

SUR LA COUPE DES VÊTEMENTS
VARIATION AUTOUR D'UN THÈME DE TCHEBYCHEV

par Étienne GHYS

1. INTRODUCTION

Le 28 août 1878, à l'occasion de la septième réunion à Paris de l'*Association pour l'Avancement de la Science*, P.L. Tchebychev fit une conférence portant le même titre que cet article [37]. Darboux écrira le 3 septembre 1878 à Houël: «*À propos du congrès de l'Association Française, [...] Tchebychef a fait une communication sur la coupe des habits. C'est très original, mais très ingénieux*». Cette conférence fut rédigée en français mais puisque l'auteur n'avait pas porté la mention «Imprimer» sur le manuscrit, Markov et Sonin — les premiers éditeurs des œuvres complètes de Tchebychev [38] — décidèrent de n'en publier qu'un court résumé. Dans une édition russe plus tardive des œuvres [40], les éditeurs ont par contre publié une traduction russe de la conférence qui fut ensuite traduite en anglais par Chobot et Collomb [12] et commentée par Butzer et Jongmans [11]. Enfin, à l'occasion de sa thèse sur Lucas (qui avait discuté de «problèmes textiles» deux années auparavant avec Tchebychev), Décaillot a transcrit le manuscrit original français [14, 15] (mais ne le publia pas). On trouvera cette transcription en appendice.

Selon Grant [22], pour compléter son maigre salaire universitaire, Tchebychev avait obtenu un contrat pour optimiser la découpe d'uniformes militaires évitant les pertes de tissu. Le problème était semble-t-il particulièrement délicat pour les épaules... Cette question l'intéressa tant qu'il en oublia son client pour développer une théorie des réseaux qu'on appelle aujourd'hui «de Tchebychev». Il aurait écrit un livre sur la question, que je n'ai malheureusement pas pu localiser.

Ces réseaux de Tchebychev sont apparus à nouveau par la suite en liaison avec les surfaces à courbure négative constante et les équations aux dérivées partielles, dites de *sine-Gordon*.

Le but de cet article est d'aller un peu plus loin que Tchebychev, 48,0151% plus loin pour être précis !

Il s'agit donc d'*habiller une surface avec un tissu*. Le modèle utilisé est raisonnable. Un tissu mis à plat est formé de deux réseaux de fils rectilignes entrecroisés (les fils de trame et de chaîne), qui forment des carrés de petite taille. Lorsqu'on déforme le tissu pour le déposer sur une surface, les fils – initialement rectilignes – deviennent des courbes gauches, mais ils ne sont pas dilatés. Les petits carrés initiaux peuvent se déformer : leurs côtés ne changent pas de longueur mais l'angle entre les fils n'est plus nécessairement droit. Formalisons cela :

DÉFINITION. Soit S une surface (infiniment différentiable) plongée (ou immergée) dans l'espace euclidien \mathbf{R}^3 . Un ouvert connexe U de S est *habillable* s'il existe un domaine Ω du plan euclidien \mathbf{R}^2 (de coordonnées (u, v)) et un paramétrage $F: \Omega \rightarrow F(\Omega) = U \subset S$ dont les restrictions aux droites horizontales et verticales sont des courbes paramétrées par longueur d'arc. Autrement dit, F est un *habillage* si les vecteurs $\partial F/\partial u$ et $\partial F/\partial v$ sont de norme unité.

La question « pratique » est donc de déterminer quelles sont les surfaces habillables.

Un premier résultat important est que toute surface est *localement* habillable. D'une certaine manière, on peut dire que Tchebychev le « montre » lorsque la surface est analytique réelle mais ceci fut établi par Bianchi rigoureusement en 1902 [4] (voir aussi [5]). Le résultat est plausible pour la raison suivante. Considérons deux courbes c_1, c_2 tracées sur la surface, paramétrées par longueur d'arc, et se rencontrant transversalement en un point $p = c_1(0) = c_2(0)$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ petit, destiné à tendre vers 0. Le long de c_1 , considérons les points régulièrement espacés :

$$\dots ; p_{(-1,0)} = c_1(-\varepsilon) ; \quad p_{(0,0)} = c_1(0) ; \quad p_{(1,0)} = c_1(\varepsilon) ; \quad p_{(2,0)} = c_1(2\varepsilon) ; \dots$$

ainsi que

$$\dots ; p_{(0,-1)} = c_2(-\varepsilon) ; \quad p_{(0,0)} = c_2(0) ; \quad p_{(0,1)} = c_2(\varepsilon) ; \quad p_{(0,2)} = c_2(2\varepsilon) ; \dots$$

le long de c_2 .

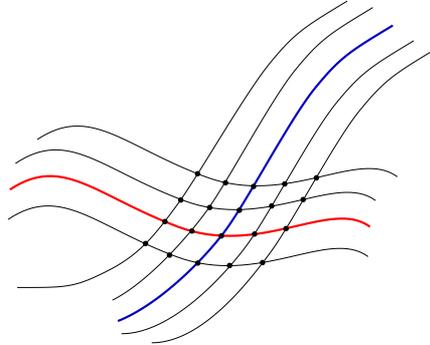


FIGURE 1
Un tissu « discret »

Si ε est assez petit, on peut compléter en une double rangée de points $p_{(i,j)}$ (avec des entiers i, j inférieurs en module à $const/\varepsilon$) de telle sorte que tous les quadrilatères

$$P_{(i,j)}, P_{(i+1,j)}, P_{(i+1,j+1)}, P_{(i,j+1)}$$

aient leurs quatre côtés de longueur ε . Il suffit pour cela d'utiliser un compas pour construire les points, rangée par rangée (voir figure 1). Lorsque ε tend vers 0, on peut penser que cette double rangée de points va converger vers un habillage de la surface au voisinage du point p . C'est le contenu du théorème de Bianchi. Servant à ramener l'habillage d'une surface à la résolution d'une paire d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires de type hyperbolique [35].

Dans son « article », Tchebychev esquisse une « preuve » qu'il est possible d'habiller un hémisphère. Nous verrons que sa méthode est correcte même si elle n'est pas très convaincante pour un mathématicien d'aujourd'hui. Voici la pièce de tissu dessinée par Tchebychev et destinée à habiller un hémisphère.

Il faut imaginer que l'habillage envoie le point central de ce domaine sur le pôle nord de la sphère par exemple. Les deux axes sont envoyés (isométriquement) sur deux arcs de demi-grands cercles orthogonaux. Le bord du domaine est envoyé sur l'équateur.

Le « théorème de Tchebychev » fut démontré rigoureusement par Bakelman en 1965 [3]. En 1991, par une autre approche, Samelson démontre l'existence d'un ouvert habillable contenant un hémisphère fermé [33].

Dans cet article, nous allons montrer qu'il est en fait possible d'habiller la sphère toute entière (ou plus précisément la sphère moins une couture, inévitable puisque que la sphère n'est pas homéomorphe à un ouvert du plan).

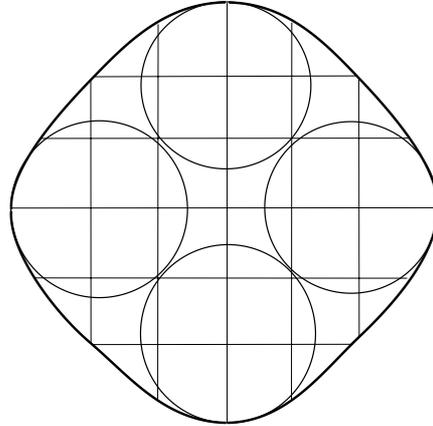


FIGURE 2

Le patron de Tchebychev (d'après le dessin original)

THÉORÈME. *En retirant à la sphère deux arcs de grands cercles orthogonaux qui se coupent en leur milieu et de longueurs convenables, l'ouvert qui en résulte est habillable.*

La figure 3 représente l'ouvert Ω dans le plan, source de l'habillage F : le patron du tailleur. Les fils ne sont pas indiqués ; ce sont les droites verticales et horizontales. Les quatre demi-axes sont envoyés sur quatre méridiens, allant du pôle nord au pôle sud. Plus précisément, le pôle sud n'est pas dans l'image de F puisque Ω est ouvert mais F se prolonge à l'adhérence de Ω . Ce prolongement n'est pas injectif : les quatre « coins » de l'adhérence sont envoyés sur le pôle sud. Les deux bissectrices des axes (intersectées par Ω) sont envoyées sur deux arcs de grands cercles orthogonaux s'intersectant au pôle nord. Les milieux des « côtés » du patron correspondent à quatre points « singuliers » où les deux fils deviennent tangents. Sur la figure 3, on a représenté l'image inverse par F des méridiens et l'image inverse des parallèles. On a surligné l'image inverse de l'équateur, obtenant ainsi une image plus précise de l'habillage de Tchebychev d'un hémisphère.

La figure 4 montre la sphère « habillée » par notre pièce de tissu Ω . On a représenté certains fils, c'est-à-dire les images par F des droites horizontales et verticales. On voit également les deux arcs de grands cercles qui ne sont pas recouverts par l'habillage et qui sont en fait dans l'image du bord de Ω . Les fils qui proviennent des axes de coordonnées sur le patron ont été surlignés

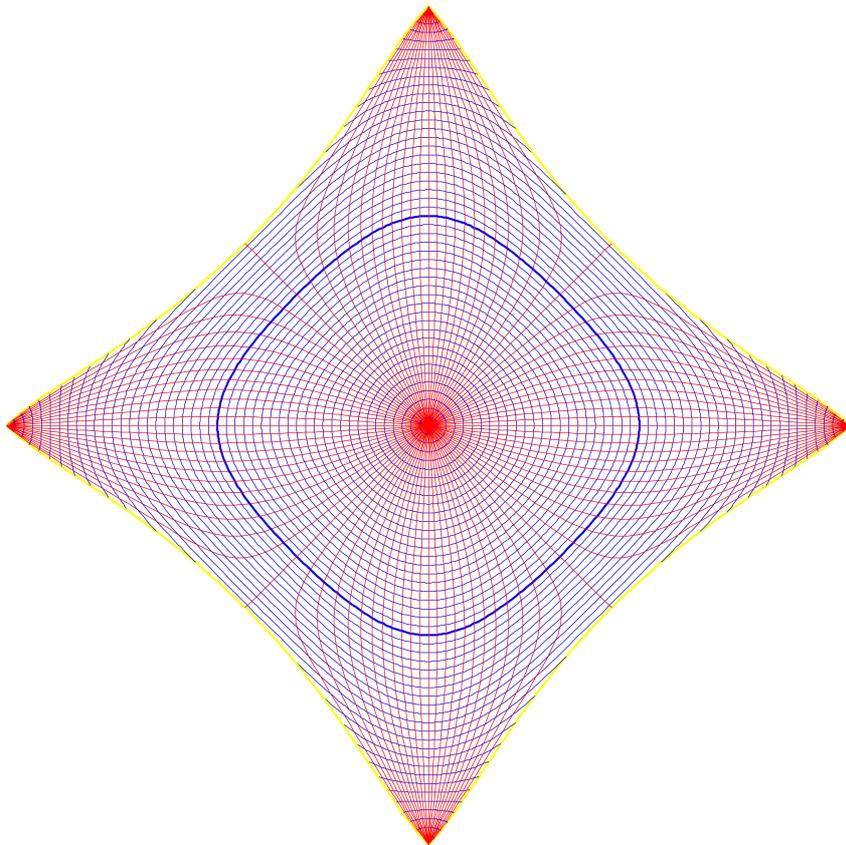


FIGURE 3
Patron pour la sphère

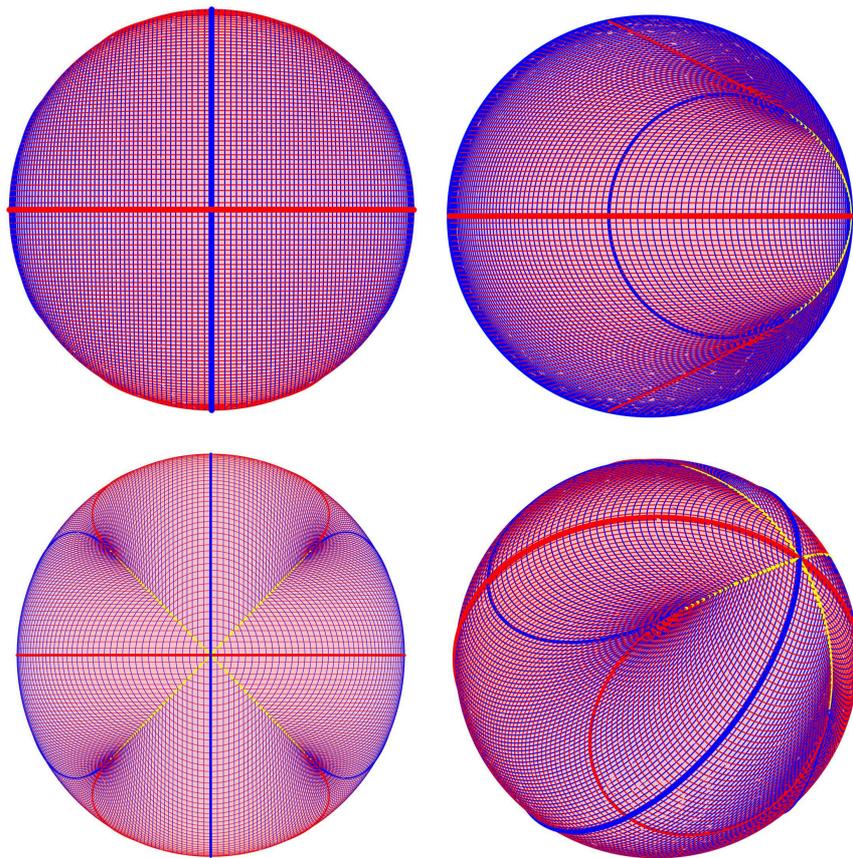


FIGURE 4
Sphère habillée

de même que les quatre fils connectant les quatre points singuliers. Chacun des quatre «côtés» de Ω est «replié en deux par son milieu» et les deux moitiés doivent être recousues pour fabriquer la sphère. Topologiquement, la situation est celle qu'on rencontre en fabriquant une enveloppe en papier.

