

UNE PREUVE PLUS IMMOBILIÈRE DU THÉORÈME DE  
« SATURATION » DE KAPOVICH-LEEB-MILLSON

par Nicole BARDY-PANSE, Cyril CHARIGNON,  
Stéphane GAUSSENT\*) et Guy ROUSSEAU

ABSTRACT. We give a more building-oriented and somewhat simpler proof of the « saturation » theorem of Kapovich and Millson for any complex semisimple group. The main difference with their approach lies in the combinatorial part of the proof. We state a theorem of folding/unfolding triangles in the affine building, only in combinatorial terms. For the analytical part, we gather materials that appear in distinct papers of Kapovich, Leeb and Millson to complete the proof.

1. INTRODUCTION

Cet article a pour but d'exposer une démonstration du théorème de « saturation », ce théorème a été démontré par Kapovich et Millson [12], à la suite d'une série d'articles avec Leeb ([9], [10], [11], ...). Nous aurons besoin des notations suivantes :

$G$	groupe semi-simple sur le corps des complexes $\mathbf{C}$ , associé à $(X, Y, \Phi, \Phi^\vee)$
$T$	tore maximal dans $G$
$X$	réseau des caractères de $T$
$Y$	réseau des cocaractères de $T$ , dual de $X$
$\Phi$	système de racines de $(G, T)$ , contenu dans $X$ et supposé irréductible
$\{\alpha_i\}_{i \in I}$	un choix de racines simples dans $\Phi$
$P^\vee$	réseau des copoids, dual de $Q = \bigoplus \mathbf{Z}\alpha_i$
$\Phi^\vee$	système des coracines de $(G, T)$ , contenu dans $Y$

---

\*) Le troisième auteur remercie le projet ANR-09-JCJC-0102-01 pour son soutien financier.

$Q^\vee$	réseau des coracines de $G$ , $Q^\vee = \bigoplus \mathbf{Z}\alpha_i^\vee \subset Y \subset P^\vee$
$G^\vee$	dual de Langlands de $G$ , groupe semi-simple complexe associé à $(Y, X, \Phi^\vee, \Phi)$
$V(\lambda)$	représentation irréductible de $G^\vee$ de plus haut poids $\lambda \in Y^+ = \{\lambda \in Y \mid \alpha_i(\lambda) \geq 0\}$
$\mathcal{I}$	immeuble de Bruhat-Tits associé à $G$ et au corps $\mathcal{K} = \mathbf{C}((t))$ des séries de Laurent

**THÉORÈME 1.1.** *Soit  $k = k_\Phi$  le plus petit multiple commun des coefficients de la plus grande racine de  $\Phi$ . Soient  $\lambda, \mu$  et  $\nu$  des copoids dominants tels que  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$ . S'il existe  $N \in \mathbf{N}^*$  tel que  $(V(N\lambda) \otimes V(N\mu) \otimes V(N\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$  alors  $(V(k^2\lambda) \otimes V(k^2\mu) \otimes V(k^2\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$ .*

La conjecture qu'ils formulent est que le résultat reste vrai si on remplace  $k^2$  par  $k$  et même si on le remplace par 1 ou 2, selon que les racines de  $\Phi$  sont toutes de même longueur ou non. Pour  $G$  de type  $A$ ,  $k = 1$  et on a bien une saturation du cône de Littlewood-Richardson (formé des  $(\lambda, \mu, \nu)$  tels que  $(V(\lambda) \otimes V(\mu) \otimes V(\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$ ). Dans ce cas-là, le résultat a été démontré par Knutson et Tao avec le modèle du nid d'abeilles [13] et par Derksen et Weyman en utilisant les carquois [7]. Par la suite, Belkale et Kumar ont montré qu'on peut prendre 2 à la place de  $k^2$  dans le théorème précédent quand le groupe  $G$  est symplectique ou orthogonal impair [2], ils utilisent des techniques de géométrie algébrique et plongent le groupe dans un groupe de type  $A$ . La dernière amélioration (à notre connaissance) est donnée par Sam qui montre en prolongeant les idées de Derksen et Weyman que l'on peut prendre 2 dans le cas d'un groupe orthogonal ou symplectique [18]. Il se débarrasse de plus de l'hypothèse  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$ .

L'importance de ce théorème tient au fait que la non nullité de  $(V(\lambda') \otimes V(\mu') \otimes V(\nu'))^{G^\vee}$  traduit l'existence d'une sous-représentation de  $V(\lambda') \otimes V(\mu')$  isomorphe au dual  $V(\nu'^*)$  de  $V(\nu')$  et la multiplicité de  $V(\nu'^*)$  est la dimension de cet espace. On a donc ainsi des renseignements sur la décomposition en facteurs irréductibles du produit tensoriel de ces deux représentations irréductibles.

**ESQUISSE DE LA PREUVE.** La preuve que nous présentons se décompose en les points suivants :

Étape 1)  $(V(N\lambda) \otimes V(N\mu) \otimes V(N\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$  implique qu'il existe un triangle (géodésique)  $T(0, A, B)$  dans  $\mathcal{I}$ , de longueurs de côtés  $N\lambda, N\mu, N\nu$ .

Étape 2) Il existe une application, appelée «application de Gauss», qui à  $T(0, A, B)$  associe une configuration semi-stable

$$((N\lambda, \xi_1), (N\mu, \xi_2), (N\nu, \xi_3))$$

de points pondérés de  $\partial_\infty \mathcal{I}$  (le bord visuel de  $\mathcal{I}$ ).

Étape 3) L'ensemble des configurations semi-stables est saturé, ainsi

$$((\lambda, \xi_1), (\mu, \xi_2), (\nu, \xi_3))$$

est toujours semi-stable. On veut maintenant inverser l'application de Gauss. Pour cela on construit à partir de  $((\lambda, \xi_1), (\mu, \xi_2), (\nu, \xi_3))$  une application  $\phi: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ . En fait, on montre qu'il existe un point fixe noté  $x_0$  de  $\phi$ , d'où un triangle  $T(x_0, x_1, x_2)$  dans  $\mathcal{I}$ , de longueurs de côtés  $\lambda, \mu, \nu$ .

Étape 4) La condition  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$  implique que  $x_0, x_1, x_2$  sont des sommets de  $\mathcal{I}$ . On rétracte dans un appartement contenant  $x_0$  et par rapport à une alcôve  $\alpha$  qui contient ce point. On dilate par  $k$ , les sommets deviennent des sommets spéciaux et on obtient un polygone  $P(0, a, a_1, \dots, a_n, b, 0)$  formé de deux segments  $[0, a]$  et  $[b, 0]$  de longueurs de côtés  $k\lambda$  et  $k\nu$  et d'une ligne brisée qui est en fait un chemin de Hecke par rapport à  $\alpha$  de type  $k\mu$ .

Étape 5) On replie ce polygone dans la chambre fondamentale, ce qui en donne un formé par les segments  $[0, k\lambda]$ ,  $[0, k\nu^*]$  et un chemin de Hecke de type  $k\mu$  contenu dans la chambre fondamentale (ici,  $\nu^* = -w_0\nu$ ). Malheureusement, un chemin de Hecke n'est pas forcément LS (abréviation de Lakshmibai-Seshadri). Mais, modulo un petit ajustement, en dilatant de nouveau, on arrive à un chemin LS. On conclut par un théorème de Littelmann que  $(V(k^2\lambda) \otimes V(k^2\mu) \otimes V(k^2\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$ .

Nous nous inspirons largement des travaux de Kapovich et Millson [12]. La principale différence réside dans l'introduction des chemins de Hecke par rapport à une alcôve qui permettent de caractériser les lignes polygonales que l'on peut déplier, voir le théorème 3.8. Ce résultat est une contribution originale au sujet. Kapovich et Millson ne peuvent déplier que certains chemins qui sont denses dans les chemins LS (voir la preuve du théorème 6.1 de [12]). Nous évitons ainsi l'utilisation d'un argument de compacité.

La section 2 introduit les notions de chemins LS et de Hecke dues à Littelmann et Kapovich-Millson, et explique leur importance en théorie des représentations. La section 3 fournit une preuve originale (entièrement immobilière) d'une caractérisation des images dans un appartement des triangles géodésiques de  $\mathcal{I}$  par certaines rétractions; on en déduit l'étape 1)

ci-dessus dans le théorème 3.10. Dans la section 4, on introduit le bord visuel de  $\mathcal{I}$  et la notion de configuration semi-stable. L'application de Gauss est introduite dans la partie 4.2.3, ce qui permet de réaliser l'étape 2). On montre qu'elle a un point fixe dans le théorème 4.15; ceci constitue l'étape 3). On conclut enfin, dans la dernière section, après avoir accompli l'étape 4) dans la partie 5.2 et l'étape 5) grâce au théorème 5.3.

## 2. DIFFÉRENTES DÉFINITIONS DE CHEMINS

### 2.1 APPARTEMENT DANS $\mathcal{I}$

On note  $\mathbf{A}$  l'appartement témoin dans  $\mathcal{I}$ , il s'agit d'un espace affine euclidien de direction  $V = Y \otimes \mathbf{R}$  (souvent identifié à  $V$ ). De plus, on désigne par  $C^+ = \{x \in V \mid \alpha_i(x) \geq 0, \forall i \in I\}$  la *chambre de Weyl* fondamentale; la plupart des notions introduites ci-dessous dépendent du choix de cette chambre. Le groupe de Weyl fini  $W$  agit isométriquement sur  $V$  avec  $C^+$  comme domaine fondamental. Il est engendré par les réflexions  $r_\alpha$ , pour  $\alpha \in \Phi$ , où  $r_\alpha$  est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan  $\text{Ker } \alpha$  (mur vectoriel).

Pour tout  $v \in V$ , il existe un unique  $v_0 \in C^+ \cap Wv$ , on définit la projection sur  $C^+$  en posant  $v_0 = pr_{C^+}(v)$ . Si  $v \in C^+$ , on note  $v^* = pr_{C^+}(-v) = -w_0.v$  (si  $w_0$  est l'élément de plus grande longueur de  $W$ ). De plus, pour tous  $x, y \in \mathbf{A}$ , on pose  $d_{C^+}(x, y) = pr_{C^+}(y - x) \in C^+$ . On dit que  $d_{C^+}(x, y)$  est la longueur du segment orienté  $[x, y]$ .

L'ensemble  $\mathcal{M}$  des murs de  $\mathbf{A}$  est en bijection avec  $\Phi \times \mathbf{Z}$ , il s'agit des hyperplans

$$M(\alpha, k) = \{x \in \mathbf{A} \mid \alpha(x) + k = 0\}.$$

La réflexion  $r_M = r_{\alpha, k}$  associée au mur  $M = M(\alpha, k)$  respecte l'ensemble  $\mathcal{M}$  des murs et ces réflexions engendrent le groupe de Weyl affine:  $W^a = W \ltimes Q^\vee$ . Un mur de  $\mathbf{A}$  détermine deux demi-espaces fermés de  $\mathbf{A}$  (appelés *demi-appartements*) dont il constitue le bord.

Une *alcôve* dans  $\mathbf{A}$  est l'adhérence d'une composante connexe du complémentaire des murs; c'est un domaine fondamental pour l'action de  $W^a$ . Un sommet de  $\mathcal{A}$  est un sommet  $x$  d'une alcôve, il est *spécial* si,  $\forall \alpha \in \Phi$ , on a  $\alpha(x) \in \mathbf{Z}$  (i.e. si  $x \in P^\vee$ ).

On sera amené plus tard à considérer des appartements construits comme ci-dessus, en remplaçant  $\mathbf{Z}$  par un autre sous-groupe discret de  $\mathbf{R}$ , par exemple  $\{0\}$ . Dans ce dernier cas,  $W^a = W$ , l'appartement est dit *vectoriel* et ses alcôves sont aussi ses chambres de Weyl.

## 2.2 GALERIES

Les chambres de Weyl de  $V$  sont les transformées de  $C^+$  par  $W$ . Une *cloison* est une facette de codimension 1 d'une chambre, son type est l'élément  $i \in I$  tel qu'elle soit conjuguée par  $W$  à  $C^+ \cap \text{Ker } \alpha_i$ . Deux chambres sont dites *mitoyennes* si elles ont une cloison en commun (elles peuvent être égales).

Une *galerie de chambres* de  $C$  à  $C'$  est une suite  $\Gamma = (C_0 = C, C_1, \dots, C_n = C')$  de chambres telle que  $C_{i-1}$  et  $C_i$  soient mitoyennes, pour  $1 \leq i \leq n$ . Cette galerie est dite *tendue* si la longueur  $n$  est minimale; alors  $n$  est la distance de  $C$  à  $C'$ . La suite des types de cloisons dans  $C_{i-1} \cap C_i$  est un type de cette galerie. Plier  $\Gamma$  (au niveau  $j$ ), c'est avoir  $C_{j-1} \neq C_j$  et remplacer  $C_j, \dots, C_n$  par leurs images via la réflexion par rapport au mur (vectoriel) contenant la cloison  $C_{j-1} \cap C_j$ .

Comme une alcôve est un domaine fondamental pour  $W^a$ , toutes les définitions précédentes peuvent être répétées pour les alcôves. On définit ainsi dans  $\mathbf{A}$  des cloisons d'alcôves et des galeries d'alcôves. Dans ce cadre les types correspondent aux cloisons d'une alcôve fondamentale; comme  $\Phi$  est irréductible, ils sont indexés par  $I \cup \{0\}$ .

## 2.3 ORDRE DE BRUHAT-CHEVALLEY

Le groupe  $W$  est un groupe de Coxeter pour le système de générateurs  $\{r_i = r_{\alpha_i} \mid i \in I\}$ . Tout  $w \in W$  peut se décomposer sous la forme  $w = r_{i_1} \dots r_{i_n}$ ; la longueur  $\ell(w)$  de  $w$  est le minimum des  $n$  possibles, une décomposition avec  $\ell(w)$  termes est alors dite réduite.

On a le résultat classique suivant (voir [1], 3.59 et 5.16).

PROPOSITION 2.1. *Dans  $W$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $w' \leq w$  (ordre de Bruhat-Chevalley);
- (2) il existe une suite  $w' = w_0, w_1, \dots, w_n = w$  et des racines  $\beta_i$  telles que  $w_{i+1} = w_i r_{\beta_i}$  et  $\ell(w_{i+1}) > \ell(w_i)$ ;
- (3) idem avec les  $r_{\beta_i}$  à gauche;
- (4) idem avec  $\ell(w_{i+1}) = \ell(w_i) + 1$ ;
- (5)  $w'$  est le produit d'une sous-expression d'une décomposition réduite de  $w$ ;
- (6) il existe une galerie tendue de  $C^+$  à  $wC^+$  qui donne une galerie de  $C^+$  à  $w'C^+$  par des pliages successifs.

On définit un ordre dans  $W/W_\lambda$ , où  $W_\lambda = \{w \in W \mid w(\lambda) = \lambda\} = \langle r_{\alpha_i} \mid \alpha_i(\lambda) = 0 \rangle$ . Etant donnée une classe  $\tilde{w}$ , il existe un unique  $\tilde{w}_0 \in \tilde{w}$  de

longueur minimale notée  $\ell_\lambda(\tilde{w})$ . On a  $\tilde{w}_0 \leq w$ , pour tout  $w \in \tilde{w}$  et même  $w = \tilde{w}_0 u$ ,  $u \in W_\lambda$  avec  $\ell(w) = \ell(\tilde{w}_0) + \ell(u)$ . De plus,  $\tilde{w}_0 C^+$  est la projection de  $C^+$  sur  $\tilde{w}\lambda$ , i.e. la chambre contenant  $\tilde{w}\lambda$  la plus proche de  $C^+$ . On définit

$$\tilde{w}' \leq \tilde{w} \quad \text{par} \quad \tilde{w}'_0 \leq \tilde{w}_0.$$

PROPOSITION 2.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\tilde{w}' \leq \tilde{w}$  ;
- (2)  $\exists w \in \tilde{w}, \exists w' \in \tilde{w}', w' \leq w$  ;
- (3) *il existe une galerie tendue de  $C^+$  à  $\tilde{w}\lambda$  qui donne une galerie de  $C^+$  à  $\tilde{w}'\lambda$  par des pliages successifs.*

La preuve est laissée à la sagacité du lecteur.

