

QU'EST-CE QUE L'HOMOGENÉISATION?

LUC TARTAR

Recommended by J.P. Dias

Abstract: This text in French tries to describe what is homogenization and what is not homogenization, but discusses also a few related issues. Of course, homogenization is understood in the general sense that the author had described in his Peccot lectures at Collège de France in Paris, in the beginning of 1977, and corresponds to the notion of H-convergence that he had developed with François MURAT in the early 1970s, extending the work of Sergio SPAGNOLO on G-convergence from the late 1960s; for example, it uses no periodicity assumption like in the work where Ivo BABUŠKA first used the word homogenization, or in the earlier pioneering work of Evariste SANCHEZ-PALENCIA.

I – Introduction

Je n'ai appris le terme homogénéisation qu'à l'automne 1974, quand après un exposé dans un séminaire à Madison (Wisconsin) d'une question que j'avais étudiée avec François MURAT, que nous avons qualifiée de "contrôle dans les coefficients d'équations aux dérivées partielles" ([Tar2]), Carl DE BOOR m'avait signalé un article d'Ivo BABUŠKA, qui venait d'introduire ce terme ([Bab1]). Depuis mon cours Peccot au Collège de France à Paris, au début de 1977, *j'ai donné au terme homogénéisation un sens beaucoup plus général*. Notre terme de 'contrôle' avait été mal choisi, non seulement parce que le terme Français pour ce contexte est 'commande' et que 'contrôle' est un anglicisme dans le sens où nous l'utilisons,⁽¹⁾ mais principalement parce qu'il ne s'agissait pas d'un problème de

Received: September 1, 2006.

⁽¹⁾ En Français, contrôler a le sens de vérifier, et donc au départ un contrôle ne s'appliquait qu'à des ouvrages déjà finis, pour voir s'ils étaient conformes à certaines règles, que ce soit pour

contrôle, mais d'un problème d'optimisation, et c'était en fait un problème de calcul des variations.

Certains termes ont été tellement déformés dans les dernières années, en particulier par quelques uns qui semblent n'avoir eu qu'une raison politique de semer la confusion, et il est bon de se rappeler le sens qu'avaient ces termes, avant cette période de sabotage.

Le terme de *contrôle* ne s'applique que si la variable est le temps t , qui comme chacun l'aura remarqué semble s'écouler de manière irréversible. En dimension finie, on a la possibilité de faire évoluer l'état $x(t) \in \mathbb{R}^N$ d'un système grâce à une commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$, et ce système est décrit par une équation différentielle ordinaire

$$(I.1) \quad \frac{dx}{dt} = F(x(t), t; u(t)), \quad \text{avec une donnée initiale } x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N,$$

où on peut prendre u mesurable et vérifiant

$$(I.2) \quad u(t) \in K(t) \subset \mathbb{R}^m \quad \text{presque partout sur } (0, T),$$

avec peut-être d'autres contraintes, ce qu'on note globalement par $u \in \mathcal{U}_{ad}$, et où on utilise un "horizon" fini ou infini,⁽²⁾ suivant que le jeu s'arrête à un temps $T \in (0, \infty)$ ou $T = +\infty$, mais il y a d'autres cas, où on s'arrête quand on a atteint une "cible",⁽³⁾ qui est un ensemble plus général de points $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$.

des pièces d'identité ou des bâtiments, pour lesquels on pouvait bien sûr effectuer des contrôles en cours de construction. Par abus de langage, on a parlé de "contrôle continu" (des connaissances) pour la manière de vérifier à des temps déterminés si les étudiants apprenaient bien leurs leçons. Dans l'usage actuel des termes Français d'automatique, 'contrôle' a complètement remplacé 'commande'.

⁽²⁾ L'horizon est la limite de ce qu'on peut voir sur la terre, et en supposant la terre parfaitement sphérique et l'oeil à la hauteur h au dessus du niveau de la terre, la distance de l'horizon est $\sqrt{2hR + h^2}$, où R est le rayon de la terre, ce qui est approximativement $\sqrt{2hR}$ si h est très petit devant R ; l'horizon n'est donc jamais à l'infini, mais on ne peut pas l'atteindre non plus.

⁽³⁾ Le fait qu'une "cible" bouge n'implique pas qu'il s'agisse d'une application militaire, car on s'est intéressé à la mise en orbite de satellites, à des rendez-vous orbitaux au dessus de la terre ou de la lune, ou au lancement de sondes qui devaient passer près de Jupiter ou de Saturne pour acquérir une partie de l'énergie qu'on ne sait toujours pas fournir au départ par les fusées porteuses. Au Congrès International des Mathématiciens à Nice pendant l'été 1970, Alexandre GROTHENDIECK avait interpellé Lev PONTRYAGIN parce qu'il travaillait sur des applications militaires, et celui-ci avait nié de manière plutôt naïve, car il parlait de jeux différentiels, dont les applications sont principalement militaires (à moins de prétendre étudier comment les moustiques font pour éviter les hirondelles ou les chauve-souris qui veulent en faire leur repas, comme d'autres prétendent s'intéresser aux baleines, alors que leur but est évidemment de pouvoir localiser les sous-marins de leurs adversaires).

Quand le jeu s'arrête, on évalue un critère

$$(I.3) \quad J(u) = \int_0^T G(x(t), t; u(t)) dt + H(x(T)),$$

qu'on voudrait minimiser pour $u \in \mathcal{U}_{ad}$.

La question de base du contrôle optimal est de déterminer quelle meilleure commande $u(t)$ utiliser au temps t en fonction de t et de l'état $x(t)$,

$$(I.4) \quad u(t) = \Phi(t, x(t)), \quad \text{pour presque tout } t,$$

et on pourrait aussi utiliser le passé $x|_{[0,t]}$. En fait, on ne connaît en général qu'une observation partielle $y(t)$ de l'état complet $x(t)$,⁽⁴⁾ et en pensant à un système évoluant à l'intérieur d'une boîte opaque (dite noire), on pense à $u(t)$ agissant à l'entrée et à l'observation $y(t)$ prise à la sortie, et on crée donc une boucle qui prend l'information à la sortie pour l'apporter à l'entrée, d'où le nom de "contrôle en boucle fermée". L'approche qui consiste à trouver une solution optimale u_* définie sur $(0, T)$ et à utiliser ensuite

$$(I.5) \quad u(t) = u_*(t), \quad \text{pour presque tout } t,$$

est qualifiée de "contrôle en boucle ouverte", mais il n'y a pas de boucle, et ce n'est plus vraiment du contrôle, mais simplement de l'optimisation.

L'*optimisation* consiste à minimiser une fonctionnelle F_X sur un ensemble X , et à trouver une solution x_* . Si le calcul de la fonctionnelle F_X utilise une équation différentielle ordinaire, on pourrait aussi bien appeler z la variable de "temps",⁽⁵⁾ quand il n'y a pas la propriété d'irréversibilité habituelle du temps, comme quand on calcule une solution optimale u_* sur tout l'intervalle de temps $(0, T)$ pour un problème de "contrôle en boucle ouverte", pour la réaliser ensuite.⁽⁶⁾

⁽⁴⁾ A partir de l'observation, on cherche bien sûr à identifier autant qu'on le peut ce que $x(t)$ pourrait être, ce qui est lié à la notion d'observabilité du système.

⁽⁵⁾ J'utilise la notation z à dessein, car elle intervient dans certaines questions où des auteurs utilisent pompeusement le terme de "laser": on utilise des fonctions de la forme $e^{i\omega t} f(x, y, z)$ dans une forme de l'équation de Maxwell-Heaviside, ce qui fait disparaître la variable t , puis on fait une approximation "paraxiale" qui consiste à négliger certaines dérivées en z sous prétexte qu'on étudie un faisceau dans la direction z , et on obtiendrait une équation du type $i f_z - \Delta_{x,y} f = 0$ s'il n'y avait pas une hypothèse que l'indice de réfraction n est une fonction du champ électrique (en général une fonction de $|E|^2$); ensuite, probablement pour augmenter la confusion déjà si grande dans les milieux mathématiques, on transforme z en t , pour faire croire qu'on s'intéresse à un temps d'explosion de la solution, alors qu'il s'agit d'une distance où le faisceau focaliserait, au risque d'endommager des équipements optiques.

⁽⁶⁾ Le verbe réaliser a en Français le sens de créer, de rendre réel, et c'est un anglicisme très répandu que de l'utiliser à la place de 'se rendre compte'.

Parmi les problèmes d'optimisation, lesquels doit-t-on appeler des problèmes du *calcul des variations*?

Au printemps 1998, j'avais été invité à une conférence au Technion à Haïfa (Israël), pour le 300ème anniversaire de l'invention du calcul des variations, et j'avais trouvé que certains conférenciers faisaient rentrer n'importe quoi sous ce vocable. J'ai pu observer par la suite que c'était devenu une de ces modes qui apparaissent régulièrement, où on change des papiers d'emballage pour faire croire que le produit est différent, ce qui n'a évidemment pas un grand intérêt scientifique. Il y a trois siècles, la difficulté était de calculer des courbes optimales, ou des surfaces optimales, et parce que le calcul différentiel n'était pas encore bien développé, puisqu'on était tout juste en train de l'inventer, il y avait donc des difficultés pour écrire des conditions nécessaires d'optimalité. Depuis le développement de l'analyse fonctionnelle au siècle dernier, cette difficulté a quasiment disparu si on peut trouver un espace fonctionnel adapté, et on calcule alors des dérivées de Gateaux ou de Fréchet. Il y a des cas où ce n'est pas si facile, tel celui des surfaces qui ne sont pas des graphes, et comme on avait observé des géométries curieuses quand des bulles de savon s'appuient sur certaines courbes métalliques, il y a eu de nombreux travaux sur les surfaces minimales et leurs singularités, puisque ceux que ces questions mathématiques intéressent ont postulé que les bulles de savon minimisent leur surface, mais il me semble qu'aucun de ces "spécialistes" ne s'est jamais intéressé à la chimie derrière le problème réel, ou à un cadre plus réaliste de mécanique des milieux continus pour étudier ce que serait la tension superficielle, et les équations d'évolution qui la gouverne. Ce type de question semble aussi avoir aidé au développement de la théorie géométrique de la mesure, mais là encore, il me semble que la théorie n'a jamais servi pour de vraies questions de mécanique des milieux continus.

Le problème de l'existence d'une solution ne semble pas s'être posé avant le problème de Dirichlet,⁽⁷⁾ car résoudre

$$(I.6) \quad \begin{aligned} & -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ & \text{avec une condition aux limites (de Dirichlet) } u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

ne donne pas aisément une solution de classe C^2 , mais de nos jours l'existence d'une solution

$$(I.7) \quad u \text{ minimisant } \int_{\Omega} (|\text{grad}(u)|^2 - 2fu) dx, \text{ pour les } u \text{ vérifiant } u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega$$

⁽⁷⁾ C'est RIEMANN qui l'a baptisé ainsi, car il l'avait vu utiliser par DIRICHLET, mais GAUSS et GREEN l'avaient déjà utilisé avant.

est une question de topologie générale et d'analyse fonctionnelle, une fois introduit l'espace de Sobolev adapté, et il n'y a plus de raison de la classer dans les questions de calcul des variations. La question de savoir si la solution est de classe C^2 devient alors une question de régularité de solutions d'équations aux dérivées partielles, encore une question qu'il n'y a aucune raison de classer comme étant du calcul des variations, et on sait depuis HADAMARD que les espaces de fonctions C^k ne sont pas adaptés aux équations aux dérivées partielles, mais les travaux de SCHAUDER ont montré ensuite que les espaces $C^{k,\alpha}$ le sont. On sait aussi que les espaces comme BV , basés sur L^1 ou sur des mesures de Radon de masse totale finie, ne sont pas non plus adaptés aux équations aux dérivées partielles, et on doit se demander pourquoi les personnes intéressées à la théorie géométrique de la mesure se gardent bien de le signaler à leurs élèves.

