L'Enseignement Mathématique (2) 61 (2015), 461–481 DOI 10.4171/LEM/61-3/4-8

La trace de Dixmier et autres traces

Alain Guichardet

Abstract. J. Dixmier published in 1966 a short note devoted to the construction of a "non normal trace", i.e. a linear form on L(H) (set of all bounded operators in a Hilbert space H), possessing all the algebraic properties of the standard trace, but lacking of some continuity property. We expose in details the construction of the trace, as well as the functional analysis tools used by Dixmier, then the utilization of the Dixmier trace by A. Connes in his Non Commutative Geometry, and also some generalizations to certain von Neumann algebras, other than L(H).

Mathematics Subject Classification (2010). Primary : 46L52, 40C99, 47L20, 46L99, 58B34.

Keywords. Dixmier trace, Banach limit, Operator ideals, Dixmier ideal, Fredholm module.

1. Introduction

L'expression au singulier "la trace de Dixmier" est un peu trompeuse, car il y en a en réalité un grand nombre, à cause de l'intervention de l'axiome du choix ; mais l'emploi du singulier est amplement justifié par le fait que, dans de nombreux cas intéressants, les circonstances imposent le choix de l'une d'entre elles.

Quoiqu'il en soit, l'histoire de cette trace, ou de ces traces, peut être présentée sous la forme d'un arbre dont on examinera le tronc, les racines et les branches.

Le tronc de notre arbre est aussi court que dense et fondamental : c'est la note de Dixmier (1966) [1] aux Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de 1966, réduite à deux pages : "Existence de traces non normales". On exposera la construction de ces traces et quelques-unes de leurs propriétés. Pour construire ses traces, Dixmier met en œuvre des outils de deux sortes.

1. Les références à la littérature sont données par le nom de l'auteur suivi de l'année de publication. La seule ambiguité pourrait être Hersch (1961), mais les deux articles concernés traitent de la même question.

- Une propriété des valeurs propres d'un opérateur linéaire compact positif A dans un espace hilbertien H : notant $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq 0$ ces valeurs propres comptées un nombre de fois égal à leurs multiplicités, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k = \sup_{P \in \Pi_n} (\mathrm{Tr}\,(PAP))$$

où Π_n désigne l'ensemble des projecteurs orthogonaux de rang n dans H.

- Une forme linéaire, notée LIM, sur l'espace $l^{\infty}(\mathbb{N}^*)$ des suites bornées $s = (s_1, s_2, \ldots)$ de nombres réels, jouissant des propriétés suivantes :
  (a) $\mathrm{LIM}\,(s) \geq 0$ si $s \geq 0$
  (b) $\mathrm{LIM}\,(1, 1, \ldots) = 1$
  (c) si $s, t \in l^{\infty}(\mathbb{N}^*)$ et si $s_n - t_n \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $\mathrm{LIM}\,(s) = \mathrm{LIM}\,(t)$
  (d) $\mathrm{LIM}\,(s_1, s_2, \ldots) = \mathrm{LIM}\,(s_1, s_1, s_2, s_2, s_3, s_3, \ldots)$, propriété essentielle pour démontrer la linéarité de la trace qui sera construite.

Les conditions (a), (b), (c) définissent la notion de *limite généralisée* (voir ci-dessous n° 2.3).

Les racines de notre arbre seront consacrées à la construction de ces outils, et ce sera l'occasion d'assister à la naissance de ce que l'on a appelé par la suite *analyse fonctionnelle* ; nous en distinguerons deux sortes :

- opérateurs compacts dans les espaces hilbertiens, spectres, traces ; travaux de Fredholm, Hilbert, Schmidt, Riesz, Fischer, Courant, Hersch ;
- intégration, limites généralisées ; travaux de Lebesgue, Banach, Hahn, von Neumann, Zorn.

Le livre "Leçons d'analyse fonctionnelle" de Riesz et Nagy (1965) constitue une bonne introduction à l'Analyse fonctionnelle, contenant l'essentiel de ce que nous utiliserons ici.

Quant aux branches issues du tronc de notre arbre, ce sera d'abord l'utilisation de la trace de Dixmier par A. Connes dans la construction de sa Géométrie non commutative, ce qui nous amènera à présenter rapidement les modules de Fredholm qui y jouent un rôle essentiel ; ce sera ensuite diverses généralisations dans le cadre des algèbres de von Neumann (M. Benameur, T. Fack, A.L. Carey et altri) ; le lecteur verra ici le rôle important que continue de jouer la notion de trace de Dixmier. On espère aussi – espoir peut-être utopique ! – donner ici au lecteur non spécialiste une petite idée des objets qui figurent dans ces vastes théories, et qui reposent sur un heureux mélange d'Analyse fonctionnelle, de Géométrie différentielle et de Topologie algébrique.

Mes remerciements vont à T. Fack, A. Carey et P. Cartier, dont les aides m'ont été précieuses, ainsi qu'au rapporteur pour ses très utiles suggestions.

2. Les racines de l'arbre

2.1. Opérateurs compacts, spectres, traces.

2.1.1. Origines de la théorie. La théorie des opérateurs compacts est issue de celle des équations différentielles de la physique mathématique, tout particulièrement de l'équation de Laplace : on appelle *résolvante* d'un opérateur différentiel D l'opérateur $A_\lambda = (D - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{-1}$, lorsqu'il est défini, où λ est un paramètre complexe ; dans les bons cas, cet opérateur est un opérateur intégral ; sans vouloir exposer la théorie, montrons comment cela fonctionne sur un exemple simple.

Considérons l'opérateur différentiel $D = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ sur l'intervalle $[0,1]$ avec conditions au bord $f(0) = f(1) = 0$; on cherche à résoudre *l'équation de Sturm-Liouville* $Df - \rho^2 f = g$ où g est une fonction donnée et ρ un paramètre réel > 0. Les valeurs propres de D sont les nombres $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$, de multiplicité 1, avec fonctions propres $\sin(n\pi x)$. La solution de notre équation est la suivante, si ρ^2 n'est pas valeur propre :

$$f(x) = \int_0^1 K_\rho(x,y)\, g(y)\, \mathrm{d}y$$

où le *noyau* K_ρ est donné par

$$K_\rho(x,y) = \begin{cases} -(\rho \sin \rho)^{-1} \sin \rho x \cdot \sin \rho(1-y) & \text{si} \quad x \leq y \\[2ex] -(\rho \sin \rho)^{-1} \sin \rho y \cdot \sin \rho(1-x) & \text{si} \quad y \leq x\,. \end{cases}$$

On voit donc que la résolvante $(D - \rho^2 \cdot \mathrm{Id})^{-1}$ est l'opérateur intégral de noyau K_ρ, de valeurs propres $(n^2\pi^2 - \rho^2)^{-1}$, de multiplicité 1, avec fonctions propres $\sin(n\pi x)$.