## 2.4 CHEMINS À LA KAPOVICH ET MILLSON

2.4.1 CHEMINS POLYGONAUX. Si  $\lambda \in C^+$ , un  $\lambda$ -chemin est une application linéaire par morceaux  $\pi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$  telle que, pour tout  $t$ ,  $pr_{C^+}(\pi'(t)) = \lambda$ , sauf pour un nombre fini de  $t$ . Les points correspondants  $x_i = \pi(t_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  sont appelés les *points anguleux* de  $\pi$ . Les dérivées à droite et à gauche en  $t$ ,  $\pi'_+(t)$  et  $\pi'_-(t)$  existent tout le temps, mais sont parfois non identiques. La somme des longueurs des segments constituant le  $\lambda$ -chemin  $\pi$  est  $\lambda$ .

Un  $\lambda$ -chemin s'écrit  $\pi(\lambda, \pi_0, \mathbf{w}, \mathbf{a})$ , où  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m) \in W^m$ ,  $\mathbf{a} = (a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_m = 1)$  et

$$\pi(t) = \pi_0 + \sum_{i=1}^{j-1} (a_i - a_{i-1}) w_i(\lambda) + (t - a_{j-1}) w_j(\lambda) \quad \text{si} \quad a_{j-1} \leq t \leq a_j.$$

2.4.2 CHEMINS DE HECKE. Si  $\pi$  est un  $\lambda$ -chemin, on note  $w_\pm(t)$  l'élément de  $W$  de plus petite longueur tel que  $\pi'_\pm(t) = w_\pm(t)\lambda$ . Pour  $x \in \mathbf{A}$ , on pose  $W_x = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Phi, \alpha(x) \in \mathbf{Z} \rangle$ .

Un chemin linéaire par morceaux  $\pi$  est de Hecke (par rapport à  $-C^+$ ) si, pour tout  $t$ , il existe une  $W_{\pi(t)}$ -chaîne de  $\pi'_-(t)$  à  $\pi'_+(t)$ , c'est-à-dire s'il existe une suite de vecteurs  $\pi'_-(t) = \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m = \pi'_+(t)$  et des racines positives  $\beta_1, \dots, \beta_m$  telles que

$$(H1) \quad r_{\beta_i}(\eta_{i-1}) = \eta_i.$$

$$(H2) \quad \beta_i(\eta_{i-1}) < 0.$$

$$(H3) \quad r_{\beta_i} \in W_{\pi(t)}, \text{ i.e. } \beta_i(\pi(t)) \in \mathbf{Z} : \pi(t) \text{ est dans un mur de direction } \text{Ker } \beta_i.$$

LEMME 2.3. *Soit  $\pi$  un  $\lambda$ -chemin de Hecke alors, pour tout  $t$ ,  $w_+(t) \leq w_-(t)$ .*

*Démonstration.* On a  $\eta_0 = \pi'_-(t) = w_-(t)\lambda$  et  $\eta_i = w_i\lambda$ , où on a posé  $w_i = r_{\beta_i} \cdots r_{\beta_1} w_-(t)$ . Or  $\beta_i(\eta_{i-1}) < 0$  implique que  $\beta_i(w_{i-1}C^+) \leq 0$  ce qui équivaut à  $\ell(w_i = r_{\beta_i} w_{i-1}) < \ell(w_{i-1})$ . Donc  $w_-(t) = w_0 > w_1 > \cdots > w_m \geq w_+(t)$  car  $\pi'_+(t) = w_m\lambda$ .

## 2.5 LES CHEMINS LS

Un chemin de *Lakshmibai-Seshadri* (ou *LS*) de type  $\lambda \in C^+$  est un  $\lambda$ -chemin  $\pi = \pi(\lambda, \pi_0, \mathbf{w}, \mathbf{a})$  tel que : pour tout  $j = 1, \dots, m-1$ , il existe une  $a_j$ -chaîne de  $w_j$  à  $w_{j+1}$  i.e. il existe une suite  $\beta_{j,1}, \dots, \beta_{j,s_j}$  de racines positives telle que, si on pose  $\sigma_{j,0} = w_j$ ,  $\sigma_{j,1} = r_{\beta_{j,1}} w_j, \dots, \sigma_{j,s_j} = r_{\beta_{j,s_j}} \cdots r_{\beta_{j,1}} w_j$ , on a  $\sigma_{j,s_j} = w_{j+1}$  et

(LS0)  $\pi_0$  est un sommet spécial (i.e.  $\pi_0 \in P^\vee$ ) et  $\lambda \in P^{\vee+} = P^\vee \cap C^+$  ;

(LS1)  $\sigma_{j,i} < \sigma_{j,i-1}$ , dans  $W/W_\lambda$  ;

(LS2)  $a_j \beta_{j,i}(\sigma_{j,i}(\lambda)) \in \mathbf{Z}$  ;

(LS3)  $\ell_\lambda(\sigma_{j,i}) = \ell_\lambda(\sigma_{j,i-1}) - 1$ .

En fait, Littelmann ([14], [15]) considère des chemins LS normalisés, i.e. avec  $\pi_0 = 0$ .

- NOTA BENE. 1) (LS0) + (LS2)  $\Rightarrow a_j \in \mathbf{Q}$  (si  $w_j \neq w_{j-1}$ ).  
2) On sait que  $\pi(1) - \pi(0) - \lambda \in -Q^{\vee+} = -\sum \mathbf{N}\alpha_i^\vee$ .

PROPOSITION 2.4. Si (LS0) est vérifié alors : (LS1)+(LS2)  $\iff$  Hecke.

La preuve de cette proposition se trouve dans [8], section 5.1.2.

## 2.6 QUAND EST-CE QUE HECKE VAUT LS ?

La condition LS est un peu mystérieuse par rapport à Hecke. On utilise le lemme « grossier » suivant.

LEMME 2.5. Soit  $\pi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$  un chemin de Hecke (par rapport à  $-C^+$ ) de type  $\eta \in C^+ \cap P^\vee = P^{\vee+}$ . Si les points où  $\pi$  est plié sont des sommets spéciaux, alors  $\pi$  est LS (et dans ce cas LS  $\iff$  Hecke).

*Démonstration.* Pour tout  $t$ , il existe une suite  $\xi_0 = \pi'_-(t), \xi_1, \dots, \xi_m = \pi'_+(t)$  et des racines positives  $\beta_1, \dots, \beta_m$  telles que

(H1)  $r_{\beta_i}(\xi_{i-1}) = \xi_i$

(H2)  $\beta_i(\xi_{i-1}) < 0$

(H3)  $r_{\beta_i} \in W_{\pi(t)}$ , i.e.  $\beta_i(\pi(t)) \in \mathbf{Z}$ .

On note  $w_{\pm}(t) \in W$  l'élément de plus petite longueur tel que  $\pi'_{\pm}(t) = w_{\pm}(t)\eta$ . Alors, on a

$$w_-(t) = w_0 > w_1 = r_{\beta_1} w_0 > \cdots > w_m = r_{\beta_m} w_{m-1} = w_+(t).$$

D'après la proposition 2.4, il suffit de prouver la condition (LS3). Mais, on sait que pour tout  $t$ ,  $w_+(t) \leq w_-(t)$ . Quand il y a égalité, il n'a rien à faire. Quand il n'y a pas égalité, comme les points où le chemin se plie sont des sommets spéciaux, on peut écrire

$$w_+(t) = r_{\beta'_p} \cdots r_{\beta'_1} w_-$$

avec décroissance de 1 des longueurs. Donc  $\pi$  est bien LS.

## 2.7 LES OPÉRATEURS $e_{\alpha}$ ET $f_{\alpha}$

Soient  $\pi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$  un chemin linéaire par morceaux d'origine  $\pi(0) = 0$  et  $\alpha$  une racine simple.

On considère  $Q = \inf(\alpha \circ \pi([0, 1]) \cap \mathbf{Z})$ . Si  $Q = 0$ , le chemin  $e_{\alpha}\pi$  n'est pas défini. Si  $Q < 0$ , soient  $q = \inf\{t \in [0, 1] \mid \alpha \circ \pi(t) = Q\}$  et  $y = \sup\{t \in [0, q] \mid \alpha \circ \pi(t) = Q + 1\}$ ; le chemin  $e_{\alpha}\pi$  est la concaténation de  $\pi|_{[0, y]}$ , d'un symétrique de  $\pi|_{[y, q]}$  et d'un translaté de  $\pi|_{[q, 1]}$ . Plus précisément  $e_{\alpha}\pi(t) = \pi(t)$  pour  $t \in [0, y]$ ,  $e_{\alpha}\pi(t) = r_{\alpha, Q+1}(\pi(t))$  pour  $t \in [y, q]$  et  $e_{\alpha}\pi(t) = \pi(t) - \pi(q) + e_{\alpha}\pi(q)$  pour  $t \in [q, 1]$ .

De même on considère la partie entière  $P$  de  $\alpha \circ \pi(1) - Q$ . Si  $P \leq 0$ , le chemin  $f_{\alpha}\pi$  n'est pas défini. Si  $P \geq 1$ , la définition de  $f_{\alpha}\pi$  est analogue à celle de  $e_{\alpha}\pi$ , voir [14] pour plus de détails.

On peut démontrer les propriétés suivantes (voir [14]):

- (1) Si  $e_{\alpha}\pi$  est défini, on a  $e_{\alpha}\pi(1) = \pi(1) + \alpha^{\vee}$  et si  $f_{\alpha}\pi$  est défini, on a  $f_{\alpha}\pi(1) = \pi(1) - \alpha^{\vee}$ .
- (2)  $(e_{\alpha})^n \pi$  est défini si et seulement si  $n \leq -Q$  et  $(f_{\alpha})^n \pi$  est défini si et seulement si  $n \leq P$ .
- (3) Si  $\pi(1) \in P^{\vee}$ , on a  $P + Q = \alpha(\pi(1))$ .
- (4)  $e_{\alpha}\pi = \pi' \iff f_{\alpha}\pi' = \pi$ .
- (5) Si  $\pi([0, 1]) \subset C^+$ , aucun  $e_{\alpha}\pi$  n'est défini.

On notera l'analogie des propriétés 3 et 4 avec celles des bases des représentations de  $SL_2$ .

Pour  $\lambda \in P^{\vee+}$ , soit  $\pi_{\lambda}$  le segment  $[0, \lambda]$ , i.e.  $\pi_{\lambda}(t) = t\lambda$ . Alors Littelmann montre le résultat, plus difficile, suivant (voir dans l'introduction de [14] le résultat appelé «Character formula»):

PROPOSITION 2.6. *Un chemin  $\pi$  d'origine 0 est un chemin LS (normalisé) de type  $\lambda$  si et seulement si on peut l'écrire sous la forme  $\pi = f_{\beta_1} f_{\beta_2} \dots f_{\beta_r} \pi_\lambda$  avec  $r \in \mathbf{N}$  et  $\beta_1, \dots, \beta_r$  des racines simples.*

## 2.8 APPLICATIONS AUX REPRÉSENTATIONS DE $G^\vee$

Soit  $\lambda \in Y^+ = Y \cap C^+$ . La représentation irréductible de plus haut poids  $\lambda$  est de dimension finie. L'action du tore maximal  $T^\vee$  de  $G^\vee$  est diagonalisable avec des poids  $\mu \in \lambda - \sum_{i \in I} \mathbf{N} \alpha_i^\vee$  (contenu dans le réseau  $Y$  des caractères de  $T^\vee$ ). Il est important de connaître les poids qui interviennent et leur multiplicité, c'est ce que donne le théorème suivant [14].

THÉORÈME 2.7 (Formule des caractères de Littelmann). *La multiplicité de  $\mu$  dans  $V(\lambda)$  est le nombre de chemins LS (normalisés) de type  $\lambda$  et d'extrémité  $\mu$ .*

La formule des caractères de Weyl, précédemment connue, a le désavantage d'exprimer la multiplicité comme une somme d'entiers relatifs, ce qui rend plus difficile de voir si elle est non nulle. Le théorème suivant de Littelmann [14] est fondamental pour la preuve du théorème de saturation.

THÉORÈME 2.8 (Règle de décomposition à la Littlewood-Richardson). *Soient  $\lambda, \mu$  et  $\nu$  des copoids dominants de  $G$  (i.e. des éléments de  $Y^+ \subset P^{\vee+}$ ). Alors,  $(V(\lambda) \otimes V(\mu) \otimes V(\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$  si, et seulement si, il existe un chemin LS normalisé  $\pi$  de type  $\mu$  tel que  $\lambda + \pi(1) = \nu^*$  et, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\lambda + \pi(t) \in C^+$ .*

NOTA BENE. Dans ce cas on a donc  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$ .

## 2.9 LES CHEMINS LS GÉNÉRALISÉS

Malheureusement, un chemin de Hecke peut avoir un point anguleux en n'importe quel point de rencontre avec un mur, donc pas forcément en un sommet. Cela rend plus difficile l'utilisation du lemme 2.5 pour dire qu'après homothétie un chemin de Hecke devient LS. On va donc considérer des chemins qui restent dans le 1-squelette, comme ci-dessous.

Soit  $\eta \in C^+ \cap P^\vee$ , on choisit une décomposition  $\bar{\eta} = \eta_1 + \dots + \eta_l$  avec  $\eta_i \in \mathbf{N} \varpi_i \subset P^{\vee+}$ . Soit  $\pi_{\bar{\eta}} = \pi_{\eta_1} \star \dots \star \pi_{\eta_l}$  la concaténation des segments  $\pi_{\eta_1} = [0, \eta_1]$  et  $\pi_{\eta_i} = [\eta_1 + \dots + \eta_{i-1}, \eta_1 + \dots + \eta_i]$  pour  $i \geq 2$  (évidemment, ce chemin dépend de la décomposition  $\bar{\eta}$  de  $\eta$ ).

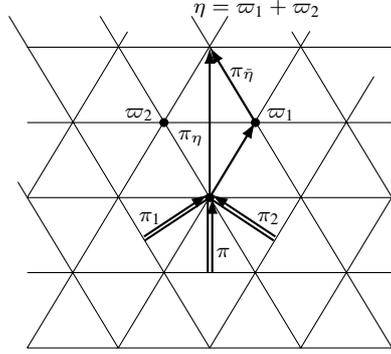


FIGURE 1

Un morceau d'un appartement de type  $A_2$ . Trois chemins LS  $\pi_\eta, \pi_1$  et  $\pi_2$  (avec  $\pi_\eta = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \pi_2 = e_{\alpha_2} e_{\alpha_1} \pi_1$ ), et un chemin de Hecke  $\pi$ . Un chemin LS généralisé  $\pi_{\bar{\eta}}$ .

**DÉFINITION 2.9.** Un chemin de Hecke (resp. LS) généralisé de type  $\bar{\eta}$  (par rapport à  $-C^+$ ) est un chemin  $p = p_1 \star \cdots \star p_l$  où les  $p_i$  sont de Hecke (resp. LS) de type  $\eta_i$  (par rapport à  $-C^+$ ),  $p_i(0) = p_{i-1}(1) =: p(t_i)$  et pour tout  $2 \leq i \leq l$ , il existe un vecteur  $\xi_i$ , une chambre qui contient à la fois  $\xi_i$  et  $p'_+(t_i)$  et une  $W_{p(t_i)}$ -chaîne de  $p'_-(t_i)$  à  $\xi_i$ .

Dans le cas LS, on suppose de plus que  $p_1(0)$  est spécial.

Par exemple,  $\pi_{\bar{\eta}}$  est un chemin LS généralisé de type  $\bar{\eta}$ . De plus, on a les propriétés suivantes (démontrées par Kapovich et Millson [12, 5.3, 5.4] et par Littelmann qui parle plus généralement de « locally integral concatenations » [16, 5.6]):

- L'ensemble des chemins LS généralisés de type  $\bar{\eta}$  et d'origine 0 est stable par les opérateurs  $e_\alpha$  et  $f_\alpha$ .
- Le seul chemin LS généralisé de type  $\bar{\eta}$  d'origine 0 et contenu dans  $C^+$  est  $\pi_{\bar{\eta}}$ .
- Tout chemin LS généralisé de type  $\bar{\eta}$  est le transformé, par des opérateurs  $f_\alpha$ , de  $\pi_{\bar{\eta}}$ .
- Le théorème de Littelmann sur le produit tensoriel (voir le théorème 2.8) est toujours valable avec des chemins LS généralisés de type  $\bar{\eta}$ .

Toutes les notions de chemins introduites dans cette partie sont empruntées à Kapovich et Millson et à Littelmann. Nous aurons besoin d'introduire des notions voisines de chemins LS et de Hecke par rapport à une alcôve (voir les paragraphes 3.6 et 5.3).

