L'Enseignement Mathématique (2) 59 (2013), 39–72

LE PRODUIT HARMONIQUE DES SUITES

par Bernard CANDELPERGHER et Marc-Antoine COPPO

ABSTRACT. By means of an involutary binomial transformation on complex sequences, we define a new product called "harmonic" because of its remarkable properties towards harmonic sums. The Euler series transformation allows one to deduce from these properties some new and remarkable identities.

1. INTRODUCTION

Dans l'espace $\mathbf{C}^{\mathbf{N}^*}$ des suites à valeurs complexes, on considère la transformation linéaire D associant à toute suite $a = (a(1), a(2), a(3), \dots)$ la suite $D(a)$ définie par

$$D(a)(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a(k+1) \qquad \text{pour tout } n \geq 0 .$$

L'opérateur D est un automorphisme involutif du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^{\mathbf{N}^*}$, c'est-à-dire

$$a = D\big(D(a)\big) .$$

Formellement, les suites a et $D(a)$ sont liées par la *relation d'Euler*:

$$\sum_{n\geq 1} D(a)(n) z^n = - \sum_{n \geq 1} a(n) \left(\frac{z}{z-1} \right)^n .$$

La relation précédente montre en particulier que la suite harmonique $n \mapsto \dfrac{1}{n}$ est invariante par D. En notant $\dfrac{1}{N}$ cette suite, on peut donc écrire

$$D\Big(\frac{1}{N}\Big) = \frac{1}{N}\,.$$

Si $D(a)D(b)$ désigne le *produit de Hadamard* (*i.e.* le produit terme à terme) des suites $D(a)$ et $D(b)$, on définit un nouveau produit dans $\mathbf{C}^{\mathbf{N}^*}$, noté $\bowtie$, par la formule

$$a \bowtie b = D\big(D(a)D(b)\big)\,.$$

Il en résulte (par involutivité de D) que $D(ab) = D(a) \bowtie D(b)$. Muni du produit $\bowtie$, l'espace vectoriel $\mathbf{C}^{\mathbf{N}^*}$ est une $\mathbf{C}$-algèbre commutative, associative et unitaire (mais non-intègre), l'élément unité étant la suite $\delta_0 = (1,0,0,\dots) = D(\mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ est la suite $(1,1,1,\dots)$. Une suite a est inversible pour le produit $\bowtie$ si et seulement si $D(a)$ est inversible pour le produit de Hadamard (*i.e.* $D(a)(n) \neq 0$ pour tout n).

Une expression explicite du produit $a \bowtie b$ est donnée par la formule suivante :

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{0 \le l \le k \le n} (-1)^{k-l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} a(k+1)b(n+1-l) \quad (n \geq 0)\,,$$

qui permet de le calculer pour de petites valeurs de n ; on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&(a \bowtie b)(1) = a(1)b(1)\,,\\
&(a \bowtie b)(2) = a(2)b(1) + a(1)b(2) - a(2)b(2)\,,\\
&(a \bowtie b)(3) = a(3)b(1) + a(1)b(3) + 2a(2)b(2) - 2a(3)b(2) - 2a(2)b(3) + a(3)b(3)\\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Le produit $\bowtie$ possède des propriétés remarquables vis-à-vis des sommes harmoniques qui justifient sa dénomination de *produit harmonique*. On démontre (Théorème 2) la relation suivante : pour toute suite a, on a l'identité

$$\left(\frac{1}{N} \bowtie a\right)(n) = \frac{1}{n}\big(a(1) + a(2) + \cdots + a(n)\big)\,.$$

De cette propriété d'harmonicité découlent plusieurs applications remarquables. On obtient notamment (Théorème 4) la formule suivante :

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}}\, a(n_k) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m)$$

qui s'applique à toute suite a et pour tout entier $k \geq 1$. Dans le cas particulier où a est la suite harmonique $\frac{1}{N}$, on retrouve la classique « formule de Dilcher » (cf. [2], [3], [5]) :

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_k} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k},$$

dont on donne une formulation plus générale (Corollaire 8).

On introduit les nombres

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}} a(n_k)$$

qui apparaissent comme une généralisation naturelle des *nombres harmoniques* $c_n^{(k)}$ de Rota et Roman (cf. [9], [10]) : on a en effet la relation $c_n^{(k)} = S^{(k)}\big(\frac{1}{N}\big)(n)$. Par transformation d'Euler, on obtient la relation

$$\sum_{n \geq 1} \frac{D(a)(n)}{n^k} z^n = -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} S^{(k)}(a)(n) \left(\frac{z}{z-1}\right)^n$$

qui permet notamment, dans le cas où a est la suite $n \mapsto \frac{1}{(2n-1)^2}$, d'étendre une formule de Ramanujan ([1], chapitre 9, Entry 34) pour la constante de Catalan (Exemple 23 d)).

2. Préliminaires : Opérateurs dans l'espace des suites

2.1 L'isomorphisme Φ

Notation. Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^{\mathbf{N}^*}$ des suites

$$a = (a(1), a(2), a(3), \ldots, a(n), \ldots)$$

à valeurs dans $\mathbf{C}$ est noté $\mathcal{E}^*$.

Définition 1. Si $\mathbf{C}[[z]]$ désigne l'espace des séries formelles, on a un isomorphisme naturel :

$$\Phi \colon \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbf{C}[[z]]$$

défini par

$$\Phi(a)(z) = \sum_{n \geq 0} a(n+1) \frac{z^n}{n!} = a(1) + a(2)z + a(3)\frac{z^2}{2} + a(4)\frac{z^3}{6} + \ldots \quad .$$

DÉFINITION 2. Les opérateurs sur $\mathcal{E}^*$ se transforment en opérateurs sur $\mathbf{C}[[z]]$ via l'isomorphisme Φ. Plus précisément, si U désigne un opérateur sur $\mathcal{E}^*$, il lui correspond l'opérateur u sur $\mathbf{C}[[z]]$ défini par la relation

$$\Phi U = u\Phi \Leftrightarrow u = \Phi U \Phi^{-1}$$

que l'on appelle *l'image de* U. On a donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^* & \xrightarrow{U} & \mathcal{E}^* \\ \uparrow{\scriptstyle \Phi^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ \mathbf{C}[[z]] & \xrightarrow{u} & \mathbf{C}[[z]] \end{array}$$

L'image de l'opérateur I d'identité sur $\mathcal{E}^*$ est notée Id.

EXEMPLE 1.

a) La suite δ_k définie pour $k \geq 0$ et $n \geq 1$ par

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

vérifie la relation

$$\Phi(\delta_k)(z) = \frac{z^k}{k!}\,.$$

On a $\delta_0 := (1, 0, 0, \dots)$, $\delta_1 := (0, 1, 0, \dots)$, etc.

b) La suite $\mathbf{1} := (1, 1, 1, \dots)$ vérifie $\Phi(\mathbf{1})(z) = e^z$.

c) La suite $N := (1, 2, 3, \dots)$ vérifie la relation

$$\Phi(N)(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{z^n}{n!} = ze^z + e^z = (1+z)e^z\,.$$

d) Pour $\alpha \in \mathbf{C}$, la *suite géométrique* $\alpha^{N-1} := (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)$ vérifie la relation

$$\Phi(\alpha^{N-1})(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n z^n}{n!} = e^{\alpha z}\,.$$

e) La suite $\dfrac{1}{N} := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ vérifie la relation

$$\Phi\Big(\frac{1}{N}\Big)(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(n+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1).$$

Dans la suite de l'article, on désignera la suite $\dfrac{1}{N}$ sous le nom de *suite harmonique*.

NOTATION. Si a et b sont deux suites dans $\mathcal{E}^*$, on note ab la suite définie par

$$(ab)(n) = a(n)\, b(n)\,.$$

On a en particulier: $\mathbf{1}a = a$ et $\delta_k a = a(k+1)\delta_k$ pour tout $k \geq 0$. Muni de ce produit (appelé *produit de Hadamard*), $\mathcal{E}^*$ est une algèbre commutative, associative et unitaire notée $\mathcal{A}$. L'élément unité de $\mathcal{A}$ est la suite $\mathbf{1}$.