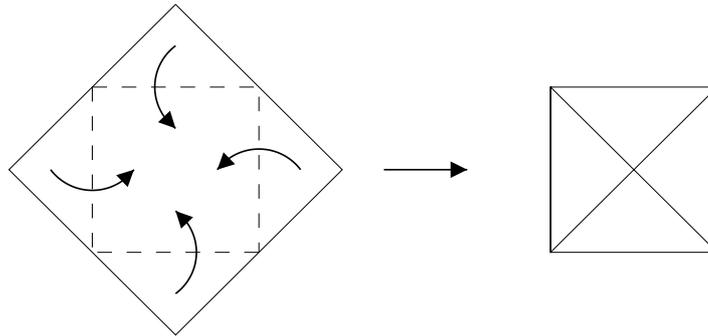


FIGURE 5
Une enveloppe

La suite de cet article devrait clarifier ces figures.

La calotte sphérique centrée sur le pôle nord et d'angle au centre $\simeq 1,48015063 \times \pi/2$ ne rencontre pas les deux arcs qui forment la couture et c'est en ce sens que nous améliorons le résultat de Tchebychev qui habillait un hémisphère, c'est-à-dire une calotte d'angle $\pi/2$. Cette calotte recouvre 84,24% de la superficie de la sphère.

Considérons un habillage $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ et supposons pour simplifier que Ω soit étoilé par rapport à l'origine, et que les fils soient perpendiculaires à l'origine. On peut poser, pour $t \in]0, 1]$:

$$F_t(u, v) = \frac{1}{t}F(tu, tv).$$

On obtient bien sûr un autre habillage. Lorsque t tend vers 0, le plongement F_t tend vers la différentielle F_0 de F à l'origine, qui envoie isométriquement le plan \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}^3 . Ainsi, l'habillage F peut être obtenu progressivement; on place l'ouvert Ω dans un plan de l'espace et on le déforme à travers les habillages F_t . Même si cet article ne cherche pas les applications pratiques, il est agréable de constater que le tissu peut effectivement être placé sur la surface.

Nous verrons que la même méthode permet également d'habiller de grands ouverts du disque de Poincaré. En passant, nous retrouvons une jolie surface (singulière) à courbure négative constante mise en évidence par Bianchi en 1902 puis précisée par Amsler en 1955 [4, 1].

2. UNE SOLUTION TRIVIALE

Nous commençons par indiquer un «habillage» de la sphère sans grand intérêt, qui était très certainement connu de Tchebychev et qui est explicité dans [42].

Une surface habillée est naturellement munie de deux champs de vecteurs $\vec{U} = \partial F / \partial u$ et $\vec{V} = \partial F / \partial v$ qui sont de norme 1 et qui commutent. Réciproquement, deux tels champs de vecteurs définissent des flots locaux qui commutent, et donc un habillage (au moins local) par des coordonnées u, v .

Si on utilise sur la sphère la longitude θ et la latitude λ comme coordonnées, on peut écrire immédiatement des paires de champs unitaires qui commutent. Les champs $\partial / \partial \lambda$ et $\partial / \partial \theta$ commutent mais sont de normes 1 et $\cos \lambda$ respectivement, si bien que pour chaque constante $k > 0$, les champs suivants

$$\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{1+k}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sqrt{\frac{k + \sin^2 \lambda}{1+k}} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

et

$$\vec{V} = -\frac{1}{\sqrt{1+k}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sqrt{\frac{k + \sin^2 \lambda}{1+k}} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

sont unitaires et commutent. Ces champs sont cependant singuliers aux pôles nord et sud.

Partant du point de la sphère de coordonnées $(0, 0)$, on peut suivre le flot de \vec{U} pendant un temps u puis celui de \vec{V} pendant un temps v pour peu qu'on n'atteigne pas les pôles, c'est-à-dire si

$$|u + v| < L(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1+k}{k + \sin^2 \lambda}} d\lambda.$$

On a donc un «habillage» F défini sur cette bande et à valeurs dans la sphère privée des deux pôles. Bien entendu, F est périodique de vecteur $\pi\sqrt{1+k}(1, -1)$ de sorte que pour obtenir un véritable habillage, on peut par exemple restreindre F au rectangle défini par $|u - v| < \pi\sqrt{1+k}$ et $|u + v| < L(k)$. On obtient ainsi un habillage de la sphère privée d'un méridien.

La figure 6 montre l'habillage pour $k \simeq 0,426$ (ce qui, incidemment, correspond à la valeur qui minimise l'aire totale du tissu utilisé).

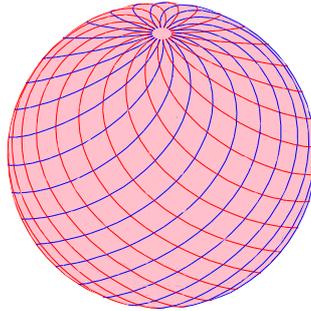


FIGURE 6
Une sphère habillée «trivialement»

Évidemment, cet habillage n'a pas grand intérêt à cause de ses deux points singuliers *antipodaux* si bien que la partie véritablement recouverte ne contient aucun hémisphère fermé contrairement à l'exemple décrit par Tchebychev.

3. UN PEU DE GÉOMÉTRIE DES RÉSEAUX DE TCHEBYCHEV

Nous rappelons ici quelques propriétés bien classiques (même si souvent, les démonstrations publiées sont très calculatoires [4, 16, 36]). Considérons donc une immersion F d'un ouvert du plan dans l'espace \mathbf{R}^3 telle que $\partial F/\partial u$ et $\partial F/\partial v$ soient de norme 1. On oriente la surface de façon à ce que $(\partial F/\partial u, \partial F/\partial v)$ soit un repère direct.

La première observation est que $\partial^2 F/\partial u \partial v$, étant à la fois la dérivée par rapport à u du vecteur unité $\partial F/\partial v$ et par rapport à v du vecteur unité $\partial F/\partial u$, est orthogonal à la fois à $\partial F/\partial u$ et $\partial F/\partial v$. On en déduit donc :

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \text{ est orthogonal à la surface.}$$

Rappelons que lorsque l'on dispose d'une courbe $c(t)$ tracée sur une surface et d'un vecteur $\vec{v}(0)$ tangent à la surface en $c(0)$, on peut *transporter parallèlement* le vecteur le long de la courbe, c'est-à-dire construire une unique courbe $\vec{v}(t)$ de vecteurs tangents aux points $c(t)$ avec la condition que $d\vec{v}(t)/dt$ est partout orthogonal à la surface. Ce que nous venons de voir

pour $\partial^2 F / \partial u \partial v$ montre alors la seconde propriété fondamentale :

$$\frac{\partial F}{\partial u} \text{ (resp. } \frac{\partial F}{\partial v} \text{) est un champ de vecteurs parallèle}$$

le long des fils $u = \text{const}$ (resp. $v = \text{const}$).

On peut alors calculer la courbure d'une surface habillée. Pour chaque (u, v) , notons $\omega(u, v)$ l'angle entre les fils au point correspondant, i.e. l'angle entre les vecteurs $\partial F / \partial u$ et $\partial F / \partial v$ (compris entre 0 et π). La courbure K de la surface est donnée par la formule :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = -K \sin \omega.$$

La manière la plus élémentaire de l'établir consiste à considérer un rectangle sur la surface dans lequel u varie entre u_0 et u_1 et v varie entre v_0 et v_1 et d'appliquer la version la plus simple du théorème de Gauss-Bonnet à ce rectangle. On part d'un vecteur tangent en un point du bord et on le suit parallèlement le long du bord, parcouru dans le sens direct. Après ce transport parallèle, le vecteur dont on est parti a subi une certaine rotation dont l'angle est l'intégrale de la courbure sur le rectangle. Dans notre cas, nous savons que le champ de vecteurs $\partial F / \partial u$ est parallèle le long des courbes $u = \text{const}$. Transporter $\partial F / \partial u$ parallèlement le long d'un côté de notre rectangle est donc particulièrement aisé. Le long d'un côté où u est constant, il reste parallèle. Le long d'un côté où v est constant, c'est $\partial F / \partial v$ qui est parallèle si bien que le transport de $\partial F / \partial u$ tourne (par rapport à $\partial F / \partial u$) d'un angle égal à la différence entre les valeurs ω aux deux extrémités du côté parcouru. L'intégrale de courbure sur le rectangle est donc donnée par la formule suivante, due à Hazzidakis [23].

$$\int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} K(u, v) \sin(\omega(u, v)) \, dudv$$

$$= -\omega(u_0, v_0) + \omega(u_0, v_1) - \omega(u_1, v_1) + \omega(u_1, v_0).$$

Notez que l'élément d'aire sur la surface est $\sin \omega \, dudv$.

La formule pour la courbure n'est alors que la version infinitésimale de la formule précédente, obtenue en dérivant par rapport à u_1 et v_1 au point (u_0, v_0) . D'ailleurs, on récupère la formule de Hazzidakis en intégrant deux fois la courbure.

Bien entendu, les fils définis par $u = \text{const}$ ne sont pas en général des géodésiques sur la surface. En effet, leurs vecteurs tangents $\partial F / \partial v$ ne sont pas parallèles le long de ces courbes, contrairement à $\partial F / \partial u$. Comme ces deux vecteurs forment un angle ω , on obtient immédiatement le corollaire suivant :

La courbure géodésique des fils définis par $u = \text{const}$ (resp. $v = \text{const}$) est égale à $\partial\omega/\partial v$ (resp. $-\partial\omega/\partial u$).

Par exemple un fil est une géodésique si et seulement si l'angle ω est constant le long de ce fil. Cette dernière propriété est signalée par Tchebychev dans son article.

Dans les coordonnées (u, v) , la métrique prend la forme :

$$du^2 + 2 \cos \omega(u, v) dudv + dv^2.$$

Évidemment, on peut aussi considérer la question « intrinsèque » d'étudier les métriques ayant cette forme, ne provenant pas nécessairement d'une surface plongée dans l'espace euclidien. Les formules pour la courbure de Gauss ou pour la courbure géodésique des fils seraient bien sûr les mêmes. Dans le même ordre d'idées, on peut aussi chercher à habiller une surface riemannienne abstraite, pas nécessairement plongée.

4. UNE SOLUTION DE L'ÉQUATION DE SINE-GORDON

Puisque nous cherchons à habiller une sphère, de courbure constante égale par exemple à $+1$, nous allons considérer l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = -\sin \omega.$$

C'est une équation célèbre en physique mathématique : l'équation de *sine-Gordon* qui a retenu l'attention pour de nombreuses raisons, en particulier parce que certaines de ses solutions sont des « solitons », mais aussi parce qu'elle est « complètement intégrable ». Nous n'utiliserons pas ceci et nous référons à [2] pour une introduction à ce beau chapitre de la physique mathématique. Le nom « sine-Gordon » est un jeu de mots à partir de l'équation aux dérivées partielles *linéaire* de Klein-Gordon — due aux physiciens O. Klein et W. Gordon — qui est une version relativiste de l'équation de Schrödinger.

Le résultat suivant est bien classique ; il s'agit de la solution d'un problème de type Goursat pour une équation aux dérivées partielles avec données initiales le long des caractéristiques. On pourra consulter des preuves par Picard (1896) [28], Bianchi (1902) [4] et Goursat (1915) [19].

PROPOSITION. *Étant données deux fonctions $\phi, \psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ infiniment différentiables telles que $\phi(0) = \psi(0)$, il existe une unique solution ω de l'équation de sine-Gordon telle que $\omega(u, 0) = \phi(u)$ et $\omega(0, v) = \psi(v)$.*

La preuve la plus simple est par itération. On considère l'espace de Banach E_a des fonctions continues ω définies sur un petit carré $[0, a] \times [0, a]$, muni de la norme supérieure. Considérons ensuite l'opérateur linéaire sur E_a envoyant la fonction ω sur ω^* définie par :

$$\omega^*(u, v) = \phi(u) + \psi(v) - \phi(0) - \int_0^u \int_0^v \sin(\omega(s, t)) ds dt .$$

Il est clair que cet opérateur est une contraction si $a < 1$, puisque la fonction sinus est de module inférieur à 1. L'unique point fixe est alors la solution cherchée dans le petit carré. Pour obtenir la solution dans le plan tout entier, il suffit alors de paver le plan par de petits carrés et de résoudre l'équation petit carré par petit carré.

Si ϕ et ψ sont de classe C^k ($k \geq 1$), on montre que la solution ω est également de classe C^k par un argument de « bootstrap ». L'égalité $\omega = \omega^*$ et la continuité de ω montrent en effet que ω est en fait de classe C^1 puis, par récurrence que ω est de classe C^k .

La même preuve fonctionne dans le cas analytique réel; il suffit de remplacer l'espace E_a par l'espace de Banach des fonctions holomorphes sur un petit polydisque complexe, continues sur le bord.

Nous allons en fait nous contenter, en suivant en cela Tchebychev, de chercher une solution particulièrement simple pour laquelle ω ne dépend que du produit uv . Notez que pour tout $\lambda \neq 0$ la transformation

$$(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (\lambda u, \lambda^{-1} v) \in \mathbf{R}^2$$

transporte la solution de l'équation de sine-Gordon associée à $(\phi(u), \psi(v))$ sur celle associée à $(\phi(\lambda u), \psi(\lambda^{-1} v))$ si bien que lorsque ϕ et ψ sont des fonctions constantes, la solution $\omega(u, v)$ qui lui est associée est de la forme $\Delta(uv)$ pour une certaine fonction Δ analytique réelle d'une variable.