## 3. PLIAGE ET DÉPLIAGE DE TRIANGLES

## 3.1 RAPPELS SUR LES IMMEUBLES

Un immeuble affine (ou vectoriel) est un espace métrique  $\mathcal{I}$  recouvert par une famille de sous-espaces appelés appartements, tous isométriques à l'appartement témoin  $\mathbf{A}$  du paragraphe 2.1 par une isométrie unique à  $W^a$  près. Les alcôves de l'immeuble sont les alcôves de ses appartements. L'axiome fondamental suivant est satisfait :

Deux alcôves de l'immeuble sont contenues dans un même appartement et cet appartement est unique à un isomorphisme fixant (point par point) les deux alcôves près.

Si  $\alpha$  est une alcôve dans un appartement  $A$  de  $\mathcal{I}$ , pour tout  $x \in \mathcal{I}$ , il existe un appartement  $B$  contenant  $\alpha$  et  $x$  et un isomorphisme  $\varphi$  de  $B$  sur  $A$  fixant  $\alpha$ . L'élément  $\varphi(x) \in A$  ne dépend pas des choix de  $B$  et  $\varphi$ , on le note  $\rho_{A,\alpha}(x)$ . L'application  $\rho_{A,\alpha}: \mathcal{I} \rightarrow A$  est la rétraction de  $\mathcal{I}$  sur  $A$  de centre  $\alpha$  ; elle diminue les distances, conserve les types et transforme une galerie (d'alcôves) en une autre galerie.

L'enclos  $\text{cl}(\Omega)$  d'une partie  $\Omega$  d'un appartement  $A$  est l'intersection des demi-appartements de  $A$  contenant  $\Omega$ . L'intersection de deux appartements  $A, B$  est *close* (i.e. égale à son enclos) et les deux appartements sont isomorphes par un isomorphisme fixant leur intersection. Une galerie tendue dans un appartement reste dans l'enclos de ses extrémités ; ainsi dans l'immeuble une galerie tendue est dans tout appartement contenant ses extrémités.

Un demi-appartement  $D$  de mur  $M = \partial D$  et une alcôve  $\alpha$  dont une cloison est dans  $M$  sont toujours contenus dans un même appartement. L'immeuble  $\mathcal{I}$  est dit *épais* si toute cloison est contenue dans au moins 3 alcôves.

Pour plus de détails sur les immeubles affines, on pourra se référer à [1], [4] ou [17].

Un *quartier* dans  $\mathbf{A}$  est un sous-ensemble de la forme  $\Omega = x + C$  pour un point  $x \in \mathbf{A}$  (son sommet) et une chambre de Weyl  $C \subset V$  (sa direction). Deux quartiers sont équipollents si et seulement si leur intersection contient un autre quartier. Les classes d'équivalence sont les germes de quartier, elles sont en bijection avec les chambres de Weyl de  $V$ .

On a donc une notion de quartier ou de germe de quartier dans l'immeuble  $\mathcal{I}$ . Les immeubles de Bruhat-Tits, qui nous intéressent, ont deux propriétés particulières :

Deux germes de quartier sont toujours contenus dans un même appartement (contenir un germe de quartier signifie contenir l'un des quartiers du germe).

Cela permet de montrer que ces germes constituent l'ensemble des chambres d'un immeuble sphérique  $\mathcal{I}^s$  (au sens de [19]). On reviendra sur  $\mathcal{I}^s$  à la section 4 (sous le nom  $\mathcal{I}_\infty$ ).

Un germe de quartier et une alcôve sont toujours contenus dans un même appartement (c'est une conséquence de la décomposition d'Iwasawa). Comme ci-dessus, cela permet de définir une rétraction  $\rho_{A,q}$  de l'immeuble sur un appartement  $A$  de centre un germe de quartier  $q$  contenu dans  $A$ . Cette rétraction aussi diminue les distances, conserve les types et transforme les galeries (d'alcôves) en galeries.

### 3.2 DU LOCAL AU GLOBAL

**3.2.1 IMMEUBLE TANGENT.** Dans cette partie,  $\mathcal{I}$  désigne un immeuble affine (ou vectoriel) épais général. Soit  $x \in \mathcal{I}$ , l'étoile  $x^*$  (réunion des facettes qui contiennent  $x$ ) est, comme ensemble de facettes, un immeuble combinatoire sphérique épais. Sa réalisation vectorielle, notée  $\Sigma_x(\mathcal{I})$ , est l'immeuble tangent de  $\mathcal{I}$  en  $x$ .

En fait  $\Sigma_x(\mathcal{I})$  est le quotient de  $x^* \times \mathbf{R}_+$  par la relation:  $(y, \lambda) \sim (z, \mu) \Leftrightarrow y$  et  $z$  sont dans le même segment d'origine  $x$  d'une facette de  $x^*$  et, pour  $N$  grand,  $(1 - \lambda/N)x + (\lambda/N)y = (1 - \mu/N)x + (\mu/N)z$ . On note  $\lambda \vec{x}\vec{y}$  la classe de  $(y, \lambda)$ . Le point  $x$  s'identifie au point  $0 = 0_x = \lambda \vec{x}\vec{x} = 0 \vec{x}\vec{y}$  de  $\Sigma_x(\mathcal{I})$ .

Les appartements de  $\Sigma_x(\mathcal{I})$  sont les espaces vectoriels

$$\vec{A}\vec{x} = \{\lambda \vec{x}\vec{y} \mid y \in A \cap x^*, \lambda \in \mathbf{R}_+\},$$

pour  $A$  un appartement affine contenant  $x$ . Les chambres de  $\Sigma_x(\mathcal{I})$  sont les  $\vec{c} = \{\lambda \vec{x}\vec{y} \mid y \in c, \lambda \in \mathbf{R}_+\}$  pour  $c$  une alcôve de  $x^*$ . Le groupe de Weyl de  $\vec{A}\vec{x}$  est le groupe  $W_x$  engendré par les réflexions linéaires associées aux réflexions affines de  $A$  fixant  $x$ .

Si  $\vec{v} \in \Sigma_x(\mathcal{I})$ , alors  $x + \vec{v}$  est bien défini dans  $\mathcal{I}$  si  $\|\vec{v}\|$  est assez petit pour que  $x + \vec{v} \in x^*$ , sinon, il faut préciser un appartement  $A \ni x$  tel que  $\vec{A}\vec{x} \ni \vec{v}$ . Deux éléments  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  de  $\Sigma_x(\mathcal{I})$  sont dits opposés s'ils sont dans un même appartement  $\vec{A}\vec{x}$  et opposés dans celui-ci. On note  $\vec{v}' = op_{\vec{A}\vec{x}}(\vec{v})$ .

Si  $\pi$  est un chemin linéaire par morceaux (donc réunion de segments contenus dans des appartements), on peut définir, pour tout  $t$ , les dérivées  $\pi'_+(t)$  et  $-\pi'_-(t)$  dans  $\Sigma_{\pi(t)}\mathcal{I}$  de manière intrinsèque (i.e. indépendante du choix d'appartements). Le chemin  $\pi$  est dérivable en  $t$  si, et seulement si,  $\pi'_+(t)$  et  $-\pi'_-(t)$  sont opposés dans  $\Sigma_{\pi(t)}\mathcal{I}$ .

**3.2.2 DIFFÉRENTIELLE.** Soit  $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}$  un morphisme d'immeubles affines. En particulier,  $f(x^*) \subset (f(x))^*$ . Pour tout  $x \in \mathcal{I}$ , on définit la

différentielle de  $f$  comme étant la réalisation vectorielle de la restriction de  $f$  à  $x^*$  et on la note  $df_x: \Sigma_x(\mathcal{I}) \rightarrow \Sigma_{f(x)}(\mathcal{J})$ . C'est un morphisme d'immeubles vectoriels.

Si  $\vec{v} \in \Sigma_x(\mathcal{I})$ , soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $x + \varepsilon\vec{v} \in x^*$  alors  $f(x + \varepsilon\vec{v}) \in f(x)^*$ . On a

$$df_x(\vec{v}) = \frac{1}{\varepsilon} \overrightarrow{f(x)f(x + \varepsilon\vec{v})}.$$

PROPRIÉTÉ. Soient  $A$  un appartement,  $c$  une alcôve et  $\rho = \rho_{A,c}$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $c$ . Si  $x \in A$  alors  $d\rho_x = \rho_{\vec{A}\vec{x}, \vec{c}_x}$ , où  $\vec{c}_x$  est la chambre de  $\vec{A}\vec{x}$  qui contient tous les  $\vec{x}\vec{y}$ ,  $y \in c$  (autrement dit  $\vec{c}_x = \overrightarrow{proj_x(c)}$ , si  $proj_x(c)$  est l'alcôve de  $x^*$  à distance minimale de  $c$ ).

Si  $x \notin A$ , soit  $B \supset c \cup \{x\}$  un autre appartement, soit  $\varphi: B \xrightarrow{\cong} A$  l'isomorphisme qui fixe  $c$  et  $x$ , alors  $d\rho_x = d\varphi_x \circ \rho_{\vec{B}\vec{x}, \vec{c}_x}$ . En effet  $\rho = \varphi \circ \rho_{B,c}$ .

### 3.2.3 CRITÈRE INFINITÉSIMAL

PROPOSITION 3.1. Soit  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  un polygone dans un appartement  $A$ . Soit  $\pi: [0, 1] \rightarrow A$  une paramétrisation (linéaire par morceaux et à vitesse constante) de  $[x, x_1, \dots, x_n, y]$  avec  $x_i = \pi(t_i)$ . Soit  $a$  une alcôve contenant  $z$  et soit  $\rho = \rho_{A,a}$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $a$ .

Alors  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  est l'image par  $\rho$  d'un triangle  $[z, x, \tilde{y}, z]$  si, et seulement si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $[\vec{x}_i\vec{z}, -\pi'_-(t_i), 0_{x_i}, \pi'_+(t_i), \vec{x}_i\vec{z}]$  est l'image d'un triangle  $[\vec{x}_i\vec{z}, -\pi'_-(t_i), \eta_i, \vec{x}_i\vec{z}]$  dans  $\Sigma_{x_i}(\mathcal{I})$  par  $\rho_{\vec{A}\vec{x}_i, \vec{a}_{x_i}}$ , où  $\vec{a}_{x_i}$  est la chambre de  $\vec{A}\vec{x}_i$  qui contient tous les vecteurs  $\vec{x}_i\vec{z}'$ ,  $z' \in a$ .

REMARQUE 3.2. La condition est équivalente au fait que pour tout  $i$ , il existe  $\eta_i \in \Sigma_{x_i}(\mathcal{I})$  tel que  $\eta_i$  est opposé à  $-\pi'_- = -\pi'_-(t_i)$  et  $\rho(\eta_i) = \pi'_+(t_i)$ .

Démonstration. On suppose pour simplifier qu'il existe un groupe  $\mathbf{G}$  agissant sur  $\mathcal{I}$  fortement transitivement (c'est-à-dire transitivement sur les paires formées d'une alcôve dans un appartement). Cela nous suffit, car nous appliquerons tout ceci à la situation où  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(G, \mathcal{K})$ , l'immeuble de Bruhat-Tits associé au groupe  $G$  sur le corps  $\mathcal{K}$ . Après avoir démontré la proposition 3.6, on peut voir que cette hypothèse est inutile.

Pliage. On suppose que  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  est l'image par  $\rho$  d'un triangle  $[z, x, \tilde{y}, z]$ . Soit  $\tilde{\pi}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{I}$  une paramétrisation de  $[x, \tilde{y}]$  telle que  $\rho \circ \tilde{\pi} = \pi$ . Pour tout  $i$ , posons  $\tilde{x}_i = \tilde{\pi}(t_i)$  de sorte que  $x_i = \rho(\tilde{x}_i)$ . On dérive en  $t_i$ :

$$d\rho_{\tilde{x}_i}(\pm \tilde{\pi}'_{\pm}(t_i)) = \pm \pi'_{\pm}(t_i), \quad d\rho_{\tilde{x}_i}(\vec{x}_i\vec{z}) = \vec{x}_i\vec{z}.$$

Soit  $Z$  un appartement contenant  $a, \tilde{x}_i$  et tel que  $-\tilde{\pi}'_-(t_i) \in \overrightarrow{Z\tilde{x}_i}$ . Soit  $g \in \mathbf{G}$  tel que  $g \cdot Z = A$  et  $g \cdot a = a$ . Alors,  $\rho|_Z = g|_Z$ . On prend  $\eta_i = dg_{\tilde{x}_i}(\tilde{\pi}'_+(t_i))$ ;  $dg_{\tilde{x}_i}$  est un isomorphisme entre  $\Sigma_{\tilde{x}_i}\mathcal{I}$  et  $\Sigma_{x_i}\mathcal{I}$ , d'où  $\eta_i$  est opposé à  $-\pi'_-(t_i)$ . Il reste à montrer que  $\rho_{\overrightarrow{A\tilde{x}_i, \tilde{a}_{x_i}}}(\eta_i) = \pi'_+(t_i)$ .

Soit  $Y$  un appartement contenant  $a, \tilde{x}_i$  et tel que  $\tilde{\pi}'_+(t_i) \in \overrightarrow{Y\tilde{x}_i}$ . On a des isomorphismes :

$$Y \xrightarrow[a]{g \cdot} gY \xrightarrow[a]{\varphi, \simeq} A,$$

(cette notation signifie que  $g$  et  $\varphi$  fixent  $a$ ).

L'isomorphisme  $\varphi$  est égal à  $\rho|_{gY}$  et la composée à  $\rho|_Y$ . On dérive :

$$\overrightarrow{Y\tilde{x}_i} \xrightarrow{dg} \overrightarrow{gY\tilde{x}_i} \xrightarrow{d\varphi} \overrightarrow{A\tilde{x}_i},$$

la composée est égale à  $d\rho_{\tilde{x}_i}$  et  $\tilde{\pi}'_+(t_i) \mapsto \eta_i \mapsto d\rho_{\tilde{x}_i}(\tilde{\pi}'_+(t_i)) = \pi'_+(t_i)$ . Or,  $d\varphi_{\tilde{x}_i} : \overrightarrow{gY\tilde{x}_i} \rightarrow \overrightarrow{A\tilde{x}_i}$  est aussi égal à  $\rho_{\overrightarrow{A\tilde{x}_i, \tilde{a}_{x_i}}}$ , donc c'est gagné !

*Dépliage.* On suppose qu'il existe, pour tout  $i$ ,  $\eta_i \in \Sigma_{x_i}\mathcal{I}$  satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Soit  $B_1$  un appartement contenant  $a \cup \{x_1\}$  tel que  $\eta_1 \in \overrightarrow{B_1x_1}$ . On pose  $\tilde{x}_2 = x_1 + \lambda\eta_1 \in B_1$ , où  $\lambda$  est tel que  $\lambda\|\eta_1\| = \|\overrightarrow{x_1x_2}\|$ . Notons  $\varphi_1$  l'isomorphisme  $B_1 \xrightarrow[a]{\simeq} A$ . Alors  $(d\varphi_1)_{x_1}(\eta_1) = \pi'_+(t_1)$  car  $(d\varphi_1)_{x_1} = (\rho_{\overrightarrow{A, \tilde{a}}})|_{\overrightarrow{B_1}}$ . Donc  $\varphi_1(x_1 + \lambda\eta_1) = x_1 + d\varphi_1(\lambda\eta_1) = x_1 + \lambda\pi'_+(t_1) = x_2$ . Et  $\overrightarrow{x_1x_0}$  est opposé à  $\eta_1$  dans  $\Sigma_{x_1}\mathcal{I}$ , donc  $[x, x_1, \tilde{x}_2]$  est un segment dans  $\mathcal{I}$ .

Soit  $g_1 \in \mathbf{G}$  tel que  $g_1 \cdot A = B_1$  et  $g_1 \cdot a = a$ . On pose  $\tilde{x}_3 = \tilde{x}_2 + \lambda_2 dg_1(\eta_2)$  dans un appartement  $B_2$ , et ainsi de suite. On construit de la sorte  $\tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}$  pour fabriquer un triangle.