2.2 LES OPÉRATEURS L ET R

DÉFINITION 3. L'opérateur L de *décalage à gauche* sur $\mathcal{E}^*$ est défini par

$$L(a)(n) = a(n+1)\,,$$

autrement dit

$$(a(1), a(2), a(3), \dots) \overset{L}{\longmapsto} (a(2), a(3), a(4), \dots)\ .$$

L'image de L est l'opérateur de *dérivation formelle* ∂, car on a

$$\Phi\big(L(a)\big)(z) = \sum_{n\geq 0} a(n+2)\frac{z^n}{n!} = a(2) + a(3)z + a(4)\frac{z^2}{2!} + \cdots = \partial\Phi(a)(z)\,.$$

DÉFINITION 4. L'opérateur R de *décalage à droite* sur $\mathcal{E}^*$ est défini par

$$R(a)(n) = \begin{cases} a(n-1) & \text{si } n > 1 \\ 0 & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

autrement dit

$$\big(a(1), a(2), a(3), \dots\big) \overset{R}{\longmapsto} \big(0, a(1), a(2), a(3), \dots\big)\,.$$

La suite $R(a) = (0, a(1), a(2), \dots)$ est notée $(0, a)$. L'image de R est l'opérateur d'*intégration formelle* $\int$, car on a

$$\Phi\big(R(a)\big)(z) = \sum_{n\geq 0} a(n+1)\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = a(1)z + a(2)\frac{z^2}{2!} + \cdots = \int_0^z \Phi(a)(t)\, dt\,.$$

REMARQUE 1. On a la relation $LR = I$, mais on notera que RL n'est pas l'identité:

$$\big(a(1), a(2), a(3), \dots\big) \overset{RL}{\longmapsto} \big(0, a(2), a(3), a(4), \dots\big)\,.$$

2.3 LES OPÉRATEURS D ET S

DÉFINITION 5. Soit $V\colon \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbf{C}$ le morphisme d'évaluation défini par

$$V(a) = a(1)\,.$$

Son image est l'application $v\colon \mathbf{C}[[z]] \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $v(\Phi(a)) = \Phi(a)(0)$.

L'opérateur $D\colon \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{E}^*$ est défini par

$$D(a)(n) = V\left((I-L)^{n-1}a\right) = v\left((\text{-}\,\partial)^{n-1}\Phi(a)\right),$$

c'est-à-dire

$$D(a)(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}a(k) \qquad \text{pour tout } n \geq 1\,,$$

ou encore

$$D(a)(n+1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}a(k+1) \qquad \text{pour tout } n \geq 0\,.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} D(a)(1) &= a(1) \\ D(a)(2) &= a(1) - a(2) \\ D(a)(3) &= a(1) - 2a(2) + a(3)\,. \end{aligned}$$

REMARQUE 2. On définit dans [3] une version "continue" de l'opérateur D dans un cadre différent.

PROPOSITION 1 (Relation entre D et la transformation binomiale). *Soit T la transformation binomiale définie sur $\mathcal{E} = \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ par*

$$T(a)(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}a(k)\,,$$

et $\pi\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^*$ la projection naturelle :

$$\big(a(0), a(1), a(2), a(3), \dots\big) \overset{\pi}{\longmapsto} \big(a(1), a(2), a(3), \dots\big)\,.$$

On a la relation

$$D\left(\frac{1}{N}\pi(a)\right) = a(0)\frac{1}{N} - \frac{1}{N}\pi\big(T(a)\big)\,. \tag{2.1}$$

Démonstration. On a pour $n \geq 1$,

$$nD\left(\frac{1}{N}\pi(a)\right)(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k}a(k)$$
$$= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}a(k) = -T(a)(n) + a(0)\,. \qquad \square$$

PROPOSITION 2 (Image de D). *On a la relation*

$$\Phi\big(D(a)\big)(z) = e^{z}\Phi(a)(-z)\,, \tag{2.2}$$

autrement dit, l'image d de l'opérateur D est telle que pour tout $f \in \mathbf{C}[[z]]$,

$$d(f)(z) = e^{z}f(-z)\,.$$

Démonstration. On a

$$\Phi\big(D(a)\big)(z) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}a(k+1)\frac{z^{n}}{n!}$$
$$= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}a(k+1)\frac{z^{k}}{k!}\frac{z^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$= \sum_{l\geq 0}\frac{z^{l}}{l!}\sum_{k\geq 0}a(k+1)(-1)^{k}\frac{z^{k}}{k!}$$
$$= e^{z}\Phi(a)(-z)\,. \qquad \square$$

COROLLAIRE 1. *L'opérateur D est un automorphisme involutif, autrement dit,*

$$D = D^{-1}\,.$$

Démonstration. Pour montrer que $D = D^{-1}$, il suffit de montrer que $d = d^{-1}$. On a

$$d(f) = g \Longleftrightarrow e^{z}f(-z) = g(z) \Longleftrightarrow f(-z) = e^{-z}g(z)$$
$$\Longleftrightarrow f(z) = e^{z}g(-z) \Longleftrightarrow f = d(g)\,. \qquad \square$$

EXEMPLE 2.

a) $D(\mathbf{1}) = \delta_0$, $D(N) = \delta_0 - \delta_1$, $D(\delta_1) = \mathbf{1} - N$.

b) On a vu que $\Phi(\alpha^{N-1}) = e^{\alpha z}$. Il en résulte par (2.2) que $D(\alpha^{N-1}) = (1-\alpha)^{N-1}$. En particulier la suite $\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$ est invariante par D.

c) On a vu que $\Phi\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{z}(e^z - 1)$. Il en résulte par (2.2) que la suite harmonique est invariante par D :

$$D\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N}\,.$$

PROPOSITION 3. *Pour toute suite a, on a*

$$DL(a) = (I-L)D(a)\,. \tag{2.3}$$

Démonstration. On a

$$\Phi\big(DL(a)\big)(z) = e^z\Phi\big(L(a)\big)(-z) = e^z\partial\Phi(a)(-z) = e^z\Phi(a)(-z) - \partial(e^z\Phi(a)(-z))\,,$$

d'où $DL = D - LD = (I-L)D$. $\square$

DÉFINITION 6. L'opérateur de *sommation* $S\colon \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{E}^*$ est défini par

$$S(a)\,(n) = \sum_{k=1}^{n} a(k)\,.$$

EXEMPLE 3.

a) $S(\delta_0) = \mathbf{1}$, $S(\mathbf{1}) = N$.

b) $S(\alpha^{N-1}) = \dfrac{1}{1-\alpha}(\mathbf{1} - \alpha^N)$ pour $\alpha \neq 1$. En particulier,

$$S\big((-1)^{N-1}\big) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{1} + (-1)^{N-1}\big) = (1,0,1,0,\dots)\,.$$

PROPOSITION 4. *L'opérateur S est un automorphisme d'inverse*

$$S^{-1} = I - R\,.$$

Démonstration. On a

$$b(n) = S(a)(n) \Leftrightarrow a(n) = b(n) - b(n-1)$$

pour $n > 1$ et $a(1) = b(1)$. $\square$

NOTATION. On pose $H := S\big(\frac{1}{N}\big)$, $O := S\big(\frac{1}{2N-1}\big)$, et pour $k \geq 2$, $H^{(k)} := S\big(\frac{1}{N^k}\big)$ et $O^{(k)} := S\big(\frac{1}{(2N-1)^k}\big)$ avec :

$$\frac{1}{N^k} := \underbrace{\frac{1}{N}\cdots\frac{1}{N}}_{k} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(2N-1)^k} := \underbrace{\frac{1}{2N-1}\cdots\frac{1}{2N-1}}_{k}.$$

Pour $n \geq 1$, on a donc

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad O(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1},$$
$$H^{(2)}(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad O^{(2)}(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

EXEMPLE 4. Les relations

$$\sum_{k=1}^{n} H(k) = (n+1)H(n) - n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{H(k)}{k} = \frac{1}{2}\big(H(n)\big)^2 + \frac{1}{2}H^{(2)}(n)$$

se démontrent facilement par récurrence ; elles se traduisent par

$$S(H) = (N+1)H - N \qquad \text{et} \qquad S\big(\frac{1}{N}H\big) = \frac{1}{2}(H^2 + H^{(2)}).$$

PROPOSITION 5. *On a la relation*

$$\Phi(S(a))(z) = \Phi(a)(z) - e^z \int_0^{-z} e^t \Phi(a)(-t)dt, \tag{2.4}$$

Autrement dit, l'image s de S est l'opérateur $Id - d\int d$.