L'équation aux dérivées partielles devient alors une équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$x\Delta''(x) + \Delta'(x) + \sin \Delta(x) = 0 .$$

Tchebychev cherche une solution qui vaut $\pi/2$ à l'origine puisqu'il veut des fils perpendiculaires au centre du tissu. Sans grande précision ni grande rigueur (voir l'appendice), il trouve une solution à l'ordre 3 :

$$\Delta(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{18} + \dots .$$

Il ne faut que quelques (dizaines de) minutes à un utilisateur de *Maple* pour calculer par récurrence les coefficients de l'unique série entière qui vérifie cette

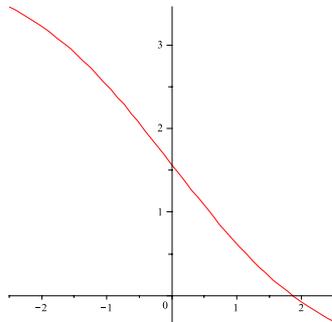


FIGURE 7
Graphe de Δ sur $[-3, 3]$

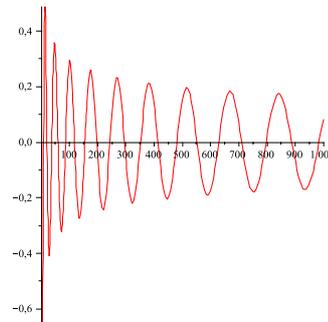


FIGURE 8
Graphe de Δ sur $[\zeta_0, 1000]$

équation différentielle avec cette condition initiale. Voici donc le début de la série que Tchebychev n'aurait pas pu calculer en une journée de calculs (?):

$$\begin{aligned} \Delta(x) = & \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{18}x^3 - \frac{7}{1800}x^5 + \frac{521}{1587600}x^7 - \frac{31139}{1028764800}x^9 \\ & + \frac{18279367}{6224027040000}x^{11} - \frac{11159392859}{37866980511360000}x^{13} \\ & + \frac{25289583956249}{834966920275488000000}x^{15} - \frac{4078693576473449}{1286962346451285504000000}x^{17} \\ & + \frac{15185544082366872679}{45158479167098447306956800000}x^{19} \\ & - \frac{21133178727426263957897}{585732038608541625363763200000000}x^{21} + \dots \end{aligned}$$

La figure 7 représente le graphe de Δ , obtenu en résolvant numériquement l'équation différentielle sur l'intervalle $[-3, 3]$. On note en particulier le premier zéro de Δ au point:

$$\zeta_0 \simeq 1,861591679\dots$$

La figure 8 représente le graphe de Δ , obtenu en résolvant numériquement l'équation différentielle sur l'intervalle $[\zeta_0, 1000]$. On note en particulier le premier zéro de Δ au point:

$$\zeta_0 \simeq 1,861591679\dots$$

On observera la symétrie $\Delta(-x) = \pi - \Delta(x)$ (par unicité). Lorsque $\Delta(x)$ est petit, on peut linéariser l'équation différentielle:

$$x\delta''(x) + \delta'(x) + \delta(x) = 0$$

dont les solutions sont des fonctions de Bessel

$$\delta(x) = c_1 \text{Bessel}J(0, 2\sqrt{x}) + c_2 \text{Bessel}Y(0, 2\sqrt{x}).$$

Si l'on pose $W = \exp(-i\Delta)$, l'équation différentielle satisfaite par W prend la forme :

$$W''(x) = \frac{W'(x)^2}{W(x)} - \frac{W'(x)}{x} + \frac{1}{2} \frac{(1 - W(x)^2)}{x}.$$

Les experts reconnaissent la troisième des équations célèbres de Painlevé :

$$W''(x) = \frac{W'(x)^2}{W(x)} - \frac{W'(x)}{x} + \frac{\alpha W(x)^2 + \beta}{x} + \gamma W(x)^3 + \frac{\delta}{W(x)}$$

pour $\alpha = -\beta = -1/2$ et $\gamma = \delta = 0$. Le comportement asymptotique de W est très bien connu pour x tendant vers $+\infty$ [27, 17]. On obtient ainsi le développement suivant :

$$\Delta(x) \simeq 2\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} x^{-1/4} \cos\left(2\sqrt{x} - \left(\frac{\ln 2}{4\pi}\right) \ln x + \phi\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

où

$$\phi = -\frac{(\ln 2)^2}{\pi} + \frac{\pi}{4} - \arg \Gamma\left(-i\frac{\ln 2}{2\pi}\right) \simeq -1,001473681697415.$$

Pour les liens entre les équations de Painlevé et l'équation de sine-Gordon, voir par exemple [6, 17].

5. UNE « ISOMÉTRIE » ENTRE LE PLAN ET LA SPHÈRE !

Nous sommes donc amenés à considérer le plan \mathbf{R}^2 muni de la métrique :

$$g = du^2 + 2 \cos \Delta(uv) dudv + dv^2.$$

Bien entendu, il ne s'agit d'une métrique riemannienne que sur l'ouvert où g est non dégénérée, c'est-à-dire en dehors des hyperboles d'équations $uv = \zeta$ où ζ est tel que $\Delta(\zeta)$ est un multiple de π . Sur cet ouvert, par la définition même de Δ , nous savons que la courbure de g est constante égale à $+1$, si bien que g est localement isométrique à la sphère euclidienne $(\mathbf{S}^2, \text{can})$ munie de sa métrique canonique.

PROPOSITION. *Il existe une isométrie $\Phi: (\mathbf{R}^2, g) \rightarrow (\mathbf{S}^2, \text{can})$.*

Cet énoncé peut paraître provocateur car le plan n'est même pas homéomorphe à la sphère... Il signifie en fait que Φ est une application infiniment différentiable du plan vers la sphère et que la g -norme d'un vecteur tangent en un point du plan est égale à la norme euclidienne de son image par la différentielle de Φ . Il n'y a pas contradiction puisque le long d'un certain nombre d'hyperboles, nous savons que g est dégénérée, si bien que la différentielle de Φ n'est pas inversible en ces points. En d'autres termes, Φ n'est pas un difféomorphisme !

La construction de Φ n'est pas difficile.

On commence par choisir l'image de $(0,0)$ qu'on peut appeler le *pôle nord*. Les axes de coordonnées de \mathbf{R}^2 sont deux géodésiques de g puisque l'angle ω y est constant égal à $\pi/2$. La restriction de Φ à ces axes doit décrire deux géodésiques de la sphère, donc des grands cercles, issus du pôle nord, paramétrés par longueur d'arc, et orthogonaux entre eux au pôle nord.

Une fois fixés ces deux grands cercles (ainsi que leurs orientations), l'isométrie Φ est complètement déterminée. Considérons une droite verticale sur laquelle u est une constante u_0 . Nous savons que la courbe $v \in \mathbf{R} \mapsto \Phi(u_0, v)$ doit être une courbe paramétrée par longueur d'arc, et nous avons calculé sa courbure géodésique en chaque point, égale à la dérivée par rapport à v de $\omega(u_0, v) = \Delta(u_0 v)$, ou encore $u_0 \Delta'(u_0 v)$. Comme on le sait, étant donnée une fonction lisse $k: s \in \mathbf{R} \mapsto k(s) \in \mathbf{R}$ et un vecteur unitaire tangent à une surface complète S , il existe une unique courbe $c: \mathbf{R} \rightarrow S$ paramétrée par longueur d'arc, dont le vecteur tangent en 0 est le vecteur donné, et dont la courbure géodésique en chaque point $c(s)$ est précisément $k(s)$. Puisque nous avons fixé $\Phi(u_0, 0)$, que nous savons que les fils sont perpendiculaires le long des axes, et que nous connaissons la courbure géodésique des droites verticales en fonction de l'abscisse curviligne v , ceci définit complètement $\Phi(u_0, v)$ pour tout (u_0, v) , y compris sur le lieu singulier de Φ . Il est important de noter que même si la différentielle de Φ n'est pas injective partout, elle est injective en restriction à toutes les verticales (et toutes les horizontales). Les courbes $v \in \mathbf{R} \mapsto \Phi(u_0, v)$ sont des courbes immergées régulières et paramétrées par longueur d'arc.

Nous venons de définir Φ mais *il faut encore montrer qu'il s'agit d'une isométrie*. Pour cela, on commence par observer que nous savons que la courbure de g est égale à $+1$, tout au moins là où elle a un sens, par exemple près de l'origine. Nous savons donc qu'il existe une isométrie locale Ψ définie sur un voisinage de l'origine et à valeurs dans un voisinage du pôle nord. Bien sûr, Ψ – là où elle est définie – doit également envoyer les axes sur des géodésiques perpendiculaires passant par le pôle nord : on peut donc

supposer que Φ et Ψ coïncident sur les axes, dans un voisinage de l'origine. Puisque Ψ est une isométrie, la courbure géodésique des images par Ψ des horizontales est la même que celle que nous avons utilisée pour définir Φ . Par conséquent Φ et Ψ coïncident dans un voisinage de l'origine de sorte que Φ est bien une isométrie au voisinage de l'origine. Comme Φ est analytique réelle, définie sur \mathbf{R}^2 tout entier, et que g et la métrique canonique sur la sphère sont tout autant analytiques, il en résulte que Φ est une isométrie $\Phi: (\mathbf{R}^2, g) \rightarrow (S^2, can)$, comme nous souhaitons le montrer.

Cette construction semble privilégier les verticales par rapport aux horizontales, mais il est facile de s'assurer que la symétrie entre les rôles de u et v est équivalente à l'équation de sine-Gordon.

6. COMMENT DESSINER L'ISOMÉTRIE

Pour comprendre la nature de l'isométrie, nous avons réalisé deux figures. La figure 3 représente l'image réciproque des méridiens et des parallèles de la sphère. La figure 4 représente l'image par Φ des fils horizontaux et verticaux.

Nous avons vu que la restriction de Φ aux axes de coordonnées décrit deux grands cercles orthogonaux, issus du pôle nord, paramétrés par longueur d'arc. Pour les autres fils, nous connaissons leur courbure en fonction de leur abscisse curviligne. Rappelons que la courbure géodésique d'une courbe tracée sur une surface (immergée dans l'espace) et paramétrée par longueur d'arc s'obtient en calculant la composante de l'accélération qui est dans le plan tangent. Il en résulte une équation différentielle du second ordre pour les courbes $v \mapsto \Phi(u_0, v)$ qu'il n'est pas difficile d'explicitier. Si l'on prend comme coordonnées la longitude θ et la latitude λ sur la sphère, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dv^2} &= 2 \tan(\lambda) \frac{d\theta}{dv} \frac{d\lambda}{dv} + u_0 \Delta'(u_0 v) \cos(\lambda)^{-1} \frac{d\lambda}{dv} \\ \frac{d^2\lambda}{dv^2} &= -\sin(\lambda) \cos(\lambda) \left(\frac{d\theta}{dv} \right)^2 - u_0 \Delta'(u_0 v) \cos(\lambda) \frac{d\theta}{dv} \end{aligned}$$

dont on peut tracer les solutions avec *Maple* puisque nous avons une bonne approximation numérique de la fonction Δ .

On peut également utiliser la projection stéréographique à partir du pôle nord et représenter les images des fils dans cette projection. Si les coordonnées

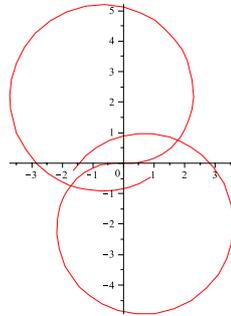


FIGURE 9

Un fil sur la sphère,
 u entre entre -5 et $+5$

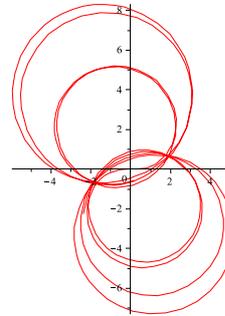


FIGURE 10

Un fil plus long sur la sphère,
 u entre -20 et $+20$

du plan tangent au pôle sud sont x, y , l'équation différentielle correspondante est :

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dv^2} &= -2 \left(-x \left(\frac{dx}{dv} \right)^2 - 2y \left(\frac{dx}{dv} \right) \left(\frac{dy}{dv} \right) + x \left(\frac{dy}{dv} \right)^2 \right) (4 + x^2 + y^2)^{-1} \\ &\quad + u_0 \Delta' (u_0 v) y, \\ \frac{d^2y}{dv^2} &= -2 \left(y \left(\frac{dx}{dv} \right)^2 - 2x \left(\frac{dx}{dv} \right) \left(\frac{dy}{dv} \right) - y \left(\frac{dy}{dv} \right)^2 \right) (4 + x^2 + y^2)^{-1} \\ &\quad - u_0 \Delta' (u_0 v) x. \end{aligned}$$

La figure 9 montre un exemple de l'image d'un fil en projection stéréographique (qui n'est pas centrée sur le pôle). Ici le paramètre u décrit un intervalle $[-5, 5]$ beaucoup plus grand que celui utilisé dans la figure 4 si bien qu'on ne peut plus employer la série entière écrite plus haut pour approcher Δ sur tout le domaine. Il suffit alors de calculer Δ numériquement directement à partir de l'équation différentielle du second ordre qui la définit. Nous avons déjà observé que Δ et Δ' tendent vers zéro à l'infini. Ceci est cohérent avec la figure 10 qui montre que les images des fils sont asymptotes à des grands cercles (de courbure géodésique nulle sur la sphère).

7. DES PLIS ET DES FRONCES

Nous nous proposons ici d'analyser la nature des singularités de l'isométrie Φ . Commençons par rappeler quelques propriétés bien connues des applications différentiables entre surfaces.

