

Sur l'exemple d'Euler d'une fonction complètement multiplicative de somme nulle

Jean-Pierre KAHANE et Eric SAIAS

Abstract. In 1737 Euler introduced a series whose general term is the first example of a completely multiplicative function whose sum is 0, what we write *CMO*. Euler proved that the sum of his series is 0, assuming that the sum exists. The convergence of the series was proved later, as a companion of the prime number theorem. We consider the same problem for generalized primes and integers in the sense of Beurling 1937. A key is a theorem of Diamond 1977, which gives a condition on the generalized primes in order that the generalized integers have a density. According to Diamond's condition the analogue of the Euler series converges and its sum is 0 (theorem 2). That is a way (and the only way as far as we can guess) to construct a *CMO* function in the usual sense carried by a lacunary set of integers (theorem 1).

Mathematics Subject Classification (2010). Primary : 11N80.

Keywords. Generalized prime numbers, completely multiplicative functions

Dans son grand article de 1737 sur les séries infinies, Euler considère la série $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$ etc (théorème 18 de [Eul]) dont il explique la formation : lorsque le dénominateur est un nombre premier, le signe est $-$; lorsque c'est le produit de plusieurs nombres premiers, le signe est $+$ ou $-$ selon que le nombre de facteurs premiers est pair ou impair. Il désigne par x la somme de cette série, et un enchaînement de calculs bien menés lui permet de montrer que $x = 0$.

Avec les notations d'aujourd'hui, la série d'Euler s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n},$$

où λ , la fonction de Liouville, est la fonction complètement multiplicative qui vaut -1 sur les nombres premiers. Les calculs d'Euler reviennent à la formule

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1},$$

le produit étant pris sur les nombres premiers. Compte tenu de la divergence de la série $\sum \frac{1}{p}$, établie par Euler dans le même article de 1737 (théorème 19), cette formule montre bien que la somme de la série est nulle.

Le problème est qu'Euler, en désignant sa somme par x , admettait que la série est convergente, mais cela est loin d'être évident. Comment faire ?

On peut s'appuyer sur la formule

$$\sum_n \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

qui est valable pour $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. Comme

$$1 + \frac{1}{p^s} = \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

on a

$$\sum_n \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)},$$

où ζ est la fonction dzêta de Riemann. Il est donc clair que

$$(2) \quad \lim_{\sigma \searrow 1} \sum_n \frac{\lambda(n)}{n^\sigma} = 0.$$

Si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n}$ converge et a pour somme x , le premier membre de (2) vaut x ; c'est, appliqué aux séries de Dirichlet, le procédé de sommation d'Abel. Mais le passage de (2) à la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n}$ a le caractère d'un théorème taubérien, et nécessite une étude.

Cette étude repose sur le comportement de la fonction $\zeta(1 + it)$, et d'abord sur le fait que cette fonction ne s'annule pas. Nous avons montré dans [KS1] comment la mener par un procédé d'analyse de Fourier, qui va nous servir ici de nouveau.

Notons $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Rappelons [KS1] que l'on dit d'une fonction non identiquement nulle $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ qu'elle est complètement multiplicative de somme nulle (en abrégé *CMO*) si et seulement si $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tout couple (a, b) d'entiers strictement positifs et que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$ converge et est de somme nulle. Rappelons que le support de f est l'ensemble des entiers n de \mathbb{N}^* tels que $f(n) \neq 0$.

La fonction $\left(\frac{\lambda(n)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est l'exemple d'Euler d'une fonction *CMO*. Observons que son support est l'ensemble \mathbb{N}^* entier. Nous allons étendre cet exemple dans deux directions.

D'abord, peut-on trouver des fonctions *CMO* dont le support soit une petite partie de \mathbb{N}^* , dans un sens à préciser? La réponse est positive.

Théorème 1. *Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, il existe une fonction *CMO* dont le support, N_α , a une fonction de décompte de la forme*

$$N_\alpha(x) = Dx^\alpha + o(x^\alpha), \quad (x \rightarrow +\infty)$$

pour un $D > 0$ convenable.