Démonstration. On a la relation $(L - I)S = L$ qui se traduit par

$$(\partial - \mathrm{Id})\Phi\big(S(a)\big) = \partial\Phi(a).$$

En résolvant l'équation différentielle $(\partial - \mathrm{Id})\Phi(S(a)) = \partial\Phi(a)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi\big(S(a)\big)(z) &= \Phi(a)(z) + e^z \int_0^z e^{-t}\Phi(a)(t)dt \\ &= \Phi(a)(z) - e^z \int_0^{-z} e^t \Phi(a)(-t)dt. \qquad \square\end{aligned}$$

PROPOSITION 6. *Pour tout entier naturel p, l'automorphisme DS^p est involutif :*

$$DS^p = S^{-p}D = (DS^p)^{-1}\,.$$

En particulier,

$$DS = S^{-1}D = (I - R)D\,.$$

Démonstration. Le cas $p = 0$ traduit l'involutivité de D. On a vu que l'image s de S est l'opérateur $\mathrm{Id} - d\int d$. On en déduit que

$$S = I - DRD\,.$$

D'où $DS = D - RD = (I - R)D = S^{-1}D = (DS)^{-1}$. On procède alors par récurrence sur $p \geq 1$ en écrivant que $DS^{p+1} = DS^pS = S^{-p}DS = S^{-p}S^{-1}D = S^{-(p+1)}D$. □

EXEMPLE 5. Comme $a = \dfrac{1}{N}$ est invariante par D, on en déduit que

$$D(H) = (I - R)\big(\frac{1}{N}\big) = \frac{1}{N} + \big(0, -\frac{1}{N}\big) = \delta_0 + \big(0, -\frac{1}{N(N+1)}\big)\,,$$

c'est-à-dire

$$D(H)(n) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } n > 1\,, \\ 1 & \text{si } n = 1\,. \end{cases}$$

PROPOSITION 7. *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a la relation*

$$D\left(\frac{1}{N}S(a)\right) = \frac{1}{N}D(a)\,. \tag{2.5}$$

Démonstration. Comme $S^{-1} = I - R$, on a $s^{-1} = \mathrm{Id} - \int$, d'où

$$\begin{aligned}\Phi\big(S^{-1}(a)\big)(z) = \Phi(a)(z) - \int_0^z \Phi(a)(t)\,dt &= \Phi(a)(z) - z\sum_{n\geq 0}\frac{a(n+1)}{n+1}\frac{z^n}{n!} \\ &= \Phi(a)(z) - z\Phi(\frac{1}{N}a)\,.\end{aligned}$$

En remplaçant a par $S(a)$ dans la relation précédente, on obtient alors l'égalité

$$\Phi\left(\frac{1}{N}S(a)\right) = \frac{\Phi\big(S(a)\big) - \Phi(a)}{z}\,.$$

D'après (2.4), on a donc

$$\Phi\left(\frac{1}{N}S(a)\right) = -\frac{e^z}{z}\int_0^{-z} e^t\Phi(a)(-t)dt\,.$$

D'où

$$\begin{aligned}\Phi\left(D\left(\frac{1}{N}S(a)\right)\right) &= \frac{1}{z}\int_0^{z} e^t\Phi(a)(-t)dt \\ &= \frac{1}{z}\int_0^{z} \Phi\big(D(a)\big)(t)dt = \Phi\left(\frac{1}{N}D(a)\right). \qquad \square\end{aligned}$$

EXEMPLE 6. Par (2.5) appliquée à la suite $\frac{1}{N}$, on déduit

$$D\left(\frac{1}{N}H\right) = \frac{1}{N}D\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N}\frac{1}{N} = \frac{1}{N^2}\,,$$

d'où aussi

$$D\left(\frac{1}{N}H^{(2)}\right) = \frac{1}{N}D\left(\frac{1}{N^2}\right) = \frac{1}{N}\frac{1}{N}H = \frac{1}{N^2}H\,.$$

2.4 FORMULE DE VANDERMONDE

NOTATION. Pour $\alpha \in \mathbf{C}$, on note $(\alpha)_0 = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,.$$

On note $(\alpha)_N$ la suite $n \mapsto (\alpha)_n$. On pose $N! := (1)_N$.

PROPOSITION 8. *Pour* $\alpha \in \mathbf{C}$ *et pour* $\beta \in \mathbf{R} - \{0, -1, -2, \ldots\}$, *on a la relation*

$$D\left(\frac{1}{N}\frac{(\alpha)_N}{(\beta)_N}\right) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N}\frac{(\beta-\alpha)_N}{(\beta)_N}\,. \tag{2.6}$$

En particulier, pour $\alpha \in \mathbf{R} - \{0, -1, -2, \ldots\}$,

$$D\left(\frac{(N-1)!}{(\alpha)_N}\right) = \frac{1}{N} - \frac{(\alpha-1)_N}{N\,(\alpha)_N} = \frac{1}{N+\alpha-1}\,. \tag{2.7}$$

Démonstration. D'après la *formule de Vandermonde* (cf. [7], p. 25), on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha)_k\,(-n)_k}{(\beta)_k\,k!} = \frac{(\beta-\alpha)_n}{(\beta)_n}\,.$$

La relation (2.6) s'en déduit alors par (2.1). $\square$

REMARQUE 3. La formule de Vandermonde peut s'écrire plus simplement

$$D\left(\frac{(\alpha)_{N-1}}{(\beta)_{N-1}}\right) = \frac{(\beta-\alpha)_{N-1}}{(\beta)_{N-1}}\,. \tag{2.8}$$

EXEMPLE 7. En appliquant (2.7) avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, il vient

$$D\left(\frac{2^{2x}(N!)^2}{N(2N)!}\right) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N}\frac{-1/2}{N-1/2} = \frac{2}{2N-1}\,.$$

En posant

$$\binom{2N}{N} := \frac{(2N)!}{(N!)^2}\,,$$

on en déduit

$$D\left(\frac{1}{2N-1}\right) = \frac{1}{N}\frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}}\,, \tag{2.9}$$

d'où aussi par (2.5):

$$D\left(\frac{1}{N}\,O\right) = \frac{1}{N}D\left(\frac{1}{2N-1}\right) = \frac{1}{N^2}\frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}}\,.$$

3. LE PRODUIT HARMONIQUE

3.1 L'ALGÈBRE $\mathcal{H} = (\mathcal{E}^*, \bowtie)$

On rappelle que $\mathcal{A}$ désigne l'algèbre $(\mathcal{E}^*, \cdot)$ munie du produit de Hadamard des suites.

DÉFINITION 7. On définit le *produit harmonique* $a \bowtie b$ de deux suites a et b dans $\mathcal{E}^*$ par

$$a \bowtie b := D(D(a)D(b))\,.$$

Comme $D = D^{-1}$, on déduit immédiatement de la définition précédente les deux relations fondamentales suivantes:

$$D(a \bowtie b) = D(a)D(b)\,, \tag{3.1}$$

et

$$D(ab) = D(a) \bowtie D(b)\,. \tag{3.2}$$

EXEMPLE 8.

a) On a $\mathbf{1} \bowtie a = a(1)\mathbf{1}$, car

$$D(\mathbf{1} \bowtie a) = D(\mathbf{1})D(a) = \delta_0 D(a) = D(a)(1)\delta_0 = a(1)\delta_0 = a(1)D(\mathbf{1}).$$

b) On a $N \bowtie a = a(2)\mathbf{1} + (a(1) - a(2))N$, car

$$\begin{aligned} D(N)D(a) = (\delta_0 - \delta_1)D(a) &= D(a)(1)\delta_0 - D(a)(2)\delta_1 \\ &= a(1)D(N) + a(2)D(1 - N). \end{aligned}$$

c) On a $\alpha^{N-1} \bowtie \beta^{N-1} = (\alpha + \beta - \alpha\beta)^{N-1}$, car

$$\begin{aligned} D(\alpha^{N-1} \bowtie \beta^{N-1}) &= (1 - \alpha)^{N-1}(1 - \beta)^{N-1} \\ &= (1 - (\alpha + \beta - \alpha\beta))^{N-1} \\ &= D((\alpha + \beta - \alpha\beta)^{N-1}). \end{aligned}$$

d) Enfin, par la formule de Vandermonde (2.8), on a

$$\frac{(\gamma - \beta)_{N-1}}{(\gamma)_{N-1}} \bowtie \frac{(\beta - \alpha)_{N-1}}{(\beta)_{N-1}} = \frac{(\gamma - \alpha)_{N-1}}{(\gamma)_{N-1}}.$$

PROPOSITION 9. *L'espace $(\mathcal{E}^*, \bowtie)$ est une $\mathbf{C}$-algèbre commutative, associative et unitaire notée $\mathcal{H}$, isomorphe à l'algèbre $\mathcal{A}$. L'élément unité dans $\mathcal{H}$ est la suite δ_0.*

Démonstration. La bilinéarité du produit $\bowtie$ résulte de la linéarité de D et de la bilinéarité du produit de Hadamard. De plus, il résulte immédiatement des propriétés (3.1) et (3.2) que l'opérateur D réalise un isomorphisme d'algèbre entre les $\mathbf{C}$-algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$.