### 3.3 PLIAGE

Soit  $\mathcal{S}$  un immeuble sphérique de groupe de Weyl  $W$ ; on le considère dans sa réalisation vectorielle, comme  $\Sigma_x(\mathcal{I})$  en 3.2.1. Soient  $\xi \in \mathcal{S}$ ,  $\eta$  opposé à  $\xi$ ,  $-C$  une chambre et  $A$  un appartement contenant  $\xi$  et  $-C$ . On note  $\rho = \rho_{A, -C}$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $-C$  et  $op_A(\xi)$  l'opposé de  $\xi$  dans  $A$ . Le but de cette partie est de trouver une relation entre  $\xi$ ,  $-C$  et  $\rho(\eta)$  (HR(0) ci-dessous).

**RAPPEL.** La notion de  $W$ -chaîne (cf. 2.4) dépend du choix de la chambre de Weyl  $C^+$ . On la reprend ici en explicitant la chambre dans le nom :

Une  $(W, -C)$ -chaîne ou  $(-C)$ -chaîne de  $op_A(\xi)$  à  $\rho(\eta)$  est une suite

$$op_A(\xi), \tau_1 op_A(\xi), \tau_2 \tau_1 op_A(\xi), \dots, \rho(\eta) = \tau_n \cdots \tau_2 \tau_1 op_A(\xi),$$

où chaque  $\tau_i$  est une réflexion de  $A$  qui éloigne  $\tau_{i-1} \cdots \tau_2 \tau_1 op_A(\xi)$  de  $-C$ , c'est-à-dire :

$$\tau_{i-1} \cdots \tau_2 \tau_1 op_A(\xi), -C \quad |_{M_i} \quad \tau_i \tau_{i-1} \cdots \tau_2 \tau_1 op_A(\xi),$$

où  $M_i$  est le mur associé à la réflexion  $\tau_i$ .

(Cette notation signifie que les termes de gauche sont strictement d'un côté du mur  $M_i$  et le terme de droite de l'autre côté, au sens large.)

**DÉFINITION 3.3.** Soit  $\Gamma$  une galerie tendue de  $-C$  à  $\rho(\eta)$ ,  $\Gamma = (-C = C_0, C_1, \dots, C_n \ni \rho(\eta))$ . Soit  $\tau_i$  la réflexion qui échange  $C_{i-1}$  et  $C_i$ . Une chaîne de longueur  $\ell$  le long de  $\Gamma$  de  $op_A(\xi)$  à  $\rho(\eta)$  est une  $(-C)$ -chaîne de  $op_A(\xi)$  à  $\rho(\eta)$  du type  $\rho(\eta) = \tau_{i_\ell} \cdots \tau_{i_1} op_A(\xi)$  avec  $i_1 < \cdots < i_\ell$ .

Soit maintenant une galerie tendue  $\Gamma = (C_0 = -C, C_1, \dots, C_n)$  de  $-C$  à  $\eta$ . Pour tout  $i$ , soit  $B_i$  un appartement contenant  $\xi$  et  $C_i$ . Notons  $\rho_i = \rho_{B_i, C_i}$  la rétraction centrée en  $C_i$  sur  $B_i$ . Bien évidemment, on prend  $B_0 = A$  et  $\rho_0 = \rho$ . De l'autre côté,  $B_n$  contient  $\xi$  et  $\eta$ , et  $\eta = op_{B_n} \xi$ .

**LEMME 3.4.** Pour  $i < j$ , on a  $(\rho_i)|_{\Gamma_{\geq j}} = \rho_i \circ (\rho_j)|_{\Gamma_{\geq j}}$ .

*Démonstration.* La galerie  $\theta = (C_0, \dots, C_j = \rho_j(C_j), \rho_j(C_{j+1}), \dots, \rho_j(C_n))$  est tendue. En effet,  $\rho_j(\theta) = \rho_j(\Gamma)$  est tendue car  $\rho_j$  est une rétraction centrée en une chambre de  $\Gamma$ . Ainsi,  $\theta$  est tendue car  $\rho_j$  réduit les distances.

Soit  $Y$  un appartement contenant  $\theta$ . De même, soit  $Y'$  un appartement contenant  $(C_0, \dots, C_i = \rho_i(C_i), \rho_{i+1}(C_{i+1}), \dots, \rho_i(C_n))$ . Et enfin, soit  $Z$  un appartement contenant  $\Gamma$ . On a :

$$Z \xrightarrow[\Gamma_{\leq j}]{\varphi_j \simeq} Y \xrightarrow[\Gamma_{\leq i}]{\varphi_i \simeq} Y'.$$

Ce qui donne  $\varphi_j(\Gamma_{\geq j}) = \rho_j(\Gamma_{\geq j})$  et  $(\varphi_j)|_{\Gamma_{\geq j}} = (\rho_j)|_{\Gamma_{\geq j}}$ . De même,  $\varphi_i \circ (\varphi_j)|_{\Gamma_{\geq i}} = (\rho_i)|_{\Gamma_{\geq i}}$ . Et enfin,  $(\varphi_i)|_{\theta_{\geq i}} = (\rho_i)|_{\theta_{\geq i}}$ . D'où,  $(\rho_i)|_{\Gamma_{\geq j}} = \rho_i \circ (\rho_j)|_{\Gamma_{\geq j}}$ .

Dans les conditions de ce numéro 3.3, on veut montrer les résultats suivants :

**HR( $i$ ).** Il existe une chaîne le long de  $\rho_i(\Gamma_{\geq i})$  (c'est donc une  $C_i$ -chaîne) de  $op_{B_i} \xi$  à  $\rho_i(\eta)$ .

L'hypothèse **HR( $n$ )** est trivialement vraie. On suppose **HR( $i+1$ )**, montrons **HR( $i$ )**. Il y a deux cas.

CAS 1. Il existe un appartement  $Y$  contenant  $C_i$ ,  $\xi$  et le demi-appartement  $D_{B_{i+1}}(m_i, C_{i+1})$  de  $B_{i+1}$  contenant  $C_{i+1}$  et dont le mur  $M_i$  contient la cloison  $m_i = C_i \cap C_{i+1}$ . (C'est le cas si  $\xi \in D_{B_{i+1}}(m_i, C_{i+1})$  ou si  $C_i \in B_{i+1}$  et dans ce cas  $Y = B_{i+1}$  convient.)

Comme  $(C_i, C_{i+1}, \rho_{i+1}(C_{i+2}), \dots, \rho_{i+1}(C_n))$  est une galerie tendue, elle ne coupe le mur  $M_i$  qu'une seule fois. Donc,  $(C_{i+1}, \rho_{i+1}(C_{i+2}), \dots, \rho_{i+1}(C_n)) \subset D_{B_{i+1}}(m_i, C_{i+1})$ . Et il existe des isomorphismes

$$B_{i+1} \xrightarrow[\xi, \rho_{i+1}(\Gamma_{\geq i+1})]{\simeq} Y \xrightarrow[\xi, C_i]{(\rho_i)|_Y, \simeq} B_i;$$

par le Lemme 3.4,  $\rho_i$  transforme  $\rho_{i+1}(\Gamma_{\geq i+1})$  en  $\rho_i(\Gamma_{\geq i+1})$ . On a la chaîne suivante dans  $B_{i+1}$  le long de  $\rho_{i+1}(\Gamma_{\geq i+1})$  :

$$\rho_{i+1}(\eta) = \tau_{i_k} \cdots \tau_{i_1} op_{B_{i+1}} \xi.$$

Par les deux isomorphismes précédents, on a

$$\rho_i(\eta) = \tau'_{i_k} \cdots \tau'_{i_1} op_{B_i} \xi,$$

où  $\tau'_{i_j}$  est la réflexion dans  $B_i$  selon la  $i_j$ -ième cloison de  $\rho_i(\Gamma)$ . C'est bien une chaîne de  $op_{B_i} \xi$  à  $\rho_i(\eta)$  le long de  $\rho_i(\Gamma_{\geq i})$ .

CAS 2. La chambre  $C_i$  n'est pas dans  $B_{i+1}$  et, dans  $B_{i+1}$ , on a :

$$\xi \mid_{M_i} (C_{i+1}, \rho_{i+1}(C_{i+2}), \dots, \rho_{i+1}(C_n)).$$

L'intersection  $B_i \cap B_{i+1}$  contient  $\xi$  et  $m_i$  et donc l'enclos  $cl(\xi, m_i)$ . Or  $\xi \notin M_i$  donc  $cl(\xi, m_i)$  est de dimension maximale; c'est l'adhérence de la réunion des galeries minimales de  $\xi$  à  $m_i$ .

Soit  $d = proj_{m_i}(\xi)$ , c'est une chambre, elle est adjacente à  $C_i$  dans  $B_i$  et à  $C_{i+1}$  dans  $B_{i+1}$ . Autrement dit,  $d = \sigma_i(C_{i+1}) = \rho_i(C_{i+1})$  avec  $\sigma_i$  la réflexion selon  $M_i$  dans  $B_{i+1}$ . Soit  $Y$  un appartement contenant  $D_{B_{i+1}}(m_i, C_{i+1}) \cup C_i$ . On a les isomorphismes suivants :

$$B_{i+1} \xrightarrow[\rho_{i+1}(\Gamma_{\geq i+1})]{\simeq} Y \xrightarrow[C_i]{(\rho_i)|_Y, \simeq} B_i;$$

on note  $\varphi$  l'isomorphisme composé, il envoie  $\rho_{i+1}(\Gamma_{\geq i+1})$  sur  $\rho_i(\Gamma_{\geq i+1})$ . La chaîne dans  $B_{i+1}$ ,  $\rho_{i+1}(\eta) = \tau_{i_k} \cdots \tau_{i_1}(op_{B_{i+1}} \xi)$  se transforme en  $\rho_i(\eta) = \varphi \tau_{i_k} \varphi^{-1} \cdots \varphi \tau_{i_1} \varphi^{-1} \varphi(op_{B_{i+1}} \xi)$ . Or  $\tau'_{i_k} = \varphi \tau_{i_k} \varphi^{-1}$  est la réflexion selon la  $i_k$ -ième cloison de  $\rho_i(\Gamma)$  et  $\varphi(op_{B_{i+1}} \xi) = op_{B_i} \varphi(\xi) = op_{B_i} \sigma'_i(\xi)$ , car  $\varphi|_{B_{i+1} \cap B_i} = (\sigma'_i)|_{B_{i+1} \cap B_i}$ , où  $\sigma'_i$  est la réflexion selon  $m_i$  dans  $B_i$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \rho_i(\eta) &= \tau'_{i_k} \cdots \tau'_{i_1}(op_{B_i} \sigma'_i(\xi)) \\ &= \tau'_{i_k} \cdots \tau'_{i_1} \sigma'_i(op_{B_i} \xi) \end{aligned}$$

est une chaîne le long de  $\rho_i(\Gamma_{\geq i})$  dans  $B_i$ .

## 3.4 DÉPLIAGE

Soit  $\mathcal{S}$  un immeuble sphérique épais (dans sa réalisation vectorielle et auquel on pense comme l'immeuble tangent à  $\mathcal{I}$  en un point  $\pi(t)$ ). Soient  $\xi, \pi'_+$  deux points de  $\mathcal{S}$  et  $A$  un appartement les contenant, ainsi qu'une chambre, notée  $-C$ . Comme précédemment,  $\rho$  désigne la rétraction sur  $A$  de centre  $-C$ .

On suppose qu'il existe  $\Gamma = (C_0 = -C, C_1, \dots, C_n)$  une galerie tendue de  $-C$  à  $\pi'_+$  et une chaîne le long de  $\Gamma$  de  $op_A \xi$  à  $\pi'_+$  de longueur  $l$ .

PROPOSITION 3.5. *Il existe  $\eta \in \mathcal{S}$  tel que  $\rho(\eta) = \pi'_+$  et  $\eta$  est opposé à  $\xi$ .*

*Démonstration.* On raisonne par récurrence, la conclusion cherchée est la condition  $HR(\ell)$  ci-dessous.

$HR(i)$ . *Il existe un appartement  $B_i$  contenant  $\xi$ , il existe  $\eta_i \in B_i$  tel que  $\rho(\eta_i) = \pi'_+$ , il existe une galerie tendue  $\Gamma_i$  de  $-C$  à  $\eta_i$  qui est dans  $B_i$  à partir d'un certain rang  $k_i$  telle que  $\rho(\Gamma_i) = \Gamma$ , et il existe une chaîne le long de  $(\Gamma_i)_{\geq k_i}$  de  $op_{B_i} \xi$  à  $\eta_i$  de longueur  $l - i$ .*

$HR(0)$  est vraie pour  $B_0 = A$ . Si on a  $HR(i)$ , notons  $\Gamma_i = (-C = D_0, \dots, D_n)$  la galerie tendue et  $\eta_i = \tau_{i_u} \cdots \tau_{i_1} op_{B_i} \xi$  la chaîne le long de  $(\Gamma_i)_{\geq k_i}$  avec  $\tau_{i_j}$  la réflexion selon le mur  $M_{i_j}$  contenant la  $i_j$ -ième cloison  $m_{i_j}$  de  $\Gamma_i$  et  $u = \ell - i$ . On a

$$op_{B_i} \xi, D_{k_i}, D_{i_1} \quad |_{M_{i_1}} \quad \xi, \eta_i, (D_{i_1+1}, \dots, D_n).$$

Soit  $\mathcal{D}$  un demi-appartement sortant de  $B_i$  le long du mur  $M_{i_1}$ , il existe car  $\mathcal{S}$  est épais. On pose  $B_{i+1} = \mathcal{D} \cup D_{B_i}(m_{i_1}, \xi)$ ,  $Z = \mathcal{D} \cup D_{B_i}(m_{i_1}, D_{k_i})$  et on note  $\varphi_Z: B_i \rightarrow Z$  l'isomorphisme fixant  $D_{B_i}(m_{i_1}, D_{k_i})$ . On prend

$$\Gamma_{i+1} = (D_0, \dots, D_{i_1}, \varphi_Z(D_{i_1+1}), \dots, \varphi_Z(D_n))$$

et  $\eta_{i+1} = \varphi_Z(\eta_i)$ . Remarquons que  $\Gamma_{i+1} = (D_0, \dots, D_{k_i-1}, \varphi_Z(D_{k_i}), \dots, \varphi_Z(D_n))$ . Par hypothèse de récurrence  $\Gamma_i$  est tendue, du coup  $\rho_{B_i, D_{i_1}}(\Gamma_{i+1}) = \rho_{B_i, D_{i_1}}(\Gamma_i)$  l'est aussi, et donc de même pour  $\Gamma_{i+1}$ . Par le lemme 3.4, on a  $\rho|_{\Gamma_{i+1, \geq i_1}} = \rho \circ (\rho_{B_i, D_{i_1}})|_{\Gamma_{i+1, \geq i_1}}$ . D'où  $\rho(\Gamma_{i+1, \geq i_1}) = \rho(\Gamma_{i, \geq i_1}) = \Gamma_{\geq i_1}$  et  $\rho(\eta_{i+1}) = \rho(\eta_i) = \pi'_+$ .

Par  $\varphi_Z$  la chaîne de l'hypothèse de récurrence devient  $\eta_{i+1} = \varphi_Z(\eta_i) = \tau'_{i_u} \cdots \tau'_{i_2} \varphi_Z \tau_{i_1} op_{B_i} \xi$ , avec  $\tau'_{i_j}$  la réflexion selon la  $i_j$ -ième cloison de  $\Gamma_{i+1}$  dans  $Z$ . On a  $\eta_{i+1} = \tau'_{i_u} \cdots \tau'_{i_1} op_Z \varphi_Z(\xi)$ . Notons  $\psi: Z \rightarrow B_{i+1}$  l'isomorphisme qui fixe le demi-appartement  $\mathcal{D}$ . En composant par  $\psi$ , on obtient  $\eta_{i+1} = \tau''_{i_u} \cdots \tau''_{i_1} op_{B_{i+1}} \psi \circ \varphi_Z(\xi)$ , avec  $\tau''_{i_j} = \psi \tau'_{i_j} \psi^{-1}$ . Or  $op_{B_{i+1}}(\psi \circ \varphi_Z(\xi)) =$

$\tau''_{i_1} op_{B_{i+1}}(\xi)$ . Donc  $\eta_{i+1} = \tau''_{i_u} \cdots \tau''_{i_2} op_{B_{i+1}}(\xi)$  et c'est encore une chaîne le long de  $(\Gamma_{i+1})_{\geq i+1}$ . En effet, dans  $B_i$ , pour tout  $j$ , on a

$$\tau_{i_{j-1}} \cdots \tau_{i_1} op_{B_i}(\xi), D_{k_i}, \dots, D_{i_j} \quad |_{M_j} \quad \tau_{i_j} \cdots \tau_{i_1} op_{B_i}(\xi), D_{i_{j+1}}, \dots, D_n.$$

Par  $\psi \circ \varphi_Z$ , on a, pour  $j \geq 2$ , les positions suivantes dans  $B_{i+1}$  (avec  $M'_j = \psi \circ \varphi_Z(M_j)$ ):

$$\tau''_{i_{j-1}} \cdots \tau''_{i_2} op_{B_{i+1}}(\xi), \varphi_Z(D_{i_{j+1}}), \dots, \varphi_Z(D_{i_j}) \quad |_{M'_j} \quad \tau''_{i_j} \cdots \tau''_{i_2} op_{B_{i+1}}(\xi), \varphi_Z(D_k)$$

pour tout  $k$  tel que  $i_j < k \leq n$ .