2.1.2. Quelques étapes de la construction de la théorie.

- *Fredholm* (*1903*). Généralisant une méthode introduite par C. Neumann dans le cas du problème de Dirichlet – calcul des fonctions harmoniques dans un domaine prenant des valeurs données sur le bord – Fredholm ramène l'étude de certaines équations différentielles à celles d'équations intégrales de la forme

  $$\int_a^b K(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y - \lambda\, f(x) = g(x)\,;$$

  il démontre ce que l'on appelle *alternative de Fredholm* : ou bien λ est (nul ou) valeur propre de l'opérateur intégral T de noyau K, ou bien l'opérateur $(T - \lambda \cdot \mathrm{I})^{-1}$ existe, et est alors une fonction holomorphe du paramètre complexe λ.

- *Hilbert* (*1904–1910*). Définit l'espace, dit *de Hilbert* et noté l^2, les opérateurs linéaires bornés, en particulier les opérateurs compacts, alors appelés opérateurs *complètement continus*; rappelons que ce sont ceux qui transforment les ensembles bornés en des ensembles relativement compacts. Hilbert démontre que les opérateurs intégraux considérés par Fredholm sont compacts.

- *Schmidt* (*1907*). Complète les résultats de Hilbert en montrant que les opérateurs compacts autoadjoints admettent des bases orthonormées formées de vecteurs propres.

- *Riesz* (*1918*). Précise la nature des spectres des opérateurs compacts autoadjoints. Nous utiliserons tous ces résultats sous la forme du

  Lemme fondamental. (Théorème spectral pour les opérateurs compacts positifs.) Soit H un espace hilbertien complexe admettant une base orthonormée dénombrable; notons $\mathrm{L}(H)$ l'espace des opérateurs linéaires continus dans H et $\mathrm{K}(H)$ celui des opérateurs compacts. Soit A un opérateur compact autoadjoint positif (i.e. $(Ax \mid x) \geq 0 \quad \forall\, x \in H$). Il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres $e_1, e_2, \ldots$ avec valeurs propres que l'on peut écrire $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq 0$, chacune étant comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité (finie si $\mu_n > 0$), et ne pouvant s'accumuler que sur 0. On écrit aussi $\mu_n(A)$ pour μ_n si l'on veut préciser l'opérateur A. Ce résultat permet de traiter ces opérateurs un peu comme des matrices en dimension finie.

2.1.3. Quelques propriétés des valeurs propres. Cette étude provient, elle aussi, en grande partie de problèmes physiques et du désir d'estimer les valeurs propres des opérateurs différentiels de la physique mathématique, le principal résultat étant le *théorème de Weyl* :

> *Soit P un opérateur différentiel elliptique d'ordre d sur une variété compacte de dimension n; soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ la suite de ses valeurs propres rangées de façon que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$; alors $|\lambda_k| \sim Ck^{d/n} + \mathrm{O}(k^{d/n-1})$.*

Nous utiliserons ici les résultats dits "min.max", qui ont aussi une origine purement algébrique dans le mémoire de

- *Fischer* (*1905*). Il étudie les formes quadratiques à n variables réelles de la forme $f - tF$, où t est un paramètre réel, f et F des formes quadratiques, la seconde étant définie positive; on veut déterminer les valeurs de t pour lesquelles $f - tF$ est de rang $< n$, c'est-à-dire les zéros du discriminant de $f - tF$.

On peut interpréter comme suit ses résultats. Notons $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ défini par F, A l'opérateur linéaire symétrique défini par f, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$ les valeurs propres de A. Alors (§7) μ_i est le plus grand réel t pour lequel il existe un sous-espace vectoriel V de dimension i tel que l'on ait

$$\min\{(Ax \mid x) \mid x \in V\,,\ \|x\| = 1\} \geq t\,;$$

il s'agit donc ici d'un principe max.min, qui se démontre sans peine par l'absurde si l'on sait que A admet une base de vecteurs propres $e_1, \ldots, e_n$: il suffit de remarquer que tout V de dimension i contient un vecteur non nul orthogonal à $e_1, \ldots, e_{i-1}$.

- *Courant* (*1920*). Courant démontre (Satz 3.a) un principe min.max pour les valeurs propres des opérateurs différentiels autoadjoints dans des domaines bornés de $\mathbb{R}^n$ avec conditions au bord, qu'on peut énoncer sous la forme, un peu simplifiée, suivante. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ les valeurs propres d'un tel opérateur différentiel ; soient $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ des fonctions vérifiant les conditions au bord ; on note $\mathrm{d}\{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}\}$ le minimum d'un certain ensemble d'intégrales notées $D\{\varphi\}$ où les φ sont des fonctions orthogonales aux ν_i et de norme 1 pour le produit scalaire hilbertien. Alors λ_n est le maximum des $\mathrm{d}\{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}\}$.

  Courant renvoie à un mémoire des Math. Annalen n° 1, dont l'auteur H. Weber invente une méthode de minima pour construire les fonctions propres, mais par récurrence, défaut que corrige la méthode de Courant.

- *Enoncé moderne du principe min.max.* Reprenons les notations de notre lemme fondamental ; on a

$$\mu_n = \min_{V \in E_{n-1}} \{\max\{\|Ax\| \mid x \in V^\neg\,,\ \|x\| = 1\}\} \tag{1}$$

  où E_{n-1} désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$, et $V^\neg$ l'orthogonal de V.

  Ici encore la preuve est facile en utilisant le lemme fondamental : il suffit de remarquer qu'un tel sous-espace $V^\neg$ contient toujours un élément non nul, combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$. On remarquera que le minimum figurant dans (1) est atteint pour le sous-espace V engendré par $e_1, \ldots, e_{n-1}$, et qu'on peut remplacer (1) par

$$\mu_n = \max\{\|Ax\| \mid (x \mid e_i) = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n-1\,,\ \|x\| = 1\}\,. \tag{2}$$

  C'est l'assertion de H. Weber (cité plus haut).

- *Hersch* (*1961*). Hersch généralise la formule (2) de la façon suivante : pour $n \geq 1$, $1 \leq p \leq n$ on a

$$\mu_{n-p+1} + \ldots + \mu_n = \max\{\mathrm{Tr}\,(PAP)\} \tag{3}$$

où P parcourt l'ensemble des projecteurs orthogonaux de rang p, annulant $e_1, \ldots, e_{n-p}$. On obtient (2) en prenant $p = 1$. Prenant $p = n$ et posant $\sigma_n = \mu_1 + \ldots + \mu_n$, on obtient la formule suivante, utilisée par Dixmier pour construire ses traces

$$\sigma_n = \max\{\mathrm{Tr}\,(PAP) \mid P \in \Pi_n\} \tag{4}$$

où Π_n désigne l'ensemble des projecteurs orthogonaux de rang n. On écrit aussi $\sigma_n(A)$ pour σ_n lorsque l'on veut préciser l'opérateur A.

2.1.4. Traces. Trace usuelle des opérateurs linéaires. La notion de *trace d'un opérateur linéaire* est apparue dès les années 1880 dans le cadre de l'étude des représentations des groupes et des algèbres (Frobenius, Killing, Lie, Molien, ...); pour simplifier notre exposé, nous nous placerons tout de suite dans le cas des espaces hilbertiens complexes.

