L'Enseignement Mathématique (2) 60 (2014), 417–420 DOI 10.4171/LEM/60-3/4-8

Sur la théorie d'Ahlfors des surfaces

Julien DUVAL*

Abstract. On revisite la théorie d'Ahlfors de recouvrement des surfaces à l'aide du théorème de Stokes

Mathematics Subject Classification (2010). 30C25, 30D35.

Keywords. Covering surfaces, Riemann–Hurwitz formula, value distribution theory.

Contexte. On présente la théorie d'Ahlfors (voir par exemple [Th], [Ne]) de manière asymptotique. C'est sa forme utile et les formules sont plus simples. Pour des rappels sur les surfaces de Riemann on renvoie à [Re].

Soit $f_n : \Sigma_n \to \Sigma$ une suite d'applications holomorphes non constantes entre deux surfaces de Riemann compactes connexes Σ_n (avec bord) et Σ (sans bord). On munit Σ d'une métrique d'aire totale 1 qui induit via f_n une pseudométrique sur Σ_n. Dans la suite on suppose que la longueur l_n du bord de Σ_n devient négligeable devant son aire a_n.

Hypothèse. $l_n = o(a_n)$.

On note $\lesssim$ ou $\sim$ une inégalité ou égalité à $o(a_n)$ près.

En conséquence, si θ est une 2-forme sur Σ d'intégrale 1 alors $\int_{\Sigma_n} f_n^*\theta \sim a_n$. En effet θ est cohomologue à la forme d'aire ω, donc $\theta - \omega = d\alpha$ et par le théorème de Stokes $\int_{\Sigma_n} f_n^*\theta - a_n = \int_{\partial\Sigma_n} f_n^*\alpha$ qui est contrôlée par l_n. Une autre manière d'écrire ceci est $\int_\Sigma d_n\theta \sim a_n$ où $d_n(p)$ est le nombre de points dans $f_n^{-1}(p)$.

Dans ce contexte la théorie d'Ahlfors dit que f_n se comporte presque comme un revêtement ramifié de degré a_n. On a une inégalité de Riemann-Hurwitz sur les caractéristiques d'Euler.

* L'auteur remercie chaleureusement A. Eremenko pour ses remarques sur une version préliminaire de ce texte.

Inégalité asymptotique. $\chi(\Sigma_n) \lesssim a_n \chi(\Sigma)$.

Une version relative de cette inégalité donne le théorème des îles, qui est le pendant géométrique de la théorie de Nevanlinna de distribution des valeurs. On suppose ici que Σ_n est un disque et Σ la sphère de Riemann. Fixons trois disques topologiques disjoints dans Σ et appelons *île* toute composante connexe de la préimage par f_n d'un de ces disques sur laquelle f_n est propre. Soit i_n le nombre total d'îles au-dessus des disques.

Théorème des îles. $i_n \gtrsim a_n$.

En particulier une telle suite ne peut éviter trois points distincts. Par un argument longueur-aire (voir plus bas) Ahlfors en déduit le théorème de Picard, l'absence d'application entière non constante à valeurs dans la sphère de Riemann privée de trois points. De la même manière l'inégalité asymptotique donne l'absence d'application entière non constante à valeurs dans Σ si $\chi(\Sigma) < 0$.

On va voir que ces deux résultats proviennent du fait que f_n se comporte vraiment comme un revêtement non ramifié de degré a_n au-dessus d'un graphe Γ dans Σ, quitte à le perturber un peu.

Égalité asymptotique. $\chi(f_n^{-1}(\Gamma)) \sim a_n \chi(\Gamma)$.

Ici Γ est une réunion finie d'arcs γ se coupant transversalement. La perturbation (dépendant de n) s'obtient en déplaçant un peu les arcs parallèlement à eux-mêmes. La préimage $f_n^{-1}(\gamma)$ d'un arc évitant les valeurs critiques de f_n se scinde en *bons arcs* (ceux se projetant homéomorphiquement via f_n sur γ) et en *mauvais arcs* (ceux rencontrant le bord $\partial\Sigma_n$). L'égalité asymptotique résulte du fait suivant.