Soit F une application infiniment différentiable d'une surface S vers une surface \tilde{S} , envoyant un point p sur un point \tilde{p} . Si la différentielle de F en p est inversible, le théorème d'inversion locale garantit que F est un *difféomorphisme local*.

Supposons maintenant que la différentielle de F en p possède un noyau non trivial de dimension 1. Introduisons des coordonnées locales (s, t) au voisinage de p et (\tilde{s}, \tilde{t}) au voisinage de \tilde{p} , en sorte que le noyau de la différentielle en p soit engendré par $\partial/\partial t$. Si la dérivée seconde à l'origine $\partial^2 \tilde{t}/\partial t^2$ est non nulle, on est en présence d'un *pli*. Dans des coordonnées locales convenables, F envoie le point (s, t) sur le point (s, t^2) .

Supposons enfin que la différentielle de F en p possède un noyau non trivial de dimension 1, et qu'avec les mêmes notations, on ait à l'origine $\partial^2 \tilde{t}/\partial t^2 = 0$ mais $\partial^2 \tilde{t}/\partial s \partial t \neq 0$ ainsi que $\partial^3 \tilde{t}/\partial t^3 \neq 0$. Alors on est en présence d'une *fronce*. Dans des coordonnées convenables, F envoie alors le point (s, t) sur $(s, t^3 - st)$. Voir par exemple [18]. Un théorème célèbre de Whitney affirme que génériquement une application entre deux surfaces ne présente que des plis et des fronces comme points singuliers. Notez que la terminologie pli/fronce est parfaitement adaptée à cet article sur la coupe des vêtements...

Géométriquement, on peut considérer le lieu singulier $Sing$ de F , ensemble des points p où la différentielle n'est pas injective. Génériquement, il s'agit d'une courbe lisse et le long de cette courbe le noyau de la différentielle définit un champ de droites. Le long d'un pli, cette droite est transverse au lieu singulier. En un point fronce, le noyau de la différentielle est tangent à $Sing$. Dans le cas générique où F ne présente que des plis et des fronces, la courbe $Sing$ est lisse mais son image par F présente des points de rebroussement aux fronces. La figure 11 illustre cette situation. L'image de la parabole de gauche en traits pointillés est la demi-droite en pointillés à droite. La parabole de gauche en trait continu est le lieu singulier et son image est la courbe de droite présentant un point de rebroussement.

Après ces rappels, nous pouvons étudier Φ de ce point de vue.

Nous affirmons que l'isométrie Φ ne présente que des singularités génériques au sens précédent.

Remarquons que les symétries par rapport aux axes de coordonnées et leurs bissectrices sont des isométries de la métrique g si bien qu'à l'avenir nous limiterons l'étude au premier quadrant, et même parfois au secteur $0 < v < u$.

Nous savons déjà que le lieu singulier de Φ est la réunion des hyperboles $uv = \zeta$ où ζ est tel que $\Delta(\zeta)$ est un multiple de π . L'allure du graphe de Δ

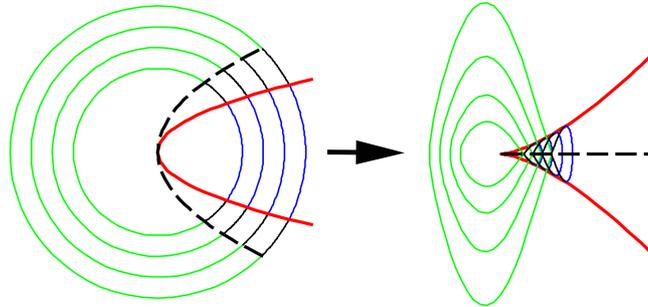


FIGURE 11
Une fronce

montre que cela ne se passe que lorsque $\Delta(\zeta) = 0$ (pour $\zeta > 0$).

Plaçons-nous en un point singulier (u_0, v_0) , donc tel que $u_0 v_0 = \zeta$ est un zéro de la fonction Δ . On commence par développer Δ à l'ordre 2 au voisinage de ζ :

$$\Delta(\zeta + \varepsilon) = \Delta_1 \varepsilon + \Delta_2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Puisque Δ vérifie une équation différentielle du second ordre, Δ_2 s'exprime en fonction de Δ_1 . On trouve facilement $\Delta_2 = -\Delta_1/2\zeta$.

Pour étudier l'image par Φ d'un point proche de (u_0, v_0) , de la forme $(u_0 + s, v_0 + t)$, on commence par étudier la courbe $\Phi(u_0, v_0 + t)$ dans les coordonnées x, y d'une projection stéréographique choisie pour que le point $\Phi(u_0, v_0)$ soit de coordonnées $(0, 0)$. Il s'agit de résoudre l'équation différentielle du second ordre (6.1), dans laquelle intervient la fonction Δ dont nous connaissons le développement à l'ordre deux. Il est alors facile de calculer (avec *Maple* ou à la main si on peut) le développement de $\Phi(u_0, v_0 + t)$ à l'ordre 3 au voisinage de $t = 0$.

Une fois l'image du fil vertical passant par l'origine connue à l'ordre 3, il est tout aussi facile de calculer les fils horizontaux qui en partent, toujours en résolvant l'équation différentielle à l'ordre 3. Voici le résultat de ce calcul sans intérêt. L'image de $(u_0 + s, v_0 + t)$ a comme coordonnées :

$$\begin{aligned} x &= s + t + \frac{1}{12}(s + t)^3 - \frac{\Delta_1^2}{6}(v_0 s^3 + u_0 t^3) + o((|s| + |t|)^3), \\ y &= \frac{\Delta_1}{2} \left(-v_0 s^2 + u_0 t^2 + \frac{v_0}{3u_0} s^3 - \frac{u_0}{3v_0} t^3 \right) + o((|s| + |t|)^3). \end{aligned}$$

On voit sur ces formules que le noyau de la différentielle de Φ est engendré par $\partial/\partial u - \partial/\partial v$, comme il fallait bien s'attendre puisque l'angle est

nul le long du lieu singulier. Pour analyser la nature locale de Φ on définit donc des coordonnées locales $\bar{t} = s - t$ et $\bar{s} = s + t$ de façon à ce que $\partial/\partial\bar{t}$ engendre le noyau de la différentielle.

Lorsque $u_0 \neq v_0$, le développement à l'ordre 2 de y montre que la dérivée seconde $\partial^2 y/\partial\bar{t}^2$ est non nulle : on a donc un *pli*.

Lorsque $u_0 = v_0$, la dérivée $\partial^2 y/\partial\bar{t}^2$ est nulle mais les dérivées $\partial^2 y/\partial\bar{s}\partial\bar{t}$ ainsi que $\partial^3 y/\partial\bar{t}^3$ sont non nulles et on a une *fronce*.

La connaissance de ces développements limités nous permet également de décrire l'allure locale des géodésiques de g au voisinage du lieu singulier de Φ , ou, ce qui revient au même, les images réciproques $\Phi^{-1}(C)$ des grands cercles C de la sphère. Dans les coordonnées stéréographiques, les grands cercles passant par l'origine sont les droites $y/x = \text{const}$. On a donc, en se limitant à l'ordre 2 :

$$(7.1) \quad (-v_0 s^2 + u_0 t^2) - \text{const}(s + t) = o((|s| + |t|)^2).$$

Lorsque const est non nulle, on constate donc que $\Phi^{-1}(C)$ est une courbe lisse dont la tangente au point singulier est $\partial/\partial u - \partial/\partial v$. Lorsque $\text{const} = 0$, c'est-à-dire lorsque C est tangent à l'image par Φ du lieu singulier, le terme linéaire disparaît et le terme quadratique non dégénéré montre que $\Phi^{-1}(C)$ est constitué de deux courbes lisses se rencontrant transversalement.

Au voisinage de la fronce, le grand cercle C associé à $\text{const} = 0$ correspond à l'image par Φ de la première diagonale. L'image réciproque $\Phi^{-1}(C)$ est constituée de deux courbes lisses et transverses (toujours au voisinage de la fronce). La symétrie de la figure montre que l'une des deux est la première diagonale. La seconde est une géodésique de g qui s'envoie donc par Φ sur un méridien.

La figure 12 résume la situation. On y a représenté les images inverses des méridiens qui passent près de la fronce. Le lieu singulier est une hyperbole qui rencontre transversalement tous ces méridiens sauf au niveau de la fronce. On y a représenté également l'image inverse du méridien $C_{\pi/4}$ qui présente un point double en la fronce et qui contient la bissectrice des axes ainsi qu'une autre courbe lisse qui est tangente à l'hyperbole.

8. L'HABILLAGE DE LA SPHÈRE

Pour démontrer le théorème, nous allons expliciter un ouvert Ω du plan tel que la restriction de Φ à cet ouvert habille la sphère moins deux arcs de grands cercles orthogonaux passant par le pôle sud.

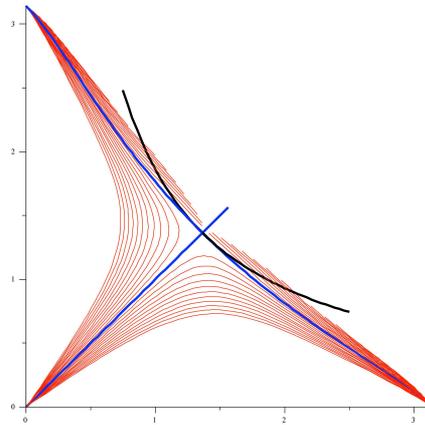


FIGURE 12
Méridiens au voisinage de la fronce

Considérons le domaine Ω_0 formé des points tels que $|uv| < \zeta_0$ où ζ_0 est le premier zéro de Δ . Soit $\overline{\Omega_0}$ l'adhérence de Ω_0 . L'ouvert cherché est contenu dans Ω_0 et nous allons montrer qu'il est bordé par quatre géodésiques joignant $(\pm\pi, 0)$ et $(0, \pm\pi)$. Par symétrie, nous concentrons toujours la discussion dans le secteur $0 < v < u$.

Il s'agit essentiellement de justifier la figure 14 que *Maple* nous montre.

Rappelons que les axes de coordonnées sont envoyés par Φ sur deux grands cercles orthogonaux passant par les pôles, que nous notons C_0 et $C_{\pi/2}$. Considérons la courbe $c_0: t \mapsto \Phi(t, t)$ tracée dans la sphère. Par la symétrie $(u, v) \mapsto (v, u)$, cette courbe est contenue dans un grand cercle $C_{\pi/4}$ faisant un angle $\pi/4$ avec les grands cercles C_0 et $C_{\pi/2}$. En $t = \sqrt{\zeta_0}$, la courbe présente un point critique et la restriction de c_0 à $[0, \sqrt{\zeta_0}]$ est injective.

Nous avons vu que dans un petit voisinage U de la fronce $(\sqrt{\zeta_0}, \sqrt{\zeta_0})$, l'ensemble $\{(u, v) \in U \mid \Phi(u, v) \in C_{\pi/4}\}$ est la réunion de la diagonale $\{(u, u)\}$ et d'une courbe lisse transverse, qui est une géodésique de g . Notons $c_1: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}^2$ cette courbe, paramétrée par longueur d'arc, de telle sorte que $c_1(0) = (\sqrt{\zeta_0}, \sqrt{\zeta_0})$. On choisit l'orientation pour que la première coordonnée de c_1 soit croissante au voisinage de l'origine. Nous allons montrer que c_1 peut être prolongée en une géodésique définie sur un intervalle $[-\tau, \tau]$ qui joint les points $(\pi, 0)$ et $(0, \pi)$ tout en restant dans $\overline{\Omega_0}$. Par symétrie, nous nous concentrons sur la partie positive du domaine de définition de c_1 . Observons d'abord que la géodésique c_1 ne peut pas tendre vers l'infini en un

temps fini. Prolongeons c_1 sur un intervalle maximal $[0, \tau]$ tel que $c_1([0, \tau])$ soit contenu dans $\overline{\Omega_0}$. Si $\tau < \infty$, le point $c_1(\tau)$ est dans le bord de $\overline{\Omega_0}$.

Il nous faut donc montrer que $\tau < \infty$ et que $c_1(\tau) = (\pi, 0)$.

Nous connaissons la courbure géodésique des fils verticaux et horizontaux, qui est respectivement positive et négative dans la zone en question. Il en résulte que si une géodésique possède une tangence horizontale, il s'agit d'un maximum local de v et que si elle présente une tangence verticale, il s'agit d'un maximum local de u . Une géodésique (toujours dans la zone $0 < v < u$) est donc soit le graphe d'une fonction monotone, soit le graphe d'une fonction $v = f(u)$ croissante puis décroissante, soit le graphe d'une fonction $u = f(v)$ croissante puis décroissante. Puisqu'au voisinage du point froncé, la géodésique c_1 est le graphe d'une fonction décroissante, on conclut que c_1 est le graphe d'une fonction décroissante $f: [\sqrt{\zeta_0}, u_{max}] \rightarrow \mathbf{R}$.

Supposons maintenant par l'absurde que $\tau = \infty$ si bien que c_1 est alors le graphe d'une fonction décroissante $f: [\sqrt{\zeta_0}, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ contenu dans $\overline{\Omega_0}$. Notez que la distance dans la sphère entre $\Phi(u, v)$ et $\Phi(u, 0)$ est inférieure à v de sorte que la distance entre $\Phi(c_1(t))$ et le grand cercle C_0 tendrait vers 0. Mais ceci est impossible puisque nous savons que $\Phi(c_1(t))$ est dans le grand cercle $C_{\pi/4}$ qui fait un angle $\pi/4$ avec C_0 .