Laurence YOUNG avait étudié la non existence d'une solution, et introduit des solutions généralisées (voir [You]), ce qui d'un point de vue abstrait est une question de compactification, et donc de topologie générale, mais d'un point de vue concret il est important de trouver des réalisations raisonnables, car si pour minimiser F_X sur X , on définit Y comme l'ensemble de toutes les suites minimisantes, et on dit qu'une solution généralisée existe dans Y , on n'a évidemment rien fait; il faut aussi prendre garde que si on n'introduit pas une topologie adaptée, *la Γ -convergence est un leurre*, et représente plutôt un recul par rapport à la notion de relaxation qui existait déjà au début des années 1970. Comme Laurence YOUNG avait en tête des problèmes d'optimisation, il ne semble pas avoir pensé à écrire des conditions nécessaires d'optimalité généralisées pour des problèmes de contrôle, comme l'équipe de Lev PONTRYAGIN l'a fait plus tard avec le principe du maximum,⁽⁸⁾ en comparant leur approche avec l'idée de la programmation dynamique, qu'on devrait attribuer à CARATHÉODORY.⁽⁹⁾ De même, Lev PONTRYAGIN et son équipe ne semblent pas avoir observé qu'ils suivaient une approche semblable à celle de Laurence YOUNG et qu'ils pouvaient donc définir des contrôles généralisés, et expliquer leurs conditions nécessaires d'optimalité généralisées comme exprimant qu'un contrôle classique est meilleur que tous les contrôles généralisés.

Après toutes ces considérations, il me semble que parmi les problèmes d'optimisation, ceux qu'on peut appeler des problèmes de calcul des variations doivent

⁽⁸⁾ Le premier livre que mon directeur de thèse, Jacques-Louis LIONS, m'avait demandé de lire, alors que j'étudiais encore à l'Ecole Polytechnique, était celui où BOLTYANSKII, GAMKRELIDZE, MISHCHENKO, et Lev PONTRYAGIN avaient démontré le principe du maximum ([Bol&Gam&Mis&Pon]). La paternité de l'idée a été réclamée plus tard par BOLTYANSKII, après la mort de Lev PONTRYAGIN.

⁽⁹⁾ Plutôt qu'à Richard BELLMAN qui l'avait redécouverte plus tard.

correspondre à des questions concernant des domaines géométriques, et donc que les questions de topologie générale, d'analyse fonctionnelle, et de régularité de solutions d'équations aux dérivées partielles qui ne sont pas liées à des questions de domaines géométriques ne font pas partie du calcul des variations.

Le problème que j'avais étudié au début des années 1970 avec François MURAT était de minimiser une fonctionnelle

$$(I.8) \quad J(a) = \int_{\Omega} F(x, a(x), u(x)) \, dx ,$$

où l'état $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution de

$$(I.9) \quad -\operatorname{div}(a \operatorname{grad}(u)) = f \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ borné}$$

(ou simplement tel que l'inégalité de Poincaré a lieu pour $H_0^1(\Omega)$), et $a \in L^\infty(\Omega)$ est pris dans un ensemble

$$(I.10) \quad \mathcal{C}_{ad}, \quad \text{où on a } 0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta < \infty \text{ presque partout dans } \Omega .$$

C'est un problème d'optimisation, qui pour $N = 1$ n'est pas un problème de contrôle, et qui n'est un problème de calcul des variations que dans le cas où chaque a correspond à un domaine, ce qui est le cas si par exemple

$$(I.11) \quad a = \alpha \chi_\omega + \beta(1 - \chi_\omega) ,$$

où χ_ω est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable ω , dont on peut éventuellement imposer le volume, et c'est un problème que j'avais étudié avec François MURAT, et comme j'ai décrit ce sujet en détail dans un cours (CIME/CIM) à Tróia (Portugal) au printemps 1998 ([Tar9]), je ne rappellerai que les points dont j'ai besoin pour mon propos.

En 1970, François MURAT avait construit des contre-exemples à l'existence ([Mur1], [Mur2]) pour des fonctions F du type $|u(x) - z(x)|^2$, et son approche avait redécouvert certaines idées dont nous avons appris plus tard qu'elles avaient d'abord été introduites par Laurence YOUNG. Ensuite, nous avons redécouvert un résultat que Sergio SPAGNOLO avait démontré à la fin des années 1960 ([Spa1], [Spa2]), concernant ce qu'il avait appelé la G-convergence,⁽¹⁰⁾ et cela nous avait

⁽¹⁰⁾ C'est la convergence des noyaux de Green, mais comme nous avons étendu notre méthode à des situations plus générales ensuite, François MURAT a plus tard appelé notre approche H-convergence ([Mur3]), le H rappelant le terme homogénéisation, introduit par Ivo BABUŠKA pour des questions d'ingénierie avec structure périodique ([Bab1]), mais auquel j'ai donné un sens beaucoup plus général depuis mon cours Peccot au Collège de France à Paris, au début de 1977.

permis de comprendre comment définir un problème relaxé: si

$$(I.12) \quad \begin{aligned} \chi_{\omega_n} &\rightharpoonup \theta \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } \star \\ a_n &= \alpha \chi_{\omega_n} + \beta(1 - \chi_{\omega_n}) \text{ G-converge vers } A_{\text{eff}} , \end{aligned}$$

alors il faut résoudre

$$(I.13) \quad -\operatorname{div}(A_{\text{eff}} \operatorname{grad}(u)) = f \text{ dans } \Omega ,$$

et

$$(I.14) \quad \begin{aligned} J(a_n) &\text{ converge vers} \\ \tilde{J}(\theta, A_{\text{eff}}) &= \int_{\Omega} \left[\theta F(x, \alpha, u(x)) + (1 - \theta) F(x, \beta, u(x)) \right] dx . \end{aligned}$$

A ce point là, la difficulté était de découvrir l'ensemble des paires admissibles (θ, A_{eff}) , et nous avons d'abord démontré ([Tar1]) que l'on a

$$(I.15) \quad \begin{aligned} a_- I &\leq A_{\text{eff}} \leq a_+ I \text{ presque partout dans } \Omega \\ a_+ &= \theta \alpha + (1 - \theta) \beta \text{ presque partout dans } \Omega \\ a_- &= \left(\frac{\theta}{\alpha} + \frac{1 - \theta}{\beta} \right)^{-1} \text{ presque partout dans } \Omega . \end{aligned}$$

Il est important de noter que nous n'avons pas su que ces formules avaient déjà été conjecturées, mais pas démontrées, et comme ce point est important, je veux en discuter indépendamment.

II – Comment un mathématicien peut s'intéresser à la science

Lors de ma première visite au Portugal, en janvier 1974, j'avais parlé du sens physique des équations que j'étudiais, et je n'imitais aucun des mathématiciens qui m'avaient formé en faisant ça. J'avais eu des cours de Laurent SCHWARTZ à l'Ecole Polytechnique (alors à Paris) en 1965–1966, et c'était grâce à un de ses exposés, un soir de l'automne 1966, sur le rôle et la responsabilité du scientifique, que je m'étais décidé à faire de la recherche en mathématiques, puisque j'avais compris que mon inaptitude aux choses administratives rendait impossible la carrière d'ingénieur à laquelle je croyais me préparer en étudiant à l'Ecole Polytechnique, après avoir renoncé à ma place à l'Ecole Normale Supérieure; bien

sûr, Laurent SCHWARTZ avait enseigné sa théorie des distributions,⁽¹¹⁾ et mentionné qu'elle permettait d'expliquer des résultats formels de DIRAC, ou même de HEAVISIDE avant lui,⁽¹²⁾ mais Laurent SCHWARTZ n'était pas intéressé par la physique, et il ne semblait pas comprendre en quoi le travail d'un physicien diffère de celui d'un mathématicien.⁽¹³⁾ J'avais eu des cours de Jacques-Louis LIONS à l'Ecole Polytechnique en 1966–1967, et il était devenu mon directeur de thèse, mais bien qu'il ait souvent par la suite utilisé des exemples où apparaissaient des termes de mécanique, non seulement je ne lui avais jamais vu montrer un intérêt pour la mécanique des milieux continus ou la physique, mais il avait même exprimé une fois son opposition à mon programme de recherche de mieux comprendre la mécanique des milieux continus.

Il y a plusieurs raisons qui expliquent mon comportement différent, de mathématicien intéressé par la science. Tout d'abord, j'avais suivi à l'Ecole Polytechnique des cours de mécanique rationnelle (avec Maurice ROY) et de mécanique des milieux continus (avec Jean MANDEL), et de physique sous tous ses aspects (classique, quantique, relativiste, statistique) avec de nombreux enseignants, et même de chimie, mais pas de biologie, et il y avait donc des tas de choses qu'on m'avait énoncées sans démonstration, et toutes ces informations, dont je ne pouvais pas être sûr, étaient gardées dans un coin de mon cerveau en attendant que je trouve la manière de les traiter (ou que je les oublie en partie). Ensuite, j'avais compris avec François MURAT ces questions qu'on n'appelait pas encore de l'homogénéisation,

⁽¹¹⁾ Sans toutefois décrire les topologies des espaces \mathcal{D} et \mathcal{D}' , qui font si peur à certains. J'ai constaté une fois qu'un Américain exprimait son énervement parce que j'avais dit que l'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω est dense dans un espace X (dont j'ai oublié lequel il était), et j'avais interprété sa réaction comme la peur que je parle de la topologie de $C_c(\Omega)$, qui est une limite inductive, et donc qu'il ne savait pas que la densité dans X ne fait intervenir que la topologie de X . En fait, on a rarement besoin d'utiliser la topologie de \mathcal{D} ou celle de \mathcal{D}' .

⁽¹²⁾ Je n'ai appris qu'en 1998 lors d'une conférence à Edinburgh (Ecosse), qu'on appelle Edimbourg en Français, la ville natale de MAXWELL (qui s'appelait CLERK à sa naissance), que les équations qu'avait écrites MAXWELL ne sont pas celles qu'on enseigne actuellement, car il avait travaillé dans une formulation mécanique pour transmettre les champs électriques et magnétiques, et cela avait donné quelque chose d'assez inutilisable. Ce n'est que plus tard, grâce au travail de J. J. O'CONNOR and E. F. ROBERTSON, qui ont créé le site MacTutor d'histoire des mathématiques à l'université de St Andrews, que j'ai découvert que c'est HEAVISIDE qui doit être cité pour avoir écrit ces équations, qu'on devrait donc plutôt appeler l'équation de Maxwell–Heaviside.

⁽¹³⁾ A l'Ecole Polytechnique, j'avais assisté à un débat un soir entre Laurent SCHWARTZ d'un côté, dont je comprenais les arguments, et quelques uns de mes enseignants de physique de l'autre, dont je ne comprenais pas le point de vue. Maintenant, je comprends que le problème est que rares sont les mathématiciens et les physiciens qui comprennent quel est le rôle des autres, et que beaucoup n'ont malheureusement pas une idée très claire de leur propre rôle.

et cela m'avait donné un moyen mathématique de lier des grandeurs physiques à différentes échelles, que j'appelais microscopique et macroscopique,⁽¹⁴⁾ en utilisant des convergences de type faible plutôt que ce cadre probabiliste qui ne m'avait jamais plu,⁽¹⁵⁾ et je m'étais dit que j'allais enfin pouvoir comprendre certaines des choses que j'avais entendues, en mécanique des milieux continus et en physique. J'avais utilisé, bien sûr, l'idée de la G-convergence de Sergio SPAGNOLO, mais j'avais aussi compris que mes travaux avec François MURAT correspondaient à la description de propriétés effectives de mélanges,⁽¹⁶⁾ et cette idée devait beaucoup aux travaux d'Henri SANCHEZ-PALENCIA,⁽¹⁷⁾ [San-Pal1] et [San-Pal2], qui considérait des problèmes à structure périodique, et postulait un développement asymptotique correct, pour ensuite identifier le premier terme. Après avoir compris ça, je me suis créé une bien meilleure intuition de certaines questions de mécanique des milieux continus ou de physique, mais j'ai remarqué que beaucoup ne comprennent pas la différence entre l'intuition, qui sert à formuler des conjectures, et les démonstrations de ces conjectures.

Dans un livre qu'il avait édité, *A source book in analysis*, où on peut trouver des traductions en Anglais de quelques textes importants du 19ème siècle en analyse, Garrett BIRKHOFF avait insisté sur une erreur de POINCARÉ, qui avait écrit que l'existence d'une solution allait de soi puisque c'était un problème physique, et il s'était étonné que POINCARÉ ait pu faire une erreur pareille, qu'il avait d'ailleurs corrigée dans son article suivant, qui incluait une démonstration de l'existence de cette solution. C'est pourtant devenu une erreur courante maintenant chez certains "mathématiciens appliqués", que je ne confond pas avec des mathématiciens

⁽¹⁴⁾ J'ai appris plus tard le terme mésoscopique, en même temps que le fait que certains veulent garder le qualificatif microscopique pour le niveau des atomes. Ce qui m'a paru curieux est que certains de ces puristes donnent l'impression qu'ils ne comprennent rien à ces questions de différentes échelles dont ils parlent, et semblent souvent être des adeptes d'attribuer mes idées à d'autres, qui ne les ont en général pas comprises.

