PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 64 Fasc. 2 – 2007
Nova Série

COMPLEMENTS SUR LES OPERATEURS PRECOMPACTS ET FAIBLEMENTS COMPACTS POSITIFS

COMPLEMENT ON POSITIVE PRECOMPACT AND WEAKLY COMPACT OPERATORS

Belmesnaoui Aqzzouz et Redouane Nouira

Recommended by A. Ferreira dos Santos

Résumé: Nous établissons deux conditions nécessaires concernant le problème de domination, l'une pour les opérateurs précompacts positifs et l'autre pour les opérateurs faiblement compacts positifs.

Abstract: We prove two necessary conditions about the domination problem, one for positive precompact operators and the other for positive weakly compact operators.

1 – Introduction et notations

Aliprantis et Burkinshaw ont montré dans ([2], Théorème 2.2) que si E est un treillis de Banach tel que sa norme ou celle de son dual topologique E' est continue pour l'ordre et si $S, T\colon E \longrightarrow E$ sont des opérateurs tels que $0 \leq S \leq T$ et T compact, alors l'opérateur S^2 est aussi compact. Plus général, nous avons montré dans ([6], Théorème 2.2) que si (E,τ), $(F,\Im)$ et (G,ν) sont des treillis vectoriels localement convexes solides et complets, si $S_1, T_1\colon E \longrightarrow F$ et $S_2, T_2\colon F \longrightarrow G$ sont des opérateurs tels que $0 \leq S_i \leq T_i$ et T_i, $i = 1, 2$, précompact, et si l'une des topologies ν ou $\beta(E', E)$ est de Lebesgue ou si l'espace F' est discret, alors l'opérateur $S_2 \circ S_1$ est précompact.

Received: February 2, 2005; *Revised*: March 9, 2006.
AMS Subject Classification: 46A40, 46B40, 46B42.
Keywords: opérateur précompact positif; opérateur faiblement compact positif; topologie de Lebesgue; treillis vectoriel.

Wickstead [7] a étudié la réciproque du Théorème 2.2 de [2]. Il a montré que si E est un treillis de Banach σ-complet pour l'ordre et si S et T sont deux opérateurs définis de E dans lui même tels que $0 \leq S \leq T$ et T compact impliquent l'opérateur S^2 est compact, alors la norme de E ou celle de E' est continue pour l'ordre. Il a aussi donné un exemple qui montre que son résultat est faux si le treillis de Banach E n'est pas σ-complet pour l'ordre (cf. Exemple 2.3 de [7]). Ensuite, nous avons établi une réciproque complète du Théorème 2.2 de [2] et nous avons obtenu ainsi un résultat qui généralise aussi la réciproque de Wickstead [7].

D'autre part, Aliprantis–Burkinshaw ([3], Théorème 7) et Wickstead [7] ont simultanément montré que si E est un treillis de Banach tel que sa norme ou celle de son dual topologique E' est continue pour l'ordre et si $S, T : E \longrightarrow E$ sont des opérateurs tels que $0 \leq S \leq T$ et T faiblement compact, alors l'opérateur S est aussi faiblement compact. Aussi, Wickstead a établit la réciproque de ce résultat dans [7].

Dans cet article, nous établirons deux réciproques. La première concerne le Théorème 2.2 de [6] et la deuxième concerne le Théorème 7 de [3]. Le seul lien entre ces deux réciproques c'est qu'elles donnent la même conclusion. Plus précisement, nous montrerons que si (E, τ) et (G, ν) sont des treillis vectoriels localement convexes solides et complets et si quelque soit le treillis vectoriel localement convexe solide et complet $(F, \Im)$, et quelque soient les opérateurs $S_1, T_1 \colon E \longrightarrow F$ et $S_2, T_2 \colon F \longrightarrow G$ tels que $0 \leq S_i \leq T_i$ et T_i, $i = 1, 2$, précompact, impliquent l'opérateur $S_2 \circ S_1$ est précompact, alors la topologie ν ou la topologie $\beta(E', E)$ est de Lebesgue. Ensuite, nous établirons que si (E, τ) et $(F, \Im)$ sont deux treillis vectoriels localement convexes et solides avec (E, τ) complet, et si pour tous opérateurs $S, T \colon E \longrightarrow F$ tels que $0 \leq S \leq T$ et T faiblement compact impliquent S est faiblement compact, alors la topologie $\Im$ ou la topologie $\beta(E', E)$ est de Lebesgue.