Il nous reste à déterminer le point $c_1(\tau)$. Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment une géodésique peut rencontrer les hyperboles singulières : soit comme une courbe lisse traversant l'hyperbole dans la direction de $\partial/\partial u - \partial/\partial v$ («cas générique» où $const \neq 0$), soit comme deux courbes lisses et transverses («cas exceptionnel» où $const = 0$). Ces deux cas sont impossibles pour le graphe d'une fonction décroissante $f: [\sqrt{\zeta_0}, u_{max}] \rightarrow \mathbf{R}$. On constate donc que la courbe c_1 ne peut pas sortir de Ω_0 par l'hyperbole qui en est le bord supérieur. Le point de sortie $c_1(\tau)$ est donc sur l'axe des u .

L'application Φ enroule l'axe des u sur le grand cercle C_0 alors que c_1 est envoyé dans $C_{\pi/4}$. Puisque ces deux grands cercles ne se rencontrent qu'aux pôles, le point $c_1(\tau)$ est donc de la forme $(k\pi, 0)$ pour un certain entier k dont nous allons montrer par un argument topologique simple qu'il est nécessairement égal à 1.

Considérons la zone triangulaire \mathcal{T} dans le plan limitée par $c_0([0, \sqrt{\zeta_0}])$, $c_1([0, \tau])$, et par le segment horizontal joignant l'origine à $c_1(\tau) = (k\pi, 0)$. Considérons également le champ de vecteurs «pôle nord-pôle sud» sur la sphère dont les orbites sont les méridiens. Puisque Φ est un difféomorphisme local dans Ω_0 , nous pouvons considérer l'image réciproque R de ce champ dans Ω_0 . Toutes les singularités de R sont d'indice 1 et nous connaissons l'allure locale de R au voisinage du bord de \mathcal{T} , illustrée sur la figure 13.

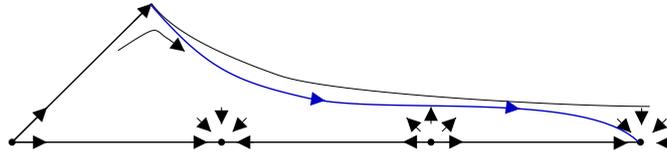


FIGURE 13
Portrait de phase éventuel

L'indice de R le long d'une courbe voisine du bord de \mathcal{T} , intérieure à \mathcal{T} et orientée dans le sens direct est donc $-(k-1)/2$ (noter le demi-tour fait par le vecteur au voisinage de $(l\pi, 0)$ pour $0 < l < k$). Mais puisque toutes les éventuelles singularités intérieures à \mathcal{T} sont d'indice $+1$, la seule possibilité est que $k = 1$ et que R ne possède pas de singularité à l'intérieur de \mathcal{T} .

Toutes les orbites de R sont des arcs géodésiques qui ne peuvent pas sortir de \mathcal{T} . Ce sont les graphes de fonctions $v = f(u)$ croissantes puis décroissantes dont le domaine de définition est nécessairement $]0, \pi[$ si bien que le portrait de phase de R est bien celui attendu et décrit sur la figure 14.

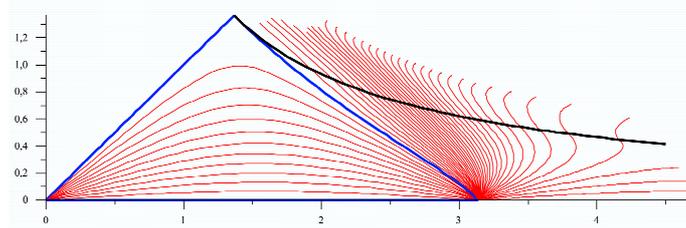


FIGURE 14
Méridiens

Il en résulte que Φ envoie la zone triangulaire \mathcal{T} bijectivement sur un secteur sphérique limité par deux méridiens formant un angle $\pi/4$. Les huit copies de \mathcal{T} constituent alors l'habillage de la sphère.

La figure 15 montre le comportement des méridiens dans une zone plus vaste. Nous n'avons pas cherché à représenter les méridiens en dehors de la zone $|uv| < \zeta_0$.

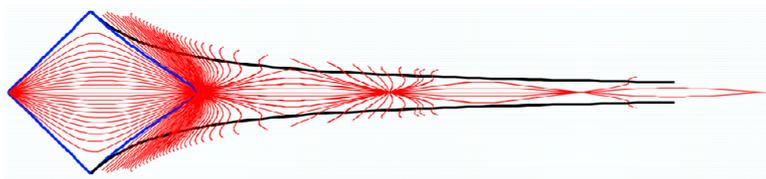


FIGURE 15
Méridiens

9. HABILLER LE DISQUE DE POINCARÉ

Ce que nous avons fait avec la sphère peut se répéter, presque mot à mot, lorsqu'on tente d'habiller le disque de Poincaré. Puisque la courbure est -1 , l'équation aux dérivées partielles devient

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin(\omega).$$

Elle s'obtient à partir de celle que nous avons considérée précédemment en remplaçant ω par $\pi - \omega$. On peut donc étudier maintenant la métrique g' dans le plan (u, v) définie par un changement de signe par rapport à g :

$$du^2 - 2 \cos \Delta(uv) dudv + dv^2.$$

Cette métrique est non dégénérée, et à courbure -1 , sur le même ouvert que précédemment, complémentaire des hyperboles $|uv| = \zeta$ où ζ décrit les zéros de Δ .

En procédant exactement comme dans le cas de la sphère, on construit une isométrie Φ' de \mathbf{R}^2 muni de la métrique g' vers le disque de Poincaré $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ muni de sa métrique hyperbolique $|dz|^2/(1 - |z|^2)$. Les deux axes de coordonnées sont envoyés par Φ' sur deux géodésiques perpendiculaires dans le disque et les droites verticales sont envoyées sur des courbes paramétrées par longueur d'arc v et dont la courbure au point de coordonnée v est $-u_0 \Delta'(u_0 v)$ (noter le changement de signe).

L'allure globale de Φ' est cependant bien plus simple que celle de Φ puisque cette nouvelle application présente des plis le long des hyperboles *mais pas de fronce*. L'explication est très simple : le noyau de la différentielle est maintenant engendré par $\partial/\partial u + \partial/\partial v$ qui est partout transverse aux lieux singuliers qui sont des hyperboles (on se place encore dans le premier quadrant). Au voisinage d'un point singulier (u_0, v_0) la même méthode que

précédemment nous permet d'écrire le développement limité de Φ' . Ici le second ordre suffira.

Si on compose Φ' avec une isométrie i du plan hyperbolique de façon à ce que (u_0, v_0) soit envoyé sur l'origine du disque et que l'image de la différentielle soit l'axe des x , on trouve que l'image $i \circ \Phi'(u_0 + s, v_0 + t)$ a comme coordonnées :

$$\begin{aligned} x &= s - t + o((|s| + |t|)^2), \\ y &= \frac{\Delta_1}{2} (v_0 s^2 + u_0 t^2) + o((|s| + |t|)^2). \end{aligned}$$

(Comparer avec (7.1).) Ceci montre bien que tous les points singuliers sont effectivement des plis.

De même que dans le cas de la sphère, la connaissance de ce développement à l'ordre 2 nous permet également de décrire l'allure locale des géodésiques de g' au voisinage du lieu singulier de Φ' , ou, ce qui revient au même les images réciproques $\Phi^{-1}(C)$ des géodésiques C du disque. Les géodésiques passant par l'origine sont les droites $y/x = \text{const}$. On a donc, en se limitant à l'ordre 2 :

$$(v_0 s^2 + u_0 t^2) - \text{const}(s - t) = o((|s| + |t|)^2).$$

Lorsque const est non nulle, on constate donc que $\Phi'^{-1}(C)$ est une courbe lisse dont la tangente au point singulier est $\partial/\partial u + \partial/\partial v$. Lorsque $\text{const} = 0$, le terme linéaire disparaît et le terme quadratique non dégénéré est défini positif si bien que $\Phi^{-1}(C)$ ne contient (localement) que le point singulier.

PROPOSITION. Φ' envoie le domaine Ω_0 bijectivement sur un domaine du disque de Poincaré.

Puisque Φ' est un difféomorphisme local sur l'ouvert Ω_0 , on peut considérer le champ de vecteurs R dans Ω_0 qui est l'image réciproque du champ de vecteurs radial sur le disque hyperbolique. Les orbites de R sont des arcs géodésiques pour g' . Les seules singularités possibles de R proviennent des images réciproques de l'origine par Φ' et ce sont des singularités de type source, d'indice 1. À strictement parler, le champ R ne se prolonge pas au bord de Ω_0 mais nous avons vu que lorsqu'une géodésique touche le bord, elle y parvient transversalement, avec une tangente parallèle à $\partial/\partial u + \partial/\partial v$. L'origine du disque est donc l'unique singularité dans Ω_0 et toutes les orbites non singulières ont donc l'origine comme ensemble α -limite et se terminent en un point du bord de Ω_0 , à moins qu'elles ne tendent vers l'infini en restant dans Ω_0 , c'est-à-dire en étant asymptote à l'un des axes de coordonnées. Cette

dernière possibilité ne peut se présenter que pour les axes eux-mêmes puisque les orbites de R s'envoient par Φ' sur une géodésique radiale du disque de Poincaré qui s'éloigne donc des axes. Le portrait de phase de R dans Ω_0 est donc celui-ci décrit par la figure 16.

Puisque Φ' envoie injectivement chaque orbite de R sur un segment radial dans le disque, on conclut bien que Φ' est injectif sur Ω_0 .

La figure 17 indique l'image par Φ' de l'ouvert Ω_0 défini par $|uv| < \zeta_0$. On y a indiqué les images des fils, c'est-à-dire des horizontales et des verticales. On constate effectivement que sur le bord de cette image, la ligne de pli, les fils deviennent tangents, mais qu'il n'y a pas de point fonce.

Remarquons que l'aire de Ω_0 pour la métrique g' est infinie :

$$\int_{|uv| < \zeta_0} \sin \Delta(uv) \, dudv = \infty$$

comme le montre le changement de variables $(u, v) \mapsto (u, uv)$.

Ainsi, nous avons habillé un morceau de disque de Poincaré dont l'aire est infinie. Cela peut paraître surprenant si on reprend la formule de Hazzidakis dans le cas de courbure -1 :

$$\int_{u_0}^{u_1} \int_{v_0}^{v_1} \sin \omega(u, v) \, dudv = -\omega(u_0, v_0) + \omega(u_0, v_1) - \omega(u_1, v_1) + \omega(u_1, v_0).$$

Puisque le premier membre est l'aire d'un rectangle de coordonnées $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$ et que les angles ω sont compris entre 0 et π , on obtient que l'aire de tout rectangle bordé par des fils est inférieure à 2π . Le paradoxe n'est qu'apparent puisque le domaine Ω_0 n'est pas un rectangle.

On peut faire le même commentaire sur la sphère dont l'aire est 4π . Si l'on considère le carré $[-\sqrt{\zeta_0}, \sqrt{\zeta_0}] \times [-\sqrt{\zeta_0}, \sqrt{\zeta_0}]$, son image par Φ ou Φ' est d'aire exactement 2π , que ce soit dans la sphère ou dans le disque de Poincaré puisque leurs quatre coins sont d'angles nuls. Sur la figure 4, l'image du carré est surlignée. Dans les articles [9, 34], on trouvera des conditions suffisantes pour pouvoir habiller une surface avec une pièce rectangulaire.

10. LES LIGNES ASYMPTOTIQUES EN COURBURE NÉGATIVE CONSTANTE

L'un des intérêts des réseaux de Tchebychev est qu'ils ont permis à Hilbert de montrer qu'il n'existe pas d'immersion isométrique du disque de Poincaré dans l'espace euclidien de dimension 3 [24]. Nous allons expliquer brièvement cette preuve mais nous l'utiliserons en fait dans l'autre sens; pour montrer

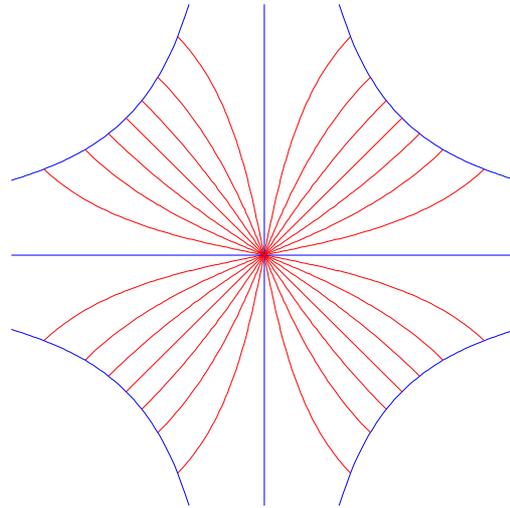


FIGURE 16
Patron pour l'habillage du disque

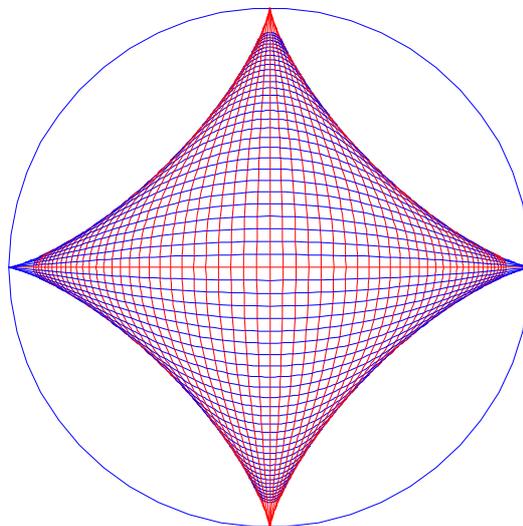


FIGURE 17
Habillage d'une partie du disque

comment un habillage d'un ouvert du disque, comme par exemple celui que nous venons de construire, permet d'obtenir des morceaux de plongements.