Il en résulte que $\mathcal{H}$ hérite des propriétés d'associativité et de commutativité de $\mathcal{A}$. En particulier, l'élément unité de $\mathcal{H}$ est l'image de $\mathbf{1}$ par D, c'est-à-dire δ_0. $\square$

REMARQUE 4. L'algèbre $\mathcal{H}$ contient des diviseurs de zéro. On a par exemple

$$\mathbf{1} \bowtie \delta_1 = 0.$$

COROLLAIRE 2. *Une suite a est inversible dans $\mathcal{H}$ si et seulement si la suite $D(a)$ est inversible dans $\mathcal{A}$ (i.e. $D(a)(n) \neq 0$ pour tout n). Dans ce cas, l'inverse harmonique de a est donné par la formule*

$$a^{\bowtie(-1)} = D\left(\frac{1}{D(a)}\right). \tag{3.3}$$

Démonstration.

$$a \bowtie b = \delta_0 \quad \Leftrightarrow \quad D(a)D(b) = D(\delta_0) = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad D(b) = \frac{1}{D(a)} . \qquad \square$$

EXEMPLE 9.

a) Les suites $\mathbf{1}$ et N ne sont pas inversibles dans $\mathcal{H}$.

b) $\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie(-1)} = D(N) = \delta_0 - \delta_1$,

c) $\left(\alpha^{N-1}\right)^{\bowtie(-1)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{N-1}$.

3.2 PUISSANCES HARMONIQUES k-IÈMES

DÉFINITION 8. Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on définit pour tout entier $k \geq 0$, la *puissance harmonique* k*-ième* de a notée $a^{\bowtie k}$ par

$$a^{\bowtie 0} = \delta_0 \quad \text{ et } a^{\bowtie (k+1)} = a^{\bowtie k} \bowtie a .$$

Par récurrence sur k, on en déduit immédiatement la formule suivante :

$$a^{\bowtie k} = D(\underbrace{D(a) \ldots D(a)}_{k}) = D\left((D(a))^k\right) .$$

En particulier, si a est invariante par D, alors $a^{\bowtie k} = D(a^k)$.

EXEMPLE 10.

a) $\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} = D\left(\frac{1}{N^k}\right)$.

b) $N^{\bowtie k} = D((\delta_0 - \delta_1)^k) = \mathbf{1} + (-1)^k(1-N) = \begin{cases} N & \text{si } k \text{ est impair}, \\ 2-N & \text{si } k \text{ est pair}. \end{cases}$

c) Soient les *nombres de Stirling de deuxième espèce*

$$S(k,n) = \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m-k}\binom{n}{m}m^k.$$

On a

$$(\delta_1)^{\bowtie k} = \sum_{n=0}^{k} n!S(k,n)\delta_n ,$$

car

$$(\delta_1)^{\bowtie k} = D\Big((-1)^k(N-1)^k\Big)$$

et

$$D\left((-1)^k(N-1)^k\right)(n+1) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^{m-k}\binom{n}{m}m^k = n!S(k,n)\,.$$

3.3 Image de $\mathcal{H}$ dans $\mathbf{C}[[z]]$

Théorème 1. *Pour toutes suites* a *et* b*, on pose*

$$\big(\Phi(a)\otimes\Phi(b)\big)(x,y) := \Phi(a)(x)\Phi(b)(y)\,.$$

On a alors

$$\Phi(a \bowtie b)(z) = \sum_{n\geq 0}(v_x\otimes v_y)(\partial_x+\partial_y-\partial_x\partial_y)^n\big(\Phi(a)\otimes\Phi(b)\big)\frac{z^n}{n!}\,. \tag{3.4}$$

Il en résulte que pour tout entier $n\geq 0$*,*

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ 0\leq l\leq n}} C_n^{k,l}\,a(k+1)b(l+1)\,,$$

où les nombres $C_n^{k,l}$ *sont définis par l'identité*

$$(X+Y-XY)^n = \sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ 0\leq l\leq n}} C_n^{k,l}\,X^kY^l\,.$$

Démonstration. On a

$$\Phi(a \bowtie b)(z) = \Phi\Big(D\big(D(a)D(b)\big)\Big)(z) = e^z\Phi\big(D(a)D(b)\big)(-z)$$

et

$$D(a)(n+1) = v\left((\mathrm{Id}-\partial)^n\Phi(a)\right) \qquad \text{avec} \qquad v\big(\Phi(a)\big) = \Phi(a)(0) = a(1)\,.$$

D'où

$$\begin{aligned}\big(D(a)D(b)\big)(n+1) &= (v_x\otimes v_y)[(\mathrm{Id}-\partial_x)(\mathrm{Id}-\partial_y)]^n\big(\Phi(a)\otimes\Phi(b)\big)(x,y)\\ &= (v_x\otimes v_y)[\mathrm{Id}-(\partial_x+\partial_y-\partial_x\partial_y)]^n\big(\Phi(a)\otimes\Phi(b)\big)(x,y)\,.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\Phi\big(D(a)D(b)\big)(-z) &= (v_x\otimes v_y)\sum_{n\geq 0}\big[\mathrm{Id}-(\partial_x+\partial_y-\partial_x\partial_y)\big]^n\big(\Phi(a)\otimes\Phi(b)\big)(-1)^n\frac{z^n}{n!}\\ &= e^{-z}(v_x\otimes v_y)e^{(\partial_x+\partial_y-\partial_x\partial_y)z}\big(\Phi(a)\otimes\Phi(b)\big).\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\Phi(a \bowtie b)(z) &= (v_x \otimes v_y) e^{(\partial_x + \partial_y - \partial_x\partial_y)z} \Phi(a) \otimes \Phi(b) \\ &= \sum_{n \geq 0} (v_x \otimes v_y)(\partial_x + \partial_y - \partial_x\partial_y)^n \big(\Phi(a) \otimes \Phi(b)\big) \frac{z^n}{n!} \,.\end{aligned}$$

Par identification du terme général, on en déduit que

$$\begin{aligned}(a \bowtie b)(n+1) &= (v_x \otimes v_y)(\partial_x + \partial_y - \partial_x\partial_y)^n \big(\Phi(a) \otimes \Phi(b)\big) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} (v_x \otimes v_y) C_n^{k,l} \, \partial_x^k \Phi(a) \, \partial_y^l \Phi(b) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l} \, a(k+1) \, b(l+1)\end{aligned}$$

avec

$$(X + Y - XY)^n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l} X^k Y^l \,. \qquad \square$$

COROLLAIRE 3 (Expression explicite du produit harmonique).

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^{k-l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} a(k+1) \, b(n+1-l) \quad (n \geq 0) \,.$$

Démonstration. En développant $(X + Y - XY)^n$ par la formule du binôme et en identifiant le coefficient de $X^k Y^l$, on vérifie que

$$C_n^{k,l} = (-1)^{k+l-n} \frac{n!}{(n-k)!(n-l)!(l+k-n)!} \quad \text{si } n \leq k{+}l, \quad \text{et } C_n^{k,l} = 0 \text{ sinon,}$$

d'où

$$\begin{aligned}(a \bowtie b)(n+1) &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l} \, a(k+1) b(l+1) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n \\ k+l \geq n}} (-1)^{k+l-n} \frac{n!}{(n-k)!(n-l)!(l+k-n)!} \, a(k+1) b(l+1) \\ &= \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^{k-l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} a(k+1) b(n-l+1) \,. \qquad \square\end{aligned}$$

COROLLAIRE 4. *On a la relation*

$$\Phi(a \bowtie b)(z) = v_y \left(\Phi(a)[(\mathrm{Id} - \partial_y)z]\Phi(b)[y+z]\right) . \tag{3.5}$$

Il en résulte que

$$\Phi\left(\alpha^{N-1} \bowtie a\right)(z) = e^{\alpha z}\Phi(a)\left((1-\alpha)z\right) , \tag{3.6}$$

ce qui se traduit par l'identité

$$(\alpha^{N-1} \bowtie a)(n+1) = \alpha^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^k a(k+1) . \tag{3.7}$$

Démonstration. On a

$$e^{(\partial_x + \partial_y - \partial_x\partial_y)z}\Phi(a) = e^{\partial_x(\mathrm{Id} - \partial_y)z}\Phi(a)e^{(\partial_y)z} = \Phi(a)[x + (\mathrm{Id} - \partial_y)z]e^{(\partial_y)z}$$

donc

$$\begin{aligned}\Phi(a \bowtie b)(z) &= (v_x \otimes v_y)\Phi(a)[x + (\mathrm{Id} - \partial_y)z]e^{(\partial_y)z}\Phi(b)\\ &= (v_x \otimes v_y)\Phi(a)[x + (\mathrm{Id} - \partial_y)z]\Phi(b)[y+z]\\ &= v_y \left(\Phi(a)[(\mathrm{Id} - \partial_y)z]\Phi(b)[y+z]\right) .\end{aligned}$$

On a vu que $\Phi(\alpha^{x-1})(z) = e^{\alpha z}$ donc

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha^{x-1} \bowtie a)(z) &= v_y \left(\Phi(\alpha^{x-1})[(\mathrm{Id} - \partial_y)z]\Phi(a)[y+z]\right)\\ &= v_y \left(e^{\alpha(\mathrm{Id} - \partial_y)z}\Phi(a)[y+z]\right)\\ &= e^{\alpha z}v_y \left(e^{-\alpha z\partial_y}\Phi(a)[y+z]\right)\\ &= e^{\alpha z}\sum_{n\geq 0} \frac{(-\alpha z)^n}{n!}\partial^n\Phi(a)(z)\\ &= e^{\alpha z}\Phi(a)\left((1-\alpha)z\right) . \qquad \square\end{aligned}$$

EXEMPLE 11.