Seconde question. La notion de *CMO* et celle de fonction de Liouville s'étendent dans le cadre des nombres premiers et des nombres entiers généralisés de Beurling [Beu]. Nous travaillerons avec un multiensemble infini \mathcal{P} de $]1, +\infty[$, localement fini dans $[1, +\infty[$, et avec le multiensemble \mathcal{N} formé des produits finis d'éléments de \mathcal{P} . Le multiensemble \mathcal{P} est celui des nombres premiers généralisés, le multiensemble \mathcal{N} est celui des nombres entiers généralisés. La fonction de Liouville associée au couple $(\mathcal{P}, \mathcal{N})$ est la fonction $\lambda_{\mathcal{P}}$ à valeurs ± 1 qui vérifie

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

pour $\text{Re } s$ suffisamment grand. On utilisera les notations $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{N}(x)$ pour désigner les fonctions de décompte de \mathcal{P} et \mathcal{N} . Elles sont à valeurs entières sauf éventuellement aux points de discontinuité, où leur valeur dépend de la convention adoptée, et leurs sauts aux points de discontinuité mesurent la multiplicité du multiensemble en ces points. Insistons : \mathcal{P} et \mathcal{N} sont des multiensembles, c'est-à-dire des ensembles de points comptés avec leur multiplicité, et les notations $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{N}(x)$ désignent des fonctions. Si l'on prend pour \mathcal{P} une suite strictement croissante et multiplicativement libre de réels > 1 , \mathcal{N} est un ensemble. Comment, dans ce cadre, étendre l'exemple d'Euler?

Voici une réponse, qui fait intervenir un nombre $\alpha > 0$ arbitraire. On désigne par p_1 le plus petit des nombres premiers généralisés. Les multiensembles \mathcal{P} et \mathcal{N} que nous allons considérer dépendent du paramètre α ($\mathcal{P} = \mathcal{P}_\alpha$ et $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\alpha$).

Théorème 2. *Soit $\alpha > 0$. Supposons*

$$(3) \quad \int_{p_1}^{+\infty} \left| \mathcal{P}(x) - \frac{x^\alpha}{\alpha \log x} \right| \frac{dx}{x^{1+\alpha}} < +\infty.$$

Alors $\mathcal{N}(x) = Dx^\alpha + o(x^\alpha)$ ($x \rightarrow +\infty$) pour un $D > 0$ convenable, et

$$(4) \quad \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n^\alpha} = 0$$

(somme suivant l'ordre croissant dans \mathcal{N}).

On démontrera d'abord le théorème 2 dans le cas crucial $\alpha = 1$, puis pour $\alpha > 0$ quelconque, et on prouvera ensuite le théorème 1. Nous ne voyons pas d'autre approche pour établir le théorème 1, qui concerne les nombres entiers et les nombres premiers usuels, que de passer par les nombres entiers et premiers généralisés de Beurling. Nous recommandons au lecteur soucieux de s'initier à leur théorie l'exposé rapide qu'en a fait Michel Balazard dans L'Enseignement Mathématique [Bal] et le livre récent de Harold Diamond et Wen-Bin Zhang [DZ].

Le présent article développe et démontre les résultats annoncés dans [KS2]. Le théorème 1 de [KS2] est notre présent théorème 1, le théorème 2 de [KS2] est notre théorème 2 réduit aux nombres premiers usuels, et le théorème 3 de [KS2] est notre théorème 2, exprimé pour $\alpha = 1$ et sous une forme un peu moins générale.

Démonstration du théorème 2, cas $\alpha = 1$. Notre première conclusion découle du beau résultat de Diamond suivant

Lemme (Diamond [Dia]). *Sous l'hypothèse*

$$\int_{p_1}^{+\infty} \left| \mathcal{P}(x) - \frac{x}{\log x} \right| \frac{dx}{x^2} < +\infty,$$

on a pour un $D > 0$ convenable,

$$\mathcal{N}(x) = Dx + o(x), \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Nous allons réutiliser ce résultat à la fin de notre argumentation. Avant, il nous faut étudier la fonction, associée à \mathcal{N} et \mathcal{P} ,

$$F(s) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{p^s} \right)^{-1}, \quad (\sigma = \operatorname{Re} s > 1).$$

Nous allons l'étendre en une fonction continue sur le demi-plan fermé $\sigma \geq 1$, contrôler sa croissance puis évaluer les sommes partielles en $t = 0$ de la série

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n^{1+it}}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ecrivons

$$F(s) = \exp \varphi(s)$$

avec

$$\varphi(s) = - \sum_{p \in \mathcal{P}} \log \left(1 + \frac{1}{p^s} \right) = - \int_{p_1}^{+\infty} \log(1 + x^{-s}) d\mathcal{P}(x),$$