⁽¹⁵⁾ Une des raisons tient à ce que j'avais eu un très mauvais enseignant de probabilités, et un mauvais enseignant de physique statistique à l'Ecole Polytechnique. Ensuite, je me suis rendu compte que les physiciens mettent des probabilités à tous les endroits où on a besoin d'une meilleure compréhension de l'homogénéisation (mais pas seulement là), et qu'on pourra bien mieux s'en passer quand la théorie aura avancé. Si l'usage des probabilités est nécessaire pour les ingénieurs, qui font face à des situations où ils n'ont pas toujours toutes les équations pour décrire les phénomènes qu'ils essaient de dompter, il prend un caractère nettement anti-scientifique quand on les utilise trop dans les sciences, dont un des buts est précisément de découvrir ces équations encore mal comprises.

⁽¹⁶⁾ Je ne devais apprendre que bien plus tard, par George PAPANICOLAOU, que les physiciens parlaient de propriétés effectives, pour ce que nous avons appelé pendant des années des propriétés homogénéisées.

⁽¹⁷⁾ Henri SANCHEZ-PALENCIA a choisi il y a une vingtaine d'années d'utiliser son deuxième prénom, Evariste.

“appliqués”, et j’en distingue évidemment plusieurs catégories.⁽¹⁸⁾

Dans le système universitaire Français que j’ai connu, avant 1982, il y avait dans certaines universités des départements de mathématiques et dans certaines des départements de mécanique, ce qui dans le système Britannique correspondait aux dénominations “pure mathematics” et “applied mathematics”. Dans l’introduction d’un article pour une conférence à l’Ecole Polytechnique (alors à Palaiseau) à l’automne 1983, que la censure politique avait supprimée, j’avais écrit qu’il n’y a pas de mathématiques pures ou de mathématiques appliquées, et je reste de cet avis que les qualificatifs de pur ou d’appliqué peuvent à la rigueur s’appliquer à un vrai mathématicien, mais “pur” a alors une connotation négative car le sens habituel est de n’être pas intéressé à la science, alors qu’appliqué peut avoir différents sens. Dans mon introduction censurée, j’avais écrit que pour ce qui est des mathématiques il y a celles que je connais, celles que je connais mal mais dont je pense qu’elles pourraient m’être utiles et celles que je connais mal et dont je ne vois pas à quoi elles pourraient me servir, tout cela évoluant avec le temps, et donc je me demandais déjà s’il est raisonnable de qualifier les mathématiques de pures ou d’appliquées. Bien sûr, mon programme de recherche étant de développer des outils mathématiques nouveaux pour mieux comprendre la mécanique des milieux continus et la physique,⁽¹⁹⁾ je n’ai aucune raison de me limiter, et de ne pas utiliser des outils d’algèbre (dont je pense qu’elle doit servir), de géométrie (dont je pense aussi qu’elle doit servir), ou de topologie (dont je ne crois pas qu’elle serve vraiment). La difficulté, bien sûr, est la même que celle que décrivait FEYNMAN, quand il disait qu’il était plus efficace pour lui de développer les mathématiques

⁽¹⁸⁾ Par “mathématiciens appliqués” je désigne des gens qui ne sont pas des mathématiciens, et donc ne sont pas tenus de démontrer tout ce qu’ils affirment, et dans le modèle Britannique ils sont dans des départements d’“applied mathematics” alors que dans le modèle Français ils sont en général dans des départements de mécanique, mais je désigne aussi par ce terme d’anciens mathématiciens qui ont décidé de ne plus démontrer ce qu’ils disent, et qui sont plus ou moins efficaces à parler le langage des ingénieurs, et comme certains semblent ne rien avoir retenu concernant la rigueur propre aux mathématiciens, il est douteux qu’on puisse encore les qualifier de mathématiciens. Par mathématiciens “appliqués” je désigne des mathématiciens, qui disent s’intéresser à des applications, dont quelquefois ils n’ont pas la moindre notion; comme je suis un mathématicien intéressé par les sciences, et que j’ai appris un peu plus que la majorité des mathématiciens en mécanique des milieux continus et en physique, il m’est souvent arrivé d’expliquer pourquoi certains modèles utilisés sont mauvais, et ceux qui font semblant de s’intéresser à des applications n’ont en général pas tenu compte de mes remarques.

⁽¹⁹⁾ Dans mon analyse, les outils mathématiques existants ne sont pas assez performants pour décrire l’évolution des effets d’oscillations et de concentrations dans les équations aux dérivées partielles, qui distinguent la mécanique des milieux continus et la physique du 20ème siècle de celles du 19ème siècle, et j’appelle *au delà des équations aux dérivées partielles* cette théorie mathématique dont j’ai commencé le développement, avec l’homogénéisation, la compacité par compensation et les H-mesures.

qui lui étaient nécessaires, que de trouver un mathématicien à la fois capable de comprendre ce dont il avait besoin, et de savoir si cela existait déjà.

Au début des années 1970, j'avais commencé à comprendre un peu de mécanique des milieux continus grâce à une meilleure compréhension des mathématiques, et c'était d'ailleurs la seule voie possible pour un mathématicien comme moi. Dès le début, j'avais essayé d'expliquer ce que j'avais déjà compris, peut-être parce que je faisais l'erreur de croire que tous les mathématiciens sont intéressés à la science, et doivent donc être contents de savoir que certaines questions de mécanique des milieux continus ou de physique avaient enfin trouvé un cadre mathématique adapté, ce qui les mettaient maintenant à la portée des mathématiciens. Je me trompais pour plusieurs raisons, et l'une est que beaucoup ont préféré garder un cadre probabiliste dont j'étais content de me passer, puisque je le trouvais déjà vraiment mauvais; une autre raison tient au fait que beaucoup refusent d'analyser logiquement les informations qui leur parviennent sur les phénomènes réels, afin de présenter une bien meilleure description aux générations suivantes de mathématiciens intéressés par la science, et leur proposer de meilleurs cadres mathématiques, de meilleures conjectures sur ce qu'il faudrait démontrer, et quelques théorèmes allant dans la bonne direction; enfin, j'ai pu observer des effets très curieux de politique, ou certains qui n'étaient pas assez bons pour aller faire leurs études à Paris, préféraient aller étudier ailleurs avec des mathématiciens d'un niveau douteux, pas même capables de comprendre le premier principe de la thermodynamique, et évidemment incapables par là même de décrire les défauts de son deuxième principe, et il n'est pas surprenant que ceux là se sont consacrés par la suite à développer de la pseudo-mécanique, mais même avec ce but ils auraient appris bien plus s'ils avaient eu le courage d'aller étudier à Paris avec les quelques bons mathématiciens de leur tendance.

Bien que le sujet du détective qui doit démêler le puzzle des informations qu'on lui donne soit bien connu, par la littérature et par le cinéma, peu semblent s'apercevoir que le travail d'un chercheur est analogue. Certains tiennent à vanter des modèles mathématiques périmés pour des raisons essentiellement politiques, et leur cas correspond à celui des témoins qui cherchent à induire le détective en erreur pour l'éloigner de leurs amis coupables. Un cas plus fréquent est de mentir au détective parce qu'on veut lui cacher certaines choses, certes répréhensibles mais pas directement liées au problème qui l'intéresse, afin de ne pas être soupçonné, et ce comportement a pour effet de ralentir le travail du détective, puisqu'il va s'apercevoir qu'on lui ment,⁽²⁰⁾ et qu'il devra donc en

⁽²⁰⁾ 'Il' renvoie à 'détective', qui est un mot masculin, et je ne suppose évidemment rien sur

élucider les raisons, car il ne peut pas être sûr à l'avance que ces pistes ne feront pas avancer son enquête; ce cas correspond à ceux qui omettent de mentionner des défauts des modèles mathématiques qu'ils utilisent, non pas pour des raisons de sabotage mais plutôt parce qu'il est devenu courant de publier trop, et que la majorité s'est laissée prendre à ce jeu non scientifique. Le comportement d'un détective qui accorderait automatiquement plus de poids aux dires des gens de son village, ou de son propre groupe social, serait certainement considéré comme une source d'erreurs, mais curieusement, je me suis senti un peu seul parmi les mathématiciens à essayer de prendre en compte ce que j'entendais dire sur les propriétés des matériaux réels, et à essayer de déterminer quel poids je pouvais accorder à chaque information, qu'elle vienne d'un spécialiste de mécanique, d'un physicien ou d'un mathématicien, et je ne comprends pas bien la motivation de ceux qui préfèrent croire des mathématiciens travaillant dans la même branche qu'eux, alors qu'ils ont déjà montré un niveau de compréhension presque nul de la mécanique et de la physique.

A vrai dire, je n'avais pas trouvé tout de suite le point de vue de ne pas porter de jugements trop hâtifs sur ce qui me paraissait curieux, car je n'avais pas perçu que "comprendre" a un sens assez différent chez les non mathématiciens, et quand au printemps 1974 j'avais trouvé dans un livre de LANDAU & LIFSCHITZ une section sur la conductivité des mélanges ([Lan&Lif]), j'avais trop vite déduit qu'ils ne comprenaient pas ce dont ils parlaient,⁽²¹⁾ et je n'avais pas même fini de lire cette section.

Je n'avais pas rencontré Joe KELLER en avril 1975 quand j'étais allé faire un exposé au Courant Institute à New York, mais il était venu à Madison le mois suivant et j'avais noté en lui parlant que je devrais améliorer ma compréhension de la mécanique des milieux continus, parce que je n'avais pas pu comprendre le sens mathématique de tout ce qu'il m'avait dit. Ce n'était pas à cause d'une différence de langage, mais parce que j'ignorais l'existence d'un certain nombre de phénomènes, auxquels il me fallait donc réfléchir pour me faire une intuition de ce que cela pouvait recouvrir comme questions mathématiques à élucider, et j'avais eu une impression analogue, qu'il me fallait améliorer mon intuition de la mécanique des milieux continus, en parlant avec Ivo BABUŠKA en décembre 1975 à Versailles, ou quand je l'avais rencontré la première fois en mai 1975 à College Park (Maryland), pour une conférence qu'il organisait. A cette conférence, il avait fait part de sa recherche bibliographique pour une

le sexe de ce détective.

⁽²¹⁾ Puisqu'en dimension $N \geq 2$, la conductivité d'un mélange ne peut pas se déduire des proportions de matériaux utilisés.

question simple d'homogénéisation avec périodicité,⁽²²⁾ qui montrait que les formules publiées dans le temps étaient essentiellement toutes fausses ([Bab2]); bien sûr, ces formules avaient été suggérées par des spécialistes de physique ou de mécanique des milieux continus, puisqu'il n'y a pas de travaux mathématiques avant ceux de Sergio SPAGNOLO, suivi par l'école Italienne, à partir de la fin des années 1960, ou ceux de François MURAT et moi même suivis de l'école Française, à partir du début des années 1970. Alors qu'il est évident pour tout mathématicien qu'il ne peut pas y avoir de démonstration mais seulement des conjectures avant d'avoir défini ce dont on parle, il est très curieux de voir les réactions de certains "mathématiciens appliqués", qui montrent par là qu'ils ne sont pas des mathématiciens, quand ils disent qu'un résultat que moi ou un autre aurait démontré en homogénéisation était déjà connu, bien avant que Sergio SPAGNOLO ait donné la première définition de ce que cela pourrait signifier.

Avant de préciser ce point, je voudrais rappeler un exemple antérieur, qui ne semble pas avoir été bien expliqué aux jeunes générations, celui de la manière dont certaines formules utilisées par DIRAC ont pu être expliquées grâce aux travaux de Laurent SCHWARTZ dans sa théorie des distributions, comme d'ailleurs un formalisme dû à HEAVISIDE, dont le nom devrait être plus connu, puisque c'est à lui que nous devons la forme de l'équation de Maxwell que nous utilisons, et qu'on devrait plutôt appeler l'équation de Maxwell-Heaviside. Les physiciens continuent à utiliser la notation $\delta(x)$ pour la "fonction" de Dirac, et ce n'est pas le fait que ce ne soit pas une fonction mais une mesure de Radon qui soit si important,⁽²³⁾ et certains aspects du formalisme correspondent aisément à l'intuition de ce qu'est une masse ponctuelle, et cela ne posait pas de problèmes philosophiques trop grands à des mathématiciens comme POISSON, il y a près de deux cents ans. Une formule comme $\lambda^N \delta(\lambda x) = \delta(x)$ dans \mathbb{R}^N pour tout $\lambda > 0$ est déjà un bon test pour l'intuition,⁽²⁴⁾ mais DIRAC avait fait preuve de plus

⁽²²⁾ C'était le cadre dans lequel Ivo BABUŠKA travaillait ([Bab1]), imitant en cela les travaux antérieurs de Henri SANCHEZ-PALENCIA ([San-Pal1], [San-Pal2]), mais avec une motivation différente, et *c'est moi qui ai proposé d'utiliser le terme homogénéisation dans un sens plus général*, comme l'indiquait le titre de mon cours Peccot au Collège de France à Paris, au début de 1977, *Homogénéisation dans les équations aux dérivées partielles*.