Pour établir nos résultats, nous aurons besoin de rappeler quelques définitions. Un treillis vectoriel est un espace vectoriel ordonné E dans lequel $\sup(x, y)$ existe pour tous $x, y \in E$. A chaque élément $x \in E$, on associe son module $|x| = \sup(x, -x)$, sa partie positive $x^+ = \sup(x, 0)$ et sa partie négative $x^- = (-x)^+$. Une suite (x_n) d'un treillis vectoriel E est dite disjointe si $\inf\big(|x_n|, |x_m|\big) = 0$ lorsque $n \neq m$.

Une partie A d'un treillis vectoriel E est dite solide si $x \in A$, $y \in E$ et $|y| \leq |x|$ impliquent $y \in A$. Un idéal d'ordre est un sous treillis vectoriel solide de E. On dit qu'une suite généralisée (x_α) est convergente en ordre vers $x \in E$ s'il existe une suite généralisée (y_α) telle que $y_\alpha \downarrow 0$ et $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ pour tout α, où la notation $y_\alpha \downarrow 0$ signifie que la suite (y_α) est décroissante, son infimum existe et $\inf(y_\alpha) = 0$. Une bande est un idéal d'ordre qui est fermé pour l'ordre.

Soit E un treillis vectoriel. Pour tous $x, y \in E$ tels que $x \le y$, l'ensemble $[x, y] = \big\{z \in E\colon\ x \le z \le y\big\}$ est appelé un intervalle d'ordre.

Un treillis vectoriel E muni d'une topologie vectorielle τ est dit localement convexe et solide si 0 admet un système fondamental de voisinages convexes et solides.

Soit (E, τ) un treillis vectoriel localement convexe et solide. La topologie τ est dite de Lebesgue si pour toute suite généralisée (x_α) telle que $x_\alpha \downarrow 0$ dans E, la suite (x_α) converge vers 0 pour la topologie τ.

Si E' est le dual topologique de E, on note par $|\sigma|(E, E')$ (resp. $\beta(E, E')$) la topologie faible absolue (resp. la topologie forte) définie sur E par la famille des semi-normes de treillis $\{P_f\colon f \in E'\}$ $\big($resp. $\big\{P_A\colon A$ borné dans $(E', |\sigma|(E', E))\big\}\big)$, où $P_f(x) = |f|(|x|)$ $\big($resp. $P_A(x) = \sup\big\{|f|(|x|)\colon f \in A\big\}\big)$ pour tout $x \in E$. De la même manière, on définit les topologies localement convexes et solides $|\sigma|(E', E)$ et $\beta(E', E)$ sur E'. Pour plus d'informations sur les treillis vectoriels localement convexes et solides, nous renvoyons le lecteur au livre d'Aliprantis et Burkinshaw [1].

2 – Les résultats principaux

Un opérateur $T\colon E \longrightarrow F$ entre des treillis vectoriels localement convexes et solides est une application linéaire continue; il est dit positif si $T(x) \ge 0$ lorsque $x \ge 0$.

Un opérateur linéaire $T\colon E \longrightarrow F$ entre des espaces vectoriels localement convexes est dit précompact si l'image de tout borné de E est une partie précompacte de F.

Un élément non nul d'un treillis vectoriel E est dit discret si l'idéal d'ordre engendré par u coïncide avec le sous-treillis vectoriel engendré par u. Le treillis vectoriel E est dit discret, s'il admet un système disjoint complet d'éléments discrets.

Maintenant, nous établirons notre première réciproque.

Théorème 2.1. *Soient (E, τ) et (G, ν) des treillis vectoriels localement convexes solides et complets. Si quelque soit le treillis vectoriel localement convexe solide et complet $(F, \Im)$, et quelque soient les opérateurs $S_1, T_1\colon E \longrightarrow F$ et $S_2, T_2\colon F \longrightarrow G$ tels que $0 \le S_i \le T_i$ et T_i, $i = 1, 2$, précompact impliquent l'opérateur $S_2 \circ S_1$ est précompact, alors la topologie ν ou la topologie forte $\beta(E', E)$ est de Lebesgue.*

Preuve: Supposons que ni la topologie ν ni la topologie forte $\beta(E', E)$ n'est de Lebesgue. Il résulte alors du Théorème 10.1 de [1], qu'il existe un élément z de G (resp. $f \in E'$) et une suite disjointe (z_n) dans $[0, z]$ (resp. (f_n) dans $[0, f]$) qui ne converge pas vers 0 pour la topologie ν (resp. $\beta(E', E)$).