$\log(1 + x^{-s})$ étant le prolongement analytique de la fonction réelle $\log(1 + x^{-\sigma})$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ($\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$). L'intégration par parties donne

$$\varphi(s) = - \int_{p_1}^{+\infty} \frac{sx^{-s-1}}{1 + x^{-s}} \mathcal{P}(x) dx.$$

On peut mener le calcul en écrivant $\mathcal{P}(x) = \frac{x}{\log x} + \left(\mathcal{P}(x) - \frac{x}{\log x} \right)$. Il est plus rapide d'observer que $\pi(x)$, la fonction de décompte des nombres premiers usuels, qui vérifie

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right), \quad (x \rightarrow +\infty),$$

permet, lorsque $\mathcal{P}(x)$ satisfait (3) avec $\alpha = 1$, de l'écrire

$$\mathcal{P}(x) = \pi(x) + \rho(x) \quad \text{avec} \quad \int_1^{+\infty} |\rho(x)| \frac{dx}{x^2} < +\infty.$$

Ainsi

$$\varphi(s) = - \int_{p_1}^{-\infty} \frac{sx^{-s-1}}{1 + x^{-s}} \pi(x) dx - \int_{p_1}^{-\infty} \frac{sx^{-s-1}}{1 + x^{-s}} \rho(x) dx.$$

Le premier terme est $\log \frac{\xi(2s)}{\xi(s)}$, dont on connaît bien le comportement dans le demi-plan $\operatorname{Re} s \geq 1$. Retenons que c'est $\log(s-1) + O(1)$ pour $|s-1| \leq 1$ et $O(s)$ pour $|s-1| > 1$. Le second terme, en vertu de la condition sur $\rho(x)$, est $O(s)$ dans tout le demi-plan $\operatorname{Re} s \geq 1$. Il en résulte que $F(s)$ se prolonge en une fonction continue sur le demi-plan $\operatorname{Re} s \geq 1$, qui est $O(s-1)$ au voisinage de $s-1$, et $\exp O(s)$ dans tout le demi-plan.

Les sommes partielles de la série (4) pour $\alpha = 1$, vont être évaluées à partir de $F(1+it)$. Ecrivons

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ \log n \leq x}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n} (\mathbf{1}_{[-x, x]} * \delta_{-\log n}(0)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} F(1+it) dt,$$

la dernière égalité étant pour l'instant purement formelle. Introduisons la gaussienne

$$\gamma(t) := e^{-t^2/2}$$

et notons, pour $a > 0$,

$$\gamma_a(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} \gamma\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

On a alors, de façon rigoureuse cette fois,

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n} (\mathbf{I}_{[-x,x]} * \gamma_a * \delta_{-\log n})(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} \gamma(at) F(1+it) dt.$$

Les majorations établies pour $|F(s)|$ entraînent que l'intégrale de droite existe et de plus, $\frac{F(1+it)}{k} \gamma(at)$ étant intégrable, qu'en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue elle tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$. Reste à utiliser le fait que γ_a est une très bonne approximation de la mesure de Dirac δ_o quand a est petit.

On sait ou on vérifie que

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \gamma(\xi) d\xi < \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \gamma(x), \quad (x \geq 0),$$

d'où

$$(\mathbf{I}_{\mathbb{R}^-} * \gamma_a)(u) = \int_u^{+\infty} \gamma_a(\xi) d\xi < \exp\left(-\frac{u^2}{2a^2}\right) = \gamma\left(\frac{u}{a}\right), \quad (u \geq 0),$$

avec γ_a paire, positive et d'intégrale 1. Il en résulte

$$|(\mathbf{I}_{\mathbb{R}^-} * \gamma_a - \mathbf{I}_{\mathbb{R}^-})(u)| < \gamma\left(\frac{u}{a}\right), \quad (u \in \mathbb{R}).$$

En posant

$$r(a, x, u) = (\mathbf{I}_{[-x,x]} * \gamma_a - \mathbf{I}_{[-x,x]})(u),$$

on en déduit

$$(5) \quad |r(a, x, u)| < \gamma\left(\frac{u-x}{a}\right) + \gamma\left(\frac{u+x}{a}\right), \quad (x > 0).$$