⁽²³⁾ La masse de Dirac en $a \in \mathbb{R}^N$, notée δ_a , est l'application $\varphi \mapsto \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, qui s'étend à l'espace de Fréchet $C(\mathbb{R})$ ($\mathcal{E}_0(\mathbb{R})$ dans la notation de Laurent SCHWARTZ). Les physiciens utilisent la notation $\delta(x - a)$ au lieu de δ_a .

⁽²⁴⁾ Quand on "identifie" une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ à une mesure de Radon μ_f , on utilise la définition $\langle \mu_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f \varphi dx$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$, et il est usuel de dénoter aussi μ_f par f , ce qui est une assez mauvaise idée, car on devrait écrire $\mu_f = f dx$ pour expliquer le rôle crucial de la mesure de Lebesgue dx , et la formule de changement d'échelle. Si pour $\lambda > 0$ et $\varphi \in C(\mathbb{R}^N)$ on définit $\psi = T_\lambda \varphi$ par $\psi(x) = \varphi(\lambda x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, alors il est naturel

d'audace en utilisant les dérivées $\frac{\partial \delta}{\partial x_j}$,⁽²⁵⁾ et, en relation avec sa notation de 'bra' $\langle a |$ et de 'ket' $| b \rangle$ pour définir un scalaire $\langle a | b \rangle$ ou un opérateur $| b \rangle \langle a |$,⁽²⁶⁾ son utilisation des fonctions $e^{\pm 2i \pi(\cdot, \xi)}$ comme une base "orthonormée" de $L^2(\mathbb{R}^N)$ alors que ces fonctions n'appartiennent pas à $L^2(\mathbb{R}^N)$, et sa fameuse formule $\int_{\mathbb{R}^N} e^{\pm 2i \pi(x, \xi)} dx = \delta(\xi)$.⁽²⁷⁾

Si Laurent SCHWARTZ avait pu expliquer ces curieuses pratiques des physiciens, ce n'était pas parce qu'il avait eu pour but de faire précisément ça, et son problème initial de définir des séries de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i \pi n x}$ avec des coefficients à croissance polynomiale était purement académique, et son idée de les considérer comme des opérateurs n'était pas motivée par une intuition physique. Comme il me l'avait dit, son invention des distributions avait été rendue plus facile par le fait d'un choix de Bourbaki,⁽²⁸⁾ celui d'exposer la théorie des mesures de Radon, et non celle des mesures abstraites. Alors que Laurent SCHWARTZ avait présenté de manière très pédagogique l'essentiel de sa théorie pour les applica-

pour une mesure de Radon μ de définir $T_\lambda \mu$ par la formule $\lambda^N \langle T_\lambda \mu, T_\lambda \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$, et de dire que μ est homogène de degré k si $T_\lambda \mu = \lambda^k \mu$ pour tout $\lambda > 0$. Alors pour $f \in C(\mathbb{R}^N)$ on a $T_\lambda(\mu_f) = \mu_{(T_\lambda f)}$, et pour $k > -N$ on a $g = |x|^k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et μ_g est homogène de degré k . Il n'y a pas de fonction $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ non nulle pour laquelle μ_h est homogène de degré $-N$, mais δ_0 est homogène de degré $-N$.

⁽²⁵⁾ Dans les années 1930, Sergei SOBOLEV avait compris le sens à donner au fait qu'une fonction de $L^2(\Omega)$ peut avoir ses dérivées partielles dans $L^2(\Omega)$, et Jean LERAY avait utilisé cette notion de dérivée faible dans son travail sur les équations de Navier–Stokes, mais la théorie des distributions de Laurent SCHWARTZ va bien plus loin et permet de dériver autant de fois qu'on le veut ces nouveaux objets que sont les distributions, qui étendent les mesures de Radon en se restreignant à des fonctions tests dans $C_c^\infty(\Omega)$, l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω ($\mathcal{D}(\Omega)$ dans la notation de Laurent SCHWARTZ), avec des majorations précises; pour une distribution T , on définit $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ par $\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et donc la dérivée $\frac{\partial \delta_0}{\partial x_j}$ est tout simplement l'application $\varphi \mapsto -\frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_j}$.

⁽²⁶⁾ DIRAC avait compris l'importance de distinguer les éléments d'un espace de Hilbert H qui sont les $|b\rangle$, des éléments du dual H' qui sont les $\langle a|$, et il faut noter que les physiciens utilisent un produit scalaire $\langle a|b\rangle$ qui est linéaire en b et anti-linéaire en a , alors que les mathématiciens écrivent (u, v) qui est linéaire en u et anti-linéaire en v , et que l'opérateur $|b\rangle \langle a|$ des physiciens est dénoté $b \otimes a$ par les mathématiciens.

⁽²⁷⁾ L'utilisation des fonctions $e^{-2i \pi(\cdot, \xi)}$ correspond à la transformée de Fourier \mathcal{F} , et les $e^{+2i \pi(\cdot, \xi)}$ à $\overline{\mathcal{F}}$, et la formule de DIRAC est tout simplement la propriété $\mathcal{F}1 = \overline{\mathcal{F}}1 = \delta_0$, et cela a un sens parce que Laurent SCHWARTZ a étendu la transformée de Fourier aux distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, qu'il a appelées des distributions tempérées, mais cette extension n'est pas donnée par une intégrale, bien sûr.

⁽²⁸⁾ Bien que les premiers membres du groupe Bourbaki aient prétendu vouloir écrire un cours d'analyse, car ceux de l'époque ne leur plaisaient pas, leur motivation n'était certainement pas de créer des outils mathématiques pour résoudre des problèmes venant des autres sciences, et c'est peut-être sous l'influence de WEIL que la théorie des mesures de Radon a été préférée à la théorie de la mesure abstraite que les probabilistes utilisaient, peut-être parce que les mesures de Radon ne semblaient d'aucune utilité, sinon comme source de questions d'analyse fonctionnelle.

tions à la physique ([Sch1]), son ouvrage pour les mathématiciens avait pêché par un excès d'analyse fonctionnelle concernant les topologies à mettre sur ses espaces \mathcal{D} , \mathcal{E} , \mathcal{S} et leur duaux ([Sch2]), un peu comme s'il avait regretté d'avoir ouvert une porte sur les applications à la physique, et qu'il voulait éviter que des mathématiciens aillent plus loin, ce qui était évidemment nécessaire puisque sa théorie ne sert que de cadre général pour des questions d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients réguliers.

Les mathématiciens qui ont compris qu'avec la théorie des distributions comme cadre général il faut utiliser des espaces de Sobolev comme un outil plus adapté aux équations aux dérivées partielles de la physique et de la mécanique des milieux continus, parce qu'elles présentent des coefficients irréguliers et des non linéarités, ont appris à reconnaître ce qui dans le langage des physiciens peut se transformer facilement en un énoncé correct, et ce qui utilise des "arguments" dont on n'a pas encore compris quel sens mathématique leur donner.

III – Distinguer les conjectures, pour en transformer certaines en théorèmes

Comme la plupart des physiciens sont trop habitués à répéter des arguments formels inventés par de bons physiciens, ou par des physiciens moins bons mais que la propagande a fait surévaluer, ils ne savent pas en général où se trouve la frontière entre ce qui est compris et ce qui ne l'est pas, mais on voit souvent des mathématiciens et des physiciens se laisser leurrer par des effets de pseudo-logique,⁽²⁹⁾ sans s'apercevoir qu'ils jouent à des jeux où ils mettent dans les hypothèses ce qu'on a observé, et montrent donc qu'ils sont plutôt naïfs de s'enthousiasmer de l'efficacité de leur théorie à bien prédire les observations.

⁽²⁹⁾ C'est ainsi que j'appelle un argument où un jeu A implique un résultat B qui ressemble à quelque chose qui a été observé, et où on postule que c'est parce que la Nature joue précisément à ce jeu A , ce qui, en plus de montrer une totale incompréhension de la méthode scientifique en général et de la logique en particulier, montre un manque d'imagination étonnant. J'ai discuté ailleurs du cas significatif des quasi-cristaux ([Tar11]), où des physiciens avaient chauffé un ruban métallique au dessus de la température de Curie pour pouvoir favoriser une orientation magnétique particulière en imposant un champ magnétique extérieur, et avaient utilisé un effet de trempe pour espérer geler les propriétés magnétiques du ruban, et ils avaient donc forcé le matériau à changer sa *micro-géométrie* pour au moins s'adapter à des questions d'évacuation de la chaleur et à des tensions élastiques, et compte tenu du fait qu'un dixième de millimètre d'épaisseur pour un ruban correspond à près d'un million de distances d'un atome à son voisin, je me demande quel genre de mauvais physicien il faut être pour croire cette question liée à un problème de pavage du plan imaginé par un géomètre Britannique.

Si beaucoup de physiciens ont dû penser que ce qu'avait fait Laurent SCHWARTZ était déjà connu depuis DIRAC, puisqu'ils n'ont pas la même notion que les mathématiciens de ce que signifie la connaissance, je ne crois pas qu'il y ait eu beaucoup de personnes ayant reçu une formation en mathématiques qui aient prétendu que ce qu'avait fait Laurent SCHWARTZ avait déjà été fait par DIRAC, peut-être parce que jusqu'à la fin des années 1960 la formation d'un mathématicien à Paris était une des meilleures du monde, et que ceux qui n'avaient pas eu le niveau pour y étudier ne se permettaient pas de critiquer des mathématiciens bien meilleurs qu'eux.

Est-ce simplement à cause d'une baisse manifeste de niveau de formation que des jeunes ayant reçu une formation en mathématiques écrivent des énoncés sans aucune valeur scientifique, où ils attribuent des théorèmes concernant la G-convergence ou la H-convergence à des personnes qui travaillaient des dizaines d'années avant qu'on ait défini ces notions? N'auraient-ils pas pu être plus précis, et dire que certains résultats avaient été conjecturés, et n'auraient-ils pas perçu l'importance de dire sous quelles hypothèses ces résultats avaient été conjecturés, puisque jusqu'à une époque récente beaucoup ne percevaient pas encore qu'un mélange puisse avoir des propriétés effectives anisotropes? D'ailleurs, auraient-ils manqué ce point fondamental, que pour beaucoup de ces précurseurs les propriétés effectives d'un mélange étaient données par un nombre, représentant par exemple l'énergie totale contenue dans un domaine, avec des conditions aux limites particulières, alors que la G-convergence de Sergio SPAGNOLO est une propriété locale d'une fonction à valeur matricielle, indépendante des conditions aux limites, et que François MURAT et moi même avons étendu ce résultat au cas de la H-convergence?

Comme ceux qui ont utilisé ce genre d'attributions abusives ont souvent aussi attribué mes idées à d'autres, qui ne les avaient pas toujours comprises, j'ai considéré que c'était un signe d'adhérence au sabotage organisé que j'ai combattu depuis tant d'années, et je pense plus que jamais qu'il est important d'expliquer aux jeunes générations comment faire des mathématiques, et que s'intéresser à des questions de mécanique des milieux continus et de physique ne signifie pas qu'on doive simplement essayer de parler un langage utilisé par les ingénieurs,⁽³⁰⁾ sans

⁽³⁰⁾ Alors que son but était d'aller jouer du bongo dans les écoles de samba de Rio de Janeiro, FEYNMAN se faisait inviter à donner des cours à l'université, et il racontait dans son livre *Are you joking, Mr. Feynman?* qu'il avait été intrigué par la manière dont certains étudiants (probablement Brésiliens) apprenaient la physique, et il était arrivé à la conclusion qu'ils l'apprenaient comme une langue étrangère, sans percevoir la relation avec le monde réel. Ce défaut est maintenant devenu très courant chez des "mathématiciens", qui prétendent s'intéresser à des applications, alors que leur niveau de connaissance en mécanique des milieux continus et en

utiliser l'esprit critique du scientifique pour discuter des modèles, et la précision du raisonnement mathématique pour démontrer ce qui est vrai.