D'autre part, comme la topologie faible absolue $|\sigma|(E', E)$ est de Lebesgue, la suite (f_n) converge vers 0 pour la topologie $|\sigma|(E', E)$. Maintenant d'après le Théorème 2.3 de [4], il existe une partie bornée équilibrée B de E, et une suite disjointe $(x_n)_{n\geq 1}$ dans B tels que la suite $(f_n(x_m))$ ne converge pas vers 0. Soit $\hat{E}$ le complété de E pour la topologie faible absolue $|\sigma|(E, E')$. Soit B_n la bande engendrée par x_n dans $\hat{E}$, alors f_n s'étend en une forme linéaire positive $\widetilde{f_n}$ sur $\hat{E}$. Soit P_n la projection principale sur B_n. Quitte à remplacer f_n par $\widetilde{f_n} \circ P_n$, on peut supposer que $f_n(x_m) = \delta_{n,m}$.

Prenons pour F, le treillis Banach l^∞. Comme le treillis vectoriel $(l^\infty)'$ n'est pas discret (Corollaire 3.5 de [5]), il existe $\Psi \in (l^\infty)'$ et une suite $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $[-\Psi, \Psi]$ qui converge vers 0 pour la topologie $\sigma((l^\infty)', l^\infty)$, mais ne converge pas pour la topologie faible absolue $|\sigma|((l^\infty)', l^\infty)$ (Corollaire 21.13 de [1], p. 156). Par suite, ils existe un élément positif $y \in l^\infty$ tel que $|\Psi_n(y)| \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, on a soit $(\Psi_n(y))^+ > 1$ soit $(\Psi_n(y))^- > 1$. Dans les deux cas, il existe une suite (y_n) dans $[0, y]$ telle que $|\Psi_n(y_n)| > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons

$$H_1 = \left\{ \sum_{n\geq 2} \alpha_n x_n \colon \sum_{n\geq 2} \alpha_n < +\infty \right\} \simeq l^1$$

et

$$H_2 = \left\{ \sum_{n} \alpha_n z_n \colon (\alpha_n) \text{ converge vers } 0 \right\}.$$

Définissons maintenant les opérateurs S_1, T_1 de E vers l^∞ et S_2, T_2 de l^∞ vers G comme suit:

$$S_1(x) = \left(\sum_{n\geq 1} f_n(x)\, y_n \right),$$

$$T_1(x) = f(x)\, y$$

et

$$S_2(x) = \left(\sum_{n\geq 1} \Psi_n(x)\, z_n \right) + \Psi(x)\, z$$

$$T_2(x) = 2\,\Psi(x) z\ .$$

Il est clair que $0 \leq S_i \leq T_i$ et T_i précompact, $i = 1, 2$. Si l'opérateur $S_2 \circ S_1$ était précompact, alors la restrictiont R_1 à H_1 de l'opérateur $S_2 \circ S_1 - \Psi \circ S_1 z$ qui prend ses valeurs dans H_2 serait de même. Donc pour toute partie équicontinue K de H_2', $R'(H_2')$ est précompact dans H_1'. Si on désigne par P_n l'élément de H_2' définit par $P_n(\sum_n \alpha_n z_n) = \alpha_n$, et on prend $K = \{P_n \colon n \in \mathbb{N}^*\}$.

On a $R'(K) = \{\Psi_n \circ S\colon n \in \mathbb{N}^*\}$. Or la suite $(\Psi_n \circ S)$ n'admet aucune sous-suite convergente, car $|\Psi_n \circ S(x_n)| > 1$, et la suite $(\Psi_n \circ S)$ ne peut pas converger vers un élément autre que 0 puisque la suite (Ψ_n) converge faiblement vers 0. D'où la contradiction. ∎

Rappelons qu'un treillis vectoriel E est σ-complet pour l'ordre si toute partie dénombrable non vide majorée de E admet une borne supérieure.