Considérons une surface S plongée dans l'espace euclidien. En chaque point de S , nous pouvons considérer le vecteur $\vec{N}(p)$ unitaire et normal à S (la discussion est locale et on choisit une orientation locale). Cela définit l'application normale de Gauss $\vec{N}: S \rightarrow \mathbf{S}^2$. Comme la dérivée d'un vecteur unitaire est orthogonale à ce vecteur, la différentielle de \vec{N} a son image dans l'espace tangent à S en p . Il s'agit d'un opérateur symétrique dans ce plan tangent dont la forme quadratique associée :

$$II_p(\vec{v}) = D\vec{N}(\vec{v}) \cdot \vec{v}$$

est la *seconde forme (quadratique) fondamentale*. Ses valeurs propres sont les *courbures principales*, sa trace est le double de la *courbure moyenne*, et son déterminant est la *courbure de Gauss*.

Supposons maintenant que la courbure de Gauss de S soit partout *strictement négative*. La seconde forme fondamentale est donc de signature $(+, -)$ si bien qu'elle s'annule sur deux droites isotropes dans chaque espace tangent. Ce sont les *directions asymptotiques* de S . Les courbes tracées sur S qui sont partout tangentes à ces directions asymptotiques sont les *courbes asymptotiques*. Toute surface à courbure négative dans l'espace euclidien porte donc un réseau formé par deux familles de courbes asymptotiques.

L'observation (astucieuse) de Hilbert est la suivante.

PROPOSITION. *Pour une surface à courbure -1 dans l'espace euclidien de dimension 3, les courbes asymptotiques forment un réseau de Tchebychev.*

Essayons de le démontrer en évitant trop de calculs...

Dans chaque plan tangent à S , on peut trouver deux vecteurs unitaires orthogonaux \vec{e}_1, \vec{e}_2 qui diagonalisent l'opérateur $D\vec{N}$:

$$D\vec{N}(\vec{e}_1) = k_1 \vec{e}_1; \quad D\vec{N}(\vec{e}_2) = k_2 \vec{e}_2.$$

Dans notre cas, la courbure est -1 , si bien que $k_1 = \alpha^2$ et $k_2 = -\alpha^{-2}$ pour un certain nombre réel $\alpha > 0$. Dans cette base, la seconde forme fondamentale prend la forme diagonale $\alpha^2 x^2 - \alpha^{-2} y^2$. Les directions isotropes sont donc engendrées par les deux vecteurs

$$\vec{f}_1 = \alpha^{-1} \vec{e}_1 + \alpha \vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{f}_2 = \alpha^{-1} \vec{e}_1 - \alpha \vec{e}_2.$$

On a alors :

$$D\vec{N}(\vec{f}_1) = \alpha \vec{e}_1 - \alpha^{-1} \vec{e}_2 \quad \text{et} \quad D\vec{N}(\vec{f}_2) = \alpha \vec{e}_1 + \alpha^{-1} \vec{e}_2.$$

On constate donc que $D\vec{N}(\vec{f}_1)$ (resp. $D\vec{N}(\vec{f}_2)$) est obtenu à partir de \vec{f}_1 (resp. \vec{f}_2) par une rotation d'angle $\pi/2$ (resp. $-\pi/2$). Autrement dit :

$$(10.1) \quad D\vec{N}(\vec{f}_1) = \vec{N} \wedge \vec{f}_1; \quad D\vec{N}(\vec{f}_2) = -\vec{N} \wedge \vec{f}_2.$$

Ou encore :

$$\vec{f}_1 = -\vec{N} \wedge D\vec{N}(\vec{f}_1); \quad \vec{f}_2 = \vec{N} \wedge D\vec{N}(\vec{f}_2).$$

Introduisons un paramétrage local de la surface $(u, v) \mapsto F(u, v) \in \mathbf{R}^3$ de sorte que les courbes asymptotiques soient définies par $u = \text{const}$ et $v = \text{const}$. Nous venons de calculer les dérivées de \vec{N} dans les directions asymptotiques :

$$(10.2) \quad \frac{\partial F}{\partial u} = -\vec{N} \wedge \frac{\partial \vec{N}}{\partial u}; \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \vec{N} \wedge \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}.$$

Dérivons la première égalité de (10.2) par rapport à v , la seconde par rapport à u et sommons les deux résultats :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{N}}{\partial v}.$$

Le second membre est orthogonal à la surface si bien que $\partial^2 F / \partial u \partial v$ est *orthogonal à la surface*, une propriété que nous avons déjà rencontrée pour les réseaux de Tchebychev (voir (3.1)). Il n'est pas difficile de s'assurer qu'il s'agit en fait d'une propriété caractéristique. En effet, la longueur de $\partial F / \partial u$ ne dépend alors pas de v puisque :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} \right) = 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} \right) = 0.$$

Avec la propriété analogue pour $\partial F / \partial v$, on obtient donc que la métrique prend la forme

$$e(u) du^2 + 2f(u, v) dudv + g(v) dv^2$$

si bien qu'en reparamétrant les courbes par $dU = \sqrt{e(u)}du$ et $dV = \sqrt{g(v)}dv$, on trouve bien une métrique de Tchebychev

$$dU^2 + 2\tilde{f}(U, V) dUdV + dV^2.$$

La proposition de Hilbert est donc démontrée.

Notons en passant que (10.1) montre que les images de \vec{f}_1 et \vec{f}_2 par $D\vec{N}$ sont de norme 1. Il en résulte que non seulement les lignes asymptotiques habillent la surface mais que l'image de cet habillage par l'application normale de Gauss habille la sphère. Réciproquement, un habillage (local) de la sphère est obtenu à partir de l'application de Gauss d'une certaine surface à courbure -1 . Ce fait est signalé dans [4] et Darboux semble regretter dans [13] que Tchebyshev ne l'ait pas remarqué.

11. LE THÉORÈME DE HILBERT

Il n'est pas difficile de conclure la démonstration du théorème de Hilbert affirmant l'*inexistence de plongement isométrique du disque hyperbolique dans l'espace euclidien \mathbf{R}^3* .

Supposons en effet qu'il existe un tel plongement isométrique. Les deux familles de courbes asymptotiques définiraient un habillage local au voisinage de chaque point. Les deux champs de vecteurs \vec{U} et \vec{V} unitaires et tangents aux deux familles de fils commutent, puisqu'ils correspondent à $\partial/\partial u$ et $\partial/\partial v$ dans des coordonnées locales. Les champs \vec{U}, \vec{V} sont unitaires et donc *complets* c'est-à-dire qu'ils définissent des flots complets U^t, V^s sur le disque hyperbolique définis pour tous les temps t, s dans \mathbf{R} . Cela résulte de la complétude métrique du plan hyperbolique : une orbite de \vec{U} ou de \vec{V} ne peut s'échapper à l'infini en un temps fini. En d'autres termes, \vec{U} et \vec{V} définissent une action localement libre de \mathbf{R}^2 sur le plan hyperbolique. Ce dernier étant de dimension 2 et simplement connexe, l'action est *transitive et libre*. Autrement dit, on peut définir un *habillage global* du plan hyperbolique par le plan euclidien tout entier. Cela entraîne qu'on peut trouver des rectangles d'aires arbitrairement grandes limités par des fils des deux familles. La contradiction cherchée résulte alors de la formule de Hazzidakis selon laquelle l'aire d'un rectangle est majorée par 2π . *Ceci établit le théorème de Hilbert.*

12. UNE SURFACE À COURBURE NÉGATIVE CONSTANTE

Réciproquement, partant d'une solution de l'équation de sine-Gordon, on peut chercher une surface à courbure -1 dans l'espace euclidien usuel dont l'angle entre les lignes asymptotiques est donné par cette solution.

Pour cela, on cherche le repère associé, c'est-à-dire les trois vecteurs

$$\vec{\tau}_u(u, v) = \frac{\partial F}{\partial u}; \quad \vec{\tau}_v(u, v) = \frac{\partial F}{\partial v}; \quad \vec{N}(u, v)$$

comme fonctions de u, v . Nous connaissons en fait toutes les dérivées.

D'abord, nous savons que $\partial \vec{\tau}_u / \partial u$ (resp. $\partial \vec{\tau}_v / \partial v$) est orthogonal à \vec{N} puisque $\vec{\tau}_u$ (resp. $\vec{\tau}_v$) est isotrope pour la seconde forme fondamentale. Nous connaissons également la composante tangente de l'accélération $\partial \vec{\tau}_u / \partial u$ (resp. $\partial \vec{\tau}_v / \partial v$): c'est la courbure géodésique. On a donc :

$$(12.1) \quad \frac{\partial \vec{\tau}_u}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot \vec{\tau}_u \wedge \vec{N}; \quad \frac{\partial \vec{\tau}_v}{\partial v} = -\frac{\partial \omega}{\partial v} \cdot \vec{\tau}_v \wedge \vec{N}.$$

D'autre part, d'après (10.2):

$$(12.2) \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial u} = \vec{\tau}_u \wedge \vec{N}; \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial v} = -\vec{\tau}_v \wedge \vec{N}.$$

Enfin, nous avons vu que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \vec{\tau}_u}{\partial v} = \frac{\partial \vec{\tau}_v}{\partial u}$$

est normal à la surface, donc de la forme $\kappa \vec{N}$. La valeur de κ est facile à déterminer en dérivant l'égalité $\vec{\tau}_u \cdot \vec{\tau}_v = \cos \omega$ par rapport à v , par exemple, et en utilisant les formules que nous venons de rappeler. On trouve :

$$(12.3) \quad \frac{\partial \vec{\tau}_u}{\partial v} = \sin \omega \cdot \vec{N}; \quad \frac{\partial \vec{\tau}_v}{\partial u} = \sin \omega \cdot \vec{N}.$$

Les formules (12.1), (12.2), (12.3) donnent donc les dérivées partielles des trois vecteurs par rapport à u et v . Vérifier la compatibilité des dérivées partielles revient à évaluer les dérivées $\partial^2 / \partial u \partial v$ et $\partial^2 / \partial v \partial u$. On vérifie aisément que cette compatibilité est équivalente à l'équation de sine-Gordon. Il s'agit bien sûr d'un cas particulier des équations de Gauss-Weingarten.

Ainsi, partant de n'importe quelle solution de l'équation de sine-Gordon, on peut intégrer le système d'équations (12.1), (12.2), (12.3) et obtenir ainsi trois vecteurs $\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v, \vec{N}$ dépendant de u, v . Une deuxième intégration donne alors une fonction $F(u, v)$ qui est une immersion sur l'ouvert où la solution ω ne prend pas des valeurs multiples de π .

Avec cette méthode, McLachlan explicite un certain nombre de jolies surfaces à courbure -1 dans l'espace, en jouant avec des solutions de l'équation de sine-Gordon [26]. De manière étonnante, cet article ne mentionne pas la solution $\pi - \Delta(uv)$ que nous allons considérer ici.

Pour un survol de la théorie des plongements isométriques des surfaces à courbure négative, on pourra consulter [8].

Dans notre cas, on obtient donc une application lisse $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ qui est une « application isométrique » si on munit le plan \mathbf{R}^2 de la métrique

$$du^2 - 2 \cos \Delta(u, v) dudv + dv^2$$

et l'espace \mathbf{R}^3 de la métrique euclidienne. Bien sûr, il faut entendre cela comme précédemment et cela n'empêche pas F de ne pas être une immersion. La surface obtenue est celle décrite par Bianchi puis par Amsler [4, 1]. Voir aussi [10, p. 111].

La figure 18 montre cette surface, en se limitant à la zone $|uv| \leq \zeta_0$. Le calcul numérique des solutions ne pose aucune difficulté. On obtient ainsi une surface à courbure -1 immergée dans l'espace, possédant quatre pointes qui tourbillonnent autour de droites orthogonales. Il faut noter que l'aire de cette surface est infinie, et que le lieu singulier qui la borde est formé de quatre lignes de plis. La figure montre clairement qu'il s'agit en fait d'un plongement et ce ne serait probablement pas difficile à établir, mais nous n'avons pas cherché à le faire. On trouvera une étude détaillée de la géométrie globale de ce genre de surfaces dans [7].

Le long des deux droites orthogonales contenues dans la surface, les vecteurs unitaires normaux décrivent deux grands cercles orthogonaux. Puisque nous savons qu'un habillage est déterminé par deux fils transverses, on en déduit que l'image de l'habillage de la surface de Bianchi-Amsler par l'application normale de Gauss n'est rien d'autre que l'habillage de la sphère décrit par Tchebychev.

13. POUR ALLER PLUS LOIN...

Pour aller plus loin, il faudrait se demander si la modélisation d'un tissu comme étant formé de fils inextensibles correspond à une réalité physique. Mais aussi, il faut étudier l'équilibre de ces tissus, soumis à des forces de tension le long des fils. On pourra consulter [20, 21, 31, 41] sur ces questions d'équilibre et de stabilité et [30] sur quelques aspects numériques. L'article [25] aborde la question intéressante de la visualisation d'une surface à partir d'un réseau de Tchebychev.