Comme je l'ai dit, j'avais trouvé une section sur la conductivité des mélanges dans un livre de LANDAU & LIFSCHITZ (traduit en Français), et je m'étais dit (au printemps 1974) que les physiciens ne comprenaient pas ce dont ils parlaient, puisqu'en dimension $N \geq 2$, la conductivité d'un mélange ne peut pas se déduire des proportions de matériaux utilisés, même si on se restreint à des matériaux effectifs isotropes, mais j'avais jugé trop vite, car dans ma remarque j'acceptais tous les mélanges possibles, même tout à fait irréalistes.⁽³¹⁾

Leur protocole d'expérience était de réduire deux matériaux conducteurs en poudre, de conductivité α et β , de les mélanger en proportion donnée, θ et $1 - \theta$, de bien secouer et de comprimer le résultat, et bien qu'on ne sache pas donner à ces procédures un sens mathématique, on est prêt à croire que cela ne fabriquera que des matériaux effectifs isotropes, mais il n'est pas clair que la conductivité du mélange soit une valeur $\kappa(\theta; \alpha, \beta)$ bien définie par ces contraintes vagues. Il est d'ailleurs curieux que la formule qu'ils proposaient n'est pas symétrique en α et β si on choisit $\theta = \frac{1}{2}$.

A y regarder de plus près, leur "raisonnement" était basé sur un calcul explicite du potentiel électrostatique dans la géométrie où une sphère d'un des matériaux est plongée dans un milieu infini fait de l'autre matériau. Doit-t-on en déduire que leur formule n'est sensée être bonne que pour des inclusions à peu près sphériques, pour une proportion assez petite? D'ailleurs, pourquoi n'avaient-ils montré aucun résultat expérimental montrant le domaine de "validité" de leur formule?

Ce manque de précision de la part de certains physiciens suggère que beaucoup de leurs affirmations devraient être analysées, en particulier quand ils postulent que seules des proportions jouent un rôle et qu'il n'y a pas de corrections à apporter à cause de la présence de *micro-géométries* particulières. Il n'y a pas de doute qu'on doit remettre en cause beaucoup de ce qui est postulé en thermodynamique, par exemple, mais pour pouvoir dire des choses mathématiquement

physique est assez limité, tout comme leur niveau dans d'autres secteurs à la mode vers lesquels ils se tournent, comme la biologie, et leur seul espoir de faire illusion est d'utiliser des mots clés, qu'ils trouvent dans les revues de vulgarisation qui sont à leur portée.

⁽³¹⁾ Ce qui est réaliste n'a pas encore été bien défini, mais l'idée qu'on puisse remplir un ensemble mesurable ω du matériau de conductivité α et son complément $\Omega \setminus \omega$ du matériau de conductivité β , est purement académique si ω et $\Omega \setminus \omega$ sont tous deux d'intérieur vide et de mesure positive. En d'autres termes, il faudrait savoir prendre en compte un coût de fabrication du mélange, et quand on autorisera des coûts arbitrairement grands on se rapprochera de la question mathématique que j'avais considérée, et la question des physiciens pourrait bien être de ne considérer que des mélanges de coût de fabrication assez bas.

correctes il faudrait d'abord développer de meilleurs outils mathématiques pour pouvoir suivre l'évolution des micro-géométries.

Après les observations d'Ivo BABUŠKA en 1975, que de nombreuses formules de coefficients effectifs publiées dans le passé sont essentiellement fausses ([Bab2]), il est du devoir de tout scientifique qui attribue à quelqu'un un résultat, publié avant qu'il y ait des définitions consistantes de ce que sont des coefficients effectifs en homogénéisation, de préciser quelles étaient les hypothèses de ces conjectures, et dans quelle mesure certaines des assertions pouvaient être considérées comme démontrées, et de signaler si par hasard certains auteurs auraient proposé explicitement ou implicitement une définition de ce qu'ils cherchaient.⁽³²⁾ Sinon, une telle assertion n'a pas sa place dans un journal de mathématiques, et n'est que de la propagande pour faire passer pour des résultats scientifiques des énoncés qui n'ont même pas été compris.

A une conférence à Versailles en décembre 1977, j'avais présenté une amélioration de la méthode que j'avais suivie avec François MURAT pour obtenir des bornes pour les coefficients effectifs ([Tar3]), basée sur nos résultats de compacité par compensation, mais ce n'est qu'en juin 1980, pendant un séjour au Courant Institute à New York, que j'avais fait des calculs d'application de ma méthode, et j'avais trouvé des bornes pour les coefficients de diffusion effectifs isotropes, quand on mélange deux matériaux isotropes. Quand je les avais montrées à George PAPANICOLAOU il m'avait dit de les comparer aux bornes que Zvi HASHIN avait obtenues avec SHTRIKMAN près de vingt ans avant ([Has&Sht]), et c'étaient bien les mêmes, mais j'étais le premier à avoir démontré leurs bornes, qu'ils avaient seulement conjecturées, car leur "raisonnement" n'avait aucun sens mathématique; ma méthode de démonstration ne ressemblait en rien à leur approche. En fait, on peut expliquer certains points douteux de leur "argument" que leurs bornes sont nécessairement vérifiées, mais cela utilise les H-mesures, que je n'ai introduites qu'à la fin des années 1980 ([Tar5]). Par contre, je n'avais eu aucune difficulté à adapter leur argument montrant que ces bornes étaient atteintes, et d'ailleurs on peut considérer qu'ils avaient vraiment démontré cette partie, bien avant qu'une définition générale de l'homogénéisation ait été introduite, car ils avaient observé une propriété bien particulière, qui n'est pas vérifiée dans la théorie générale, et qui ne nécessite aucun passage à la limite.

L'année suivante, à une conférence à New York en juin 1981, j'avais présenté la caractérisation des coefficients effectifs anisotropes pour des mélanges de deux matériaux conducteurs isotropes, obtenue avec François MURAT ([Tar4]). Notre

⁽³²⁾ 'Ils' renvoie à 'auteurs', qui est un mot masculin pluriel, et je ne suppose évidemment rien sur le sexe de ces auteurs.

condition nécessaire utilisait les mêmes fonctionnelles que j'avais introduites l'année précédente pour le cas isotrope, en application de ma méthode de décembre 1977 ([Tar3]). Notre condition suffisante utilisait la généralisation à des ellipsoïdes confocaux de la construction des sphères emboîtées de Hashin–Shtrikman ([Has&Sht]). Pendant mon exposé, David BERGMAN m'avait posé une question significative, et il m'avait demandé ce qu'était cette suite A_n que j'utilisais, et je lui avais répondu par une boutade, que c'était la même chose que la limite thermodynamique qu'il utilisait, mais comme je pense que tout le monde ne perçoit pas pourquoi on ne doit pas confondre son approche avec l'homogénéisation, il faut que je donne quelques précisions.

David BERGMAN est un physicien, et le coefficient qui l'intéressait est un nombre, par exemple le courant qui passe entre deux électrodes plates portées à une différence de potentiel 1, la zone entre les deux plans étant remplie d'un mélange de deux conducteurs, ou bien l'énergie électrostatique emmagasinée dans le mélange (voir [Ber]). Alors que le domaine rempli par son mélange était fixe et borné, il invoquait une limite thermodynamique, supposée être une limite de moyennes sur des boules arbitrairement grandes, ce qui m'avait paru curieux, vu que son domaine était fini; cependant, j'étais prêt à croire qu'on pouvait faire un raisonnement correct en considérant une suite de mélanges utilisant des longueurs caractéristiques de plus en plus petites, et donc j'interprétais son "tour de passe-passe invoquant une limite thermodynamique" comme l'utilisation cachée d'une suite de mélanges. Bien sûr, ce qu'il faisait n'était pas de l'homogénéisation du tout, et il ne parlait pas de propriétés locales données par des coefficients effectifs qui sont des matrices symétriques.

David BERGMAN avait introduit une idée spéciale au cas de mélanges de deux matériaux, que Graeme MILTON avait aussi introduite indépendamment, qui consiste à utiliser pour la même géométrie des conductivités différentes, et à étudier quelles fonctions de ces conductivités (en fait quelles fonctions de leur rapport) on peut obtenir (voir [Mil3]). En fait, il me semble que cette idée avait déjà été utilisée par PRAGER. Exprimée pour l'homogénéisation, cette idée consiste à prendre une suite χ_n de fonctions caractéristiques convergeant vers θ dans $L^\infty(\Omega)$ faible \star , et par un procédé diagonal à extraire une sous suite telle que

$$\begin{aligned}
 & A_n = \chi_n M_1 + (1 - \chi_n) M_2 \text{ H-converge vers } A_{\text{eff}} = F(\cdot; M_1, M_2) \\
 \text{(III.1)} \quad & \text{pour toutes les matrices } M_1, M_2 \text{ vérifiant} \\
 & (M_1 \xi \cdot \xi), (M_2 \xi \cdot \xi) \geq \alpha |\xi|^2 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ pour un } \alpha > 0 .
 \end{aligned}$$

F est alors automatiquement analytique en M_1 et M_2 , et la question est de com-

prendre quelles fonctions F de deux matrices on peut obtenir de cette manière, et ces fonctions satisfont

$$(III.2) \quad \begin{aligned} F(\cdot; M, M) &= M \text{ pour tout } M, \\ \nabla_1 F(\cdot; M, M) \cdot \widetilde{M} &= \theta \widetilde{M} \text{ pour tout } M \text{ et toute direction } \widetilde{M}, \\ \nabla_2 F(\cdot; M, M) \cdot \widetilde{M} &= (1 - \theta) \widetilde{M} \text{ pour tout } M \text{ et toute direction } \widetilde{M}, \end{aligned}$$

où ∇_j est la dérivée par rapport à M_j , c'est à dire qu'à l'ordre 1 et près de la diagonale on a $F(\cdot; M_1, M_2) \approx \theta M_1 + (1 - \theta)M_2$. Bien sûr, si on suppose M_1, M_2 symétriques on utilise la G-convergence, et on peut ensuite se restreindre au cas où M_1 et M_2 sont scalaires, et dans ce cas on a

$$(III.3) \quad \begin{aligned} F(\cdot; \alpha I, \beta I) &= \beta G\left(\cdot; \frac{\alpha}{\beta}\right) \\ \text{et on peut définir } G(\cdot; z) &\text{ pour } z \text{ complexe, sauf pour } z \text{ réel } \leq 0, \end{aligned}$$

car on peut utiliser le lemme de Lax–Milgram pour le cas complexe.⁽³³⁾ Ensuite, dans le cas particulier où

$$(III.4) \quad \begin{aligned} G(x; z) &= g(x; z)I \\ \text{pour presque tout } x \in \Omega &\text{ et tout } z \text{ qui n'est pas réel } \leq 0, \end{aligned}$$

on peut commencer à comparer les propriétés de $g(\cdot; z)$ à celles des fonctions que David BERGMAN et Graeme MILTON avaient introduites, et la transcription de leur observation dans ce contexte d'homogénéisation que je présente, puisque leur n'est pas de l'homogénéisation, est que g est holomorphe en z et satisfait $\Im g(\cdot; z) > 0$ pour $\Im z > 0$,⁽³⁴⁾ avec bien sûr $g(x; 1) = 1$ et $\frac{\partial g(\cdot; z)}{\partial z} \Big|_{z=1} = \theta$, mais eux n'avaient pas de dépendance en x , bien sûr. On voit donc apparaître une classe de fonctions bien étudiées en analyse, les fonctions de Pick.⁽³⁵⁾

David BERGMAN montrait qu'en dimension N et sous une hypothèse de symétrie cubique de son matériau, il pouvait calculer la dérivée seconde de g en 1,

⁽³³⁾ S'il existe $\gamma > 0$ et un nombre complexe non nul ζ_0 tels que $\Re(\zeta_0(A_n \xi, \xi)) \geq \gamma |\xi|^2$ pour tout $\xi \in C^N$ (où (η, ξ) désigne le produit scalaire Hermitien $\sum_j \eta_j \bar{\xi}_j$), ce qui dans le cas où A_n ne prend que les valeurs I et zI consiste à séparer strictement 1 et z de 0 par une droite.