Soit d'abord H un espace hilbertien de dimension finie; la *trace* $\mathrm{Tr}\,(A)$ d'un opérateur linéaire A est la somme des éléments diagonaux de la matrice représentative de A dans une base quelconque; c'est aussi le nombre $\sum_i (Ae_i \mid e_i)$ où (e_i) est une base orthonormée quelconque de H ; c'est enfin la somme des valeurs propres de l'opérateur, comptées un nombre de fois égal à leurs multiplicités. La forme linéaire Tr jouit des propriétés suivantes :

- elle est *positive*, i.e. $\mathrm{Tr}\,(A) \geq 0$ si $A \geq 0$, i.e. si $(Ax \mid x) \geq 0 \quad \forall x \in H$;
- elle est *centrale*, i.e. $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$, ce qui équivaut à dire que $\mathrm{Tr}\,(UAU^*) = \mathrm{Tr}\,(A)$ pour tout opérateur unitaire U.

Soit maintenant H un espace hilbertien de dimension hilbertienne infinie dénombrable; pour ce cas, on renvoie au livre de Dixmier [Dix3]. Reprenons les notations du lemme fondamental et notons $\mathrm{L}(H)^+$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus positifs; nous définirons la trace de ces opérateurs par $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_i (Ae_i \mid e_i) \in [0, +\infty]$ où (e_i) est une base orthonormée quelconque. L'application Tr jouit des propriétés suivantes :

(A) elle est additive et positivement homogène

(B) $\mathrm{Tr}\,(UAU^*) = \mathrm{Tr}\,(A)$ pour tout opérateur unitaire U

(C) $\mathrm{Tr}\,(A)$ est fini et non nul pour au moins un A

(D) elle est *normale*, c'est-à-dire compatible avec le passage aux limites croissantes : pour tout ensemble filtrant croissant $\mathcal{F}$ d'éléments de $\mathrm{L}(H)^+$, de borne supérieure S, on a $\mathrm{Tr}\,(S) = \sup \mathrm{Tr}\,(\mathcal{F})$.

De plus toute application de $\mathrm{L}(H)^+$ dans $[0,+\infty]$ possédant les propriétés ci-dessus est proportionnelle à Tr.

Enfin tout opérateur positif de trace finie est compact, et un opérateur compact positif A est de trace finie si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$ est fini, et alors égal à $\mathrm{Tr}(A)$.

Notion générale de trace sur $\mathbf{L}(H)$. Ce sont les applications de $\mathrm{L}(H)^+$ dans $[0,+\infty]$ possédant les propriétés (A), (B) et (C) ci-dessus ; en fait la notion de trace a été définie dans des situations beaucoup plus générales : traces sur des algèbres de von Neumann, puis sur des C*-algèbres ; elles sont liées à la construction de représentations de ces algèbres ; Murray et von Neumann ont utilisé les premières pour obtenir une classification des algèbres de von Neumann. On s'est alors posé le problème de savoir s'il existe des traces sur $\mathrm{L}(H)$ qui sont non normales, i.e. non proportionnelles à la trace usuelle ; Dixmier répond par l'affirmative dans sa note de 1966.

2.2. Intégration, théorème de Hahn-Banach. C'est le mémoire de von Neumann (1929) qui va permettre à Dixmier de construire ses formes linéaires LIM sur $l^\infty(\mathbb{N}^*)$; avant de l'exposer, il est intéressant d'en examiner les antécédents.

- *Lebesgue* (*1904*). Lebesgue construit l'intégrale qui porte son nom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pour une fonction réelle mesurable bornée, jouissant des propriétés suivantes :
  (1) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,\mathrm{d}x$
  (2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
  (3) $\int_a^b (f(x)+\varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$
  (4) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ si $f \geq 0$
  (5) $\int_0^1 1\mathrm{d}x = 1$
  (6) si $f_n(x)$ tend en croissant vers $f(x)$, l'intégrale de $f_n(x)$ tend vers celle de $f(x)$.

  Il pose la question de savoir si la condition (6) est une conséquence des autres.
- **Banach (1923).**

  Banach répond par la négative à la question posée par Lebesgue. Page 9 :

  > *Je prouve aussi qu'on peut attacher à toute fonction bornée d'une variable réelle $f(x)$ et à tout intervalle (a,b) un nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ satisfaisant aux conditions 1-5 de M. Lebesgue ; ce nombre peut être regardé comme une généralisation de l'intégrale. Pour une fonction intégrable au sens de Riemann, ce nombre est*

> *son intégrale riemannienne; pour les fonctions intégrables au sens de M. Lebesgue, ce nombre ne coïncide pas nécessairement avec son intégrale lebesguienne* (*et la condition 6 n'est alors pas satisfaite*).

La démonstration procède par induction transfinie; la méthode sera expliquée plus clairement par Hahn (voir ci-dessous, où l'on prendrait pour R_0 l'espace des fonctions intégrables Riemann).

- *Hahn* (*1927*). Hahn s'intéresse aux équations intégrales du type de Fredholm

$$\varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(s)\,.$$

Il démontre ce que l'on appelle aujourd'hui *théorème de Hahn-Banach* sous la forme suivante : si R est un espace vectoriel normé, R_0 un sous-espace vectoriel complet et f_0 une forme linéaire continue sur R_0, il existe une forme linéaire f sur R prolongeant f_0 et possédant la même norme. La démonstration utilise l'induction transfinie, reposant sur la théorie des ensembles et des nombres ordinaux et cardinaux créée par Cantor (entre 1872 et 1897) et Hausdorff (1914).

(i) On démontre d'abord ce qui suit :

> *il existe un ensemble bien ordonné de sous-espaces vectoriels R_ξ, $\xi \leq \alpha$, commençant à R_0, tels que $R_\alpha = R$ et que $\xi \leq \xi' \Rightarrow R_\xi \subset R_{\xi'}$.*

[Précisons un peu : les ξ et α sont des nombres ordinaux, on définit facilement un R_{ξ_0} si tous les R_ξ, $\xi < \xi_0$ sont déjà définis, en utilisant l'axiome du choix lorsque ξ_0 admet un précédent.]

> *Ce procédé doit s'arrêter, i.e. R_{ξ_0} doit être égal à R avant que la puissance de l'ensemble des R_ξ dépasse la puissance de R.*

(ii) On construit ensuite, par un procédé analogue, la forme linéaire sur un R_{ξ_0} en la supposant construite sur tous les R_ξ, $\xi < \xi_0$.

- *Banach* (*1929*). Banach redécouvre le résultat de Hahn, en en donnant une preuve moins explicite que Hahn :

> *Supposant f construite pour un sous-espace vectoriel V, on peut la définir pour V augmenté d'une dimension* [...]*; on prouve le théorème par induction transfinie, en appliquant successivement ce qui précède aux éléments de l'ensemble $R - R_0$* (*supposé bien ordonné*).

- *Zorn* (*1935*). Zorn énonce, sans démonstration, ce qu'on appelle aujourd'hui *lemme de Zorn*, qui court-circuite l'induction transfinie, sous la forme suivante :

  > *A set $\mathcal{B} = \{B\}$ of sets B is called a chain if for every two sets B_1, B_2 either $B_1 \supset B_2$ or $B_2 \supset B_1$. A set $\mathcal{A}$ of sets A is said to be closed* (*right-closed*) *if it contains the union $\sum B$ of every chain $\mathcal{B}$ contained in $\mathcal{A}$. Maximum principle : In a closed set $\mathcal{A}$ of sets A there exits at least one, A^*, not contained as a proper subset in any other $A \in \mathcal{A}$.*

  Rappelons l'énoncé moderne de ce résultat : tout ensemble ordonné inductif contient au moins un élément maximal.