D'après le paragraphe 3.3 et la proposition 3.5, on a montré:

**PROPOSITION 3.6.** *Dans un appartement  $A$  de l'immeuble  $\mathcal{S}$ , on considère des points  $\xi$ ,  $\pi'_+$ , et une chambre  $-C$ ; on note  $\rho = \rho_{A, -C}$ . Alors il existe dans  $\mathcal{S}$  un point  $\eta$  opposé à  $\xi$  tel que  $\rho(\eta) = \pi'_+$  si, et seulement si, il existe une galerie tendue  $\Gamma$  de  $-C$  à  $\pi'_+$  et une chaîne le long de  $\Gamma$  de  $op_A \xi$  à  $\pi'_+$ .*

### 3.5 GALERIES PLIÉES POSITIVEMENT

On garde les mêmes notations qu'en 3.4 ci-dessus.

**PROPOSITION 3.7.** *Il existe une  $-C$ -chaîne de  $op_A \xi$  à  $\pi'_+$  si, et seulement si, il existe une chaîne de  $op_A \xi$  à  $\pi'_+$  le long d'une galerie tendue de  $-C$  à  $\pi'_+$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que l'existence d'une  $-C$ -chaîne de  $op_A \xi$  à  $\pi'_+$  implique celle d'une chaîne de  $op_A \xi$  à  $\pi'_+$  le long d'une galerie tendue de  $-C$  à  $\pi'_+$ .

Pour cela, on dira qu'une galerie  $\delta = (D_0, \dots, D_n)$  de type  $(k_0, \dots, k_{n-1})$  dans  $A$  est *pliée positivement* par rapport à une chambre  $D$  si, en notant  $M_j$  le mur de  $D_j$  de type  $k_j$  (commun à  $D_j$  et  $D_{j+1}$ ), on a

$$D_j = D_{j+1} \implies D \quad |_{M_j} \quad D_j = D_{j+1}.$$

Pour une chambre  $D$  et  $\lambda \in \mathcal{S}$ , on note  $w(D, \lambda)$  l'élément de  $W$  de plus petite longueur tel que  $\lambda \in w(D, \lambda).D$

Soit  $C_\xi = proj_\xi(-C)$  dans  $A$ . Soit  $\Gamma$  une galerie tendue de  $-C$  à  $\pi'_+$ . Comme il existe une  $-C$ -chaîne de  $op_A \xi$  à  $\pi'_+$ ,  $w(-C, op_A \xi) \leq w(-C, \pi'_+)$  et donc il existe une galerie  $\gamma = (C_0 = -C, C_1, \dots, C_n)$  de même type que  $\Gamma$  de  $-C$  à  $op_A \xi$ . On veut montrer qu'on peut supposer  $\gamma$  pliée positivement par rapport à  $C_\xi$ .

Si  $\gamma$  ne l'est pas, soit  $j$  le plus petit indice tel qu'on soit dans la situation:  $C_\xi, C_j = C_{j+1} \mid_{M_j}$ . Alors, comme  $\gamma$  aboutit à  $op_A\xi$ , cette galerie va traverser le mur  $M_j$  après l'indice  $j$  ou finir dans ce mur. Posons  $j_{\max} = \max\{k \in ]j, n] \mid M_k = M_j \text{ ou } op_A\xi \in M_k\}$ . On définit une nouvelle galerie  $\lambda = (L_0, \dots, L_n)$  par

$$L_k = \begin{cases} C_k & \text{si } k \leq j \\ s_{M_j} C_k & \text{si } j+1 \leq k \leq j_{\max} \\ C_k & \text{si } k > j_{\max}. \end{cases}$$

Ainsi  $\lambda$  devient pliée positivement par rapport à  $C_\xi$  en  $M_j$  et reste de même type que  $\Gamma$ . On recommence cette procédure avec  $\lambda$  et ainsi de suite. Au final, on obtient une galerie  $\delta = (-C = D_0, \dots, D_n)$  pliée positivement par rapport à  $C_\xi$  entre  $-C$  et  $op_A\xi$ .

Notons  $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$  les indices (ordonnés de manière croissante) où la galerie  $\delta$  est pliée. Alors,

$$\begin{aligned} \pi'_+ &= s_{M_{i_1}} \cdots s_{M_{i_{r-1}}} s_{M_{i_r}} (s_{M_{i_1}} \cdots s_{M_{i_{r-1}}})^{-1} \cdots (s_{M_{i_1}} s_{M_{i_2}} s_{M_{i_1}}) s_{M_{i_1}} op_A\xi \\ &= s_{M_{i_1}} \cdots s_{M_{i_r}} op_A\xi \\ &= \tau_{i_r} \cdots \tau_{i_1} op_A\xi, \end{aligned}$$

où  $\tau_{i_j} = s_{M_{i_1}} \cdots s_{M_{i_{j-1}}} s_{M_{i_j}} (s_{M_{i_1}} \cdots s_{M_{i_{j-1}}})^{-1}$ . A chaque étape, on s'éloigne de  $-C$  et on déplie la galerie  $\delta$ . En effet, après le premier dépliage, on a :

$$-C, D_1, \dots, D_{i_1} \mid_{M_{i_1}} \tau_{i_1}(D_{i_1+1}), \tau_{i_1}(op_A\xi), \xi$$

car  $\delta$  est pliée positivement par rapport à  $C_\xi$ . La galerie

$$\delta^1 = (-C = D_0, \dots, D_{i_1}, \tau_{i_1}(D_{i_1+1}), \dots, \tau_{i_1}(D_{i_2}), \tau_{i_1}(D_{i_2+1}), \dots, \tau_{i_1}(D_n))$$

est, jusqu'à l'indice  $i_2$ , minimale et donc égale à  $\Gamma_{\leq i_2}$ . De plus, on sait que

$$op_A\xi, D_{i_2+1} = D_{i_2} \mid_{M_{i_2}} C_\xi, \xi,$$

en appliquant  $\tau_{i_1}$  on obtient

$$\tau_{i_1} op_A\xi, \tau_{i_1} D_{i_2+1} = \tau_{i_1} D_{i_2} \mid_{\tau_{i_1} M_{i_2}} \tau_{i_1} \xi.$$

Donc,  $-C, \tau_{i_1} op_A\xi, \tau_{i_1} D_{i_2+1} = \tau_{i_1} D_{i_2}$  sont du même côté de  $\tau_{i_1} M_{i_2}$ . Ainsi quand on déplie une deuxième fois par rapport à  $\tau_{i_1} M_{i_2}$ , on s'éloigne de  $-C$ . On a donc obtenu une chaîne de  $op_A\xi$  à  $\pi'_+$  le long de la galerie tendue  $\gamma$  de  $-C$  à  $\pi'_+$ .

## 3.6 CONCLUSION ET ÉTAPE 1)

D'après les propositions 3.1, 3.6 et 3.7, on a :

**THÉORÈME 3.8.** *Soient  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  un polygone dans un appartement  $A$  de  $\mathcal{I}$ ,  $\pi: [0, 1] \rightarrow A$  une paramétrisation (linéaire par morceaux et à vitesse constante) de  $[x, x_1, \dots, x_n, y]$  avec  $x_i = \pi(t_i)$ ,  $\mathfrak{a}$  une alcôve contenant  $z$  et  $\rho = \rho_{A, \mathfrak{a}}$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $\mathfrak{a}$ .*

*Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $\vec{a}_{x_i}$  la chambre de  $\vec{Ax}_i$  qui contient tous les vecteurs  $\vec{x_i z'}$  pour  $z' \in \mathfrak{a}$ .*

*Alors  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  est l'image par  $\rho$  d'un triangle  $[z, x, \tilde{y}, z]$  de  $\mathcal{I}$  si et seulement si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il existe une  $(W_{\pi(t_i)}, \vec{a}_{x_i})$ -chaîne de  $\pi'_-(t_i)$  à  $\pi'_+(t_i)$ .*

On notera la différence avec un chemin de Hecke (section 2.4). On dira qu'un chemin  $\pi$  vérifiant la condition ci-dessus est *de Hecke par rapport à l'alcôve  $\mathfrak{a}$* .

**REMARQUE 3.9.** Soient  $x$  un sommet spécial de l'alcôve  $\mathfrak{a}$  et  $Q$  le quartier de sommet  $x$  opposé à  $\mathfrak{a}$ . Un chemin  $\pi$  entièrement contenu dans  $Q$  est de Hecke (par rapport à  $-C^+$  où  $C^+$  est la direction de  $Q$ ) si, et seulement si, il est de Hecke par rapport à  $\mathfrak{a}$ .

**THÉORÈME 3.10.** *Soient  $\lambda, \mu, \nu$  trois copoids dominants tels que  $(V(N\lambda) \otimes V(N\mu) \otimes V(N\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$ . Alors, il existe un triangle dans  $\mathcal{I}$ , de longueurs de côtés  $N\lambda, N\mu, N\nu$ .*

*Démonstration.* Les théorèmes 2.8 et 3.8 ainsi que la remarque précédente prouvent le théorème, et donc l'étape 1) du schéma de démonstration du théorème 1.1. En effet le chemin de Hecke  $N\lambda + \pi$  de  $N\lambda$  à  $N\nu^*$  reste dans la chambre de Weyl  $C^+$  ; il est donc de Hecke par rapport à l'alcôve  $\mathfrak{a}_-$  (contenant 0 et opposée à  $C^+$ ). On note  $x_i = \pi(t_i), 1 \leq i \leq n$ , les points anguleux de  $\pi$ . En dépliant le polygone  $[0, N\lambda, x_1, \dots, x_n, N\nu^*, 0]$  on obtient le triangle cherché dans  $\mathcal{I}$ .

**COROLLAIRE 3.11.** *L'ensemble  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{A})$  des triplets  $(\lambda, \mu, \nu) \in (P^{\vee+})^3$  tels qu'il existe dans  $\mathcal{I}$  un triangle  $[z, x, y, z]$  avec comme longueurs de côtés  $\lambda = d_{C^+}(z, x)$ ,  $\mu = d_{C^+}(x, y)$  et  $\nu = d_{C^+}(y, z)$  ne dépend que de l'appartement  $\mathbf{A}$  et non de  $\mathcal{I}$ .*

*Cet ensemble  $\mathcal{T}(\mathbf{A})$  est stable par homothétie de rapport un entier positif.*

*Si  $\mathbf{A}'$  est un appartement affine (ou vectoriel) associé au même couple  $(V, W)$ , mais avec un ensemble de murs  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ , alors  $\mathcal{T}(\mathbf{A}') \subset \mathcal{T}(\mathbf{A})$ .*

*Démonstration.*  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des  $(\lambda, \mu, \nu) \in (P^{\vee+})^3$  tels qu'il existe dans  $\mathbf{A}$  un bon polygone (i.e. vérifiant la condition du théorème)  $[z, x, x_1, \dots, x_n, y, z]$  avec  $\lambda = d_{C^+}(z, x)$ ,  $\nu = d_{C^+}(y, z)$  et  $\pi$  de type  $\mu$ . Il ne dépend donc que de  $\mathbf{A}$  et contient  $\mathcal{T}(\mathbf{A}')$ . Si  $z_0$  est un sommet spécial d'une alcôve contenant  $z$ , une homothétie de rapport  $n \in \mathbf{N}$  et centre  $z_0$  transforme un bon polygone associé à  $(\lambda, \mu, \nu)$  en un bon polygone associé à  $(n\lambda, n\mu, n\nu)$ ; d'où la seconde assertion.

NOTA BENE. On verra dans la section 4 (4.15) que le cône  $\mathcal{T}$  est saturé dans  $(P^{\vee+})^3$ .

#### 4. APPLICATIONS DE GAUSS ET CONFIGURATIONS SEMI-STABLES

##### 4.1 LE BORD VISUEL DE $\mathcal{I}$

On rappelle que l'immeuble  $\mathcal{I}$  est un espace métrique complet dont on notera la distance  $d$ . Il est muni de son système complet d'appartements. Ainsi tout sous-ensemble convexe isométrique à une partie de  $\mathbf{R}^n$  est contenu dans un appartement [1, 11.53].

Les résultats suivants résultent essentiellement de ce que  $\mathcal{I}$  est un espace CAT(0) complet. Pour la plupart des démonstrations on se reportera à [3].

4.1.1 RAYONS ET POINTS IDÉAUX. Un *rayon* (ou une *demi-droite*) dans  $\mathcal{I}$  est un sous-ensemble  $\rho$  isométrique à  $[0, \infty[$ . On confondra dans la suite le rayon et l'isométrie  $[0, \infty[ \rightarrow \mathcal{I}$ . Le point  $x = \rho(0)$  est appelé *l'origine de  $\rho$*  ou *la base*. Un rayon est convexe, il est donc contenu dans un appartement  $A$  de  $\mathcal{I}$ . Et dans  $A$ , il est de la forme  $\{(1-t)x + ty \mid t \geq 0\}$  pour  $x \neq y$  dans  $A$ .

On dit que deux rayons  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont *asymptotes* (ou *parallèles*) si la fonction (convexe)  $t \mapsto d(\rho_1(t), \rho_2(t))$  est bornée. On vérifie que ceci définit une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence de rayons est un *point idéal* de  $\mathcal{I}$  (ou *point à l'infini*).

Par rapport aux espaces CAT(0) généraux, beaucoup des démonstrations des résultats de cette section sont simplifiées par les faits suivants :

- étant données deux demi-droites  $\rho, \sigma$  il existe des sous-demi-droites  $\rho', \sigma'$  contenues dans un même appartement,

- si de plus  $\mathfrak{a}$  est une alcôve ou un germe de quartier et  $\rho, \sigma$  sont asymptotes, il existe des demi-droites  $\rho_0 \subset \rho, \rho_1, \dots, \rho_n \subset \sigma$  deux à deux asymptotes et telles que,  $\forall i$ ,  $\mathfrak{a}$ ,  $\rho_i$  et  $\rho_{i+1}$  soient contenus dans un même appartement.

La démonstration du lemme suivant est classique.

LEMME 4.1. *Soient  $x$  un point de  $\mathcal{I}$  et  $\xi$  un point à l'infini. Alors il existe un unique rayon  $\rho$  de base  $x$  représentant  $\xi$ . On le notera  $[x, \xi]$ .*

On note  $\partial_\infty \mathcal{I}$  l'ensemble des points à l'infini. Soit  $F$  une face d'un quartier  $\Omega = x + C$ , on note  $F_\infty$  l'ensemble des points à l'infini  $\xi$  tels que  $F$  contienne le rayon  $[x, \xi]$ . Une *facette à l'infini*  $\mathfrak{f}$  est un sous-ensemble de  $\partial_\infty \mathcal{I}$  tel que  $\mathfrak{f} = F_\infty$  pour  $F$  une face de quartier.

Les résultats suivants sont classiques.

LEMME 4.2.

- (1) *Si  $\mathfrak{f}$  est une facette à l'infini et  $x$  un point de  $\mathcal{I}$ , alors il existe une face de quartier  $F$  basée en  $x$  telle que  $F_\infty = \mathfrak{f}$ . Ainsi, il y a une bijection entre les facettes à l'infini et les faces de quartier basées en tout point  $x$ .*
- (2) *Deux quartiers de  $\mathcal{I}$  donnent la même facette à l'infini si, et seulement si, ils sont équipollents, c'est-à-dire correspondent au même germe.*
- (3) *Les intérieurs relatifs des facettes à l'infini forment une partition de  $\partial_\infty \mathcal{I}$ .*

4.1.2 STRUCTURE D'IMMEUBLE. On définit une relation entre les facettes à l'infini :  $\mathfrak{f}'$  est une face de  $\mathfrak{f}$  si pour tout point  $x$  de  $\mathcal{I}$ , la face de quartier  $F'$  associée à  $\mathfrak{f}'$  est une face de  $F$ , la face associée à  $\mathfrak{f}$ ; comme on a considéré des facettes fermées cela équivaut à  $\mathfrak{f}' \subset \mathfrak{f}$ . Pour un appartement  $A$  de  $\mathcal{I}$ , on note  $A_\infty$  l'ensemble des facettes à l'infini données par les faces de quartiers de  $A$ . Cet ensemble est un complexe simplicial et est stable par passage aux faces. En fait, c'est un complexe isomorphe au complexe de Coxeter associé à  $(W, S)$ .