⁽³⁴⁾ Une équation $-\operatorname{div}((a_n + i b_n) \operatorname{grad}(u_n + i v_n)) = 0$ avec a_n, b_n, u_n , et v_n réels s'écrit comme un système, $-\operatorname{div}(a_n \operatorname{grad}(u_n) - b_n \operatorname{grad}(v_n)) = 0$ et $-\operatorname{div}(b_n \operatorname{grad}(u_n) + a_n \operatorname{grad}(v_n)) = 0$, et appliquant la première équation à $-v_n$ et la seconde à $+u_n$, c'est à dire en considérant la partie imaginaire de $((a_n + i b_n) \operatorname{grad}(u_n + i v_n)) \overline{\operatorname{grad}(u_n + i v_n)}$ on trouve la quantité $b_n (|\operatorname{grad}(u_n)|^2 + |\operatorname{grad}(v_n)|^2)$, et si $b_n \geq 0$ alors on garde cette positivité pour la G-limite.

⁽³⁵⁾ Ces fonctions holomorphes, réelles au voisinage d'un intervalle réel, et qui envoient le demi plan supérieur ouvert dans lui même, sont aussi nommées d'après NEVANLINNA, ou d'après STIELTJES. HERGLOTZ avait considéré des fonctions analogues, définies sur le disque unité, et de partie réelle positive.

en fonction de θ et de N , et il en déduisait des bornes pour $g(z)$ quand z est réel positif, qui sont précisément les bornes de Hashin–Shtrikman. Graeme MILTON montrait comment des informations sur plusieurs dérivées de g en 1 permettaient d'obtenir des bornes plus précises, et son analyse utilisait des approximants de Padé.

C'est seulement à l'automne 1986 que j'ai pensé à comparer la formule du livre de LANDAU & LIFSCHITZ ([Lan&Lif]) avec les bornes de Hashin–Shtrikman ([Has&Sht]), et c'était une des bornes. A cette époque, je comprenais bien mieux qu'en 1974 le mode de pensée des physiciens, et j'ai continué à lire pour voir ce qu'ils disaient après, et pour le cas où la conductivité $a(x)$ d'un mélange varie peu, ils proposaient la formule

$$(III.5) \quad a_{\text{eff}} \approx \bar{a} - \frac{(\overline{a - \bar{a}})^2}{3\bar{a}},$$

et ils en déduisaient une autre,

$$(III.6) \quad a_{\text{eff}} \approx (\overline{a^{1/3}})^3,$$

et bien sûr, c'est moi qui utilise le signe \approx , car les physiciens n'hésitent pas en général à utiliser le signe $=$ entre des quantités voisines.

La fonctionnelle que j'avais utilisée pour démontrer les bornes sur les coefficients effectifs, d'abord pour le cas isotrope puis avec François MURAT pour le cas anisotrope en 1980, n'était en rien limitée aux mélanges de deux matériaux, et les calculs pour le cas de plusieurs matériaux isotropes, effectués avec Gilles FRANCFORT et François MURAT, nous apportèrent la surprise que la formule (III.5) était bien une bonne approximation quand on supposait le coefficient effectif isotrope, sous la même hypothèses de petites variations de la conductivité, bien sûr. Il est toujours surprenant pour un mathématicien de découvrir que des arguments de physiciens défiant la logique élémentaire puissent donner un bon résultat, et à moins qu'ils aient mis dans les hypothèses ce qu'ils voulaient trouver dans la conclusion, ce qui ne semblait pas le cas pour cet exemple, le mathématicien doit chercher une explication rationnelle du résultat.

Je commençais par observer que le problème derrière la formule (III.5) est une question que je qualifiais d'*homogénéisation de faible amplitude*, où on a

$$(III.7) \quad \begin{aligned} A_n &= A_* + \gamma B_n \text{ avec } |\gamma| \text{ petit, et} \\ B_n &\rightharpoonup 0 \text{ dans } L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)) \text{ faible } \star, \end{aligned}$$

et après extraction d'une sous suite A_m qui H-converge vers $A_{\text{eff}}(\cdot; \gamma)$ pour tout γ petit, on a une limite analytique en γ ,

$$(III.8) \quad A_{\text{eff}}(\cdot; \gamma) = A_* + \gamma^2 M_2 + \gamma^3 M_3 + \dots,$$

et on aimerait calculer M_2, M_3, \dots . Le miracle de la formule (III.5) est que si $A_* = a_* I$, si $B_n = b_n I$, et si $M_2 = m_2 I$, alors on peut exprimer m_2 à l'aide de a_* et de la limite dans $L^\infty(\Omega)$ faible \star de $(b_n)^2$, alors que la formule générale nécessite un nouvel outil, dont j'avais eu l'intuition en 1984 mais que je n'avais pas eu le courage de développer à ce moment là, et que j'appelais des H-mesures ([Tar5]). En effet, si

$$(III.9) \quad B_n = b_n I \text{ avec } b_n \rightharpoonup 0, (b_n)^2 \rightharpoonup \sigma \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } \star ,$$

et si

$$(III.10) \quad b_n \text{ correspond à une H-mesure } \mu \in \mathcal{M}(\Omega \times S^{N-1}) ,$$

alors on a

$$(III.11) \quad \mu \geq 0, \text{ et } \sigma \text{ est la projection de } \mu \text{ en } x ,$$

et la formule pour M_2 est

$$(III.12) \quad M_2 = - \int_{S^{N-1}} \frac{\xi \otimes \xi}{(A_* \xi \cdot \xi)} d\mu(x, \xi) ,$$

et donc en utilisant (III.11)

$$(III.13) \quad \text{si } A_* = a_* I, \quad M_2 = - \frac{\int_{S^{N-1}} \xi \otimes \xi d\mu(x, \xi)}{a_*}, \text{ et } \text{trace}(M_2) = - \frac{\sigma}{a_*} .$$

Donc, dans le cas où $B_n = b_n I$, et où $A_{\text{eff}}(x; \gamma)$ est isotrope à l'ordre 2, c'est à dire si $A_* = a_* I$ et $M_2 = m_2 I$, (III.8), (III.9) et (III.13) donnent

$$(III.14) \quad A_{\text{eff}}(\cdot; \gamma) = a_* I - \frac{\gamma^2 \sigma}{N a_*} I + O(\gamma^3) ,$$

ce qui correspond bien à l'idée de la formule (III.5), calculée pour la dimension $N = 3$.

Toujours sous l'hypothèse où on mélange des matériaux isotropes et où le matériau effectif est isotrope, au moins à l'ordre 2, l'idée de la formule (III.6) est de chercher une fonction Φ telle que

$$(III.15) \quad \Phi(a_* + \gamma b_n) \rightharpoonup \Phi(a_{\text{eff}}(\cdot; \gamma)) + O(\gamma^3) \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } \star ,$$

et en utilisant le développement de Taylor de Φ à l'ordre 2, l'identification des coefficients de σ donne

$$(III.16) \quad \frac{\Phi''(a_*)}{2} = - \frac{\Phi'(a_*)}{N a_*} ,$$

et on peut donc prendre

$$(III.17) \quad \begin{aligned} \Phi(t) &= t^{(N-2)/N} \text{ pour tout } t > 0 \text{ si } N \geq 3 \\ \Phi(t) &= \log t \text{ pour tout } t > 0 \text{ si } N = 2. \end{aligned}$$

Bien sûr, rien n'empêche d'appliquer cette formule quand les variations de conductivité ne sont pas petites, et d'espérer que la moyenne de $\Phi(a)$ est une bonne approximation de $\Phi(a_{\text{eff}})$.

Georges MATHERON a utilisé le cas $N = 2$ dès les années 1960, mais il était intéressé à comprendre comment calculer le coefficient qui apparaît dans la loi de Darcy, qui décrit au niveau macroscopique l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux, et il savait bien que le seul coefficient de porosité ne contient pas assez d'information, et il avait donc introduit d'autres quantités, de nature plus géométrique.⁽³⁶⁾ En 1973, Horia ENE et Henri SANCHEZ-PALENCIA avaient conjecturé un développement asymptotique pour un écoulement de Stokes dans un milieu périodique ([Ene&San-Pal1], [Ene&San-Pal2]), avec un premier terme significatif en $\varepsilon^2 v(x)$, et v vérifiant une équation de Darcy.⁽³⁷⁾ Vers 1978, je crois, Jacques-Louis LIONS m'avait signalé qu'il y avait une difficulté technique pour démontrer ce résultat, car il n'arrivait pas à appliquer mes idées pour l'homogénéisation des domaines avec trous, qui demandent d'étendre la pression dans la partie solide, et j'avais réussi à faire cette extension pour des géométries "peu réalistes" en 3 dimensions (voir [S-P3]), et Grégoire ALLAIRE avait plus tard donné une démonstration pour des géométries plus générales ([All]). Au milieu des années 1980, à une réunion à l'IFP (Institut Français du Pétrole), j'ai entendu Georges MATHERON dire qu'il avait démontré la loi de Darcy par des méthodes probabilistes dans les années 1960, mais j'ignore si cette assertion a

⁽³⁶⁾ A cause de la tension superficielle, la pression à utiliser pour pousser un liquide dans un tuyau vide augmente si le diamètre du tuyau diminue, et il est utile de considérer le volume du vide atteignable depuis l'extérieur, en ne passant que par des passages d'un diamètre minimum fonction de la pression utilisée; si dans un ouvert Ω la partie solide est $\Omega \setminus \omega$ pour un ouvert ω , la porosité globale est le rapport $\text{mesure}(\omega)/\text{mesure}(\Omega)$ du volume de vide au volume total, mais si pour $s > 0$ on définit les ouverts $A_s = \{x \in \omega \mid B(x, s) \subset \omega\}$, $B_s = \bigcup_{x \in A_s} B(x, s)$, et ω_s la composante connexe de B_s qui touche $\partial\omega$, alors la porosité utilisable est $\lim_{s \rightarrow 0} \text{mesure}(\omega_s)/\text{mesure}(\Omega)$. Georges MATHERON avait aussi considéré d'autres quantités, dans ce qu'il appelait la stéréométrie, mais j'ignore s'il avait discuté du défaut de ces propriétés d'être statiques, car il faudrait les utiliser en présence de déformations élastiques, ce qui est crucial pour un milieu fissuré, où les déformations peuvent avoir l'effet d'ouvrir certaines fissures et donc d'augmenter la porosité effective (et il s'agit d'élasticité en grandes déformations, et pas d'élasticité linéarisée, bien sûr).

⁽³⁷⁾ Si dans la période la frontière entre le solide et le liquide est de classe C^2 , alors B_s et ω_s sont indépendants de s pour s assez petit, ce qui ne semble pas vrai pour des matériaux réels, et ces milieux périodiques ne sont pas trop réalistes.

été attestée par un mathématicien, sachant donc distinguer entre conjectures et démonstrations, ou si, comme c'est souvent le cas, les termes probabilistes servaient à cacher le fait qu'on n'avait pas défini ce dont on parlait (comme pour un paragraphe sur la conductivité des mélanges, dont j'ai parlé plus haut). Vers 1987, on m'avait montré à l'IFP un article dont l'auteur prétendait montrer la formule (III.6), mais à ce moment là j'avais déjà introduit les H-mesures pour montrer ce qui est vrai, et donc expliquer ce qui n'est qu'approché et les limites de ce type de formule; on m'avait aussi dit que la loi de Darcy observée est non linéaire.⁽³⁸⁾

IV – Apprendre à surmonter l'incompréhension et l'agressivité des non mathématiciens

Quand j'avais présenté mes résultats d'homogénéisation de faible amplitude à une conférence à Leesburg (Virginia), en 1988, George PAPANICOLAOU avait immédiatement dit que c'était faux, mais j'avais tout aussi rapidement compris l'erreur de logique qu'il devait faire, et je lui avais répondu que non, car dans mon interprétation il avait souvent entendu David BERGMAN utiliser une hypothèse de symétrie cubique, et je déduisais de son intervention brutale qu'il avait fait l'erreur de croire que cette hypothèse était nécessaire pour le type de résultat que David BERGMAN obtenait.⁽³⁹⁾ Une conséquence de mon résultat est que si un matériau effectif est isotrope à l'ordre 2 en γ alors on peut déduire le coefficient de γ^2 en fonction de proportions, et cela est absolument indépendant de la forme des morceaux utilisés pour le mélange, et cela explique d'ailleurs pourquoi le

⁽³⁸⁾ D'après ce qu'on m'avait dit à l'IFP, les observations ressembleraient à des effets d'hystérésis, qualitativement expliqués en utilisant une observation bien connue des spéléologues, qui savent qu'on peut découvrir des salles importantes qui ne sont accessibles que par des conduits assez étroits, et qu'il faut éviter de se faire piéger dans ces salles par temps d'orage, car le niveau de l'eau peut monter dangereusement. Si dans un milieu poreux la pression est suffisante pour faire passer le liquide dans un petit tuyau menant à une salle de grande taille, on commencera par remplir cette salle, sans que rien n'en sorte, et quand la salle sera pleine et dès que la pression sera suffisante pour que le liquide sorte par un autre tuyau, on observera souvent un effet siphon, où presque tout le liquide emmagasiné dans la salle sera aspiré par le tuyau d'évacuation. Je me demande d'ailleurs si ce qu'on appelle l'intermittence pour les phénomènes de turbulence n'est pas un effet de cette nature.