Comme conséquence du Théorème 2.1 et du Théorème 2.2 de [6], du Corollaire 3.4 de [5] ainsi que de la Proposition 3.7 de [5], nous obtenons le résultat suivant:

Corollaire 2.2. *Soient (E,τ) et (G,ν) des treillis vectoriels localement convexes solides et complets tel que G est σ-complet pour l'ordre. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

1) *Quelque soit le treillis vectoriel localement convexe solide et complet $(F,\Im)$, et quelque soient les opérateurs $S_1,T_1\colon E \longrightarrow F$ et $S_2,T_2\colon F \longrightarrow G$ tels que $0 \le S_i \le T_i$ et T_i, $i=1,2$, précompact, l'opérateur $S_2 \circ S_1$ est précompact.*

2) *La topologie ν ou la topologie forte $\beta(E',E)$ est de Lebesgue.* ∎

Notre seconde réciproque concerne les opérateurs faiblement compacts positifs.

Théorème 2.3. *Soient (E,τ) et $(F,\Im)$ deux treillis vectoriels localement convexes et solides avec (E,τ) complet. Si pour tous opérateurs $S,T\colon E \longrightarrow F$ tels que $0 \le S \le T$ et T faiblement compact on a S est faiblement compact, alors la topologie $\Im$ ou la topologie $\beta(E',E)$ est de Lebesgue.*

Proof: Supposons qu'aucune des topologies $\Im$ et $\beta(E',E)$ n'est de Lebesgue. Comme dans la preuve du théorème 2.1, il existe une suite (x_m) disjointe et bornée dans E et il existe $f \in E'$ et une suite disjointe (f_n) dans $[0,f]$ tels que $f_n(x_m) = \delta_{n,m}$.

De même, il existe un $y \in F^+$ et une suite disjointe $(y_n)_{n\ge 0}$ dans $[0,y]$, qui ne converge pas vers 0 pour la topologie $\Im$.

Posons $\Phi_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)$ pour tout $n \ge 0$ et tout $x \in E$. Il est clair que cette somme converge bien, et que $(\Phi_n(x))_{n\ge 0}$ converge vers 0. Considérons les opérateurs S et T définis de E vers F comme suit:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Phi_n(x)\, y_n \qquad \text{et} \qquad T(x) = f(x)\, y \ .$$

On a $0 \le S \le T$ et T est faiblement compact, mais S ne l'est pas.

En effet, sinon $(S(x_n))_{n\geq 0}$ admettera une sous-suite faiblement convergente dans E, et par suite la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers 0, ce qui est faux. ∎

Comme conséquence du Théorème 2.3, du Théorème 7 de [3] et de la remarque faite à la fin du papier [3], nous obtenons le résultat suivant:

Corollaire 2.4. *Soient (E,τ) et $(F,\Im)$ deux treillis vectoriels localement convexes et solides avec (E,τ) complet. Alors, pour tous opérateurs $S,T\colon E\longrightarrow F$ tels que $0\leq S\leq T$ et T faiblement compact on a S est faiblement compact, si, et seulement si, la topologie $\Im$ ou la topologie $\beta(E',E)$ est de Lebesgue.* ∎

REFERENCES

[**1**] Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O. – *Locally Solid Riesz Spaces*, Academic Press, 1978.

[**2**] Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O. – Positive compact operators on Banach lattices, *Math. Z.,* 174 (1980), 289–298.

[**3**] Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O. – On weakly compact operators on Banach lattices, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 83 (1981), 573–578.

[**4**] Aliprantis, C.D.; Burkinshaw, O. and Duhoux, M. – Compactness properties of abstract kernel operators, *Pacific Journal of Math.,* 100(1) (1982), 1–22.

[**5**] Aqzzouz, B. et Nouira, R. – Sur les opérateurs précompacts positifs, *C. R. Acad. Sc. Paris,* 337(8) (2003), 527–530.

[**6**] Aqzzouz, B. and Nouira, R. – On the converse of Aliprantis and Burkinshaw's theorem, *Positivity,* 10(4) (2006), 795–807.

[**7**] Wickstead, A.W. – Extremal structure of cones of operators, *Quart. J. Math. Oxford,* 32(2) (1981), 239–253.

[**8**] Wickstead, A.W. – Positive compact operators on Banach lattices: some loose ends, *Positivity,* 4 (2000), 313–325.

[**9**] Wickstead, A.W. – Extremal structure of cones of operators, *Quart. J. Math. Oxford,* 32(2) (1981), 239–253.

Belmesnaoui Aqzzouz,
Université Mohammed V-Souissi,
Faculté des Sciences Economiques, Juridiques et Sociales, Département d'Economie,
B.P. 5295, Sala Eljadida – MOROCCO
E-mail: `baqzzouz@hotmail.com`

and

Redouane Nouira,
Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques,
B.P. 133, Kénitra – MORROCO