. Math. Soc. 94, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969. Zbl [0204.36402](#) MR [0269685](#)
- [2] I. N. BERNŠTEĪN, Analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. *Funkcional. Anal. i Priložen.* **6** (1972), no. 4, 26–40; English translation, *Funct. Anal. Appl.* **6** (1973), 273–285. Zbl [0282.46038](#) MR [0320735](#)
- [3] J.-E. BJÖRK, *Analytic \mathcal{D} -modules and applications*. Math. Appl., Dordr. 247, Kluwer, Dordrecht, 1993. Zbl [0805.32001](#) MR [1232191](#)
- [4] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique*. Algèbre Commutative, Springer, Berlin etc., 2006.
- [5] J. BRIANÇON – P. MAISONOBE – M. MERLE, Constructibilité de l'idéal de Bernstein. In *Singularities—Sapporo 1998*, pp. 79–95, Adv. Stud. Pure Math. 29, Kinokuniya, Tokyo, 2000. Zbl [1070.14507](#) MR [1819631](#)
- [6] J. BRIANÇON – P. MAISONOBE – M. MERLE, Équations fonctionnelles associées à des fonctions analytiques. *Tr. Mat. Inst. Steklova* **238** (2002), Monodromiya v Zadachakh Algebr. Geom. i Differ. Uravn., 86–96. Zbl [1026.32017](#) MR [1969306](#)
- [7] J. BRIANÇON – P. MAISONOBE – M. MERLE, Éventails associés à des fonctions analytiques. *Tr. Mat. Inst. Steklova* **238** (2002), Monodromiya v Zadachakh Algebr. Geom. i Differ. Uravn., 70–80. Zbl [1026.32058](#) MR [1969304](#)
- [8] J. BRIANÇON – H. MAYNADIER, Équations fonctionnelles généralisées : transversalité et principalité de l'idéal de Bernstein–Sato. *J. Math. Kyoto Univ.* **39** (1999), no. 2, 215–232. Zbl [0955.32005](#) MR [1709290](#)
- [9] N. BUDUR, Bernstein–Sato ideals and local systems. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **65** (2015), no. 2, 549–603. Zbl [1332.32038](#) MR [3449162](#)
- [10] O. GABBER, The integrability of the characteristic variety. *Amer. J. Math.* **103** (1981), no. 3, 445–468. Zbl [0492.16002](#) MR [618321](#)
- [11] M. GRANGER – P. MAISONOBE, A basic course on differential modules. In *Éléments de la théorie des systèmes différentiels. \mathcal{D} -modules cohérents et holonomes* (Nice, 1990), pp. 103–168, Travaux en Cours 45, Hermann, Paris, 1993. Zbl [0853.32011](#) MR [1603609](#)
- [12] A. GYOJA, Bernstein–Sato's polynomial for several analytic functions. *J. Math. Kyoto Univ.* **33** (1993), no. 2, 399–411. Zbl [0797.32007](#) MR [1231750](#)
- [13] G. HERMANN, Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale. *Math. Ann.* **95** (1926), no. 1, 736–788. Zbl [52.0127.01](#) MR [1512302](#)
- [14] M. KASHIWARA, B -functions and holonomic systems. Rationality of roots of B -functions. *Invent. Math.* **38** (1976), no. 1, 33–53. Zbl [0354.35082](#) MR [430304](#)
- [15] M. KASHIWARA, Algebraic study of systems of partial differential equations. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (1995), no. 63. Zbl [0877.35003](#) MR [1384226](#)

- [16] M. KASHIWARA – T. KAWAI, On holonomic systems for $\prod_{i=1}^N (f_i + (\sqrt{} - 1)0)^{\lambda_i}$. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **15** (1979), no. 2, 551–575. Zbl [0449.35067](#) MR [555665](#)
- [17] F. LOESER, Fonctions zêta locales d'Igusa à plusieurs variables, intégration dans les fibres, et discriminants. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **22** (1989), no. 3, 435–471. Zbl [0718.11061](#) MR [1011989](#)
- [18] P. MAISONOBE, Cycles évanescents algébriques et topologiques par un morphisme sans pente. *J. Singul.* **7** (2013), 157–189. Zbl [1293.32013](#) MR [3084694](#)
- [19] H. MATSUMURA, *Commutative algebra*. Second edn., Mathematics Lecture Note Series 56, Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1980. Zbl [0211.06501](#) MR [575344](#)
- [20] Z. MEBKHOUT – L. NARVÁEZ-MACARRO, La théorie du polynôme de Bernstein–Sato pour les algèbres de Tate et de Dwork–Monsky–Washnitzer. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **24** (1991), no. 2, 227–256.
- [21] D. REES, The grade of an ideal or module. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957), 28–42. Zbl [0079.26602](#) MR [82967](#)
- [22] C. SABBAAH, Polynômes de Bernstein–Sato à plusieurs variables. In *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles 1986–1987*, Exp. No. XIX, École Polytech., Palaiseau, 1987. Zbl [0634.32003](#) MR [920037](#)
- [23] C. SABBAAH, Proximité évanescence. I. La structure polaire d'un \mathcal{D} -module. *Compositio Math.* **62** (1987), no. 3, 283–328. Zbl [0622.32012](#) MR [901394](#)
- [24] C. SABBAAH, Proximité évanescence. II. Équations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques. *Compositio Math.* **64** (1987), no. 2, 213–241. Zbl [0632.32006](#) MR [916482](#)
- [25] J.-P. SERRE, *Algèbre locale. Multiplicités*. Lect. Notes Math. 11, Springer, Berlin etc., 1965. Zbl [0142.28603](#) MR [0201468](#)

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 aprile 2020.