On a

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n} (\mathbf{I}_{[-x,x]} * (\gamma_a - \delta_o) * \delta_{-\log n})(0) = R(a, x)$$

avec

$$R(a, x) := \int_{\log p_1}^{+\infty} r(a, x, u) e^{-u} \lambda_{\mathcal{P}}(e^u) d\mathcal{N}(e^u).$$

Comme la fonction $\lambda_{\mathcal{P}}$ prend ses valeurs dans $[-1, 1]$, on déduit de (5) que

$$(6) \quad |R(a, x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\gamma\left(\frac{u-x}{a}\right) + \gamma\left(\frac{u+x}{a}\right) \right) e^{-u} d\mathcal{N}(e^u)$$

et c'est ici que l'on réutilise le lemme de Diamond. Ecrivons

$$\mathcal{N}(e^u) = D e^u + \eta(u) e^u \quad \text{avec} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \eta(u) = 0,$$

d'où, en termes de mesures,

$$d\mathcal{N}(e^u) = De^u du + \eta(u)e^u du + e^u d\eta(u)$$

et

$$d\mathcal{N}(e^u) \leq D'e^u du + e^u d\eta(u) \quad \text{avec } D' = D + \sup_u \eta(u).$$

Le second membre de (6) est majoré par

$$\begin{aligned} D' \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\gamma\left(\frac{u-x}{a}\right) + \gamma\left(\frac{u+x}{a}\right) \right) du + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\gamma\left(\frac{u-x}{a}\right) + \gamma\left(\frac{u+x}{a}\right) \right) d\eta(u) \\ = 2D'a \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(u) d\left(\gamma\left(\frac{u-x}{a}\right) + \gamma\left(\frac{u+x}{a}\right) \right). \end{aligned}$$

Pour $a > 0$ fixé, le second terme tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$, parce que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \eta(u) = 0. \text{ On voit ainsi que}$$

$$\lim_{a \searrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} |R(a, x)| = 0.$$

Comme nous avons montré que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n} (\mathbf{I}_{[-x, x]} * \gamma_a * \delta_{-\log n})(0) = 0,$$

il en résulte que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n} (\mathbf{I}_{[-x, x]} * \delta_o * \delta_{-\log n})(0) = 0,$$

c'est à dire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ \log n \leq x}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n} = 0,$$

et le théorème 2 est ainsi établi dans le cas $\alpha = 1$.

Démonstration du théorème 2, cas général. Associons aux multiensembles \mathcal{P} et \mathcal{N} les multiensembles \mathcal{P}^α et \mathcal{N}^α constitués respectivement des $p^\alpha (p \in \mathcal{P})$ et des $n^\alpha (n \in \mathcal{N})$; ainsi

$$\mathcal{P}^\alpha(x^\alpha) = \mathcal{P}(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}^\alpha(x^\alpha) = \mathcal{N}(x).$$

L'hypothèse du théorème 2 s'écrit

$$\int_{p_1^\alpha}^{+\infty} \left| \mathcal{P}^\alpha(y) - \frac{y}{\log y} \right| \frac{dy}{y^2} < +\infty, \quad (y = x^\alpha),$$

et la conclusion

$$\sum_{m \in \mathcal{N}^\alpha} \frac{\lambda_{\mathcal{P}^\alpha}(m)}{m} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\lambda_{\mathcal{P}}(n)}{n^\alpha} = 0.$$

Le cas général découle donc facilement du cas particulier $\alpha = 1$.

Démonstration du théorème 1. Si $\alpha = 1$, l'exemple d'Euler $\lambda(n)/n$ convient. Dans la suite, on choisit $\alpha \in]0, 1[$. Le théorème 1 sera établi si nous montrons que l'on peut prendre dans le théorème 2 pour \mathcal{P} un ensemble de nombres premiers usuels. Nous le noterons P . La fonction CMO du théorème 1 sera alors $\lambda_P(n)/n^\alpha$ et l'ensemble N_α sera l'ensemble des entiers usuels dont tous les facteurs premiers sont dans P .

Posons par commodité

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha \log x}.$$

Rappelons que la fonction de décompte des nombres premiers usuels vérifie

$$(7) \quad \pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Nous allons choisir P de façon que

$$(8) \quad \int_{p_1}^{+\infty} |P(x) - f(x)| \frac{dx}{x^{1+\alpha}} < +\infty,$$

ce qui achèvera la preuve du théorème 1.