Le lemme 4.2 permet de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.3. *L'ensemble  $\mathcal{I}_\infty$  des facettes à l'infini de  $\mathcal{I}$  est un immeuble sphérique, ses appartements sont en bijection avec ceux de  $\mathcal{I}$ . De plus, sa réalisation géométrique sphérique est en bijection avec  $\partial_\infty \mathcal{I}$ .*

Dans notre cas  $\mathcal{I}$  est l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif sur un corps non archimédien complet, alors  $\mathcal{I}_\infty$  est l'immeuble de Tits de ce groupe (dont les faces correspondent bijectivement aux sous-groupes paraboliques).

REMARQUE 4.4. On peut étendre la topologie de  $\mathcal{I}$  à  $\bar{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \amalg \partial_\infty \mathcal{I}$  en une topologie appelée la *topologie conique* et alors, si  $\mathcal{I}$  est localement fini,  $\bar{\mathcal{I}}$  est une compactification de  $\mathcal{I}$ . Une base d'ouverts de cette topologie est formée des ouverts de  $\mathcal{I}$  et des ensembles de la forme  $C_x(\xi, \varepsilon) = \{\eta \in \bar{\mathcal{I}} \mid \eta \neq x, \angle_x(\eta, \xi) < \varepsilon\}$ , où  $x \in \mathcal{I}$ ,  $\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $\angle_x(\eta, \xi)$  est l'angle dans un appartement contenant  $x$  et le début des deux géodésiques  $[x, \xi]$  et  $[x, \eta]$  (si  $\eta \in \partial_\infty \mathcal{I}$  cela coïncide avec la définition ci-dessous).

Cela dit, la topologie sur  $\partial_\infty \mathcal{I}$  qui va nous intéresser est celle de la distance de Tits.

4.1.3 ANGLES ET DISTANCE DE TITS. Soient  $x$  un point de  $\mathcal{I}$ ,  $\xi_1$  et  $\xi_2$  deux points à l'infini. On pose  $\rho_1 = [x, \xi_1)$  et  $\rho_2 = [x, \xi_2)$ . On considère le triangle  $T(t) = T(x, \rho_1(t), \rho_2(t))$  dans  $\mathcal{I}$  et le triangle  $\tilde{T}(t) = T(\tilde{x}, \tilde{\rho}_1(t), \tilde{\rho}_2(t))$  dans  $\mathbf{R}^2$  "de comparaison", c'est-à-dire dont les côtés ont la même longueur que ceux de  $T(t)$  (la condition CAT(0) dit que l'application évidente de  $\tilde{T}(t)$  dans  $T(t)$  diminue les distances). On note  $\tilde{\alpha}(t)$  l'angle en  $\tilde{x}$  de ce triangle  $\tilde{T}(t)$ . Quand  $t$  tend vers 0,  $\tilde{\alpha}(t)$  décroît continûment et donc la limite existe, on pose

$$\angle_x(\xi_1, \xi_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\alpha}(t).$$

Cette limite est égale à  $\angle_x(\rho_1(t), \rho_2(t))$  dès que  $t$  est assez petit pour que tous les points de  $T(t)$  soient dans un même appartement. Ainsi, si  $T(x, y, z)$  est un triangle géodésique dans  $\mathcal{I}$ ,  $\angle_x(y, z)$  est défini de manière analogue et on a  $\angle_x(y, z) \leq \angle_{\tilde{x}}(\tilde{y}, \tilde{z})$ , où  $T(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  est un triangle de comparaison dans  $\mathbf{R}^2$  (conséquence facile de CAT(0)).

Maintenant, on définit la *distance de Tits* sur  $\partial_\infty \mathcal{I}$  comme

$$\angle_{\text{Tits}}(\xi_1, \xi_2) = \sup_{x \in \mathcal{I}} \angle_x(\xi_1, \xi_2).$$

Par définition,  $\angle_{\text{Tits}}(\xi_1, \xi_2) \geq \angle_x(\xi_1, \xi_2)$  pour tous  $x \in \mathcal{I}$ ,  $\xi_1, \xi_2 \in \partial_\infty \mathcal{I}$ .

EXEMPLE 4.5. Si  $\mathcal{I}$  est un arbre, alors  $\angle_x(\xi_1, \xi_2) = 0$  ou  $\pi$  et donc  $\angle_{\text{Tits}}(\xi_1, \xi_2) = \pi$ , dès que  $\xi_1 \neq \xi_2$  ! Par contre, en rang supérieur, cette distance peut prendre toutes les valeurs entre 0 et  $\pi$ .

LEMME 4.6. Soient  $\xi, \eta \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et  $\rho$  un représentant de  $\xi$ . On pose  $\varphi(t) = \angle_{\rho(t)}(\xi, \eta)$ . Alors,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \angle_{\text{Tits}}(\xi, \eta)$ .

THÉORÈME 4.7. L'espace métrique  $(\partial_\infty \mathcal{I}, \angle_{\text{Tits}})$  est complet.

Une preuve de ce théorème se trouve, par exemple, dans [3, Theorem 9.20].

## 4.2 DES TRIANGLES AUX CONFIGURATIONS SEMI-STABLES

On cherche à réaliser l'étape 2 de l'introduction et donc à construire une configuration semi-stable associée à un triangle de  $\mathcal{I}$ , cf. [10].

4.2.1 FONCTIONS DE BUSEMANN. On peut plonger  $\mathcal{I}$  dans l'espace  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{I}, \mathbf{R})/\mathbf{R}$  des fonctions continues sur  $\mathcal{I}$  (avec la topologie de la convergence uniforme sur les bornés), où on quotiente par les constantes : à  $x \in \mathcal{I}$  on associe la fonction  $d(x, -)$ . On peut montrer [3, II 8.13] que  $\overline{\mathcal{I}}$  est homéomorphe à l'adhérence  $\widehat{\mathcal{I}}$  de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{F}$ . On ne va utiliser que le plongement de  $\partial_\infty \mathcal{I}$  dans  $\mathcal{F}$  :

Soient  $x \in \mathcal{I}$ ,  $\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et  $\rho$  un représentant de  $\xi$ . L'application  $[0, \infty[ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $t \mapsto d(x, \rho(t)) - t$  est minorée (par  $-d(x, \rho(0))$ ) et décroissante ; on peut donc noter

$$b_\xi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, \rho(t)) - t).$$

Cette fonction  $b_\xi$  de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathbf{R}$  est la *fonction de Busemann* associée à  $\xi$  (ou plutôt à  $\rho$ ). Elle ne dépend du choix de  $\rho$  qu'à une constante près et est 1-Lipschitzienne en  $x$ . On peut montrer que  $b_\xi$  est la limite de  $\rho(t)$  dans  $\mathcal{F}$ . Ainsi la classe de  $b_\xi$  dans  $\mathcal{F}$  est en fait dans  $\widehat{\mathcal{I}}$  et ne dépend que de  $\xi$ . Les lignes de niveau de  $b_\xi$  sont les horosphères de centre  $\xi$ .

EXEMPLE 4.8. Si les points  $x, y$  et la demi-droite  $\rho$  sont dans un même appartement  $A$  et si  $\vec{\xi} = \frac{d}{dt}(\rho(t))_{t=0}$  est le vecteur directeur unitaire de  $\rho$ , on a :  $b_\xi(x) - b_\xi(y) = \vec{x}\vec{y} \cdot \vec{\xi} = -d(x, y) \cos(\vec{y}\vec{x}, \vec{\xi})$ . Les horosphères (en tout cas leurs intersections avec  $A$ ) sont donc des hyperplans orthogonaux à  $\rho$ .

LEMME 4.9. Soient  $\sigma$  une géodésique (parcourue à vitesse 1) d'extrémité  $\eta \in \overline{\mathcal{I}}$  et  $t \in \mathbf{R}$  tels que  $\sigma(t) \neq \eta$ , alors la dérivée directionnelle de  $b_\xi$  selon  $\eta$  en  $t$  vaut :  $\frac{d}{dt^+}(b_\xi \circ \sigma)(t) = -\cos \angle_{\sigma(t)}(\eta, \xi)$ .

*Démonstration.* C'est un exercice facile de géométrie euclidienne dans un appartement contenant le début de la géodésique de  $\sigma(t)$  à  $\eta$  et la demi-droite  $[\sigma(t), \xi[$ .

LEMME 4.10. Soient  $\xi, \eta \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et  $\sigma$  une demi-droite représentant  $\eta$ . La pente asymptotique de  $b_\xi$  en  $\eta$  est  $\text{pente}_\xi(\eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b_\xi(\sigma(t))}{t}$ . Elle s'exprime avec la distance de Tits :  $\text{pente}_\xi(\eta) = -\cos \angle_{\text{Tits}}(\xi, \eta)$ .

*Démonstration.* Si  $\rho$  est une demi-droite représentant  $\xi$ , on vérifie que  $\frac{b_\xi(\sigma(t))}{t}$  ne dépend asymptotiquement pas des choix des représentants  $\rho$  et  $\sigma$ . On peut alors raisonner dans un appartement contenant ces deux géodésiques.

4.2.2 CONFIGURATIONS PONDÉRÉES ET STABILITÉ. On considère trois points  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et trois poids  $m_1, m_2, m_3 \in [0, +\infty[$ . On les voit comme une configuration pondérée  $\psi: (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, \nu) \rightarrow \partial_\infty \mathcal{I}$ , où  $\nu$  est la mesure sur  $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  de masse  $m_i$  en  $i$ .

La mesure associée sur  $\partial_\infty \mathcal{I}$  est  $\mu = \psi_* \nu = \sum_i m_i \delta_{\xi_i}$ , de poids total  $|\mu| = m_1 + m_2 + m_3$ . On définit sa pente:  $\text{pente}_\mu = -\sum_{i \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}} m_i \cos \angle_{\text{Tits}}(\xi_i, -)$ , c'est une fonction sur  $\partial_\infty \mathcal{I}$ .

DÉFINITION 4.11. La configuration  $\psi$  est dite *semi-stable* si la fonction  $\text{pente}_\mu$  est positive ou nulle sur  $\partial_\infty \mathcal{I}$ .

Intuitivement cela signifie que les points  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sont éloignés les uns des autres. Par exemple si  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$  aucune configuration n'est semi-stable; dans un arbre, si  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sont deux à deux différents (resp.  $\xi_1 = \xi_2 \neq \xi_3$ ) la configuration est semi-stable si et seulement si  $2m_i \leq m_1 + m_2 + m_3$ ,  $\forall i$  (resp.  $m_3 = m_1 + m_2$ ).

Bien sûr une configuration semi-stable le reste si on multiplie tous ses poids par un même réel positif: les configurations semi-stables forment un cône (saturé).

La pente peut se réinterpréter avec les fonctions de Busemann: la fonction de Busemann pondérée associée à  $\mu$  ou  $\psi$  est  $b_\mu = \sum_i m_i b_{\xi_i}$ , elle est définie à une constante près. Si  $\eta \in \partial_\infty \mathcal{I}$  est représenté par  $\sigma$ , alors le lemme 4.10 dit que:  $\text{pente}_\mu(\eta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b_\mu(\sigma(t))}{t}$ .

4.2.3 APPLICATION DE GAUSS ET ÉTAPE 2). Soit  $T = T(x_1, x_2, x_3)$  un triangle dans  $\mathcal{I}$ . On prolonge chaque segment  $[x_{i-1}, x_i]$  en une demi-droite d'origine  $x_{i-1}$ , d'extrémité notée  $\xi_i \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et on considère les poids  $m_i = d(x_{i-1}, x_i)$  (on rappelle que  $x_0 = x_3$ ). L'application de Gauss  $\psi$  associe donc au triangle  $T$  une configuration pondérée  $\psi_T$  (bien sûr il y a plusieurs choix pour  $\psi_T$ ).

PROPOSITION 4.12. *La configuration  $\psi_T$  est semi-stable.*

*Démonstration.* Soient  $\eta \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et  $\gamma_i: [0, m_i] \rightarrow [x_{i-1}, x_i]$  une paramétrisation à vitesse 1 de ce segment. D'après le lemme 4.9 et 4.1.3 on a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^+}(b_\eta \circ \gamma_i)(t) &= -\cos \angle_{\gamma_i(t)}(\eta, \xi_i) \leq -\cos \angle_{\text{Tits}}(\eta, \xi_i). \text{ Ainsi } b_\eta(x_i) - b_\eta(x_{i-1}) = \\ &= \int_0^{m_i} \frac{d}{dt^+}(b_\eta \circ \gamma_i)(t) dt \leq \int_0^{m_i} -\cos \angle_{\text{Tits}}(\eta, \xi_i) dt = -m_i \cos \angle_{\text{Tits}}(\eta, \xi_i) \text{ et donc} \\ 0 &\leq \sum_{i \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}} -m_i \cos \angle_{\text{Tits}}(\eta, \xi_i). \end{aligned}$$

#### 4.3 DES CONFIGURATIONS SEMI-STABLES AUX TRIANGLES

On cherche à réaliser l'étape 3) de l'introduction et donc à inverser l'application de Gauss ci-dessus en construisant un triangle dans  $\mathcal{I}$  à partir d'une configuration semi-stable  $\psi = ((\xi_1, m_1), (\xi_2, m_2), (\xi_3, m_3))$ , cf. [10].

**4.3.1 POINTS FIXES.** Soient  $\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}$  et  $t \geq 0$ . On définit l'application  $\phi_{\xi,t}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ ,  $x \mapsto \rho(t)$  où  $\rho$  est le représentant de  $\xi$  issu de  $x$ . La fonction  $t \mapsto d(\phi_{\xi,t}(x), \phi_{\xi,t}(y))$  est convexe, bornée et décroissante.

Si  $\psi = ((\xi_1, m_1), (\xi_2, m_2), (\xi_3, m_3))$  est une configuration pondérée, on lui associe l'application  $\phi = \phi_{\xi_3, m_3} \circ \phi_{\xi_2, m_2} \circ \phi_{\xi_1, m_1}$  de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{I}$ . Par construction  $d(x, \phi x) \leq |\mu| = m_1 + m_2 + m_3$  et  $d(\phi(x), \phi(y)) \leq d(x, y)$ .

On cherche un point fixe  $x_0$  de  $\phi$  qui définirait un triangle  $T = T(x_0, x_1, x_2)$  (avec  $x_1 = \phi_{\xi_1, m_1}(x_0)$  et  $x_2 = \phi_{\xi_2, m_2}(x_1)$ ) vérifiant  $\psi_T = \psi$ .

Pour cela on va utiliser une variante du lemme de point fixe de Bruhat-Tits [10]:

**LEMME 4.13.** *Soit  $\phi: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  une application 1-Lipschitzienne d'un espace CAT(0) complet dans lui même. S'il existe  $x \in \mathcal{I}$  tel que  $\{\phi^n(x) \mid n \geq 0\}$  est borné, alors  $\phi$  a un point fixe dans  $\mathcal{I}$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, on pose  $x_n = \phi^n(x)$  et, pour  $y \in \mathcal{I}$ ,  $r(y) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y)$ . Alors  $r(\phi y) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \phi y) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(\phi x_{n-1}, \phi y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_{n-1}, y) = r(y)$ ; donc  $r \circ \phi \leq r$ . Il suffit donc de montrer que  $r$  a un unique minimum dans  $\mathcal{I}$ .