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie a\right)(n+1) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a(k+1) .$$

PROPOSITION 10 (Caractérisation des suites invariantes par D). *Une suite $a \in \mathcal{E}^*$ est invariante par D si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme*

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie b ,$$

où la suite $b \in \mathcal{E}^*$ est telle que $b(2k) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Démonstration. On a

$$D(a) = a \Leftrightarrow \Phi\big(D(a)\big) = \Phi(a) \Leftrightarrow e^{z}\Phi(a)(-z) = \Phi(a)(z)\,.$$

Posons $\phi(z) = e^{-\frac{z}{2}}\Phi\big(a(z)\big)$. On a donc $D(a) = a \Leftrightarrow \phi(z) = \phi(-z)$. Dans ce cas, ϕ peut toujours s'écrire

$$\phi(z) = \Phi(b)\Big(\frac{z}{2}\Big) \qquad \text{avec } b(2n) = 0 \text{ pour } n \geq 1\,,$$

et on a alors

$$\Phi(a(z)) = e^{\frac{z}{2}}\phi(z) = e^{\frac{z}{2}}\Phi(b)\Big(\frac{z}{2}\Big) = \Phi\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie b\right)(z)\,. \qquad \square$$

EXEMPLE 12.

a) La suite harmonique s'écrit

$$\frac{1}{N} = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie b$$

avec $b = \frac{1}{N} \bowtie (-1)^{N-1} = (1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots)$.

b) La suite

$$a = \frac{1}{2}(\delta_0 + \mathbf{1}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots)$$

est invariante par D. Elle s'écrit

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie (1, 0, 1, 0, \dots)\,.$$

REMARQUE 5. On comparera le critère d'invariance précédent avec celui donné par Sun ([11] Corollary 3.3 (a)).

REMARQUE 6 (Sommation d'Euler des séries). Pour $q > 0$, on définit la *suite* $a^{(q)}$ par

$$a^{(q)}(n+1) = \frac{1}{(q+1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}a(k+1) \qquad (n \geq 0)\,.$$

D'après [6], la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ est dite (E,q) *sommable* si la série $\sum_{n\geq 1} a^{(q)}(n)$ converge ; on pose alors

$$\sum_{n\geq 1}^{(\mathrm{E},q)} a(n) := \frac{1}{q+1}\sum_{n=0}^{\infty} a^{(q)}(n+1)\,.$$

D'après (3.7), on a l'interprétation suivante de $a^{(q)}$:

$$a^{(q)} = \alpha^{N-1} \bowtie a \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{q}{q+1}\,.$$

On obtient ainsi une reformulation du théorème de Hardy ([6], p. 178–179) :

THÉORÈME (Hardy). *Si la série* $\sum_{n\geq 1} a(n)$ *est convergente alors elle est* (E,q) *sommable et on a*

$$\frac{1}{q+1}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(\frac{q}{q+1}\big)^{N-1} \bowtie a\Big)(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)\,.$$

3.4 HARMONICITÉ

THÉORÈME 2. *Pour toute suite* $a \in \mathcal{E}^*$, *on a la relation*

$$\frac{1}{N} \bowtie a = \frac{1}{N}S(a)\,. \tag{3.8}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $D\big(\frac{1}{N} \bowtie a\big) = D\big(\frac{1}{N}S(a)\big)$. Or, par (2.5), on a $D\big(\frac{1}{N}S(a)\big) = \frac{1}{N}D(a) = D\big(\frac{1}{N}\big)D(a) = D\big(\frac{1}{N} \bowtie a\big)$. $\square$

COROLLAIRE 5. *Pour tout entier* $k \geq 1$,

$$D\big(\frac{1}{N^{k+1}}\big) = \frac{1}{N}SD\big(\frac{1}{N^k}\big)\,.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} D\big(\frac{1}{N^{k+1}}\big) &= \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie(k+1)} = \frac{1}{N} \bowtie \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \\ &= \frac{1}{N}S\left(\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k}\right) = \frac{1}{N}SD\big(\frac{1}{N^k}\big)\,. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLE 13.

$$\frac{1}{N} \bowtie \frac{1}{N} = D\big(\frac{1}{N^2}\big) = \frac{1}{N}H\,,$$

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie 3} = D\big(\frac{1}{N^3}\big) = \frac{1}{N}S\left(\frac{1}{N}H\right) = \frac{1}{2N}(H^2 + H^{(2)})\,.$$

NOTATION. Pour tout $p \in \mathbf{R} - \{-1, -2, \dots\}$, on note $p! = \Gamma(p+1)$; on note $\Gamma(N+p)$ la suite $n \mapsto \Gamma(n+p)$. On pose

$$(N)_p := \frac{\Gamma(N+p)}{\Gamma(N)} .$$

Pour p entier naturel, on a $(N)_0 = \mathbf{1}$, et pour $p \geq 1$

$$(N)_p = N(N+1)\cdots(N+p-1) .$$

Le théorème 2 se généralise alors de la manière suivante :

THÉORÈME 3. *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et tout réel $p \neq -1, -2, -3, \dots$, on a la relation*

$$\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie a = \frac{p!}{(N)_{p+1}} S\left(\frac{(N)_p}{p!}\, a\right), \tag{3.9}$$

ce qui, pour p entier ≥ 0, se traduit par

$$\Big(\frac{p!}{N(N+1)\dots(N+p)} \bowtie a\Big)(n) = \frac{p!}{n(n+1)\dots(n+p)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)\dots(k+p-1)}{p!} a(k) .$$

Démonstration. En appliquant (2.7) avec $p = \alpha - 1$, on obtient

$$D\Big(\frac{1}{N+p}\Big) = \frac{(N-1)!}{(p+1)_N} = \frac{\Gamma(N)\Gamma(p+1)}{\Gamma(N+p+1)} = \frac{p!}{(N)_{p+1}} ,$$

par conséquent,

$$\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie a = D\left(\frac{1}{N+p} D(a)\right) .$$

Posons alors

$$f_{p+1}(z) = \Phi\left(D\Big(\frac{1}{N+p} D(a)\Big)\right)(z) .$$

On a

$$f_{p+1}(z) = e^z \sum_{n \geq 0} \big(D(a)\big)(n+1) \frac{1}{n+1+p} \frac{(-z)^n}{n!}$$

et donc

$$e^{-z} z^{p+1} f_{p+1}(z) = \sum_{n \geq 0} \big(D(a)\big)(n+1)(-1)^n \frac{1}{n+1+p} \frac{z^{n+p+1}}{n!} .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} e^{-z}z^{p+1}f_{p+1}(z) &= \int_0^z t^p \sum_{n\geq 0}\big(D(a)\big)(n+1)(-1)^n \frac{t^n}{n!}dt \\ &= \int_0^z e^{-t}t^p \sum_{n\geq 0} a(n+1)\frac{t^n}{n!}dt \\ &= \int_0^z e^{-t}t^p \Phi(a)(t)dt\,. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f_{p+1}(z) = e^z \frac{1}{z^{p+1}} \int_0^z e^{-t}t^p\Phi(a)(t)dt\,.$$