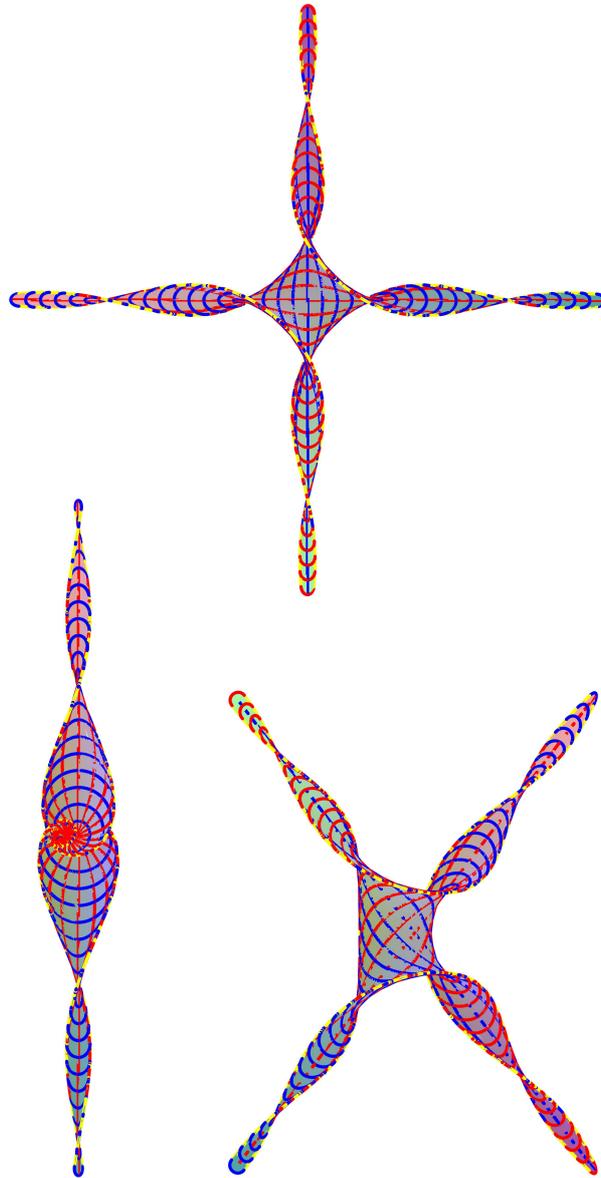


FIGURE 18
Une surface à courbure -1

14. APPENDICE : L'ARTICLE DE TCHEBYCHEV

LA PETITE HISTOIRE DU MANUSCRIT

Je remercie Anne-Marie Décaillot, Nikolai Andreev et Viktor Kleptsyn. Grâce à eux, j'ai pu remonter jusqu'au manuscrit original et retracer cette petite histoire.

Rédigé en français à Paris le 26 août 1878, le manuscrit de Tchebychev est constitué de dix-neuf pages d'un cahier d'écolier. Il contient un grand nombre de ratures. Il était accompagné de cinq petits découpages en carton et d'une balle de caoutchouc « habillée » qui n'a pas été retrouvée.

Le titre de la conférence du 28 août à Paris, lors de la septième réunion de l'*Association pour l'Avancement de la Science*, semble avoir été « *Sur la coupe des vêtements* » (d'après [37, 38]) alors que le titre du manuscrit contient le mot « *habits* ». La conférence fut semble-t-il un grand succès ; le livre [32] relate que la balle circula parmi des participants ravis et que les jeunes organisèrent un jeu avec cette balle dans une cour de lycée. . .

En 1907, lors de la parution du second volume des œuvres complètes, les éditeurs décidèrent de ne pas inclure le texte mais seulement un court résumé. « *Conformément à la volonté de Tchebychef, l'étude "Sur la coupe des habits" trouvée dans ses papiers ne doit pas être imprimée, car le manuscrit ne porte pas la mention "Imprimer" »* [38]. On apprend que l'idée lui est venue deux années avant la rédaction, au congrès de Clermont-Ferrand, suite à une communication de Edouard Lucas sur la géométrie des tissages. Le rapport est cependant lointain puisque Lucas s'intéressait en fait à des problèmes combinatoires bien différents.

En 1913, Markov (qui fut étudiant de Tchebychev) offre le manuscrit à l'Académie Impériale des Sciences qui l'archive (référence R. IV, op. 1, No. 646) (voir l'introduction de [29]). On peut d'ailleurs encore consulter cette archive aujourd'hui.

En 1921, à l'occasion du centenaire de la naissance de Tchebychev, Steklov fit un discours sur son œuvre, en mentionnant ce manuscrit non publié comme un « *cas rare de confluence entre la pratique et la théorie la plus abstraite* » [29].

En 1936, l'ingénieur Popov traduit le manuscrit en russe et écrit un article de commentaires très intéressants dans lequel il décrit quelques expériences physiques sur la déformation des tissus, mais aussi des méthodes pour concevoir les enveloppes des dirigeables, les cerfs-volants utilisés à l'époque en météorologie, les parachutes etc. [29].

En 1946, la revue *Uspehi* publie la traduction de Popov, en corrigeant un certain nombre de petites erreurs mathématiques présentes dans le manuscrit (que Popov n'avait pas remarquées) [39].

En 1951, la deuxième édition des œuvres reprend l'article de *Uspehi* tout en ajoutant quelques commentaires [40].

En 1970, Chobot et Collomb traduisent en anglais la traduction russe [12].

En 1999, Butzer et Jongmans commentent l'article en se fondant sur la traduction anglaise [11].

En 1999, Décaillot transcrit le manuscrit original et le place dans les annexes de sa thèse, consacrée à Lucas [15, 14].

Nous remercions Anne-Marie Décaillot d'avoir bien voulu nous autoriser à reproduire ici sa transcription. Il faut bien comprendre que ce texte n'était probablement qu'un brouillon dans l'esprit de son auteur. Nous avons consciencieusement recopié les fautes de français ! Plus d'un siècle plus tard, après les publications de traductions russe et anglaise, nous espérons ne pas porter préjudice à la mémoire de Tchebychev en rendant public son manuscrit, y compris les erreurs, alors qu'il n'avait pas porté la mention « Imprimer ».

QUELQUES REMARQUES SUR LE CONTENU

Le lecteur pourra s'assurer que la construction de Tchebychev est pour l'essentiel la même que celle décrite dans cet article. L'isométrie Φ y est définie par son développement en série à l'origine. Bien entendu, l'auteur n'aborde pas la question de la convergence de la série et une analyse numérique succincte semble d'ailleurs indiquer que la série entière de Δ à l'origine a un rayon de convergence de l'ordre de 3. Une autre question qui n'est pas abordée est celle de savoir pourquoi Φ envoie bijectivement « *un quadrilatère composée des lignes courbes, dont les coins sont arrondis* » sur un hémisphère.

Bien entendu, Tchebychev ne détermine pas le bord du patron qui habille un hémisphère et il se contente d'en donner le développement à l'ordre 3 (voir sa formule (5)). Pour dessiner le patron, il trace les quatre cercles osculateurs aux quatre sommets, qu'il raccorde tant bien que mal pour former une courbe fermée. En superposant le dessin de Tchebychev avec la courbe que nous avons obtenue, on constate que la précision est étonnante. On peut remarquer par ailleurs que les quatre cercles osculateurs sont presque tangents et l'ingénieur Popov, en reproduisant la figure dans son article, a commis l'erreur de penser qu'il s'agissait d'une faute de construction de Tchebychev et les a dessinés tangents... Il avait tort et Tchebychev avait raison.

SUR LA COUPE DES HABITS

Les notes en bas de pages sont celles de A.-M. Décaillot.

(Communication faite le 28 août au Congrès de Paris)

§ 1. En prenant part à la discussion qui a eu lieu au Congrès de Clermont-Ferrand à propos d'une communication très intéressante faite par M. Edouard Lucas sur l'application de l'Analyse mathématique au tissu des étoffes, j'ai mentionné une autre question sur les étoffes dont la solution à l'aide de mathématique peut avoir certain intérêt; savoir: la coupe des étoffes pour faire des habits ou en générale des enveloppes des corps d'une forme quelconque. Faute de temps, je n'ai pas pu exposer même brièvement mes idées sur le sujet et je profite de la séance présente pour accomplir cette tâche.

§ 2. Dans nos habits, il n'y a qu'une certaine partie, dont la forme est complètement déterminée par le ceps, savoir: le dos et les côtés. C'est seulement par rapport à ces parties qu'on peut chercher la relation entre la forme du corps et la forme des pièces d'étoffe dont on compose leur enveloppe.

Pour traiter la question de manière générale, nous considererons non seulement les parties de l'habit dont nous venons de parler, mais aussi toutes les gaines bien ajustées servant à envelopper un corps d'une forme quelconque.

§ 3. Comme dans cette question il ne s'agit que de la transformation d'une surface dans l'autre, on conçoit que sa solution ne présentera qu'une application des principes donnés par Gauss dans son fameux mémoire sous le titre: *Recherches générales sur les surfaces courbes*. Mais pour tirer de ces principes la solution de notre question, il est important de déterminer la nature des changements que subient les éléments de l'étoffe quand elle présente l'enveloppe d'un corp d'une forme quelconque.

§ 4. Si l'on fait une telle enveloppe d'une étoffe à petits carreaux, on remarque aisément que les rectangles, que présentent les carreaux quand l'étoffe a sa forme primitive, se transforment en parallélogrammes dont les angles s'éloignent plus ou moins de *quatre vingts dix* degrés; mais la longueur des côtés ne subie de changement appréciable. Donc, on pourra admettre, au moins comme première approximation, que les étoffes, en se courbant pour envelopper des corps quelconques, ne changent que les angles d'inclinaison des fils de chaîne et de trame, et que la longueur des fils reste la même.

§ 5. En remarquant d'après cela que l'étoffe ne peut présenter une résistance notable aux forces de tractions que dans le cas où ces forces sont dirigées suivant la direction des fils de chaîne et de trame, nous concluons qu'il est

important que les différents morceaux d'enveloppe soient disposés de manière à ce que la traction entre eux ne soit dirigée que suivant la direction de certains fils.

§ 6. D'autre côté, pour que ces fils soumis aux forces de traction dirigées suivant leur direction restent en équilibre sur la surface du corps, ils doivent présenter les lignes de la plus courte distance¹⁾.

Cette condition, outre les cas exceptionnels, ne peut être satisfaite rigoureusement dans chaque partie d'enveloppe que par un fil de chaîne et par un fil de trame. La position de ces fils, comme nous le verrons, détermine complètement la position de tous les autres. Pour que les éléments d'étoffe s'altère le moins possible dans le voisinage de ces fils, on prend ordinairement pour la direction de ces fils celles de deux lignes de la plus courte distance qui se coupent sous l'angle droit.

§ 7. Nous prendrons ces fils que nous nomerons *primitifs* pour axes de coordonnées, en considérant comme coordonnées la longueur des fils de chaîne et de trame et que nous désignerons par x, y .

Ces coordonnées seront rectilignes et rectangulaires, quand le morceau d'étoffe a la forme primitive, plane. Elles seront curvilignes dans le cas où l'étoffe enveloppe le corps et alors elles déterminent les points de la surface couverts par les différents éléments de l'étoffe; vu que dans ces deux cas les coordonnées du même élément auront les mêmes valeurs.

§ 8. En cherchant la distance de deux points voisins de l'étoffe, dont les coordonnées sont $x, y; x + dx, y + dy$, on trouve que dans le premier système des coordonnées qui a lieu pour l'étoffe dans sa forme primitive plane, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

En passant au cas où l'étoffe est courbée, nous remarquons qu'alors, en vertu de ce que nous avons vu, le rectangle déterminée par 4 points

$$x, y; \quad x + dx, y + dy$$

$$x, y + dy; \quad x + dx, y + dy$$

sur l'étoffe dans sa forme primitive se change en parallélogramme et alors la distance des points

$$x, y; \quad x + dx, y + dy$$

se détermine ainsi:

$$(1) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2 \cos(\phi) dx dy$$

¹⁾ Il s'agit des lignes géodésiques de la surface.

où par ϕ nous designons l'angle formé par les fils de chaîne et de trame dans le point x, y .

Cette formule nous montre que la distance des deux points de l'étoffe en générale se change quand elle enveloppe le corps, et ce changement sera plus ou moins grand selon la valeur de $\cos(\phi)$ et du rapport $\frac{dy}{dx}$.

En appliquant à cette expression de ds^2 la formule générale donnée par Gauss pour la détermination de la courbure des surfaces, nous trouvons²⁾

$$(2) \quad K \sin^2 \phi = \frac{\partial^2 \cos \phi}{\partial x \partial y},$$

où par K nous désignons la courbure de la surface au point x, y .

§9. Pour passer du système de coordonnées que nous donnent les fils de l'étoffe sur la surface du corps enveloppé par elle, aux coordonnées les plus commodes à déterminer une surface quelconque, nous allons chercher les plus courtes distances des différents points des fils primitifs que nous avons pris pour axes de coordonnées x, y .

On y parvient très aisément d'après l'équation de la courbe de *la moindre distance* donnée par cette formule du calcul de variation

$$\partial \int ds = 0,$$

qui d'après (1) se réduit à celle-ci

$$\partial \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dx dy \cos \phi} = 0$$

et d'où l'on tire l'équation

$$(3) \quad \sin^2 \phi \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial \cos \phi}{\partial x} \left(1 + \cos \phi \frac{dy}{dx}\right) - \frac{\partial \cos \phi}{\partial y} \left(\cos \phi + \frac{dy}{dx}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

§10. En remarquant que l'axe des x , dont l'équation est

$$y = 0$$

présente, comme nous l'avons dit, l'une des courbes de la plus courte distance, nous trouvons en y appliquant l'équation précédente

$$\frac{\partial \cos \phi}{\partial x} = 0$$

²⁾ Dans l'édition russe du cinquième volume des œuvres complètes de Tchebichef, cette formule (2) est complétée en $K \sin^2 \phi = \frac{\partial^2 \cos \phi}{\partial x \partial y} - \cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y}$.

ce qui montre que l'angle ϕ ne change pas le long de l'axe des x , et comme cet angle est droit au point d'intersection des axes de x, y , nous concluons qu'on aura de même

$$\phi = 90^\circ$$

dans tous les points de l'axe de x .