2.3. Limites généralisées. Moyennes invariantes. Quelques définitions. Etant donné un ensemble X, on note $l^\infty(X)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles bornées sur X ; c'est un espace de Banach pour la norme $\| f\|_\infty = \sup_{x\in X} | f(x)|$. Si X est infini, on dit que f *admet une limite l à l'infini* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini $Y \subset X$ tel que $x \in X\backslash Y \Rightarrow | f(x) - l| \leq \varepsilon$; on note $l_0^\infty(X)$ l'ensemble des fonctions tendant vers 0 à l'infini.

On appelle *limite généralisée sur X* toute forme linéaire LIM sur $l^\infty(X)$ jouissant des propriétés suivantes :

- elle est positive, i.e. $f \geq 0 \Rightarrow \mathrm{LIM}(f) \geq 0$
- si f admet une limite l à l'infini, alors $\mathrm{LIM}(f) = l$.

Il revient au même de dire que f est nulle sur $l_0^\infty(X)$ et que $\mathrm{LIM}(1) = 1$. L'existence de limites généralisées est assurée par le théorème de Hahn-Banach. Enfin elles sont continues et de norme 1.

Von Neumann (*1929*). Von Neumann introduit la notion de *messbare Gruppe* appelée à jouer un rôle important sous le nom de *groupe moyennable*, notion étendue aux groupes topologiques par Bogolioubov (1939) et aux semi-groupes par Dixmier (1950). Voir aussi Greenleaf (1969).

Voici la définition (p. 88) : un groupe G est dit *messbar* s'il existe une forme linéaire m sur $l^\infty(G)$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $m(f) \geq 0$ si $f \geq 0$

(ii) $m(1) = 1$

(iii) $m(f_x) = m(f)$ où $f_x(y) = f(xy)$.

Von Neumann démontre entre autres les résultats suivants :

(a) Tout groupe fini est *messbar*, ce qui est trivial.

(b) Tout groupe abélien est *messbar*; voici la preuve qu'il en donne (p. 95) :

> *la démonstration est une répétition presque mot pour mot du raisonnement de Banach.*

Précisons qu'il s'agit du mémoire de Banach (1923) où est utilisée l'induction transfinie.

(c) Si G admet un sous-groupe distingué H qui est *messbar* ainsi que G/H, alors G est *messbar* (preuve sans difficulté).

Il résulte de là que tout groupe résoluble est *messbar*. Von Neumann prouve aussi que le groupe libre à 2 générateurs n'est pas *messbar*.

Les formes linéaires m possédant les propriétés ci-dessus sont appelées *moyennes invariantes*; elles jouissent en outre des propriétés suivantes

- m est continue et de norme 1 pour la norme $\| f\|_\infty = \sup |f(x)|$
- si G est infini, m est une limite généralisée; en effet, pour tout sous-ensemble fini E de G, il existe une infinité de sous-ensembles translatés de E et deux à deux disjoints; par suite, $m(f)$ est nul pour tout f à support fini, puis, par continuité, pour tout f tendant vers 0 à l'infini.

Von Neumann démontre ensuite (p. 94) que si G, supposé moyennable, opère sur un ensemble X, il existe une forme linéaire m sur $l^\infty(X)$ possédant les propriétés suivantes :

(d) $m(f) \geq 0$ si $f \geq 0$

(e) $m(1) = 1$

(f) $m(f_g) = m(f)$ où $f_g(x) = f(gx)$.

Une telle forme linéaire est encore appelée *moyenne invariante*, et on voit comme plus haut que, si G contient un sous-groupe opérant librement sur X, toute moyenne invariante est une limite généralisée.

Voici enfin le résultat de von Neumann utilisé directement par Dixmier pour construire ses traces.

Il existe une limite généralisée sur l'ensemble $\mathbb{R}$, invariante par le groupe, résoluble, des transformations affines $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

3. Le tronc de l'arbre

3.1. Première étape : construction de limites généralisées sur $\mathbb{N}^*$. Il s'agit de construire une limite généralisée LIM vérifiant la condition (d) du §1. On part d'une limite généralisée m sur $\mathbb{R}$, invariante par le groupe des transformations affines (résultat de von Neumann, fin du n° 2.3). On associe à tout $s \in l^\infty(\mathbb{N}^*)$ la fonction $f_s \in l^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$f_s(x) = s_i \quad \text{pour} \quad x \in [i-1, i\,[\; \cup\;]-i, -i+1]$$

et on pose $\mathrm{LIM}(s) = m(f_s)$. Il est immédiat que LIM est une limite généralisée sur $\mathbb{N}^*$, et la condition (d) résulte de l'invariance de m par la transformation $x \mapsto 2x$.

Remarque. Voici d'autres méthodes pour construire LIM, reposant plus directement sur l'existence de limites généralisées quelconques.

- A. Connes (1994, p. 305) part d'une limite généralisée L sur $\mathbb{R}_+^*$, définit f_s par $f_s(x) = s_i$ pour $x \in\,]i-1, i]$, et pose $\mathrm{LIM}(s) = L(\mathrm{M}(f_s))$ où, pour une fonction localement intégrable bornée g, la *moyenne de Cesaro* $\mathrm{M}(g)$ est définie par
$$\mathrm{M}(g)(x) = \frac{1}{\log x}\int_1^x g(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,;$$
la propriété (d) de LIM résulte alors de ce que, pour tout réel $k > 0$ on a
$$\lim_{x\to\infty}(\mathrm{M}(g_k)(x) - \mathrm{M}(g)(x)) = 0 \quad \text{où} \quad g_k(x) = g(kx)\,.$$
- R. S. Ismagilov, en 2001, évite le passage par les fonctions d'une variable réelle ; il part d'une limite généralisée ψ sur $\mathbb{N}^*$ et la compose avec l'analogue discret de la moyenne de Cesaro, i.e. pose $\mathrm{LIM}(s) = \psi(\mathrm{M}(s))$ où, ici,
$$\mathrm{M}(s)_n = \frac{1}{1+\log n}\sum_{p=1}^{n}\frac{s_p}{p}\,.$$

3.2. Deuxième étape : construction des traces. Quelques notations. Avec les notations $\mu_n(A)$, $\sigma_n(A)$ des n$^{\text{os}}$ 2.1.2 et 2.1.3, la trace usuelle est donnée par

$$\mathrm{Tr}\,(A) = \sum_n \mu_n(A) = \sup_n \big(\sigma_n(A)\big)\,;$$

on désigne par $\mathrm{L}^1(H)^+$ l'ensemble des opérateurs positifs de trace finie, i.e. tels que la suite positive croissante $(\sigma_n(A))$ soit bornée. Les traces de Dixmier sont finies sur l'ensemble des opérateurs tels que $\sigma_n(A) \in \mathrm{O}\,(\log n)$, i.e. que la suite $s(A)_n = \frac{\sigma_n(A)}{1+\log n}$ soit bornée ; suivant A. Connes cet ensemble sera noté $\mathrm{L}^{1,\infty}(H)^+$, partie positive d'un idéal $L^{1,\infty}(H)$ (voir ci-dessous n° 3.4).