Nous définissons P par sa fonction de décompte, $P(x)$, et nous prenons pour $P(x)$ la plus grande fonction croissante, à valeurs dans \mathbb{N} , dont les sauts, égaux à 1, n'ont lieu que sur les nombres premiers usuels, et telle que $P(x) < f(x)$ pour tout $x > 0$.

Distinguons les $x > p_1$ pour lesquels

$$(9) \quad f(x) - 1 \leq P(x) < f(x),$$

que nous appelons blancs, et les autres, que nous appelons noirs. Désignons par E_b l'ensemble des x blancs, et par E_n celui des x noirs.

Dans l'intégrale (8), la contribution de E_b est majorée par $\int_{E_b} \frac{dx}{x^{1+\alpha}}$, qui est fini. Majorons à présent la contribution de E_n .

Les composantes connexes de E_n sont des intervalles ouverts que l'on note $]u, v[$, sur lesquels il nous faut étudier $f - P$. Comme P coïncide avec l'ensemble des nombres premiers usuels sur ces intervalles, on a

$$(10) \quad P(x+h) - P(x) = \pi(x+h) - \pi(x), \quad (u < x \leq x+h < v).$$

A l'exception éventuelle du premier intervalle noir, u est l'extrémité d'un intervalle blanc, sur lequel (9) a lieu. On a donc

$$(11) \quad P(u) = f(u) + O(1).$$

En utilisant (7), (10) et (11), on obtient qu'il existe des constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que, pour

$$(12) \quad 2 \leq u \leq u + h \leq v \quad \text{et} \quad h > \frac{Cu}{\log u},$$

on ait

$$(13) \quad \begin{aligned} P(u+h) - f(u) &= P(u+h) - P(u) + O(1) \\ &= \frac{h}{\log u} + O\left(\frac{u+h}{\log^2 u}\right) + O(1) \\ &> ch/\log u. \end{aligned}$$

Supposons désormais u suffisamment grand. On a alors

$$(14) \quad f(u+h) - f(u) \leq hf'(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{1-\alpha}} \frac{h}{\log u}.$$

Comme $P(u+h) < f(u+h)$, on voit que (13) et (14) sont incompatibles, donc (12) est impossible : on a

$$v - u \leq \frac{Cu}{\log u}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \int_u^v (f(x) - P(x)) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} &\leq \frac{f(v) - P(u)}{u^\alpha} \int_u^v \frac{dx}{x} \\ &\leq \frac{(v-u)f'(u) + O(1)}{u^\alpha} \int_u^v \frac{dx}{x} \\ &\leq \frac{2C}{\log^2 u} \int_u^v \frac{dx}{x} \\ &\leq C' \int_u^v \frac{dx}{x \log^2 x}. \end{aligned}$$

La contribution des intervalles noirs à l'intégrale (8) est donc également finie. Cela achève la preuve du théorème 1.

Références

- [Bal] M. BALAZARD, La version de Diamond de la méthode de l'hyperbole de Dirichlet, *L'Enseignement Mathématique* **45** (1999), 253–270. [Zbl 0997.11078](#) [MR 1742330](#)
- [Beu] A. BEURLING, Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés, *Acta Math.* **68** (1937), 255–291. [Zbl 0017.29604](#) [MR 1577580](#)
- [Dia] H. G. DIAMOND.— *When do Beurling generalized integers have a density?* *J. Reine Angew. Math.* **295** (1977), 22–39. [Zbl 0355.10038](#) [MR 0450222](#)
- [DZ] H. G. DIAMOND and W.-B. ZHANG, *Beurling Generalized Numbers*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society (2016), xi+244p. [Zbl 06645059](#) [MR 3559358](#)

- [Eul] L. EULER, *Variae observationes circa series infinitas* (1737), Opera omnia, Ser. 1, Vol. 14, Teubner 1925, 216–244.
- [KS1] J.-P. KAHANE et E. SAIAS, Fonctions complètement multiplicatives de somme nulle, *Expo. Math.* **35** (2017), 364–389. [MR 3725814](#)
- [KS2] J.-P. KAHANE et E. SAIAS, Sur l'exemple d'Euler d'une fonction complètement multiplicative à somme nulle, *Comptes rendus Académie des sciences, mathématique* **354** (2016), 559–561. [Zbl1344.11065](#) [MR 3494320](#)

(Reçu le 21 juin 2016)

Jean-Pierre KAHANE, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France

e-mail: jean-pierre.kahane@u-psud.fr

Eric SAIAS, Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

e-mail: eric.saias@upmc.fr