Fait. *Après perturbation $f_n^{-1}(\gamma)$ contient $\sim a_n$ bons arcs et $o(a_n)$ mauvais arcs.*

Pour ceci paramétrons un voisinage de γ par un rectangle fin horizontal R du plan. Les perturbations de γ apparaissent comme des segments horizontaux $\gamma_t = \pi^{-1}(t)$ où π est la projection sur l'axe vertical. Le nombre de mauvais arcs au-dessus de γ_t est estimé par le nombre de points de $f_n(\partial\Sigma_n)$ dans γ_t. Or $\int \mathrm{card}(f_n(\partial\Sigma_n) \cap \gamma_t)dt = \mathrm{long}(\pi(f_n(\partial\Sigma_n) \cap R))$ où la longueur est comptée avec multiplicité. Cette intégrale est donc contrôlée par l_n et on peut trouver une perturbation γ_{t_n} avec $o(a_n)$ mauvais arcs. Par le lemme de Sard on peut même supposer γ_{t_n} transverse à $f_n(\partial\Sigma_n)$.

Regardons les bons arcs au-dessus de γ_{t_n}. Rappelons que $d_n(p) = \mathrm{card}(f_n^{-1}(p))$. Soit β une 1-forme à support compact dans R ne dépendant que de la variable horizontale et d'intégrale 1 sur γ_t. On va voir que $\int_{\gamma_{t_n}} d_n\beta \sim a_n$. Cela suffit car ainsi $d_n \gtrsim a_n$ en un point de γ_{t_n}. Les mauvais arcs étant peu nombreux, on a donc $\gtrsim a_n$ bons arcs au-dessus de γ_{t_n}, puis $\sim a_n$ par l'estimée intégrale. Montrons-la. Soit $\delta(t)$ une fonction positive ou nulle d'intégrale 1 à support compact et $\delta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\delta \circ h_\epsilon$ l'approximation de l'unité correspondante en t_n (h_ϵ est la dilatation centrée en t_n de rapport $\frac{1}{\epsilon}$). On a $\beta \wedge \delta_\epsilon dt - \omega = d\alpha_\epsilon$ où α_ϵ est une 1-forme *uniformément bornée*. Par exemple $\alpha_\epsilon = \alpha + (\phi - \phi \circ h_\epsilon)\beta$ où ϕ est une primitive de δ et $d\alpha = \beta \wedge \delta dt - \omega$. Donc $\int(\int_{\gamma_t} d_n\beta)\delta_\epsilon dt - a_n$ est contrôlée uniformément par l_n. Comme $t \to \int_{\gamma_t} d_n\beta$ est continue en t_n (par transversalité de γ_{t_n} au bord), l'estimée s'obtient par passage à la limite en ϵ.

Ceci entraîne l'égalité asymptotique. Par le fait il suffit de voir que $\chi(\Gamma_n) \sim a_n\chi(\Gamma)$ si Γ_n s'obtient de $f_n^{-1}(\Gamma)$ en supprimant les mauvais arcs (après perturbation). Maintenant $\chi(\Gamma) = e - v$ où e est le nombre d'arcs et v le nombre d'intersections dans Γ. Le nombre d'arcs de Γ_n est $\sim a_n e$. De plus chaque intersection p de deux arcs γ, γ' de Γ produit $\sim a_n$ intersections dans Γ_n. En effet il y a $\sim 2a_n$ bons arcs au-dessus de γ et γ' mais seulement $\sim a_n$ points au-dessus de p. Donc $\chi(\Gamma_n) \sim a_n(e - v) = a_n\chi(\Gamma)$.

Pour le théorème des îles. Voici comment le déduire. On place un graphe Γ en forme de figure huit dans la sphère de Riemann de sorte que chacune des composantes connexes du complémentaire de Γ contienne un des disques topologiques. Par l'égalité asymptotique (notations ci-dessus) $\chi(\Gamma_n) \sim -a_n$ car $\chi(\Gamma) = -1$. Le complémentaire de Γ_n dans le disque Σ_n consiste en une composante connexe C_0 touchant le bord et un certain nombre de composantes connexes C à l'intérieur de Σ_n. Nécessairement $\chi(C_0) \leq 0$ et $\chi(C) \leq 1$ car C_0 a au moins deux composantes de bord et C une. Par ailleurs, par construction chaque composante C contient une île. En effet $f_n(\partial C) \subset \Gamma$, donc $f_n(C)$ couvre une composante du complémentaire de Γ par le principe du maximum. L'égalité en caractéristique d'Euler $\chi(\Sigma_n) = \chi(C_0) + \chi(\Gamma_n) + \sum \chi(C)$ donne $1 \lesssim -a_n + i_n$.