⁽³⁹⁾ Les mathématiciens savent éviter cette erreur, et ils ne disent pas qu'une hypothèse est nécessaire pour déduire un certain résultat, à moins qu'ils aient d'abord démontré cette assertion, mais ils disent que la méthode de démonstration qu'ils suivent semble demander un certain type d'hypothèse, et éventuellement ils conjecturent que cela doit être vrai pour toute autre démonstration de ce résultat.

“raisonnement” de LANDAU & LIFSCHITZ basé sur une géométrie sphérique donne un bon résultat pour d'autres micro-géométries.

D'ailleurs, qu'un “mathématicien appliqué” comme George PAPANICOLAOU attaque un mathématicien comme moi qui présente un théorème résulte d'une agressivité curieuse. Les “mathématiciens appliqués” ne s'imposent en général aucune rigueur dans ce qu'ils appellent des “démonstrations” de résultats, et une partie de ce qu'ils publient ne contient que des conjectures car il y a des trous dans leurs “démonstrations”, qui sont donc incomplètes, et je ne vois pas bien comment ils pourraient être si sûrs de donner des leçons de démonstrations à des mathématiciens. Par contre, pour pouvoir affirmer qu'un de leurs résultats est faux, un mathématicien comme moi s'astreindra à construire un contre-exemple.

Quand David BERGMAN avait introduit la fonction de la variable complexe z dont j'ai parlé plus haut, qui envoie le demi plan supérieur dans lui même, il avait certainement dû utiliser un argument faux pour conclure comme il l'avait fait au début que cela devait être une fraction rationnelle. Pour montrer que ce n'est pas vrai, Graeme MILTON avait utilisé une analogie avec des circuits électriques, ressemblant à des ponts de Wheatstone, mais bien que David BERGMAN se soit effectivement trompé pour cette question, je ne vois pas bien comment l'argument de Graeme MILTON pourrait être autre chose qu'une conjecture, puisqu'il me paraît utiliser un autre type de passage à la limite, et que l'interversion de limites n'est pas toujours valable. Pour fabriquer un contre-exemple montrant que David BERGMAN s'était trompé, il suffit d'observer que pour la micro-géométrie (périodique) d'un damier, dont les cases blanches ont la conductivité 1 et les cases noires la conductivité z , la conductivité effective est isotrope et égale à \sqrt{z} (bien défini pour z complexe non réel ≤ 0). Ce résultat repose sur une observation de Joe KELLER ([Kel1]), qui avait utilisé une propriété particulière à la dimension 2,

$$(IV.1) \quad \operatorname{div}(R_{\pi/2}u) = -\operatorname{rot}(u), \quad \operatorname{rot}(R_{\pi/2}u) = +\operatorname{div}(u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

où $R_{\pi/2}$ est la rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan (avec $\operatorname{div}(u) = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$ et $\operatorname{rot}(u) = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$), et il en avait déduit

$$(IV.2) \quad \text{si } N = 2 \text{ et si } b(x) = \frac{1}{a(x)}, \text{ “alors” } b_{\text{eff}} = \frac{1}{a_{\text{eff}}},$$

mais il faut faire attention aux hypothèses de ce résultat conjecturé par Joe KELLER, et voir comment l'interpréter en théorie de l'homogénéisation. En effet,

on peut penser que (IV.2) veut dire

$$(IV.3) \quad \begin{array}{l} \text{si } N = 2, \text{ si } a_n I \text{ G-converge vers } a_{\text{eff}} I, \text{ et si } \frac{1}{a_n} I \text{ G-converge vers } b_{\text{eff}} I \\ \text{alors } b_{\text{eff}} = \frac{1}{a_{\text{eff}}} \text{ presque partout dans } \Omega, \end{array}$$

ou bien

$$(IV.4) \quad \begin{array}{l} \text{si } N = 2, \text{ et si } a_n I \text{ G-converge vers } a_{\text{eff}} I \\ \text{alors } \frac{1}{a_n} I \text{ G-converge vers } \frac{1}{a_{\text{eff}}} I, \end{array}$$

et ces deux énoncés sont vrais, et (IV.4) implique (IV.3). Je n'ai pas lu l'article de Joe KELLER, et comme jusqu'à une époque récente les gens considéraient que tous les mélanges ont des propriétés effectives isotropes, je suppose qu'en écrivant (IV.2) c'était implicitement (IV.3) qu'il considérait, plutôt que (IV.4).

La propriété (IV.3) suffit à calculer la conductivité effective de la micro-géométrie en damier, car la conductivité effective est bien isotrope,⁽⁴⁰⁾ et comme $\frac{z}{a}$ correspond au même damier où on a échangé les conductivités, on déduit que $\frac{z}{a_{\text{eff}}} = a_{\text{eff}}$ et donc $a_{\text{eff}} = \sqrt{z}$ pour z non réel ≤ 0 , avec le choix naturel de la racine. Plus généralement, (IV.3) implique

$$(IV.5) \quad \begin{array}{l} \text{si } N = 2, \text{ et dans le cas particulier (III.4), on a} \\ g(x; z) g\left(x; \frac{1}{z}\right) = 1 \text{ pour tous les } z \text{ qui ne sont pas réels } \leq 0, \\ \text{presque partout dans } \Omega, \end{array}$$

et dans le cadre sans variable x qu'il utilisait, Graeme MILTON a montré qu'on pouvait obtenir toutes les fractions rationnelles ayant cette propriété, et donc à la limite toutes les fonctions de Pick g satisfaisant la contrainte (IV.5), simplement à partir de la formule correspondant à une micro-géométrie particulière, celle des sphères emboîtées de Hashin–Shtrikman, et d'un argument d'homogénéisation

⁽⁴⁰⁾ Si la période $(0, 1) \times (0, 1)$ est découpée en quatre carrés de côté $\frac{1}{2}$ et des matériaux de conductivités α, β, γ , et δ sont utilisés pour chacun de ces quatre petits carrés, alors il y a des symétries par rapport aux parallèles aux axes de coordonnées passant par le centre d'un de ces petits carrés, et la matrice de conductivité effective est donc diagonale; pour ce cas, Stefano MORTOLA et Sergio STEFFÈ ont conjecturé une formule ([Mor&Ste1]), qui a été démontrée par Graeme MILTON ([Mil2]), indépendamment de deux autres physiciens, CRASTER et OBNOSOV ([Obn], [Cra&Obn]), qui ont traité un cas plus général où la période est découpée en quatre rectangles. Dans le cas du damier, il y a une autre symétrie par rapport à la diagonale de chacun des petits carrés, et la conductivité effective est donc isotrope.

itérée, qui est qu'à partir de trois micro-géométries correspondant à des fonctions f , g , et h , on peut créer une quatrième micro-géométrie correspondant à la fonction k donnée par la formule (IV.6),⁽⁴¹⁾

$$(IV.6) \quad k(z) = f(z) h\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right) \text{ pour tous les } z \text{ qui ne sont pas réels } \leq 0,$$

et cette formule (IV.6) est valable en toute dimension $N \geq 1$.⁽⁴²⁾ A ma connaissance, la classe des fonctions f qu'on peut obtenir en dimension $N \geq 3$ n'a pas encore été caractérisée, et on ne connaît pas non plus explicitement la fonction g du "damier tri-dimensionnel", mais au début des années 1990, Joe KELLER m'avait expliqué son argument montrant que $g(z)$ se comporte en \sqrt{z} pour z voisin de 0 ([Kel2], et il me semble bien que cela s'étend à toutes les dimensions $N \geq 4$.

Donc David BERGMAN s'était trompé, mais il me semble que son argument utilisait le fait que l'interface entre les deux matériaux était supposée assez régulière, et il avait dû en déduire que la fonction f est régulière près de 0. C'est bien ce qu'ont montré Stefano MORTOLA et Sergio STEFFÈ ([Mor&Ste2]) dans un cadre périodique, pour des matériaux non nécessairement isotropes, qu'on peut utiliser un des matériaux qui n'est pas elliptique, à condition que le manque d'ellipticité ne soit pas trop prononcé, et cela dépend de la régularité de l'interface, et compte tenu de l'exemple du damier, on voit que cette hypothèse de régularité est cruciale. En fait, quand j'avais développé en 1975 des techniques de prolongement pour l'homogénéisation dans des domaines à trous, je ne m'imposais évidemment pas de conditions de périodicité, et on pourrait en suivant mon idée obtenir un résultat analogue à celui de Stefano MORTOLA et Sergio STEFFÈ sans hypothèse de périodicité, basé bien sûr sur la régularité des interfaces.

David BERGMAN a aussi lié le comportement de f en 0 à une question de percolation, ce qui n'est pas tout à fait clair. La percolation est une question physique qui a à voir avec le mélange d'un conducteur et d'un isolant parfait, ce qui fait apparaître des équations aux dérivées partielles avec condition de Neumann au bord de l'isolant,⁽⁴³⁾ ce qu'il ne faut pas confondre avec un jeu que des physiciens ont inventé, que j'appelle "percolation" pour le distinguer du problème de

⁽⁴¹⁾ Bien sûr, f , tout comme g et h , n'est pas une fonction de Pick arbitraire, seulement contrainte à vérifier $f(1) = 1$. Indépendamment de la valeur de N , on peut montrer que pour z satisfaisant $\Im(z) > 0$, la valeur de $f(z)$ doit se trouver entre le segment $[1, z]$ et le cercle passant par 0, 1 et z , c'est à dire dans celles des deux régions de cette forme qui ne contient pas 0.

⁽⁴²⁾ Pour $N = 1$, les seules fonctions qu'on peut obtenir ont la forme $\frac{1}{f(z)} = 1 - \theta + \frac{\theta}{z}$ pour une valeur de $\theta \in [0, 1]$, et on n'élargit pas la classe en utilisant (IV.6).

⁽⁴³⁾ Mon approche de 1975 pour démontrer un théorème d'homogénéisation dans le cas de conditions de Neumann sur les bords des trous, qui est ce qu'on obtient si les trous sont

physique,⁽⁴⁴⁾ et c'est donc un exemple de ce que j'appelle un problème de physiciens par opposition à un problème de physique. Les expérimentateurs disent qu'ils observent une "proportion critique" θ_c de l'isolant, telle que pour $\theta > \theta_c$ le courant ne passe pas, et pour $\theta < \theta_c$ le courant passe et on mesure un courant $i(\theta)$ qui tend vers 0 à θ_c , qu'ils conjecturent être en $(\theta_c - \theta)^\gamma$ pour un exposant universel γ . Bien sûr, on doit penser que, ayant choisi un procédé de fabrication du mélange, on répète cette fabrication d'un mélange plusieurs fois et on note les valeurs mesurées de la proportion de l'isolant θ et du courant i qui passe, et bien sûr les mesures expérimentales (θ, i) ne tomberont pas vraiment sur une courbe; cela n'a rien d'étonnant pour un mathématicien qui a étudié l'homogénéisation, puisqu'il sait que les propriétés effectives d'un mélange ne dépendent pas seulement des proportions utilisées, et c'est bien sûr aussi vrai dans le cas où un des matériaux est un isolant (ou est un conducteur parfait), mais certains physiciens sont encore assez têtus pour croire qu'il doit y avoir une formule,⁽⁴⁵⁾ et donc ils interprètent les mesures expérimentales en prétendant qu'il y a une courbe $i(\theta)$ et que la dispersion des points de mesures est le fait d'erreurs expérimentales. Il y a là un détournement de la méthode scientifique, bien sûr, mais ce qui m'intéresse ici est plutôt de poser la question de savoir comment une fonction f , qui est liée à

remplis d'un isolant parfait, supposait une régularité Lipschitzienne de l'interface entre l'isolant et les autres conducteurs utilisés. La raison était que j'utilisais un prolongement $P_n u_n$ défini aussi dans l'isolant, et j'imposais d'avoir P_n borné dans $\mathcal{L}(H^1(\Omega_n); H^1(\Omega))$ pour déduire qu'une sous suite $P_m u_m$ converge vers $u_* \in H^1(\Omega)$, dans $H^1(\Omega)$ faible et donc dans $L^2(\Omega)$ fort, ce qui implique que $\tilde{u}_m = \chi_{\Omega_m} P_m u_m$ converge vers θu_* dans $L^2(\Omega)$ faible; donc, si \tilde{u}_n converge vers u_∞ dans $L^2(\Omega)$ faible, on a la surprise d'avoir $\frac{u_\infty}{\theta} \in H^1(\Omega)$, alors que $\theta \in L^\infty(\Omega)$ n'est pas nécessairement régulière (ce que les fanatiques de la périodicité ont du mal à imaginer, eux qui croient qu'il n'existe que des mélanges à θ constant). Plus tard, cette condition de régularité que j'avais imposée a été affaiblie par Grégoire ALLAIRE et François MURAT ([All&Mur]).