On note  $\rho = \inf_{\mathcal{I}}(r)$ . Pour  $\epsilon > 0$  et  $y, y' \in \mathcal{I}$  tels que  $r(y), r(y') < \rho + \epsilon$ , il existe  $n_0$  tel que  $d(x_n, y), d(x_n, y') < \rho + \epsilon$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Si  $m$  est le milieu du segment  $[y, y']$  on a  $r(m) \geq \rho$ , donc  $d(x_n, m) > \rho - \epsilon$  pour une infinité de  $n \in \mathbf{N}$ . L'inégalité (CN) de [5, 3.2.1] (conséquence de la condition CAT(0)) s'écrit alors, pour ces entiers  $n$ :  $d(y, y')^2 \leq 2(d(x_n, y)^2 + d(x_n, y')^2) - 4d(x_n, m)^2 < 16\rho\epsilon$ . Ainsi une suite  $y_n \in \mathcal{I}$  telle que  $r(y_n)$  tende vers  $\rho$  est forcément de Cauchy. Comme  $\mathcal{I}$  est complet, cela montre l'existence et l'unicité d'un  $y \in \mathcal{I}$  tel que  $r(y) = \rho$ .

4.3.2 LE CÔNE SUR L'IMMEUBLE À L'INFINI. L'immeuble sphérique  $\mathcal{I}_\infty$  de réalisation géométrique sphérique  $\partial_\infty \mathcal{I}$  a aussi une réalisation vectorielle (dans le même sens qu'en 3.2.1): c'est le cône  $C\partial_\infty \mathcal{I}$  quotient de  $[0, +\infty[ \times \partial_\infty \mathcal{I}$  par la relation qui identifie  $\{0\} \times \partial_\infty \mathcal{I}$  à un seul point noté 0. C'est un espace métrique pour la distance  $d_C((a, \xi), (b, \eta))^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle_{\text{Tits}}(\xi, \eta)$ .

On montre [3, p. 60, 61, 188] que  $C\partial_\infty \mathcal{I}$  est complet, que deux points sont toujours joints par un unique segment géodésique et qu'il vérifie la condition CAT(0). C'est un immeuble vectoriel.

En fait dans notre cas  $C\partial_\infty \mathcal{I}$  est l'immeuble de Tits d'un groupe réductif, dans sa réalisation vectorielle et on sait qu'il a toutes les propriétés des immeubles affines plus une, qui caractérise les immeubles vectoriels: les appartements sont des espaces vectoriels euclidiens d'origine 0 (commune à tous les appartements).

On peut remplacer, dans ce qui précède,  $\mathcal{I}$  par  $C\partial_\infty \mathcal{I}$  et donc considérer  $\phi$  sur ce dernier immeuble.

**THÉORÈME 4.14.** *Si la configuration  $\psi$  est semi-stable, alors l'application  $\phi$  admet un point fixe dans  $C\partial_\infty \mathcal{I}$ .*

*Démonstration* [10, prop.4.5]. Nous sommes dans un immeuble vectoriel que l'on notera  $\mathcal{I}^v$ , ses facettes sont des faces de quartier de sommet 0 et elles correspondent bijectivement (par  $F \mapsto F^\infty$ ) aux facettes de  $\partial_\infty \mathcal{I} = \partial_\infty \mathcal{I}^v$ . On normalise toutes les fonctions de Busemann de façon que  $b_\xi(0) = 0$ . Comme deux facettes sont toujours dans un même appartement, on peut appliquer le calcul de l'exemple 4.8 à 0,  $x \in \mathcal{I}^v$  et  $\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}$ , ainsi  $b_\xi(x) = -d(0, x) \cos \angle_0(x, \xi)$ . En particulier  $|b_\xi(x)| \leq d(0, x)$  et  $d(0, x) = \max_{\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}} (-b_\xi(x))$ .

Si  $F$  est une facette de  $\mathcal{I}^v$ , on note  $F^*$  son étoile c'est-à-dire la réunion des facettes (fermées) contenant  $F$ . Si  $x \in F^*$ ,  $\eta \in F^\infty$  et  $\xi \in \partial_\infty \mathcal{I}$ , alors  $x$ ,  $\eta$  et  $\xi$  sont dans un même appartement et  $\phi_{\xi, t}(x)$  est le translaté de  $x$  d'une longueur  $t$  dans la direction  $\xi$ . On a donc  $b_\eta(\phi_{\xi, t}(x)) - b_\eta(x) = -t \cos \angle_{\text{Tits}}(\xi, \eta)$  d'après 4.8. On définit l'ensemble  $F^{*\circ}$  des  $x \in F^*$  tels que la boule  $B(x, |\mu|)$  de  $\mathcal{I}^v$  soit contenue dans  $F^*$ . Ainsi, pour  $x \in F^{*\circ}$ ,  $\phi_{\xi_1, t}(x)$  (pour  $0 \leq t \leq m_1$ ),  $\phi_{\xi_2, t}(\phi_{\xi_1, m_1}(x))$  (pour  $0 \leq t \leq m_2$ ) et  $\phi_{\xi_3, t}(\phi_{\xi_2, m_2}(\phi_{\xi_1, m_1}(x)))$  (pour  $0 \leq t \leq m_3$ ) restent dans  $F^*$  et on a donc: pour tous  $x \in F^{*\circ}$ ,  $\eta \in F^\infty$ ,  $b_\eta(\phi(x)) - b_\eta(x) = -\sum m_i \cos \angle_{\text{Tits}}(\xi_i, \eta) = \text{pente}_\mu(\eta)$ . Comme  $\mu$  est semi-stable, on en déduit que  $b_\eta(\phi(x)) \geq b_\eta(x)$ .

Pour appliquer le lemme 4.13 on veut montrer que  $\phi$  stabilise un borné; celui-ci sera l'approximation polyédrique d'une boule de centre 0 que l'on va construire maintenant.

Soit  $Q$  un quartier de sommet 0 dans  $\mathcal{I}^v$ , on va construire un sous-ensemble fini  $D$  de  $Q^\infty$ . Pour cela on met d'abord dans  $D$  le barycentre du simplexe  $Q^\infty$ , puis on ajoute successivement des points des faces de  $Q^\infty$  (différentes de  $Q^\infty$ ) ordonnées de façon que la dimension décroisse : si  $F^\infty$  est une telle face, on rajoute au  $D_-(F^\infty)$  déjà construit un ensemble fini  $D(F^\infty)$  de points de l'intérieur relatif de  $F^\infty$  tel que  $F^\infty$  soit recouvert par les boules ouvertes (pour la distance de Tits) de centres ces points de  $D(F^\infty)$  et de rayon  $(1/3).d(F^\infty, D_-(F^\infty))$ . On note  $\epsilon(F^\infty)$  la distance de  $F^\infty$  au complémentaire de la réunion de ces boules.

Alors le  $D$  ainsi construit et  $\epsilon = (1/2)\inf\{\epsilon(F^\infty) \mid F^\infty \subset \partial Q^\infty\}$  vérifient la condition suivante : si  $\eta \in Q^\infty$  et  $\zeta \in D$  sont tels que  $\angle_{\text{Tits}}(\eta, \zeta) \leq 2\angle_{\text{Tits}}(\eta, \zeta')$  pour tous  $\zeta' \in D$ , alors  $\eta$  est à distance de Tits  $> \epsilon$  de toute face de  $Q^\infty$  ne contenant pas  $\zeta$ .

On considère l'ensemble  $E$  des points de  $\partial_\infty \mathcal{I}$  d'image dans  $D$  par la projection de  $\partial_\infty \mathcal{I}$  sur  $Q^\infty$  déterminée par les types. Alors la condition de l'alinéa précédent est encore vérifiée si l'on change  $Q^\infty$  en  $\partial_\infty \mathcal{I}$  et  $D$  en  $E$ .

On considère la fonction  $f = \max_{\zeta \in E}(-b_\zeta)$ . On a vu que  $|f| \leq d(0, -)$ ; de plus les boules polyédriques  $B_f(r) = \{x \in \mathcal{I}^v \mid f(x) \leq r\}$  sont bornées : cela se vérifie dans le quartier  $Q$  et  $\{x \in Q \mid -b_\zeta(x) \leq r, \forall \zeta \in D\}$  est borné d'après l'exemple 4.8. Il ne reste donc plus qu'à montrer que  $\phi$  stabilise  $B_f(r)$  pour  $r$  assez grand.

Soient  $r > 0$  et  $x \in \mathcal{I}^v$  tels que  $d(0, x) > r$ . Montrons que  $\forall \zeta \in E$ ,  $-b_\zeta(\phi(x)) \leq f(x)$ .

- Si  $\angle_0(x, \zeta) \leq 2\angle_0(x, \zeta')$ ,  $\forall \zeta' \in E$  et si  $F_\zeta^\infty$  est la facette contenant  $\zeta$  dans son intérieur relatif, alors  $x \in F_\zeta^{*\circ}$  pour  $r \geq |\mu|/\sin \epsilon$ . On a alors  $-b_\zeta(\phi(x)) \leq -b_\eta(x) \leq f(x)$ .
- Si  $p = \angle_0(x, \zeta) > 2\angle_0(x, \zeta') = 2q$  pour un  $\zeta' \in E$ , on peut supposer  $\angle_0(x, \zeta') = \min\{\angle_0(x, \zeta'') \mid \zeta'' \in E\}$ . Alors  $\angle_{\text{Tits}}(\zeta, \zeta') \leq p+q \leq 3(p-q)$  et, si on note  $\theta = \inf\{\angle_{\text{Tits}}(\xi, \eta) \mid \xi \neq \eta \in E\} = \inf\{\angle_{\text{Tits}}(\xi, \eta) \mid \xi \neq \eta \in D\} > 0$  on a  $\theta \leq p+q \leq 3(p-q)$ . Alors  $f(x) = -b_{\zeta'}(x) = -b_\zeta(x) + d(0, x)(\cos q - \cos p) = -b_\zeta(x) + 2d(0, x) \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} \geq -b_\zeta(x) + |\mu|$ , si  $2r \inf\{\sin(\theta/2), \sin(3\pi/4)\} \cdot \sin(\theta/6) \geq |\mu|$ . Et alors, comme  $b_\zeta$  est 1-Lipschitzienne et  $\phi$  de déplacement au plus  $|\mu|$ , on a  $-b_\zeta(\phi(x)) \leq -b_\zeta(x) + |\mu| \leq f(x)$ .

On a donc  $f(\phi(x)) \leq f(x)$  si  $d(0, x) > r$  avec  $r > r_0$  (assez grand). Mais  $\phi(B(0, r)) \subset B(0, r + |\mu|) \subset B_f(r + |\mu|)$ . Donc  $B_f(r)$  est stable par  $\phi$  pour  $r > r_0 + |\mu|$ .

4.3.3 L'ARGUMENT DE TRANSFERT ET L'ÉTAPE 3). Nous venons de trouver un point fixe de  $\phi$  dans l'immeuble vectoriel  $C\partial_\infty\mathcal{I}$  correspondant à  $\partial_\infty\mathcal{I}$ . On a donc dans  $C\partial_\infty\mathcal{I}$  un triangle de longueurs (numériques) de côtés  $m_1, m_2, m_3$  et de directions de côtés  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \partial_\infty\mathcal{I}$ .

Identifions  $C^+$  à un quartier  $Q$  d'origine 0 de  $C\partial_\infty\mathcal{I}$  et considérons les éléments  $\lambda, \mu, \nu$  de  $C^+$  de longueurs numériques respectives  $m_1, m_2, m_3$  et de directions respectives les images de  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  dans  $Q^\infty$  par la projection de  $\partial_\infty\mathcal{I}$  sur  $Q^\infty$ . On dira que  $\lambda = pr_{C^+}(\xi_1, m_1)$  et, de même,  $\mu = pr_{C^+}(\xi_2, m_2)$ ,  $\nu = pr_{C^+}(\xi_3, m_3)$ . Ainsi le triangle ci-dessus a pour longueurs de côtés  $\lambda, \mu$  et  $\nu$ .

THÉORÈME 4.15.

- (1) L'application  $\phi$  a un point fixe dans  $\mathcal{I}$ .
- (2) Le cône  $\mathcal{T}$  du corollaire 3.11 est saturé dans  $(P^{\vee+})^3$  : s'il existe  $(\lambda, \mu, \nu) \in (P^{\vee+})^3$  et  $N \in \mathbf{N}^*$  tels que  $(N\lambda, N\mu, N\nu) \in \mathcal{T}$ , alors  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathcal{T}$ .

*Démonstration.* On est dans le cadre du corollaire 3.11 et le dernier alinéa de celui-ci nous dit qu'il existe dans  $\mathcal{I}$  un triangle de mêmes longueurs de côtés. En effet, l'appartement témoin  $\mathbf{A}^v$  de  $C\partial_\infty\mathcal{I}$  s'identifie, avec ses murs et son groupe de Weyl  $W$ , à l'appartement témoin  $\mathbf{A}$  de  $\mathcal{I}$ , si l'on ne garde dans ce dernier que les murs passant par un sommet spécial donné. Cela signifie aussi que  $\phi$  a un point fixe dans  $\mathcal{I}$  et on a donc démontré le point (1) du théorème.

S'il existe un triangle de longueurs de côtés  $N\lambda, N\mu, N\nu$ , on lui associe une configuration semi-stable  $((\xi_1, m_1), (\xi_2, m_2), (\xi_3, m_3))$  avec  $N\lambda = pr_{C^+}(\xi_1, m_1)$ ,  $N\mu = pr_{C^+}(\xi_2, m_2)$  et  $N\nu = pr_{C^+}(\xi_3, m_3)$ , cf. proposition 4.12. Comme on l'a vu dans 4.2.2, la configuration  $((\xi_1, m_1/N), (\xi_2, m_2/N), (\xi_3, m_3/N))$  est encore semi-stable et le raisonnement ci-dessus permet de lui associer un triangle dans  $\mathcal{I}$  de longueurs de côtés  $\lambda, \mu$  et  $\nu$ , d'où le point (2).

## 5. LE THÉORÈME DE SATURATION

On fait le point sur les étapes de la démonstration du théorème 1.1 qui sont déjà démontrées. L'étape 1) a été prouvée dans la section 3, voir le théorème 3.10. Les étapes 2) et 3) ont été démontrées dans la section 4. Il reste à montrer les étapes 4) et 5).



Si  $\mu$  est un autre élément de  $P^\vee$ , alors

$$\varphi_\lambda \varphi_\mu = w_\lambda \tau_\lambda w_\mu \tau_\mu = w_\lambda (\tau_\lambda w_\mu \tau_\lambda^{-1}) \tau_\lambda \tau_\mu \in W^\alpha \tau_\lambda \tau_\mu$$

et  $\varphi_\lambda \varphi_\mu(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ . Donc  $\varphi_\lambda \varphi_\mu = \varphi_{\lambda+\mu}$ . Ce qui donne bien une action de  $P^\vee/Q^\vee$  sur l'alcôve  $\mathfrak{a}$ .

Comme le groupe est supposé presque simple, cette action se traduit par une permutation des sommets (ou des cloisons) de  $\mathfrak{a}$ , donc par une action sur le diagramme de Dynkin complété.

## 5.2 LE POINT FIXE EST UN SOMMET ET L'ÉTAPE 4)

On sait que l'application  $\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3$  associée à la configuration semi-stable  $\xi = ((\xi_1, m_1), (\xi_2, m_2), (\xi_3, m_3))$  admet un point fixe  $x_0$  dans  $\mathcal{I}$ . Mais dans un appartement contenant  $\xi_1$  et  $x$ ,  $\phi_1(x)$  est le translaté de  $x$  d'une longueur  $m_1$  dans la direction  $\xi_1$ , donc selon un vecteur  $\lambda' \in W \cdot \lambda$ . Or  $\lambda \in P^\vee$ , la translation associée  $\tau_\lambda$  envoie donc facettes sur facettes. Ainsi,  $\phi_1$  est une application simpliciale. De même pour  $\phi_2$  et  $\phi_3$ . De plus  $\tau_\lambda$  envoie une alcôve sur une alcôve et permute les types de facettes par l'action de  $\bar{\lambda} \in P^\vee/Q^\vee$ ; donc, si  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$ ,  $\phi$  conserve les types. Nous avons démontré le premier point du théorème suivant, le second est laissé à la sagacité du lecteur.

THÉORÈME 5.2 (Kapovich-Leeb-Millson [11]).

- Si  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$  alors  $\phi$  fixe un sommet.
- Si  $\phi$  fixe un sommet spécial alors  $\lambda + \mu + \nu \in Q^\vee$ .