La même chose on trouve par rapport à l'axe de y . D'après cela nous concluons que $\cos \phi$ doit s'annuler toutes les fois qu'on a

$$x = 0$$

ou

$$y = 0;$$

et par conséquent que son développement doit avoir cette forme

$$\cos \phi = xy(A_0 + A_1x + A_2y + \dots).$$

En portant cette valeur de $\cos \phi$ dans l'équation (2), et en supposant que la courbure K se développe en série

$$K_0 + K_1x + K_2y + \dots$$

on trouve

$$A_0 = K_0, \quad A_1 = K_1/2, \quad A_2 = K_2/2, \dots$$

et par là

$$(4) \quad \cos \phi = xy\left(K_0 + \frac{K_1}{2}x + \frac{K_2}{2}y + \dots\right)$$

§ 11. D'après ce développement de $\cos \phi$, il n'est pas difficile de tirer de l'équation (3) l'expression générale de y pour toutes les points situés sur les lignes qui présentent les plus courtes distances de différents points de la surface de l'axe Oy .

En désignant par u la valeur de y au point d'intersection de ces courbes avec l'axe Oy , et en remarquant que ces courbes doivent couper l'axe Oy sous l'angle droit, on aura pour $x = 0$

$$y = u; \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

Donc le développement de y doit avoir cette forme

$$y = u + B_2x^2 + B_3x^3 + \dots$$

En substituant cette valeur de y dans l'équation (3), et en remplaçant $\cos \phi$ par sa valeur (4), on y trouve en égalant à zéro les termes avec x^0, x^1, x^2, \dots les équations qui donnent³⁾

$$B_2 = -\frac{K_0}{2}u - \frac{K_2}{4}u^2; \quad B_3 = -\frac{K_1}{6}$$

et par là on aura⁴⁾

$$(5) \quad y = u - \left(\frac{K_0}{2}u + \frac{K_2}{4}u^2\right)x^2 - \frac{K_1}{6}x^3 + \dots$$

§ 12. En rectifiant les courbes déterminées par cette équation, nous trouvons que leurs arcs, comptés depuis $x = 0$ s'expriment ainsi⁵⁾:

$$s = \int_0^x \sqrt{y'^2 + 1 + 2 \cos \phi} dx$$

$$(6) \quad s = x - \frac{1}{6}(K_0^2u^2 + K_2K_3)x^3 - \frac{1}{8}K_0K_1u x^4 + \dots$$

ce qui nous donne l'expression générale de la plus courte distance de l'axe Oy du point dont la coordonnée x a une valeur quelconque et la coordonnée y a la valeur donnée par la formule (5). Quant à la valeur de u elle détermine sur l'axe Oy le point le plus proche au point x, y . Cette valeur, ensemble avec celle de s , donne, comme on le sait les coordonnées les plus faciles à déterminer. C'est de ce système de coordonnées que nous allons nous servir maintenant.

§ 13. En faisant retourner la série (6), on obtient⁶⁾

$$(7) \quad x = s + \frac{1}{6}(K_0^2u^2 + K_0K_1u^3)s^3 + \frac{1}{8}K_0K_1us^4 + \dots$$

ce qui donne d'après (5)⁷⁾

$$(8) \quad y = u - \left(\frac{1}{2}K_0u + \frac{1}{4}K_2u^2\right)s^2 - \frac{1}{6}K_1s^3 + \dots$$

Ainsi, l'on obtient les formules qui expriment les valeurs de x, y en fonction de u et s .

³⁾ Dans l'édition russe de 1951, on trouve le terme $B_3 = -\frac{K_1u}{6}$.

⁴⁾ L'édition russe donne le développement $y = u - \left(\frac{K_0}{2}u + \frac{K_2}{4}u^2\right)x^2 - \frac{K_1}{6}x^3 + \dots$

⁵⁾ On trouve dans l'édition russe $s = x - \frac{1}{6}(K_0^2u^2 + K_0K_2u^3 + \frac{1}{4}K_2^2u^4)x^3 - \frac{1}{8}(K_0K_1u^2 + \frac{1}{2}K_1K_2u^3)x^4 + \dots$

⁶⁾ Il semble que l'on doit comprendre « inverser la série (6) ». L'édition russe donne la formule $x = s + \frac{1}{6}(K_0^2u^2 + K_0K_2u^3 + \frac{1}{4}K_2^2u^4)s^3 + \frac{1}{8}(K_0K_1u^2 + K_1K_2u^3)s^4 + \dots$

⁷⁾ L'édition russe comporte le complément $y = u - \left(\frac{1}{2}K_0u + \frac{1}{4}K_2u^2\right)s^2 - \frac{1}{6}K_1us^3 + \dots$

D'après ces formules, on peut trouver les courbes

$$y = u - \left(\frac{1}{2}K_0u + \frac{1}{4}K_2u^2\right)s^2 - \frac{K_2}{6}s^3 - \dots$$

suivant lesquelles on doit couper les différents morceaux d'étoffe pour faire l'enveloppe d'un corps quelconque (en supposant, bien entendu, connues les portions de la surface qui doivent être couvertes par différents morceaux et la position des fils primitifs). On y parviendra en déterminant d'après (7) et (8) les coordonnées rectilignes x, y des morceaux de l'étoffe dans leurs formes primitives planes pour les différentes valeurs de u et s qui ont lieu sur les limites des portions correspondantes de la surface du corps.

§ 14. Pour montrer sur un exemple l'usage de ces formules, nous avons déterminé d'après elles la forme que l'on doit donner aux morceaux d'étoffe pour faire une gaine bien ajustée à la sphère seulement de deux pièces, dont chacune recouvrait une demi-sphère. La forme trouvée est celle-ci : c'est un quadrilatère composée des lignes courbes, dont les coins sont arrondis. Les fils primitifs sont dirigés selon les diagonales. Les courbes s'approchent [illisible] d'hyperboles; la courbe des coins se détermine ainsi : [illisible] rayon de courb[ure] est égale au diamètre de la sphère.

Deux morceaux de cette forme ayant été cousu ont donné une enveloppe de sphère qui ne laisse rien à désirer, comme vous pouvez en juger vous mêmes. Ceci prouve combien les considérations que nous venons d'exposer sont d'accord avec la pratique.

Le manuscrit comporte en marge du texte les deux équations suivantes :

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{3\frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{72}x^4 + \dots = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{6\pi + \pi^3}{288}x^4 + \dots$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}y^2 + \frac{6\pi + \pi^3}{288}y^4 + \dots$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMSLER, M.-H. Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et de leurs singularités. *Math. Ann.* 130 (1955), 234–256.
- [2] BABELON, O., D. BERNARD and M. TALON. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

- [3] BAKELMAN, I. YA. Chebyshev nets on manifolds of bounded curvature. *Trudy Mat. Inst. Steklov.* 76 (1965), 124–129.
- [4] BIANCHI, L. *Lezioni di geometria differenziale*. Seconda edizione, riveduta e cosiderevolmente aumentata, Vol. 1, 2. Spoerri, Pisa, 1902–1903.
- [5] BIEBERBACH, L. Über Tchebychefsche Netze auf Flächen negativer Krümmung, sowie auf einigen weiteren Flächenarten. *Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.* 23 (1926), 294–321.
- [6] BOBENKO, A.I. and U. EITNER. *Painlevé Equations in the Differential Geometry of Surfaces*. Lecture Notes in Mathematics 1753. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [7] BOBENKO, A.I. and A.V. KITAEV. On asymptotic cones of surfaces with constant curvature and the third Painlevé equation. *Manuscripta Math.* 97 (1998), 489–516.
- [8] BORISENKO, A.A. Isometric immersions of space forms into Riemannian and pseudo-Riemannian spaces of constant curvature. *Russian Math. Surveys* 56 (2001), 425–497.
- [9] BURAGO, YU.D., S.V. IVANOV and S.G. MALEV. Remarks on Chebyshev coordinates. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 329 (2005), *Geom. i Topol.* 9, 5–13, 195; translation in *J. Math. Sci. (N.Y.)* 140 (2007), 497–501.
- [10] BURAGO, YU.D. and V.A. ZALGALLER. *Geometry III. Theory of Surfaces*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 48. Springer, Berlin, 1992.
- [11] BUTZER, P. and F. JONGMANS. P.L. Chebyshev (1821–1894). A guide to his life and work. *J. Approx. Theory* 96 (1999), 111–138.
- [12] CHOBOT, M. and B. COLLOMB. On cutting cloth by P.L. Chebyshev (English translation). Research Report, Center for Cybernetics Studies, Univ. of Texas, Austin, 1970.
- [13] DARBOUX, G. Les origines, les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitésimale. In: *Actes du Congrès International des Mathématiciens*, Rome, 1908.
- [14] DÉCAILLOT, A.-M. Edouard Lucas (1842-1891): le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié du XIXe siècle. Thèse de l'Université Paris 5-René Descartes, 2 vol., 1999.
- [15] ——— Géométrie des tissus. Mosaiques. Échiquiers. Mathématiques curieuses et utiles. *Rev. Histoire Math.* 8 (2002), 145–206.
- [16] DO CARMO, M.P. *Riemannian Geometry*. Translated from the second Portuguese edition by F. Flaherty. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [17] FOKAS, A.S., A.R. ITS, A.A. KAPAEV and V.YU. NOVOKSHENOV. *Painlevé Transcendents. The Riemann-Hilbert Approach*. Mathematical Surveys and Monographs 128. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [18] GOLUBITSKY, M. and V. GUILLEMIN. *Stable Mappings and Their Singularities*. Graduate Texts in Mathematics 14. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [19] GOURSAT, E. *Cours d'analyse mathématique*, tome III. Gauthier-Villars, 1915.
- [20] GRAF, H. und H. THOMAS. Zur Frage des Gleichgewichts von Vierecksnetzen aus verknöteten und gespannten Fäden. I. *Math. Z.* 48 (1942), 193–211.

- [21] GRAF, H. und H. THOMAS. Zur Frage des Gleichgewichts von Vierecksnetzen aus verknoteten und gespannten Fäden. II. Rückungsfadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur auf den Scherkschen Minimalflächen und auf den Wendelschraubenflächen. *Math. Z.* 51 (1948), 166–196.
- [22] GRANT, C.J. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Extras/Chebyshev_nets.html.
- [23] HAZZIDAKIS, J.N. Ueber einige Eigenschaften der Flächen mit constantem Krümmungsmaass. *J. Reine Angew. Math. (Crelle's J.)* 88 (1879), 68–73.
- [24] HILBERT, D. Ueber Flächen von constanter Gausscher Krümmung. *Trans. Amer. Math. Soc.* 2 (1901), 87–99.
- [25] KOENDERINK, J. and A. VAN DOORN. Shape from Chebyshev nets. In: *Computer Vision—ECCV'98. Vol. II. Proceedings of the 5th European Conference held at the University of Freiburg, Freiburg, June 2–6, 1998.* Edited by H. Burkhardt and B. Neumann, 215–225. Lecture Notes in Computer Science 1407. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [26] MCLACHLAN, R. A gallery of constant-negative-curvature surfaces. *Math. Intelligencer* 16 (1994), 31–37.
- [27] NOVOKSHĖNOV, V.YU. The asymptotic behavior of the general real solution of the third Painlevé equation. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 283 (1985), 1161–1165.
- [28] PICARD, É. Note sur les méthodes d'approximation successives dans la théorie des équations différentielles. In: “Darboux, G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*”, tome IV, Gauthier-Villars, 1896.
- [29] POPOV, F.G. Archives de l'Histoire des Sciences et des Techniques (Académie des Sciences, URSS) 9 (1936), 347–363.
- [30] POPOV, E.V. Geometric approach to Chebyshev net generation along an arbitrary surface represented by NURBS. http://graphicon2002.unn.ru/demo/2002/Popov_En_Re.pdf.
- [31] PIPKIN, A.C. Equilibrium of Tchebychev nets. *Arch. Rational Mech. Anal.* 85 (1984), 81–97.
- [32] PRUDNIKOV, V.E. P.L. Tchebychev: un savant et un pédagogue. (En russe), M. Prosveschenie, 1964.
- [33] SAMELSON, S.L. Tchebychev nets on spheres. *Quart. Appl. Math.* 49 (1991), 11–18.
- [34] SAMELSON, S.L. and W.P. DAYAWANSA. On the existence of global Tchebychev nets. *Trans. Amer. Math. Soc.* 347 (1995), 651–660.
- [35] SERVANT, M. Sur l'habillage des surfaces. *C.R. Acad. Sci. Paris* 137 (1904), 112–115.
- [36] STOKER, J.J. *Differential Geometry*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XX. Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1969.
- [37] TCHEBYCHEV, P.L. Sur la coupe des vêtements. Assoc. franç. pour l'avancement des sci., Congrès de Paris (1878), 154–155.
- [38] — *Oeuvres de P.L. Tchebychev*, ed. Markoff A. et Sonin N., Vol. 2, St. Petersburg (1907). Reprint Chelsea, New York, 1952.
- [39] — On the cutting of garments. *Uspekhi Mat. Nauk (N.S.)* 1 (1946), 38–42.

- [40] — *Complete Collected Works* (1946-1951). Izdatel'stvo Akad. Nauk SSR, Moscow Leningrad, Vol. V, other works, biographical materials, 1951.
- [41] THOMAS, H. Zur Frage des Gleichgewichts von Tschebyscheff-Netzen aus verknoteten und gespannten Fäden. *Math. Z.* 47 (1940), 66–77.
- [42] VOSS, A. Ueber ein neues Princip der Abbildung krummer Oberflächen. *Math. Ann.* 19 (1881), 1–25.

(Reçu le 15 novembre 2009; version révisée reçue le 4 février 2011)

Étienne Ghys

École Normale Supérieure de Lyon
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
U.M.R. 5669 du CNRS
46, Allée d'Italie
F-69364 Lyon Cedex 07
France
e-mail: ghys@umpa.ens-lyon.fr