Par le changement de variable $u = tz$, on a aussi

$$\begin{aligned} f_{p+1}(z) &= \int_0^1 e^{z(1-u)}u^p\Phi(a)(uz)du \\ &= \sum_{k,l}\frac{z^k}{k!}\frac{z^l}{l!}a(k+1)\int_0^1 (1-u)^l u^{p+k}du \\ &= \sum_{k,l}\frac{z^k}{k!}\frac{z^l}{l!}a(k+1)\frac{l!(p+k)!}{(p+k+l+1)!} \\ &= \sum_n \frac{z^n}{n!}\sum_{k+l=n}\frac{n!}{k!l!}a(k+1)\frac{l!(p+k)!}{(p+k+l+1)!} \\ &= \sum_n \frac{z^n}{n!}\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}\frac{(p+k)!}{(p+n+1)!}a(k+1)\,. \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}\frac{(p+k)!}{(p+n+1)!}a(k+1) = \frac{1}{(n+1)\dots(n+1+p)}\sum_{k=1}^{n+1}k(k+1)\dots(k+p-1)\,a(k)$$

ce qui montre que

$$\Phi\left(\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie a\right) = \Phi\left(\frac{1}{(N)_{p+1}}S\big((N)_p a\big)\right) = \Phi\left(\frac{p!}{(N)_{p+1}}S\left(\frac{(N)_p}{p!}a\right)\right)\,. \qquad \square$$

EXEMPLE 14. Pour $p = 1$, on a

$$\frac{1}{N(N+1)} \bowtie a = \frac{1}{N(N+1)}S(Na)$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{N(N+1)} \bowtie a\right)(n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ka(k)\,.$$

On en déduit que

$$\left(\frac{1}{N+1} \bowtie a\right)(n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\,a(k)\,.$$

COROLLAIRE 6. *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et pour tout entier $p \geq 0$,*

$$D\left(\frac{1}{(N)_{p+1}} S(a)\right) = \frac{1}{(N)_{p+1}} S^p\big(D(a)\big)\,. \tag{3.10}$$

Démonstration. Par récurrence sur p. Pour $p = 0$, c'est la formule (2.5). En écrivant $(N)_{p+1} = (N+p)\,(N)_p$, on obtient

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{(N)_{p+1}} S(a)\right) &= D\left(\frac{1}{N+p}\right) \bowtie D\left(\frac{1}{(N)_p} S(a)\right) \\ &= \frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie \frac{1}{(N)_p} S^{p-1}\big(D(a)\big) \\ &= \frac{p!}{(N)_{p+1}} S\left(\frac{(N)_p}{p!} \frac{1}{(N)_p} S^{p-1}\big(D(a)\big)\right) \\ &= \frac{1}{(N)_{p+1}} S^p\big(D(a)\big)\,. \qquad \square \end{aligned}$$

EXEMPLE 15.

a) Pour $a = \dfrac{1}{N}$ et $p = 1$,

$$D\left(\frac{H}{N(N+1)}\right) = \frac{H}{N(N+1)}\,.$$

b) Pour $a = \dfrac{1}{N}$ et $p = 2$,

$$D\left(\frac{H}{N(N+1)(N+2)}\right) = \frac{S(H)}{N(N+1)(N+2)} = \frac{H}{N(N+2)} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\,.$$

c) Pour $a = \dfrac{1}{N^2}$ et $p = 1$,

$$D\left(\frac{H^{(2)}}{N(N+1)}\right) = \frac{1}{N(N+1)} S\left(\frac{1}{N} H\right) = \frac{H^2}{2N(N+1)} + \frac{H^{(2)}}{2N(N+1)}\,.$$

COROLLAIRE 7. *Pour tout réel* $p \neq -1, -2, \dots$, *on a*

$$D\left(\frac{1}{(N+p)^2}\right) = \frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie \frac{p!}{(N)_{p+1}} = \frac{p!}{(N)_{p+1}} S\left(\frac{1}{N+p}\right) .$$

Démonstration. Par (3.9),

$$\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie \frac{p!}{(N)_{p+1}} = \frac{p!}{(N)_{p+1}} S\left(\frac{(N)_p}{p!}\frac{p!}{(N)_{p+1}}\right) = \frac{p!}{(N)_{p+1}} S\left(\frac{1}{N+p}\right) . \qquad \square$$

EXEMPLE 16.

a) Pour $p = 1$,

$$D\left(\frac{1}{(N+1)^2}\right) = \frac{1}{N(N+1)} S\left(\frac{1}{N+1}\right) = \frac{H}{N(N+1)} - \frac{1}{(N+1)^2} ,$$

ce qui peut se réécrire :

$$\frac{H}{N(N+1)} = \frac{1}{(N+1)^2} + D\left(\frac{1}{(N+1)^2}\right) .$$

b) Pour $p = -\frac{1}{2}$,

$$D\left(\frac{1}{\left(N-\frac{1}{2}\right)^2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(N)_{\frac{1}{2}}} S\left(\frac{1}{N-\frac{1}{2}}\right) ,$$

ce qui peut se réécrire :

$$D\left(\frac{1}{(2N-1)^2}\right) = \frac{2^{2N-1}}{N\binom{2N}{N}} O ,$$

c'est-à-dire

$$D\left(\frac{1}{(2N-1)^2}\right)(n) = \frac{2^{2n-1}}{n\binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \qquad \text{(cf. [1], p. 293 (34.3))} .$$

REMARQUE 7. Plus généralement, on peut montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$D\left(\frac{1}{(N+p)^{k+1}}\right) = \frac{N!}{N(p+1)_N} P_k(S_p^{(1)}, \dots, S_p^{(k)}) ,$$

avec, pour $1 \leq m \leq k$,

$$S_p^{(m)}(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(p+j)^m} ,$$

où les $P_k(X_1, \dots, X_k)$ sont les *polynômes de Bell modifiés* (cf. [3], [5]) définis par la fonction génératrice

$$\exp\Big(\sum_{m\geq 1} X_m \frac{x^m}{m}\Big) = \sum_{k\geq 0} P_k(X_1, \dots, X_k)\, x^k .$$

En particulier, pour $p = 0$,

$$D\left(\frac{1}{N^{k+1}}\right) = \frac{1}{N} P_k(H, H^{(2)}, \dots, H^{(k)}) ,$$

et pour $p = -\dfrac{1}{2}$,

$$D\left(\frac{1}{(2N-1)^{k+1}}\right) = \frac{2^{2N-1}}{N\binom{2N}{N}} P_k(O, O^{(2)}, \dots, O^{(k)}) .$$

4. Les sommes harmoniques

On rappelle la propriété d'harmonicité (3.8): $\dfrac{1}{N} \bowtie a = \dfrac{1}{N} S(a)$. Cette propriété justifie la généralisation suivante.

Définition 9. Soit une suite $a \in \mathcal{E}^*$, on définit pour tout entier naturel k, la *somme harmonique* k*-ième* de a notée $S^{(k)}(a)$ par la formule

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie a = \frac{1}{N} S^{(k)}(a) . \tag{4.1}$$

Exemple 17.

$$D\Big(\frac{1}{N^{k+1}}\Big) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie (k+1)} = \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie \frac{1}{N} = \frac{1}{N} S^{(k)}\Big(\frac{1}{N}\Big) . \tag{4.2}$$

D'où

$$S^{(k)}\Big(\frac{1}{N}\Big) = ND\Big(\frac{1}{N^{k+1}}\Big) ,$$

ce qui se traduit par

$$S^{(k)}\Big(\frac{1}{N}\Big)(n) = nD\Big(\frac{1}{N^{k+1}}\Big)(n) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k} .$$

Plus généralement, on a l'identité suivante, PROPOSITION 11. *Pour toute suite* $a \in \mathcal{E}^*$ *et pour* $k \geq 1$,

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m) . \tag{4.3}$$

Démonstration. D'après (4.1) et la définition du produit harmonique,

$$\frac{1}{N} S^{(k)}(a) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie a = D(\frac{1}{N^k} D(a))$$

d'où

$$S^{(k)}(a) = ND(\frac{1}{N^k} D(a)) ,$$

ce qui se traduit par

$$S^{(k)}(a)(n) = nD(\frac{1}{N^k} D(a))(n) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m) . \qquad \square$$

On va à présent donner une autre expression des sommes harmoniques.