Définition des traces. On part d'une limite généralisée LIM sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant la condition (d) du §1, et on pose

$$\varphi(A) = \begin{cases} \mathrm{LIM}\,\big(s(A)\big) & \text{si } A \in \mathrm{L}^{1,\infty}(H)^+ \\ +\infty & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Montrons que φ a bien les propriétés (A), (B), (C) du n° 2.1.4.

(i) Il est immédiat que φ est positivement homogène.

(ii) On a $\varphi(UAU^*) = \varphi(A)$ parce que UAU^* et A ont même spectre.

(iii) $\varphi(A)$ est fini et non nul pour au moins un A : prendre A tel que

$$\mu_n(A) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

(iv) La preuve de l'additivité est plus délicate.

a) Montrons d'abord que $\varphi(A+B) \le \varphi(A) + \varphi(B)$. On rappelle (n° 2.1.3) que, pour tout A, on a $\sigma_n(A) = \max_{P\in\Pi_n}\{\mathrm{Tr}\,(PAP)\}$, ce qui entraîne immédiatement

$$\sigma_n(A+B) \le \sigma_n(A) + \sigma_n(B).$$

b) Démontrons l'inégalité inverse.

- On a $\sigma_n(A) + \sigma_n(B) \le \sigma_{2n}(A+B)$: il suffit d'associer à deux projecteurs $P, Q \in \Pi_n$ le projecteur sur le sous-espace vectoriel engendré par les images de P et Q. Cela entraîne

$$s(A)_n + s(B)_n \le \frac{1+\log 2n}{1+\log n}\, s(A+B)_n .$$

  Il en résulte que si A ou B n'appartient pas à $\mathrm{L}^{1,\infty}(H)^+$, il en est de même de $A+B$.

- Pour tout $A \in \mathrm{L}^{1,\infty}(H)^+$, la suite $s(A)_n - s(A)_{n+1}$ tend vers 0, d'où

$$\varphi(A) = \mathrm{LIM}\,\big(s'(A)\big) \quad \text{où} \quad s'(A) = \big(s(A)_2, s(A)_2, s(A)_4, s(A)_4, \ldots\big)$$

  et la condition (d) (cf. page 2) entraîne $\varphi(A) = \mathrm{LIM}\,\big(s''(A)\big)$ où $s''(A)_n = s(A)_{2n}$.

- Soient $A, B \in \mathrm{L}^{1,\infty}(H)^+$; d'après a), on a $A+B \in \mathrm{L}^{1,\infty}(H)^+$, par suite

$$\varphi(A+B) = \mathrm{LIM}\,\big(s''(A+B)\big).$$

- Comme $\frac{1+\log 2n}{1+\log n}$ tend vers 1, $\mathrm{LIM}\,\big(s''(A+B)\big) = \mathrm{LIM}\,(s''''(A+B))$ où

$$s''''(A+B)_n = \frac{1+\log 2n}{1+\log n}\, s''(A+B)_n .$$

- Enfin

$$\varphi(A) + \varphi(B) = \mathrm{LIM}\,\big(s(A) + s(B)\big) \le \mathrm{LIM}\,\big(s''''(A+B)\big).$$

Pluralité de ces traces. Nous adopterons la notation usuelle Tr_ω au lieu de φ, l'indice ω rappelant le choix d'une limite généralisée ω sur $\mathbb{N}^*$. Si la suite $s(A)$ admet une limite, $\mathrm{Tr}_\omega(A)$ est égal à cette limite pour tout choix de ω ; en particulier la trace Tr_ω est nulle sur $\mathrm{L}^1(H)^+$, car alors $s(A)$ admet la limite 0, ce qui montre que la trace est non proportionnelle à Tr, donc non normale.

Si $s(A)$ admet une limite, on dit que A est *mesurable*; dans le cas contraire, $\mathrm{Tr}_\omega(A)$ prend une infinité de valeurs, mais cette situation est peu naturelle, citons Gracia-Bondia et alt. (2001, p. 292) :

> *No naturally occurring operator has come to our attention that lies in* $\mathrm{L}^{1,\infty}(H)^+$ *but is not measurable, although it is easy to construct artificial examples of non measurable operators without recourse to the axiom of choice.*

Commentaires de A. Connes (1994, p. 21 et 546) :

> *The Dixmier trace is a general tool designed to treat in a classical manner data of quantum nature.*
> *Property* D [i.e. $\mathrm{Tr}_\omega(T) = 0$ if T is of trace class] *is the counterpart of locality in our framework.*

Carey, Sukochev (2006), Lord, Sedaev, Sukochev (2005) examinent en détails le problème de la mesurabilité des opérateurs; les premiers le relient au théorème de point fixe de Markov-Kakutani.

3.3. Exemples.

(a) Soit D l'opérateur $\frac{i}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ dans $\mathrm{L}^2([0,1])$ avec pour domaine l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{C}^\infty([0,1])$ telles que $f(0) = f(1)$; ses valeurs propres sont les $\lambda_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$ avec vecteurs propres $e_k(x) = \mathrm{e}^{-2\pi i k x}$; l'opérateur $A = (D^2+1)^{-1/2}$ est compact, positif, de valeurs propres $\mu_1 = 1$, de multiplicité 1, et $\mu_k = (1+k^2)^{-1/2}$ de multiplicité 2, pour $k > 1$; la suite $s(A)_n = \frac{1}{1+\log n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}(1+k^2)^{-1/2}\right)$ a même limite que $\frac{2}{1+\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, c'est-à-dire 2, ce qui montre que A appartient à $\mathrm{L}^{1,\infty}(H)^+$, est mesurable et que $\mathrm{Tr}_\omega(A) = 2$.

(b) Voici un critère de mesurabilité pour un élément $A \in \mathrm{L}^{1,\infty}(H)^+$ utilisant les fonctions zêta (Connes, 1994, p. 306) : pour tout nombre complexe s de partie réelle > 1, l'opérateur A^s a une trace usuelle finie, que l'on note $\zeta_A(s)$; alors $s(A)$ admet une limite l si et seulement si $(s-1)\,\zeta_A(s)$ tend vers l lorsque s tend vers 1.

(c) Voici maintenant un ensemble d'exemples contenant l'exemple $A = (D^2+1)^{-1/2}$ ci-dessus (Connes, 1994, p. 307). Soit A un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $-n$ sur un fibré vectoriel au-dessus d'une variété compacte

X de dimension n ; plusieurs auteurs avaient défini, par une formule explicite, ce qu'on appelle *résidu de Wodzicki* de A. Connes démontre que A, convenablement prolongé à l'espace hilbertien $H = \mathrm{L}^2(X)$, appartient à $\mathrm{L}^{1,\infty}(H)$, est mesurable et que $\mathrm{Tr}_\omega(A)$ est égal à ce résidu.

