L'Enseignement Mathématique (2) 62 (2016), 3–5 DOI 10.4171/LEM/62-1/2-2

Erratum : Exemples de variétés projectives strictement convexes de volume fini en dimension quelconque

Ludovic Marquis

L'auteur tient tout d'abord à s'excuser pour les erreurs contenues dans l'article "Exemples de variétés projectives strictement convexes de volume fini en dimension quelconque" [Mar] et à exprimer sa profonde gratitude envers Sam Ballas pour lui avoir signalé le problème et pour notre travail "Properly convex bending of hyperbolic manifolds" [BM] qui sera bientôt disponible et qui, en plus de son intéret en soi, corrigera les points que cet erratum ne peut compléter. Le théorème principal de l'article [Mar] est le suivant :

Théorème 1. *En toute dimension* $n \geqslant 2$*, il existe un couple* (Ω_n, Γ_n) *où* Ω_n *est un ouvert proprement convexe strictement convexe de* $\mathbb{P}^n$ *et* Γ_n *un sous-groupe discret de* $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ *qui préserve* Ω_n *et tel que :*

(1) *Le quotient* $\Omega_n/_{\Gamma_n}$ *est de volume fini.*

(2) *Le quotient* $\Omega_n/_{\Gamma_n}$ *n'est pas compact.*

(3) *Le groupe* Γ_n *est d'indice fini dans le groupe* $\mathrm{Aut}(\Omega_n)$*. En particulier, l'ouvert proprement convexe* Ω_n *n'est pas homogène.*

De plus, l'ouvert Ω_n *est Gromov-hyperbolique et le groupe* Γ_n *est Zariski-dense dans* $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$*.*

Tout d'abord, ce théorème est vrai mais la démonstration proposée est incomplète. Le théorème suivant est bien utile pour en réparer la démonstration.

Théorème 2 (Long-Reid[1], [LR]). *En toute dimension* $n \geqslant 2$*, il existe une variété hyperbolique de volume fini, non-compacte qui admet une hypersurface* SÉPARANTE *totalement géodésique.*

[1] L'article de Long-Reid est rédigé dans le cas compact mais une relecture minutieuse montre que leur preuve passe dans le cas volume fini.

Brièvement, pour parvenir à construire le couple (Ω_n, Γ_n) du Théorème principal, l'auteur part d'une variété hyperbolique de volume fini non compacte M de dimension n admettant une hypersurface Σ totalement géodésique, puis déforme la structure projective de celle-ci, via une déformation appelée pliage ou "bending". Il faut ensuite montrer successivement que cette nouvelle structure projective est proprement convexe, de volume fini et enfin strictement convexe.

Le fait que la nouvelle structure soit encore proprement convexe est vrai, que l'hypersurface de Σ soit séparante ou non, et la démonstration proposée dans [Mar] est complète que l'hypersurface de Σ soit séparante ou non.

Le fait que la nouvelle structure soit encore de volume fini est vrai, que l'hypersurface Σ soit séparante ou non. MAIS la démonstration proposée dans [Mar] est incomplète (voir [BM] avec Sam Ballas pour une démonstration complète).

Le fait que la nouvelle structure est encore strictement convexe est faux. MAIS si on suppose Σ séparante alors on montre dans [BM] que celle-ci est encore strictement convexe. Enfin, le théorème de Long et Reid assure l'existence de couples (M, Σ) avec Σ séparante, ainsi l'existence du couple (Ω_n, Γ_n) est aussi assurée.

Dans "Properly convex bending of hyperbolic manifolds" [BM], nous étudions le cas non-séparant. Dans le cas non-séparant, la nouvelle structure peut être strictement convexe ou non, nous renvoyons le lecteur à [BM].

Les erreurs. L'erreur fondamentale à corriger dans la démonstration du Théorème 3.7 tient au fait que l'application développante ne se prolonge pas nécessairement en un homéomorphisme équivariant $\mathrm{Dev} : \partial\Omega_0 \to \partial\Omega_t$. Cette erreur entraîne deux erreurs dans les démonstrations des Propositions 6.9 et 7.6. Sans l'hypothèse "Σ est séparante" ces deux propositions peuvent être fausses, voir [BM].

L'un des buts de la Proposition 6.9 est de montrer que l'holonomie des cusps reste parabolique durant le pliage. L'erreur se cache à la fin de la preuve. En effet si la développante ne se prolonge pas en un homéomorphisme entre les bords alors le point p n'est pas nécessairement l'unique point fixe des éléments du groupe Λ_p^t, et la preuve proposée ne montre pas que l'holonomie des cusps reste parabolique. Une analyse plus poussée montrera dans [BM] que l'holonomie des cusps reste parabolique lorsque Σ est séparante.

Pour montrer la Proposition 7.6, le plus simple est de court-circuiter la preuve proposée, en utilisant le Théorème 11.6 de Cooper-Long-Tillman [CLT] qui montre que si l'holonomie des cusps est parabolique alors le convexe est strictement convexe (sous l'hypothèse, trivialement vraie dans ce contexte, que le groupe fondamental du quotient est Gromov-hyperbolique relativement aux sous-groupes fondamentaux des cusps).

Références

[BM] S. A. Ballas and L. Marquis, Properly convex bending of hyperbolic manifolds. arXiv:1609.03046, September 2016.

[CLT] D. Cooper, D. Long, and S. Tillmann, On convex projective manifolds and cusps. *Adv. Math.* **277** (2015), 181–251. Zbl 06431971 MR 3336086

[LR] D. Long and A. Reid, Constructing hyperbolic manifolds which bound geometrically. *Math. Res. Lett.* **8** (2001), 443–455. Zbl 0992.57023 MR 1849261

[Mar] L. Marquis, Exemples de variétés projectives strictement convexes de volume fini en dimension quelconque. *Enseign. Math.* (*2*) **58** (2012,) 3–47. Zbl 1284.57021 MR 2985008

(*Reçu le 25 avril 2016*)

Ludovic Marquis, IRMAR, Université de Rennes 1, France

e-mail: ludovic.marquis@univ-rennes1.fr