PROPOSITION 12. *Pour toute suite* $a \in \mathcal{E}^*$, *on a* $S^{(0)}(a)(n) = na(n)$ *et la relation de récurrence :*

$$S^{(k+1)}(a)(n) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} S^{(k)}(a)(m) \qquad \text{pour } k \geq 0 . \tag{4.4}$$

Il en résulte que $S^{(1)}(a) = S(a)$, *et pour* $k \geq 1$,

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}} a(n_k) . \tag{4.5}$$

Démonstration. On a $\delta_0 \bowtie a = \frac{1}{N} S^{(0)}(a)$, c'est-à-dire $S^{(0)}(a) = Na$. Pour $k \geq 0$, on peut écrire par (3.8) et (4.1),

$$\frac{1}{N} S^{(k+1)}(a) := \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie (k+1)} \bowtie a = \frac{1}{N} \bowtie \left(\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie a \right) = \frac{1}{N} S \left(\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie a \right) .$$

On en déduit la relation de récurrence

$$S^{(k+1)}(a) = S \left(\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie a \right) = S \left(\frac{1}{N} S^{(k)}(a) \right)$$

qui se traduit par (4.4). La formule (4.5) s'en déduit aussitôt par récurrence. $\square$

EXEMPLE 18.

$$S^{(0)}\big(\frac{1}{N}\big) = \mathbf{1}\,, \qquad S^{(1)}\big(\frac{1}{N}\big) = H, \qquad S^{(2)}\big(\frac{1}{N}\big) = S\big(\frac{1}{N}H\big) = \frac{1}{2}(H^2 + H^{(2)})\,.$$

THÉORÈME 4. *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, et pour $k \geq 1$, on a l'identité*

$$\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}}\, a(n_k) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1}\binom{n}{m}\frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m)\,. \tag{4.6}$$

Démonstration. La formule (4.6) résulte des formules (4.3) et (4.5). □

COROLLAIRE 8 (Formule de Dilcher généralisée). *Pour $k \geq 1$ et $q \geq 1$,*

$$\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}}\frac{1}{n_k^q} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1}\binom{n}{m}\frac{1}{m^k} \sum_{m\geq m_1\geq\cdots\geq m_{q-1}\geq 1} \frac{1}{m_1 \ldots m_{q-1}}\,. \tag{4.7}$$

Démonstration. On applique (4.6) à la suite $a = \dfrac{1}{N^q}$. Par (4.2), on a $D(a) = \dfrac{1}{N} S^{(q-1)}\big(\dfrac{1}{N}\big)$. □

EXEMPLE 19.

a) $a = \dfrac{1}{N^2}$,

$$\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}}\frac{1}{n_k^2} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1}\binom{n}{m}\frac{H(m)}{m^k}\,,$$

b) $a = \dfrac{1}{N^3}$,

$$\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}}\frac{1}{n_k^3} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1}\binom{n}{m}\frac{\big(H(m)\big)^2 + H^{(2)}(m)}{2m^k}\,,$$

c) $a = \dfrac{1}{2N-1}$,

$$\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}}\frac{1}{2n_k-1} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1}\binom{n}{m}\frac{2^{2m-1}}{m^k\binom{2m}{m}}\,,$$

d) $a = \dfrac{1}{(2N-1)^2}$,

$$\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}}\frac{1}{(2n_k-1)^2} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1}\binom{n}{m}\frac{2^{2m-1}O(m)}{m^k\binom{2m}{m}}\,.$$

5. La transformation d'Euler

5.1 Transformation d'Euler formelle dans $\mathbf{C}[[z]]$

Théorème 5. *Soit $a \in \mathcal{E}^*$, on a la relation dans* $\mathbf{C}[[z]]$

$$\sum_{n\geq 1} D(a)(n)z^n = -\sum_{n\geq 1} a(n)\left(\frac{z}{z-1}\right)^n. \tag{5.1}$$

Démonstration. Par définition de $D(a)$, on a

$$\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^n = \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a(k+1).$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} z^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a(k+1) &= \sum_{k\geq 0} (-1)^k a(k+1) z^k \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} z^{n-k} \\
&= \sum_{k\geq 0} (-1)^k a(k+1) z^k (1-z)^{-k-1} \\
&= \frac{1}{1-z} \sum_{k\geq 0} (-1)^k a(k+1) \left(\frac{z}{1-z}\right)^k \\
&= \frac{1}{1-z} \sum_{k\geq 0} a(k+1) \left(\frac{z}{z-1}\right)^k.
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} = \frac{z}{1-z} \sum_{k\geq 0} a(k+1) \left(\frac{z}{z-1}\right)^k$$

qui est la relation cherchée. □

Exemple 20. D'après les exemples 15 a), b), c) et 16 a), on a les relations suivantes :

a) $$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{H(n)}{n(n+1)} z^n &= -\sum_{n\geq 1} \frac{H(n)}{n(n+1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)^2} z^n - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n,\end{aligned}$$

b) $$\sum_{n\geq 1} \frac{H(n)}{n(n+2)} z^n - \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{(n+1)(n+2)} = -\sum_{n\geq 1} \frac{H(n)}{n(n+1)(n+2)} (\frac{z}{z-1})^n,$$

c) $\displaystyle \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{\big(H(n)\big)^2}{n(n+1)}z^n+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{H^{(2)}(n)}{n(n+1)}z^n=-\sum_{n\geq 1}\frac{H^{(2)}(n)}{n(n+1)}(\frac{z}{z-1})^n\,.$

COROLLAIRE 9. *Pour toute suite $a\in\mathcal{E}^*$ et tout entier naturel k, on a l'identité*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{D(a)(n)}{n^k}z^n=-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}S^{(k)}(a)(n)\left(\frac{z}{z-1}\right)^n. \tag{5.2}$$

Démonstration. D'après (4.1), on a $\frac{1}{N^k}D(a)=D\big(\frac{1}{N}S^{(k)}(a)\big)$. La formule (5.2) résulte alors de (5.1). $\square$

EXEMPLE 21.

a) En appliquant (5.2) avec $a=\frac{1}{N}$, on obtient pour $k\geq 1$,

$$\mathrm{Li}_{k+1}(z)=-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1}\frac{1}{n_1\ldots n_k}\left(\frac{z}{z-1}\right)^n, \tag{5.3}$$

où Li_k désigne (formellement) le *polylogarithme*

$$\mathrm{Li}_k(z):=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^k}z^n\,.$$

b) En appliquant (5.2) avec $a=\frac{1}{N^2}$, on obtient pour $k\geq 1$,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H(n)}{n^{k+1}}z^n=-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1}\frac{1}{n_1\ldots n_{k-1}}\frac{1}{n_k^2}\left(\frac{z}{z-1}\right)^n. \tag{5.4}$$

c) En appliquant (5.2) avec $a=\frac{1}{2N-1}$, on obtient pour $k\geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^{k+1}}z^n \\ =-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1}\frac{1}{n_1\ldots n_{k-1}}\frac{1}{2n_k-1}\left(\frac{z}{z-1}\right)^n.\end{aligned} \tag{5.5}$$

d) En appliquant (5.2) avec $a = \dfrac{1}{(2N-1)^2}$, on obtient pour $k \geq 1$,

$$(5.6)\quad \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \frac{O(n)}{n^{k+1}} z^n = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} \frac{1}{(2n_k-1)^2} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n .$$

5.2 Transformation d'Euler analytique

Théorème 6. *Soit une suite $a \in \mathcal{E}^*$. Si la série $\sum_{n\geq 1} a(n)z^n$ est convergente dans le disque unité $\mathbf{D}(0,1)$ alors la série $\sum_{n\geq 1} D(a)(n)z^n$ est convergente dans le disque ouvert $\mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$ et on a pour tout $z \in \mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D(a)(n)z^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} a(n)\left(\frac{z}{z-1}\right)^n .$$

L'application $z \mapsto \dfrac{z}{z-1}$ étant involutive, il en résulte que si la série $\sum_{n\geq 1} D(a)(n)z^n$ est convergente dans le disque $\mathbf{D}(0,1)$ alors la série $\sum_{n\geq 1} a(n)z^n$ est convergente dans le disque ouvert $\mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$ et on a pour tout $z \in \mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a(n)z^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} D(a)(n)\left(\frac{z}{z-1}\right)^n .$$

Démonstration. Pour $z \in \mathbf{D}(0,1)$, posons $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n+1)z^n$. On a pour tout $0 < r < 1$ et pour tout entier $k \geq 0$

$$a(k+1) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}(0,r)} \frac{A(u)}{u^{k+1}}du ,$$

où $\mathbf{C}(0,r)$ est le cercle paramétré par $t \mapsto re^{it}$, avec $t \in [0,2\pi]$. On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$D(a)(n+1) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}(0,r)} \left(1-\frac{1}{u}\right)^n \frac{A(u)}{u}du .$$

On va montrer que

$$\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}(0,r)} \sum_{n\geq 0} \left(z\big(1-\frac{1}{u}\big)\right)^n A(u)\frac{z}{u}du .$$

Pour cela, il suffit que la série $\sum_{n\geq 0}\big(z\big(1-\frac{1}{u}\big)\big)^n A(u)\frac{z}{u}$ soit normalement convergente sur le cercle $\mathbf{C}(0,r)$, ce qui est le cas si

$$|z| < \left|\frac{u}{u-1}\right| .$$

Or, si $u\in\mathbf{C}(0,r)$, on a $\dfrac{u}{u-1}\in\mathbf{C}\big(\dfrac{r^2}{r^2-1},\dfrac{r}{1-r^2}\big)$, donc $\left|\dfrac{u}{u-1}\right|\geq\dfrac{r}{r+1}$.
On en déduit que si $|z|<\dfrac{r}{r+1}$, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}(0,r)}\sum_{n\geq 0}\big(z\big(1-\frac{1}{u}\big)\big)^n A(u)\frac{z}{u}du\\ &= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}(0,r)}\frac{z}{uz-z-u}A(u)du\,.\end{aligned}$$

Comme $0<r<1$, ceci prouve que la série $\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1}$ est convergente dans le disque $\mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$. D'autre part,

$$\frac{z}{uz-z-u}A(u) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{u}\frac{z}{z-1}}\frac{A(u)}{u} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{z-1}\right)^{n+1}\frac{A(u)}{u^{n+1}}\,.$$

Cette dernière série converge normalement sur $\mathbf{C}(0,r)$ si

$$\left|\frac{z}{z-1}\right| < |u| = r$$

ce qui est le cas si $z\in\mathbf{D}\big(\dfrac{r^2}{r^2-1},\dfrac{r}{1-r^2}\big)$.