Supposons maintenant que X est une variété riemannienne; notons Δ l'opérateur laplacien, f une fonction différentiable sur X, et M_f l'opérateur de multiplication par f ; alors $\mathrm{Tr}_\omega(M_f \cdot \Delta^{-n/2})$ est égal, à un facteur constant près, à l'intégrale de f pour l'élément de volume de X.

(d) Relation avec le semi-groupe de la chaleur (A. Connes, 1994, p. 563). Si $A \in \mathrm{L}^{1,\infty}(H)^+$, et $T \in \mathrm{L}(H)$, on a

$$\mathrm{Tr}_\omega(TA) = \mathrm{cte} \cdot \mathrm{LIM}_\omega\Big(\lambda^{-1} \cdot \mathrm{Tr}\left(T \cdot \exp\left(-\lambda^{-2} A^{-2}\right)\right)\Big).$$

3.4. Les idéaux $\mathbf{L}^{p,q}(H)$. $\mathrm{L}^{1,\infty}(H)^+$ est la partie positive d'un idéal bilatère de $\mathrm{L}(H)$, appelé *idéal de Dixmier* : ensemble $\mathrm{L}^{1,\infty}(H)$ des opérateurs compacts A tels que $\sigma_n(|A|) \in \mathrm{O}(\log n)$; A. Connes a situé cet idéal dans une série d'idéaux bilatères $\mathrm{L}^{p,q}(H)$ jouissant de propriétés analogues à celles des espaces d'interpolation usuels :

- pour $p \in \,]1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty[$, $\mathrm{L}^{p,q}(H)$ est l'ensemble des opérateurs compacts tels que $\sum_n n^{(1/p-1)q-1} \cdot \sigma_n(|A|) < +\infty$
- pour $p \in \,]1, +\infty[$, $\mathrm{L}^{p,\infty}(H)$ est l'ensemble des opérateurs compacts tels que $\sup\left(n^{1/p-1} \cdot \sigma_n(|A|)\right) < +\infty$.

Tous ces idéaux contiennent $\mathrm{L}^1(H)$; A. Connes a utilisé certains d'entre eux dans sa théorie de la Géométrie non commutative.

4. Les branches de l'arbre

4.1. Modules de Fredholm.

4.1.1. Introduction. Quelques mots pour commencer sur les opérateurs de Fredholm (cf. Carey et altri, 2011). Un opérateur linéaire borné F dans un espace hilbertien H est dit *de Fredholm* si son espace image est fermé et si son noyau et son conoyau sont de dimensions finies; on définit son indice comme étant dim Ker(F)-dim Coker(F). Ce sont aussi les opérateurs inversibles modulo les compacts, en ce sens qu'il existe un opérateur G tel que $FG - \mathrm{I}$ et $GF - \mathrm{I}$ soient compacts. Ils généralisent les opérateurs de la forme I + compact considérés par Fredholm (cf. n° 2.1.2).

On peut faire remonter la notion de module de Fredholm aux travaux de Gohberg et Krein (1957) et de Atiyah (1970). L'idée de départ est la suivante : soient

X une variété compacte et P un opérateur pseudodifférentiel elliptique d'ordre 0 opérant sur les sections d'un espace fibré vectoriel V ; il donne lieu à un opérateur dans $L^2(X, V)$ qui est de Fredholm; de plus, pour toute fonction $f \in C(X)$ opérant par multiplication dans $L^2(X, V)$, l'opérateur $[P, f]$ est compact. On a un exemple simple de cette situation en prenant $P = D(D^2 + I)^{-1/2}$ où D est l'opérateur différentiel considéré au n° 3.3; il est immédiat que P est de Fredholm; pour montrer que $[P, f]$ est compact, on peut se ramener au cas où f est un polynôme trigonométrique (par densité de ces polynômes et continuité), puis, par linéarité, au cas où f est une fonction propre e_k ; la suite est un calcul facile.

Notons que ce travail a suivi de peu le *théorème de l'indice* de Atiyah et Singer, calculant l'indice de P en termes de données géométriques fournies par P et X.

Atiyah part de là pour introduire une notion abstraite d'*opérateur elliptique* sur un espace topologique compact X : un triplet (H, π, P) où H est un espace hilbertien, π un morphisme $C(X) \to L(H)$ et P un opérateur de Fredholm dans H tel que $[P, \pi(f)]$ soit compact pour tout $f \in C(X)$. Il construit à partir de là les groupes dits de K-*homologie* $K_0(X)$ qui constituent la théorie duale de la K-*théorie* $K^0(X)$.

4.1.2. Modules de Fredholm et Géométrie non commutative. Dans les années 1990, A. Connes a défini les modules de Fredholm qui jouent un rôle fondamental dans sa Géométrie non commutative. Voici leur définition (on ne parlera ici que des modules de Fredholm dits "impairs") : ce sont des triplets (A, H, F) où H est un espace hilbertien, A une sous-algèbre involutive de $L(H)$ et F un opérateur autoadjoint de carré I tel que $[F, a]$ soit compact pour tout $a \in A$.

Avant d'esquisser l'aspect "Quantized Calculus" de la Géométrie non commutative, donnons une courte présentation de ses applications en Physique (Gracia-Bondia et alt, 2001, p. XI) :

> *... a bouquet of applications to the reinterpretation of the phenomenological Standard Model of particle physics as a new spacetime geometry, the quantum Hall effect, strings, renormalization and more in quantum field theory ...*

Quant à l'aspect "Quantized Calculus", il est résumé de la façon suivante par A. Connes (1994, p. 1) :

> *The correspondence between geometric spaces and commutative algebras is a familiar and basic idea of algebraic geometry. The purpose of this book is to extend this correspondence to the noncommutative case in the framework of real analysis* [...]. *The extension of classical tools,*

such as measure theory, topology, differential calculus and Riemannian geometry, to the noncommutative situation [...] *involves, of course, an algebraic reformulation of the above tools, but passing from the commutative to the noncommutative case is never straightforward.*

Tentons de préciser un peu : A. Connes voulait rendre rigoureuse une formule donnant le Lagrangien de la théorie de Yang-Mills, qui présentait des divergences logarithmiques.

Les modules de Fredholm permettent de faire aussi bien du calcul différentiel que du calcul intégral :

(i) On définit la *différentielle* d'un élément $a \in A$ par $\mathrm{d}a = [F, a]$, ce qui s'applique en particulier au cas où les éléments de notre algèbre sont des opérateurs de multiplication par des fonctions mesurables bornées, mais pouvant être très irrégulières ; on remarquera que l'on a encore la formule de Leibniz $\mathrm{d}(a \cdot b) = \mathrm{d}a \cdot b + a \cdot \mathrm{d}b$.

(ii) On peut définir des intégrales de la forme $\int f(x) \cdot |\mathrm{d}x|^p$ qui ont un sens puisque $\mathrm{d}x$ est maintenant un opérateur ; on remarquera que la théorie des distributions de L. Schwartz ne permet pas de le faire. C'est ici que vont intervenir les traces de Dixmier.