Pour l'inégalité asymptotique. Elle suit le même schéma. On prend pour Γ une dissection de Σ, i.e. un bouquet de $2g$ cercles (si g est le genre de Σ) dont le complémentaire est un disque topologique. On a $\chi(\Sigma) = \chi(\Gamma) + 1$. On construit Γ_n, les composantes C_0 touchant $\partial\Sigma_n$ et C comme plus haut. Par l'égalité asymptotique $\chi(\Gamma_n) \sim a_n\chi(\Gamma)$. Par ailleurs le nombre de composantes C est au plus a_n. En effet une telle composante se projette proprement sur le disque donc $\int_C f_n^*\omega = \deg(f_n|_C) \geq 1$. L'égalité en caractéristique d'Euler donne $\chi(\Sigma_n) \leq \chi(\Gamma_n) + \sum \chi(C) \lesssim a_n\chi(\Gamma) + a_n = a_n\chi(\Sigma)$.

Ramifications. On peut y ajouter un terme de ramification. La formule de Riemann-Hurwitz pour $f_n|_C$ donne $\chi(C) + \mathrm{ram}(f_n|_C) = \deg(f_n|_C)$. Soit $r_n =$

$\sum \mathrm{ram}(f_n|_C)$. C'est la ramification significative, celle loin du bord $\partial\Sigma_n$. Comme plus haut $\sum \deg(f_n|_C) \leq a_n$. Donc $\chi(\Sigma_n) + r_n \lesssim a_n \chi(\Sigma)$.

Argument longueur-aire. Rappelons au passage comment une application entière non constante $f\colon \mathbf{C} \to \Sigma$ produit une suite de disques concentriques dans $\mathbf{C}$ satisfaisant l'hypothèse. On note $h|dz|$ la pseudométrique induite par f sur $\mathbf{C}$, $a(r)$ l'aire du disque centré en 0 de rayon r et $l(r)$ la longueur de son bord. En coordonnées polaires $a' = \int_0^{2\pi} h^2 r d\theta$ et $l = \int_0^{2\pi} hrd\theta$. Par Cauchy–Schwarz $l^2 \leq 2\pi r a'$. Donc $\int_1^{\infty} (\frac{l}{a})^2 \frac{dr}{r} \leq \frac{2\pi}{a(1)} < +\infty$. On en déduit bien une suite r_n telle que $l(r_n) = o(a(r_n))$.

Cas relatif. Terminons par une version relative de l'inégalité asymptotique. Soit $f_n\colon \Sigma_n \to \Sigma$ une suite d'applications holomorphes non constantes entre deux surfaces de Riemann compactes connexes à bord. On munit Σ d'une métrique d'aire totale 1 induisant une pseudométrique sur Σ_n. On suppose la longueur l_n de son bord relatif $\partial\Sigma_n \setminus f_n^{-1}(\partial\Sigma)$ négligeable devant son aire a_n. Alors $\chi(\Sigma_n) \lesssim a_n \chi(\Sigma)$. La démonstration est identique. On remarque encore que $\int_{\Sigma_n} f_n^* \theta \sim a_n$ si θ est une 2-forme sur Σ d'intégrale 1. En effet une 2-forme d'intégrale nulle sur Σ possède une primitive nulle sur $\partial\Sigma$. Puis on établit une égalité asymptotique de la forme $\chi(\Gamma_n) \sim a_n \chi(\Gamma)$ pour un graphe Γ dans Σ disjoint de $\partial\Sigma$. Enfin on applique celle-ci à un bouquet de $2g+b-1$ cercles Γ sur lequel Σ se rétracte (si g est le genre de Σ et b le nombre de composantes de son bord). On obtient $\chi(\Sigma_n) \leq \chi(\Gamma_n) \sim a_n \chi(\Gamma) = a_n \chi(\Sigma)$.

Références

[Th] H. DE THÉLIN, Une démonstration du théorème de recouvrement des surfaces d'Ahlfors, *Enseign. Math.* **51** (2005), 203–209. Zbl 1125.30027

[Ne] R. NEVANLINNA, *Analytic functions*, Grund. Math. Wiss. 162, Springer (1970), Berlin. Zbl 0199.12501 MR 0279280

[Re] E. REYSSAT, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progr. Math. 77, Birkhäuser (1989) Boston. Zbl 0689.30001 MR 1034955

(*Reçu le 4 novembre 2013*)

Julien DUVAL, Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France

e-mail: julien.duval@math.u-psud.fr