En conclusion, si $z\in\mathbf{D}\big(\dfrac{r^2}{r^2-1},\dfrac{r}{1-r^2}\big)\cap\mathbf{D}\big(0,\dfrac{r}{r+1}\big) = \mathbf{D}\big(0,\dfrac{r}{r+1}\big)$, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} &= \sum_{n\geq 0}\big(\frac{z}{z-1}\big)^{n+1}\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}(0,r)}\frac{A(u)}{u^{n+1}}du\\ &= -\sum_{n\geq 0}\big(\frac{z}{z-1}\big)^{n+1}a(n+1)\,.\end{aligned}$$

Comme $0<r<1$, ceci prouve qu'on a l'égalité dans le disque $\mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$. □

Par le Lemme d'Abel sur les séries entières, on déduit du théorème précédent le corollaire suivant.

COROLLAIRE 10.

(1) *Si les séries* $\sum_{n\geq 1} a(n)(-1)^n$ *et* $\sum_{n\geq 1} D(a)(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *convergent, alors on a l'égalité*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D(a)(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a(n)\,.$$

(2) *Si les séries* $\sum_{n\geq 1} D(a)(n)(-1)^n$ *et* $\sum_{n\geq 1} a(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *convergent, alors on a l'égalité*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}D(a)(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n\,.$$

EXEMPLE 22. D'après l'exemple 20 a), on a (cf. [1], p. 248)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H(n)}{2^n n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}H(n)}{n(n+1)} = 2\mathrm{Li}_2\big(\frac{1}{2}\big) + \mathrm{Li}_2(-1) = \frac{1}{2}\zeta(2) - \log^2(2)\,.$$

COROLLAIRE 11. *Si la série* $\sum_{n\geq 1} a(n)z^n$ *est convergente dans le disque* $\mathbf{D}(0,1)$*, alors on a pour tout* $z \in \mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$ *et pour* $k \geq 0$*,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D(a)(n)}{n^k}z^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}S^{(k)}(a)(n)\left(\frac{z}{z-1}\right)^n\,. \tag{5.7}$$

En particulier, pour $k = 1$*,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D(a)(n)}{n}z^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}S(a)(n)\left(\frac{z}{z-1}\right)^n\,. \tag{5.8}$$

De plus, si les séries $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{D(a)(n)}{n^k}\dfrac{1}{2^n}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}S^{(k)}(a)(n)(-1)^n$ *convergent, alors on a l'égalité*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{D(a)(n)}{2^n n^k}\,. \tag{5.9}$$

Démonstration. Si la série $\sum_{n\geq 1} a(n)z^n$ converge dans le disque $\mathbf{D}(0,1)$, alors il en est de même de la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}S^{(k)}(a)(n)z^n$. Cela résulte de la relation de récurrence (cf. (4.4)):

$$\frac{1}{N}S^{(k+1)}(a) = \frac{1}{N}S\left(\frac{1}{N}S^{(k)}(a)\right),$$

et du fait que si une série $\sum_{n\geq 1} b(n)z^n$ converge dans le disque $\mathbf{D}(0,1)$, alors il en est de même de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} S(b)(n)\, z^n$. On peut alors appliquer le Théorème 6 car $D\left(\frac{1}{N}S^{(k)}(a)\right) = \frac{1}{N^k}D(a)$. $\square$

EXEMPLE 23.

a) Pour $a = \frac{1}{N}$, on a $D(a) = a$, d'où pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{H(n)}{n} = \mathrm{Li}_2\big(\tfrac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2}\log^2(2) \quad \text{(cf. [1], p.248)},$$

et pour $k = 2$, (cf. [1],p.249)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{H(m)}{m} = \mathrm{Li}_3\big(\tfrac{1}{2}\big) = \frac{1}{6}(\log 2)^3 - \frac{1}{2}\zeta(2)\log 2 + \frac{7}{8}\zeta(3)\,.$$

b) Pour $a = \frac{1}{N^2}$, on a $D(a) = \frac{1}{N}H$, d'où pour $k = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H(n)}{2^n n} = \frac{1}{2}\zeta(2)\,,$$

pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{H^{(2)}(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H(n)}{2^n n^2} = \zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2)\log 2 \quad \text{(cf. [1], p.258)},$$

et pour $k = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{H^{(2)}(m)}{m} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H(n)}{2^n n^3}\,.$$

c) Pour $a = \frac{1}{2N-1}$, on a $D(a) = \frac{1}{N}\frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}}$, d'où pour $k = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\binom{2n}{n}} = \frac{\pi}{4} \quad \text{(formule d'Euler: cf. [8])},$$

pour $k = 1$, (formule de Jean Bernoulli : cf. [8])

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{O(n)}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{16}\,,$$

pour $k=2$, (cf. [4] (2.67))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{O(m)}{m}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3\binom{2n}{n}}=\frac{\pi^2}{16}\log 2+\frac{\pi G}{2}-\frac{35}{32}\zeta(3),$$

où G désigne la constante de Catalan :

$$G=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}.$$

d) Pour $a=\dfrac{1}{(2N-1)^2}$, on a $D(a)=\dfrac{1}{N}\dfrac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}}O$, d'où pour $k=0$,

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}\frac{O(n)}{n}=G$$

(formule de Ramanujan pour la constante de Catalan : cf. [1], p. 293–294).
Pour $k=1$, (cf. [4] (2.36) et (2.37))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}O^{(2)}(n)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}\frac{O(n)}{n^2}=\frac{7}{4}\zeta(3)-\frac{\pi G}{2},$$

pour $k=2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{O^{(2)}(m)}{m}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}\frac{O(n)}{n^3}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNDT, B.C. *Ramanujan's Notebooks. Part I.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[2] BOYADZHIEV, K.N. Harmonic number identities via Euler's transform. *J. Integer Seq. 12* (2009), Article 09.6.1, 8 pp.

[3] CANDELPERGHER, B. and M.-A. COPPO. A new class of identities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values. *Ramanujan J. 27* (2012), 305–328.

[4] DAVYDYCHEV, A.I. and M.YU. KALMYKOV. Massive Feynman diagrams and inverse binomial sums. *Nuclear Phys. B 699* (2004), 3–64.

[5] FLAJOLET, P. and R. SEDGEWICK. Mellin transforms and asymptotics : finite differences and Rice's integrals. *Theoret. Comput. Sci. 144* (1995), 101–124.

[6] HARDY, G.H. *Divergent Series*. Oxford, Clarendon Press, 1963. (First edition 1949, third, corrected edition published in 1963.)

[7] HENRICI, P. *Applied and Computational Complex Analysis*. Volume 1 : Power series–integration–conformal mapping–location of zeros. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York-London-Sydney, 1974.

[8] LEHMER, D.H. Interesting series involving the central binomial coefficient. *Amer. Math. Monthly 92* (1985), 449–457.

[9] LOEB, D.E. and G.-C. ROTA. Formal power series of logarithmic type. *Adv. Math. 75* (1989), 1–118.

[10] ROMAN, S. The logarithmic binomial formula. *Amer. Math. Monthly 99* (1992), 641–648.

[11] SUN, Z.-H. Invariant sequences under binomial transformation. *Fibonacci Quart. 39* (2001), 324–333.

(Reçu le 29 juin 2011)

Bernard Candelpergher et Marc-Antoine Coppo

Université de Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2
France
e-mail : Bernard.Candelpergher@unice.fr
e-mail : Marc-Antoine.Coppo@unice.fr