Ajoutons que ce “Quantized Calculus” permet aussi de faire du calcul différentiel sur des espaces très irréguliers comme des quotients de variétés ou des variétés feuilletées ; et que les modules de Fredholm servent aussi à construire la K-homologie $\mathrm{K}^0(A)$, égale à $\mathrm{K}_0(X)$ si $A = \mathrm{C}(X)$, le *caractère de Chern* allant de $\mathrm{K}^0(A)$ vers la cohomologie cyclique $\mathrm{HC}^*(A)$, et à généraliser le théorème de l'indice de Atiyah et Singer.

4.1.3. Un exemple particulièrement instructif. (Cf. A. Connes [1994, p. 22 et 326]).

On note D le disque ouvert $|z| < 1$, S^1 son bord, $A = \mathrm{C}(\mathrm{S}^1)$, $H = \mathrm{L}^2(\mathrm{S}^1)$, P le projecteur orthogonal de H sur le sous-espace des ξ tels que $\widehat{\xi}(n) = 0 \quad \forall\, n < 0$, enfin $F = 2P - \mathrm{I}$; pour montrer qu'on obtient bien un module de Fredholm, il suffit de vérifier que tous les opérateurs $[P, a]$ sont compacts, et, pour cela, on utilise la même méthode que pour l'exemple du n° 4.1.1.

Voici maintenant un module de Fredholm isomorphe au précédent, mais nettement plus intéressant. Soit Ω un domaine de Jordan de $\mathbf{C}$, et X son bord. Le théorème de la représentation conforme de Riemann établit qu'il existe une bijection conforme $D \to \Omega$; si de plus X est une courbe de Jordan, Carathéodory a montré que cette bijection se prolonge en un homéomorphisme $Z : S^1 \to X$. Transportant le module de Fredholm (A, H, F) par cet homéomorphisme, on obtient un module de Fredholm noté (A_0, H_0, F_0), où $A_0 = \mathrm{C}(X)$, qu'on peut aussi décrire de la façon suivante.

Pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe une mesure ν_{z_0} sur X telle que, pour toute $f \in \mathrm{C}(X)$, on ait $\int f \cdot \mathrm{d}\nu_{z_0} = \widetilde{f}\,(z_0)$ où $\widetilde{f}$ est la fonction harmonique sur Ω prolongeant f ; la classe d'équivalence de cette mesure est indépendante de z_0 et appelée *classe des mesures harmoniques*. On pose alors

- $H_0 = \mathrm{L}^2(X, \nu_{z_0})$
- P_0 = projecteur orthogonal de H_0 sur l'adhérence de l'ensemble des f telles que $\widetilde{f}$ soit holomorphe
- $F_0 = 2P_0 - \mathrm{I}$.

Prenons maintenant pour X l'ensemble de Julia d'une transformation $\varphi(z) = z^2 + c$; Ω est donc l'intérieur de l'ensemble des z pour lesquels l'ensemble des $\varphi^n(z)$ est borné ; si c est suffisamment petit, la dimension de Hausdorff p de X est > 1. Notant z l'application identique $X \to \mathbb{C}$, l'expression $|\mathrm{d}z|^p$ a un sens, et on a le résultat important suivant.

Théorème. *Pour toute $f \in \mathrm{C}(X)$, l'opérateur $f(z)\cdot|\mathrm{d}z|^p$ appartient à $\mathrm{L}^{1,\infty}(H_0)$, est mesurable et sa trace de Dixmier $\mathrm{Tr}_\omega(f(z)\cdot|\mathrm{d}z|^p)$ est égale, à une constante près, à l'intégrale de f pour la mesure de Hausdorff $\mathrm{d}\Lambda_p$. De plus la nonnormalité de la trace de Dixmier est une conséquence du fait que les mesures de Hausdorff et harmoniques sont mutuellement étrangères.*

4.2. Généralisations.

4.2.1. Introduction. On va remplacer les algèbres $\mathrm{L}(H)$ utilisées jusqu'ici par des algèbres de von Neumann semi-finies, objets que l'on doit d'abord définir.

Une *algèbre de von Neumann* est une sous-algèbre autoadjointe d'une algèbre $\mathrm{L}(H)$, contenant I et fermée pour la topologie de la convergence simple des opérateurs ; une *trace* (sous-entendu normale, semi-finie, fidèle) sur une algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ est une application τ de l'ensemble des éléments positifs de $\mathcal{A}$ vers l'intervalle $[0, +\infty]$, jouissant des propriétés (A), (B), (D) des traces sur $\mathrm{L}(H)$ (cf. n° 2.1.4) et des propriétés suivantes :

- pour tout élément positif A de $\mathcal{A}$, $\tau(A)$ est la borne supérieure des $\tau(B)$, $0 \leq B \leq A$, $\tau(B) < +\infty$
- $A \geq 0$, $\tau(A) = 0 \Rightarrow A = 0$.

On dit que $\mathcal{A}$ est *semi-finie* si elle admet une telle trace ; les algèbres $\mathrm{L}(H)$ en sont bien entendu des exemples, mais il en existe d'autres, très différentes, par exemple les facteurs de type II_∞ : leur centre est réduit aux scalaires et τ peut prendre toute valeur réelle positive sur les projecteurs orthogonaux de l'algèbre (il s'agit là des "géométries continues" de von Neumann).

4.2.2. Traces de Dixmier et algèbres de von Neumann semi-finies. Voir Carey et altri (2011), Benameur et Fack (2006).

Soit $\mathcal{A}$ une telle algèbre munie d'une trace τ ; on doit d'abord définir l'analogue de l'idéal $\mathrm{L}^{1,\infty}(H)$ du n° 3.4; pour cela, étant donné un élément A, on remplace les nombres $\mu_n(A)$ du n° 2.1.2 par des $\mu_s(A)$, $s \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mu_s(A) = \inf\{\|AP\|\,,\ P \text{ projecteur orthogonal de } \mathcal{A},\ \tau(\mathrm{I}-P) \leq s\}\,;$$

on définit ensuite $\mathrm{L}^{1,\infty}(\mathcal{A})$ comme ensemble des A tels que

$$\int_0^t \mu_s(A)\,\mathrm{d}s \in \mathrm{O}\left(\log(1+t)\right);$$

enfin, pour toute limite généralisée ω sur $\mathbb{R}_+^*$ au sens du n° 3.1, on pose

$$\tau_\omega(A) = \omega\Big(t \mapsto \frac{1}{\log(1+t)} \int_0^t \mu_s(A)\,\mathrm{d}s\Big).$$

On obtient alors les analogues

- du critère de mesurabilité du n° 3.2
- du lien avec le semi-groupe de la chaleur (n° 3.3)
- des modules de Fredholm.

Cela permet d'étudier les C^*-algèbres associées à des graphes, et aussi de généraliser le théorème sur les résidus de Wodzicki au cas de variétés munies d'actions de groupes ou de groupoïdes, notamment au cas d'opérateurs pseudodifférentiels le long des feuilles d'un feuilletage.