On a donc un triangle  $T = [x_0, x_1, x_2, x_0]$  dans  $\mathcal{I}$  avec  $d_{C^+}(x_0, x_1) = \lambda$ ,  $d_{C^+}(x_1, x_2) = \mu$  et  $d_{C^+}(x_2, x_0) = \nu$  et  $x_0$  un sommet de  $\mathcal{I}$ . Comme  $\lambda, \mu, \nu \in P^\vee$ ,  $x_1$  et  $x_2$  sont aussi des sommets. On peut supposer que  $x_0$  et  $x_1$  sont dans notre appartement témoin favori  $\mathbf{A}$ . On choisit une alcôve  $\mathfrak{a}$  de  $\mathbf{A}$  contenant  $x_0$ . On rétracte le triangle  $T$  sur l'appartement  $\mathbf{A}$  par  $\rho_{\mathbf{A}, \mathfrak{a}}$ . Alors, d'après les résultats de la section 3, on obtient un polygone  $[x_0, x_1, y_1, \dots, y_n, x'_2, x_0]$ , où  $x'_2 = \rho_{\mathbf{A}, \mathfrak{a}}(x_2)$  et  $[x_1, y_1, \dots, y_n, x'_2]$  est un chemin de Hecke de type  $\mu$  par rapport à  $\mathfrak{a}$ .

Maintenant, on fait dans  $\mathbf{A}$  une homothétie de centre 0 et de rapport  $k$ , alors le polygone  $[x_0, x_1, y_1, \dots, y_n, x'_2, x_0]$  se transforme en un polygone  $[x'_0, x'_1, y'_1, \dots, y'_n, x''_2, x'_0]$ , où  $x'_0, x'_1, x''_2$  sont des sommets spéciaux de  $\mathbf{A}$  (on pourra poser  $0 = x'_0$ ),  $d_{C^+}(x'_0, x'_1) = k\lambda$ ,  $d_{C^+}(x''_2, x'_0) = k\nu$  et  $[x'_1, y'_1, \dots, y'_n, x''_2]$  est un chemin de Hecke de type  $k\mu$ . Malheureusement, en général, ce n'est pas un chemin LS... Mais, on a bien démontré l'étape 4).

## 5.3 CONCLUSION

Dans cette section, on va montrer l'étape 5. On considère le polygone  $[x'_0, x'_1, y'_1, \dots, y'_n, x''_2, x'_0]$  obtenu à la section 5.2, où  $x'_0, x'_1, x''_2$  sont des sommets spéciaux de  $\mathbf{A}$ ,  $d_{C^+}(x'_0, x'_1) = k\lambda$ ,  $d_{C^+}(x''_2, x'_0) = k\nu$  et où  $[x'_1, y'_1, \dots, y'_n, x''_2]$  est un chemin de Hecke de type  $k\mu$  par rapport à une alcôve  $a_0$  contenant  $x_0$ . Le théorème suivant montre qu'il existe dans  $C^+$  un polygone  $[x'_0, kx''_1, kz'_1, \dots, kz'_m, kx''_2, x'_0]$ , où  $[kx''_1, kz'_1, \dots, kz'_m, kx''_2]$  est un chemin LS généralisé de type  $k^2\mu$ . Le théorème de décomposition 2.8 s'applique et prouve que  $(V(k^2\lambda) \otimes V(k^2\mu) \otimes V(k^2\nu))^{G^\vee} \neq \{0\}$ . On a bien achevé l'étape 5) et donc la démonstration du théorème de saturation 1.1.

**THÉORÈME 5.3.** *Soit  $[0, u_1, v_1, \dots, v_n, u_2, 0]$  un polygone où  $u_1, u_2$  sont des sommets spéciaux de  $\mathbf{A}$  et  $[u_1, v_1, \dots, v_n, u_2]$  est un chemin de Hecke de type  $\eta$  par rapport à une alcôve  $a$  contenant  $0$ . Soit  $C^+$  la chambre de sommet  $0$  opposée à la chambre contenant  $a$ . Alors, il existe un polygone  $[0, ku'_1, kz'_1, \dots, kz'_m, ku'_2, 0]$  contenu dans  $C^+$  tel que  $[ku'_1, kz'_1, \dots, kz'_m, ku'_2]$  est un chemin LS généralisé de type  $k\bar{\eta} = k\eta_1 + \dots + k\eta_l$ .*

*Démonstration.* On déplie le chemin  $[u_1, v_1, \dots, v_n, u_2]$  dans l'immeuble pour obtenir un triangle sur des sommets spéciaux  $[0, u_1, z_2, 0]$ , avec  $d_{C^+}(u_1, z_2) = \eta$  et  $d_{C^+}(z_2, 0) = d_{C^+}(u_2, 0)$ . Dans un appartement contenant les sommets  $u_1$  et  $z_2$ , on remplace le segment  $[u_1, z_2]$  par le chemin  $\pi = u_1 + \pi_{\bar{\eta}}$ , où  $\pi_{\bar{\eta}}$  est le chemin associé à une décomposition de  $\eta$  comme dans la partie 2.9. Ce chemin n'emprunte que des arêtes et donc chaque fois qu'il rencontre un mur, c'est en un sommet.

On rétracte sur  $\mathbf{A}$  par  $\rho = \rho_{\mathbf{A}, a}$ . Alors on obtient un polygone  $[0, u_1, z_1, \dots, z_m, u_2]$  tel que  $\rho\pi = [u_1, z_1, \dots, z_m, u_2]$  soit un chemin qui est plié uniquement en des sommets et qui est de Hecke généralisé de type  $\bar{\eta}$  par rapport à  $a$  (au sens de la définition suivante). C'est clair pour les images des segments de  $\pi$ . Pour les points anguleux, il faut remarquer que deux arêtes d'une même alcôve auront des images dans une même alcôve.

Maintenant, on replie  $\mathbf{A}$ , en accordéon, sur  $C^+$  par la projection  $pr_{C^+}: \mathbf{A} \rightarrow C^+$ ; on obtient ainsi un polygone  $[0, u'_1, z'_1, \dots, z'_m, u'_2, 0]$  avec  $d_{C^+}(0, u'_1) = d_{C^+}(0, u_1)$ ,  $d_{C^+}(u'_2, 0) = d_{C^+}(u_2, 0)$  et  $p = [u'_1, z'_1, \dots, z'_m, u'_2]$  est un chemin plié uniquement en des sommets. D'après le lemme suivant  $p$  est de Hecke par rapport à  $a$  et donc de Hecke par rapport à  $-C^+$  (voir la remarque 3.9).

Enfin, on applique l'homothétie de centre  $0$  et de rapport  $k$ , on obtient un chemin de Hecke généralisé  $[ku'_1, kz'_1, \dots, kz'_m, ku'_2]$  de type  $k\bar{\eta}$ , dont les

coudees sont des sommets spéciaux. Par le lemme 2.5, ce chemin est LS généralisé de type  $k\bar{\eta}$ , ce qui termine la preuve du théorème.

**DÉFINITION 5.4.** Soit  $\alpha$  l'alcôve de  $\mathbf{A}$  de sommet 0 et opposée à la chambre de Weyl  $C^+$ . Soit  $p$  un chemin dans  $\mathbf{A}$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on note  $\vec{a}_{p(t)}$  la chambre de  $\vec{\mathbf{A}}_{p(t)}$  qui contient les vecteurs  $\overrightarrow{p(t)z'}$ , pour  $z' \in \alpha$ .

Le chemin  $p$  est de Hecke généralisé de type  $\bar{\eta}$  par rapport à  $\alpha$  si  $p = p_1 \star \dots \star p_l$  où les  $p_i$  sont de Hecke de type  $\eta_i$  (par rapport à  $\alpha$ ),  $p_i(0) = p_{i-1}(1) =: p(t_i)$  et pour tout  $2 \leq i \leq l$ , il existe un vecteur  $\xi_i$ , une chambre qui contient à la fois  $\xi_i$  et  $p'_+(t_i)$  et une  $(W_{p(t_i)}, \vec{a}_{p(t_i)})$ -chaîne de  $p'_-(t_i)$  à  $\xi_i$ .

Il s'agit de la même condition que la définition 2.9 où il convient de remplacer « par rapport à  $C^+$  » et «  $W_{p(t_i)}$ -chaîne » par « par rapport à  $\alpha$  » et «  $(W_{p(t_i)}, \vec{a}_{p(t_i)})$ -chaîne ».

**LEMME 5.5.** Soit  $\alpha$  l'alcôve de  $\mathbf{A}$  de sommet 0 et opposée à la chambre de Weyl  $C^+$ . Soit  $p$  un chemin de Hecke de type  $\eta$  par rapport à  $\alpha$  ou un chemin de Hecke généralisé de type  $\bar{\eta}$  par rapport à  $\alpha$  dans  $\mathbf{A}$ . Alors le chemin replié  $pr_{C^+} \circ p$  est de Hecke de type  $\eta$  ou de Hecke généralisé de type  $\bar{\eta}$  par rapport à  $\alpha$  dans  $C^+$ .

*Démonstration.* Le chemin  $pr_{C^+} \circ p$  s'obtient à partir de  $p$  par une suite de pliages rétractant  $\mathbf{A}$  sur un demi-appartement contenant  $C^+$  et de mur contenant 0. Soient donc  $M$  un mur contenant 0,  $D$  le demi-appartement limité par  $M$  contenant  $C^+$  et  $\pi_D$  le pliage de  $\mathbf{A}$  sur  $D$ . On va montrer que  $\pi_D \circ p$  est de Hecke (généralisé) par rapport à  $\alpha$ . Cela se vérifie en chaque point  $p(t)$  de  $p$ . Si  $p(t) \notin M$ , alors  $\vec{a}_{p(t)}$  contient  $\alpha$  et sa symétrique  $s_M(\alpha)$ ; de plus, au voisinage de  $t$ ,  $\pi_D \circ p$  est égal à  $p$  ou à  $s_M \circ p$ . Donc  $\pi_D \circ p$  vérifie encore la condition locale imposée.

Supposons  $p(t) \in M$ . Par hypothèse il existe une  $(W_{p(t)}, \vec{a}_{p(t)})$ -chaîne de  $p'_-(t)$  à  $\xi$  où  $\xi$  est dans une même chambre que  $p'_+(t)$ . Donc  $\pi_D(\xi)$  et  $\pi_D(p'_+(t)) = (\pi_D \circ p)'_+(t)$  sont dans une même chambre et du même côté de  $M$ . Ainsi  $\pi_D(\xi)$  est égal à  $\xi$  ou  $s_M(\xi)$  avec comme positions:  $\xi, \vec{a}_{p(t)} \mid_M s_M(\xi)$ . De même  $(\pi_D \circ p)'_-(t)$  est égal à  $p'_-(t)$  ou à  $s_M(p'_-(t))$  avec cette fois:  $s_M(p'_-(t)), \vec{a}_{p(t)} \mid_M p'_-(t)$ . Ainsi en complétant éventuellement, par le début et/ou la fin, la  $(W_{p(t)}, \vec{a}_{p(t)})$ -chaîne de  $p'_-(t)$  à  $\xi$ , on obtient une  $(W_{p(t)}, \vec{a}_{p(t)})$ -chaîne de  $(\pi_D \circ p)'_-(t)$  à  $\pi_D(\xi)$ .

**REMARQUE 5.6.** Nous avons une variante de la fin de la démonstration du théorème de saturation qui se décline comme suit. Dans la partie 5.2,

on a trouvé un triangle  $T = [x_0, x_1, x_2, x_0]$  dans  $\mathcal{I}$  avec  $d_{C^+}(x_0, x_1) = \lambda$ ,  $d_{C^+}(x_1, x_2) = \mu$  et  $d_{C^+}(x_2, x_0) = \nu$  et  $x_0, x_1, x_2$  des sommets de  $\mathcal{I}$ . Dans un appartement contenant  $x_1$  et  $x_2$ , on remplace le segment  $[x_1, x_2]$  par un chemin « généralisé »  $[x_1, a_1, \dots, a_m, x_2]$  modelé sur une écriture  $\bar{\mu} = \mu_1 + \dots + \mu_l$  comme dans la partie 2.9. Les guillemets signifient que ce chemin est seulement vectoriellement dans le 1-squelette (quand le sommet  $x_1$  n'est pas spécial). On rétracte le polygone  $[x_0, x_1, a_1, \dots, a_m, x_2, x_0]$  par la rétraction  $\rho_{A, \mathfrak{a}}$ , où  $\mathfrak{a}$  est une alcôve qui contient  $x_0$ . On peut montrer que  $\pi = \rho_{A, \mathfrak{a}}([x_1, a_1, \dots, a_m, x_2])$  est un chemin de Hecke « généralisé ». Maintenant, on cherche le facteur  $k'$  tel que  $k'\pi$  soit LS généralisé. On peut montrer que c'est vrai pour  $k' = k^2$ . Mais en regardant, au cas par cas, quand un segment vectoriellement dans le 1-squelette peut croiser un mur, on voit que  $k' = 2$  suffit dans le cas  $B_2$  et  $k' = 12$  pour le cas  $G_2$ . Malheureusement, on trouve  $k' = 4$  dès le type  $B_n$ , pour  $n \geq 3$ . Ensuite, on replie  $A$  en accordéon et, grâce à une légère variante du lemme précédent, on obtient un chemin LS généralisé dans  $C^+$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABRAMENKO, P. and K.S. BROWN. *Buildings: Theory and Applications*. Graduate Texts in Mathematics 248. Springer-Verlag, New-York, 2008.
- [2] BELKALE, P. and S. KUMAR. Eigencone, saturation and Horn problems for symplectic and odd orthogonal groups. *J. Algebraic Geom.* 19 (2010), 199–242.
- [3] BRIDSON, M.R. and A. HAEFLIGER. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [4] BROWN, K.S. *Buildings*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [5] BRUHAT, F. et J. TITS. Groupes réductifs sur un corps local, I. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 41 (1972), 5–251.
- [6] BRUHAT, F. et J. TITS. Groupes réductifs sur un corps local, II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 60 (1984), 5–184.
- [7] DERKSEN, H. and J. WEYMAN. Semi-invariants of quivers and saturation for Littlewood-Richardson coefficients. *J. Amer. Math. Soc.* 13 (2000), 467–479.
- [8] GAUSSENT, S. and G. ROUSSEAU. Kac-Moody groups, hovels and Littelmann paths. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 58 (2008), 2605–2657.
- [9] KAPOVICH, M., B. LEEB and J.J. MILLSON. Convex functions on symmetric spaces, side lengths of polygons and the stability inequalities for weighted configurations at infinity. *J. Differential Geom.* 81 (2009), 297–354.
- [10] KAPOVICH, M., B. LEEB and J.J. MILLSON. Polygons in buildings and their refined side lengths. *Geom. Funct. Anal.* 19 (2009), 1081–1100.

- [11] KAPOVICH, M., B. LEEB and J.J. MILLSON. The generalized triangle inequalities in symmetric spaces and buildings with applications to algebra. *Mem. Amer. Math. Soc.* 896 (2008).
- [12] KAPOVICH, M. and J.J. MILLSON. A path model for geodesics in Euclidean buildings and its applications to representation theory. *Groups Geom. Dyn.* 2 (2008), 405–480.
- [13] KNUTSON, A. and T. TAO. The honeycomb model of  $GL_n(\mathbf{C})$  tensor products. I. Proof of the saturation conjecture. *J. Amer. Math. Soc.* 12 (1999), 1055–1090.
- [14] LITTELMANN, P. A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras. *Invent. Math.* 116 (1994), 329–346.
- [15] ——— Paths and root operators in representation theory. *Ann. of Math. (2)* 142 (1995), 499–525.
- [16] ——— Characters of representations and paths in  $\mathfrak{S}_{\mathbf{R}}^*$ . In: *Representation Theory and Automorphic Forms (Edinburgh 1996)*, 29–49. Proc. Sympos. Pure Math. 61. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [17] RONAN, M. *Lectures on Buildings*. Perspectives in Mathematics 7. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989.
- [18] SAM, S.V. Symmetric quivers, invariant theory, and saturation theorems for the classical groups. *Adv. Math.* 229 (2012), 1104–1135.
- [19] TITS, J. Buildings of spherical type and finite  $BN$ -pairs. Lecture Notes in Mathematics 386. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.

(Reçu le 16 juin 2011)

N. Bardy, C. Charignon, S. Gaussent et G. Rousseau

Institut Élie Cartan, U.M.R. 7502  
Université de Lorraine, CNRS  
Boulevard des aiguillettes, BP 70239  
F-54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex  
France  
*e-mail* : Stephane.Gaussent@univ-st-etienne.fr  
*e-mail* : Nicole.Bardy@univ-lorraine.fr  
*e-mail* : Cyril.Charignon@ens-lyon.org  
*e-mail* : Guy.Rousseau@univ-lorraine.fr