4.2.3. Applications diverses. On trouvera dans la référence [Sin] divers résultats, liés aux traces de Dixmier, et concernant les opérateurs de Hankel, les résidus de Wodzicki, les idéaux de Marcinkiewicz, les états KMS de la Physique statistique, …

Références

[Ati] M. F. Atiyah, Global theory of elliptic operators. In : *Proc. Intern. Conf. on Funct. Anal. and Related Topics*, Univ. of Tokyo Press, (1970). Zbl 0193.43601 MR 0266247

[Ban1] S. Banach, Sur le problème de la mesure. *Fondamenta Math.* **4** (1923), 7–33. JFM 49.0145.03

[Ba2] S. Banach. Sur les fonctionnelles linéaires. *Studia Math.* **1** (1929), 211–216. Zbl 55.0239.04

[BF] M. T. Benameur and T. Fack, Type II noncommutative geometry. I. Dixmier trace in von Neumann algebras. *Adv. Math.* **199** (2006), 29–87. Zbl 1092.46050 MR 2186918

[Bog] N. N. Bogolioubov, On some ergodic properties of continuous groups of transformations. *Physics Mathematics Zbirnyk 4* (1939), 45–52. Selected Works in *Classics of soviet math.* Vol. 2.

[Can1] G. Cantor, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der trigonometrischen Reihen. *Math. Annalen* **5** (1872), 92–102. JFM 04.0101.02 MR 1509769

[Can2] G. Cantor. Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre. *Math. Annalen* **49** (1897), 207–246. JFM 28.0061.08 MR 1510964

[CS] A. L. Carey and F. Sukochev, Dixmier traces and some applications in noncommutative geometry. *Russian Math. Surveys* **61** (2006), 1039–1099. Zbl 1151.46053 MR 2330013

[CPS] A. L. Carey, J. Phillips and F. Sukochev, Spectral flow and Dixmier traces. *Adv. Math.* **173** (2003), 68–113. Zbl 1015.19003 MR 1954456

[CRSS] A. L. Carey, A. Rennie, A. Sedaev and F. Sukochev, The Dixmier trace and asymptotics of zeta functions. *J. Funct. Anal.* **249** (2007), 253–283. Zbl 1128.46022 MR 2345333

[CPR] A. L. Carey, J. Phillips and A. Rennie, Spectral triples : examples and index theory. In : *Noncommutative geometry and physics : renormalisation, motives, index theory* (ESI Lectures in Math. and Physics, European Math. Soc., 2011). Zbl 1252.58004 MR 2839056

[Con1] A. Connes, The action functional in noncommutative geometry. *Comm. Math. Phys.* **117** (1988), 673-683. Zbl 0658.53068 MR 0953826

[Con2] A. Connes, *Noncommutative geometry.* San Diego Acad. Press, (1994). Zbl 0818.46076 MR 1303779

[Cou] R. Courant, Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der matematischen Physik. *Math. Zeitschrift* **7** (1920), 1–57. Zbl 47.0455.02 MR 1544417

[Dix1] J. Dixmier, Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications. *Acta Sci. Math. Szeged* **12** (1950), 213–227. Zbl 0037.15501 MR 0037470

[Dix2] J. Dixmier, Existence de traces non normales. *C.R.A.S., Paris, 262, série A* (1966), 1107–1108. Zbl 0141.12902 MR 0196508

[Dix3] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (*Algèbres de von Neumann*). (Paris, Gauthier-Villars, 1969). Zbl 0175.43801 MR 1451139

[Fis] E. Fischer, Über quadratische Formen mit reellen Koeffizienten. *Monatsh. Math. Phys.* **16** (1905), 234–249. JFM 36.0166.01 MR 1547416

[Fre] I. Fredholm. Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Math.* **27** (1903), 365–390. JFM 34.0422.02 MR 1554993

[GK] I. C. Gohberg and M. G. Krein, The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators. *Uspehi Math. Nauk* **12** (1957), 43–118. *Amer. Math. Soc. Transl.* **13** (1960), 185–264. MR 0113146

[GBVF] J. M. Gracia-Bondia, J. C. Varilly and H. Figueroa, Elements of non commutative geometry. (Boston, Birkhäuser, 2001). Zbl 0958.46039 MR 1789831

[Gre] F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications*. (Van Nostrand, 1969). Zbl 0174.19001 MR 0251549

[Hah] H. Hahn, Über lineare Gleichungsysteme in linearen Räumen. *Journal de Crelle* **157** (1927), 214–229. JFM 53.0369.03 MR 1581120

[Hau] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*. (Leipzig, Veit, 1914). Zbl 1175.01034

[Her1] J. Hersch, Caractérisation variationnelle d'une somme de valeurs propres consécutives; généralisation d'inégalités de Polya-Schiffer et de Weyl. *C.R.A.S.* **252** (1961), 1714–1716. Zbl 0096.08602 MR 0126065

[Her2] J. Hersch. Inégalités pour des valeurs propres consécutives de systèmes vibrants inhomogènes, allant "en sens inverse" de celles de Polya-Schiffer et de Weyl. *C.R.A.S.* **252** (1961), 2496–2498. Zbl 0143.34303 MR 0123908

[Hil] D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, I–VI. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* (1904–1910). Zbl 35.0378.02 (I), JFM 35.0378.03 (II), JFM 36.0438.02 (III), JFM 37.0351.03 (IV), JFM 37.0351.04 (V), JFM 41.0378.01 (VI)

[Ism] R. S. Ismagilov. Dixmier traces and unitary representations. *Funct. Anal. Appl.* **35** (2001), 34-43. Zbl 1034.43003 MR 1840747

[Leb] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. (Paris, Gauthier-Villars, 1904). Zbl 1206.26001

[LSS] S. Lord, A. Sedaev and F. Sukochev, Dixmier traces as singular symmetric functionals and applications to measurable operators. *J. Funct. Anal.* **224** (2005), 72–106. Zbl 1081.46042 MR 2139105

[LPS] S. Lord, D. Potapov and F. Sukochev, Measures from Dixmier traces and zeta functions. *J. Funct. Anal.* **259** (2010), 1915–1949. Zbl 1242.46072 MR 2671116

[Neu] J. von Neumann, Zur allgemeinen Theorie des Masses. *Fondamenta Math.* **13** (1929), 73–116. JFM 55.0151.01

[RS] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*. (New York, Acad. Press, 1980). Zbl 0459.46001 MR 0751959

[Rie] F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen. *Acta Math.* **41** (1918), 71–98. JFM 46.0635.01 MR 1555146

[RN] F. Riesz and B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. (Paris, Gauthier-Villars, 1965). Zbl 0122.11205 MR 0179567

[Sch] E. Schmidt, Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichungen. *Math. Annalen* **64** (1907), 161–174. JFM 38.0377.02 MR 1511432

[Sim] B. Simon, *Trace ideals and their applications*. Amer. Math. Soc. (2005). Zbl 1074.47001 MR 2154153

[Sin] Singular traces and their applications. Rencontre du CIRM, du 2-1-2012 au 6-1-2012. http://www.cirm.univ-mrs.fr/RepRenc/704/Abstract704.pdf

[Wey] H. Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partiellen Differentialgleichungen. *Math. Ann.* **71** (1911), 441–469. JFM 43.0436.01 MR 1511670

[Zor] M. Zorn, A remark on method in transfinite algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41** (1935), 667–670. Zbl 0012.33702 MR 1563165

(*Reçu le 29 septembre 2014*)

Alain Guichardet, 7 rue de la Sorbonne, 91510 Lardy, France

e-mail: guichardet.alain@wanadoo.fr