⁽⁴⁴⁾ Ce jeu consiste à travailler sur un réseau discret pour lequel on coupe les liaisons indépendamment avec une probabilité p , et on se demande avec quelle probabilité le courant passera.

⁽⁴⁵⁾ George PAPANICOLAOU m'a dit une fois que les physiciens n'aiment pas les bornes de Hashin–Shtrikman parce qu'elles ne montrent pas d'effet de percolation, mais je trouve cela curieux, car personne n'a jamais dit qu'il est facile d'imaginer un procédé expérimental qui produise des mélanges exhibant les conductivités effectives données par les bornes de Hashin–Shtrikman. Ce sont des bornes, qu'on ne peut pas dépasser, même en imaginant les mélanges les plus invraisemblables et d'un coût de fabrication exorbitant, et les physiciens devraient commencer par abandonner leur idée naïve qu'un procédé de fabrication qui comporte des éléments non clairement définis, comme réduire en poudre, secouer, comprimer, donne toujours la même valeur d'un coefficient effectif global. Il est tout à fait possible que l'écart expérimental pour un procédé de fabrication donné soit très faible en comparaison du rapport des bornes de Hashin–Shtrikman, mais pour qu'un mathématicien puisse étudier cette question, il faudrait qu'on lui dise quel procédé de fabrication est choisi. Le dogme que les résultats de mesures sont indépendants de la méthode de mélange n'a bien sûr aucun intérêt scientifique.

une micro-géométrie et donc présente une proportion θ_0 particulière, qui est $f'(1)$, pourrait nous apprendre quelque chose sur la percolation, qui expérimentalement consiste à faire des mesures sur des tas de réalisations différentes avec des proportions θ variées.

A une conférence à l'IMA (Institute for Mathematics and its Applications) à Minneapolis (Minnesota) en 1995, un "ingénieur" avait commencé son exposé d'une manière curieuse, en se vantant d'avoir démontré quelque chose que les mathématiciens n'avaient pas fait, mais ensuite il avait énoncé quelque chose de faux, qu'on pouvait trouver des bornes de coefficients d'élasticité effectifs (en élasticité linéarisée), avec des inclusions de matériaux non elliptiques, en fonction des seules proportions utilisées, et j'ai donc dit que c'était faux, et je l'ai répété pour être sûr qu'il ait entendu. De la manière dont certains m'ont regardé j'ai déduit qu'ils avaient abandonné l'idée de passer pour des mathématiciens dans le futur, et seul John WILLIS est venu me voir après, pour me dire que le conférencier s'était trompé de terme, car ses matériaux étaient fortement elliptiques (mais pas très fortement elliptiques),⁽⁴⁶⁾ et il m'a dit qu'il avait déjà aidé ce conférencier à corriger une erreur de raisonnement antérieure. En conséquence, je n'avais pas eu le courage de prendre le temps d'expliquer à ce conférencier comment un mathématicien travaille, et pourquoi il lui fallait rajouter des hypothèses de régularité de ses interfaces s'il voulait que son énoncé soit valable, car je n'avais pas envie de lui expliquer le cas du damier, et les estimations de Stefano MORTOLA et Sergio STEFFÈ, pour lui montrer ce qui déjà n'allait pas pour une simple équation de la diffusion, et qu'il fallait donc prendre encore plus de précautions pour le cas de l'élasticité linéarisée, et comme ce conférencier avait utilisé l'élasticité linéarisée pour décrire des propriétés au niveau atomique, j'étais sûr par avance qu'il n'avait rien du pragmatisme d'un ingénieur.

Quand même, que des mathématiciens ignorent les défauts de l'élasticité linéarisée est encore possible,⁽⁴⁷⁾ mais que des gens qui se prennent pour des

⁽⁴⁶⁾ Un matériau élastique linéaire a la loi constitutive $\sigma_{i,j} = \sum_{k,\ell} C_{i,j,k,\ell} \varepsilon_{k,\ell}$ (et $\varepsilon_{k,\ell} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k})$), avec $C_{i,j,k,\ell} = C_{j,i,k,\ell} = C_{i,j,\ell,k} = C_{k,\ell,i,j}$, et l'ellipticité très forte est la condition $\sum_{i,j,k,\ell} C_{i,j,k,\ell} M_{i,j} M_{k,\ell} \geq \alpha |M|^2$ pour toute matrice symétrique M , alors que l'ellipticité forte est cette condition seulement pour les M de la forme $a \otimes b + b \otimes a$, et compte tenu des symétries, cela veut dire que, pour tout $\xi \neq 0$, le tenseur acoustique $A(\xi)$ est défini positif, où $A_{i,k}(\xi) = \sum_{j,\ell} C_{i,j,k,\ell} \xi_j \xi_\ell$, ce qui est la condition pour que les ondes planes du problème d'évolution aient des vitesses réelles positives, mais il ne faut pas confondre vitesse de phase et vitesse de groupe, et pour montrer la propagation à vitesse finie ([Tar8]), j'ai dû rajouter la condition $\sum_{i,j,k,\ell} C_{i,j,k,\ell} M_{i,j} M_{k,\ell} \geq 0$ pour toute matrice symétrique M , et j'ignore si cette condition peut être évitée.

⁽⁴⁷⁾ Puisque je suis un des rares mathématiciens à expliquer les défauts des modèles en mécanique des milieux continus et en physique, ce qui, je le rappelle, ne signifie pas qu'il soient

ingénieurs se laissent prendre à jouer avec des matériaux inexistantes m'avait un peu énervé,⁽⁴⁸⁾ et j'avais réfléchi à un scénario pour montrer pourquoi il est peu réaliste de faire de l'homogénéisation en élasticité linéarisée avec des matériaux qui ne sont pas très fortement elliptiques. J'ai donc fait travailler mon élève Sergio GUTIÉRREZ sur cette question pour son PhD ([Gut1]), et ses résultats ont beaucoup dérangé quand il a soumis son article pour un journal dont le fondateur avait été intéressé par la mécanique des milieux continus, mais comme on rejetait son article pour un prétexte fallacieux, que cela contredisait quelque chose en Γ -convergence, écrit par trois auteurs et publié par ce même journal, j'avais écrit à l'un des rédacteurs en chef,⁽⁴⁹⁾ pour lui signaler que si son rapporteur confondait l'homogénéisation avec la Γ -convergence, c'est qu'il était incompétent.⁽⁵⁰⁾ Je n'avais pas pensé à lui expliquer ce point, qui était bien trop clair pour moi puisque le groupe de saboteurs auquel je m'opposais depuis déjà bien longtemps vantait justement la Γ -convergence, qui n'a rien à voir avec la mécanique des milieux continus, pour éviter que l'on ne s'intéresse trop à l'homogénéisation, telle que je l'avais définie avec François MURAT (et donc sans hypothèse de périodicité),

inutiles comme terrain d'entraînement, pour mettre au point de meilleurs outils mathématiques.

⁽⁴⁸⁾ Les arguments habituels de thermodynamique ne rejettent pas ces matériaux, mais puisqu'une barre faite d'un de ces matériaux a la propriété qu'elle va diminuer de volume si on la met en tension ou en compression, on doit quand même admettre que c'est vraiment bizarre. Bien sûr, comme l'avait remarqué Mort GURTIN, la linéarisation de l'élasticité finie (non linéaire) au voisinage d'un équilibre instable peut fournir de tels matériaux, mais si la question est de faire de l'homogénéisation, il est important que des matériaux existent dans les mêmes conditions, pour pouvoir les mélanger, et c'est un peu comme si pour une variété différentiable M on voulait ajouter un vecteur tangent en x , qui vit dans un premier espace vectoriel $T_x(M)$, et un vecteur tangent en $y \neq x$, qui vit dans un deuxième espace vectoriel $T_y(M)$, et sans structure supplémentaire on ne peut pas plonger ces espaces tangents dans un troisième où on pourrait faire la somme.

⁽⁴⁹⁾ Je le considérais encore comme un ami à l'époque, malgré la nouvelle orientation qu'il avait donnée au journal, faisant la part belle à des personnes qui avaient montré du dédain pour la mécanique des milieux continus, comme lui d'ailleurs, et se croyaient spécialistes du calcul des variations, qui n'a jamais vraiment servi en mécanique des milieux continus. J'ai cessé de le considérer comme un ami après qu'il ait soutenu un de ses élèves, qui avait publié un livre où il attribuait toutes mes idées à d'autres.

⁽⁵⁰⁾ Je m'étais demandé si Ennio DE GIORGI avait expliqué cette différence fondamentale à ses élèves, et s'il leur avait appris à attribuer les idées à leurs auteurs, car il est apparu que beaucoup de ses adeptes ont agi par la suite de manière à salir sa mémoire en utilisant son nom comme un bouclier pour faire passer des applications bien trop farfelues de pseudo-mécanique, tout en attribuant mes idées à leurs amis. C'est pour cela que j'ai écrit un article ([Tar10]) où j'ai proposé que ceux qui veulent éviter de m'attribuer mes idées les attribuent au moins à quelqu'un qui en a eues, comme Ennio DE GIORGI, et j'espère qu'ainsi mes bonnes actions d'avoir développé de nouveaux outils mathématiques pour la mécanique des milieux continus et la physique pourront effacer l'effet des mauvaises actions de ceux qui tiennent à utiliser le nom d'Ennio DE GIORGI en relation avec un programme anti-scientifique.

parce que cela aide les mathématiciens à comprendre la mécanique des milieux continus contemporaine. D'ailleurs, même en étant suffisamment aveuglé pour ne pas être conscient des sabotages organisés, comment un mathématicien pourrait-il confondre une question de topologie générale pour des fonctionnelles comme la Γ -convergence, avec une théorie comme l'homogénéisation, qui concerne des questions de nature micro-locale et non linéaire pour des équations aux dérivées partielles? Je ne voyais pas bien pourquoi, pour publier un résultat en homogénéisation présentant des calculs assez élémentaires et faciles à vérifier, Sergio GUTIÉRREZ devait montrer ce qui n'allait pas dans un article écrit sur une autre théorie sans grand intérêt, mais il l'a fait quand même et il a trouvé que l'article de ces trois auteurs n'était peut-être pas faux, mais en tout cas il ne s'appliquait pas dans la situation que lui avait considérée, et il a publié son résultat ailleurs ([Gut2]).

Il n'est donc pas toujours facile pour un mathématicien comme moi de faire son travail de développer de nouveaux outils mathématiques pour la mécanique des milieux continus et la physique, critiqué d'un côté par des mathématiciens qui ne s'intéressent pas à la science et qui croient qu'on est obligé d'abandonner la rigueur mathématique si l'on s'intéresse à ces domaines, critiqué d'un autre côté par d'anciens mathématiciens qui ont abandonné la rigueur mathématique et pensent montrer qu'ils s'intéressent à la science en parlant le langage des ingénieurs, et qui n'apprécient pas qu'un mathématicien comme moi sache suffisamment de mécanique des milieux continus et de physique pour expliquer pourquoi ils font fausse route, et critiqué par des physiciens ou des ingénieurs qui prétendent ne pas comprendre que ce qu'ils font n'est pas des mathématiques, et qu'il est crucial qu'il existe encore des mathématiciens comme moi qui soient capables de mettre de l'ordre dans ce qu'on sait et ce qu'on croit savoir en mécanique des milieux continus et en physique, pour pousser plus loin le front de la connaissance dans leur propre domaine grâce à la création d'outils mathématiques nouveaux, et adaptés à ces questions.

V – Mélanger deux matériaux de manière plus générale

Le mathématicien ne peut pas se contenter de formules telles que (IV.4), qui sont restreintes au cas de matériaux isotropes créant un matériau effectif isotrope, et il doit se demander si on peut déduire un résultat analogue sous l'hypothèse que A_n G-converge vers A_{eff} , ou même, en se débarrassant des hypothèses de symétrie, si A_n H-converge vers A_{eff} . En utilisant la même propriété (IV.1) sur

laquelle la démonstration du résultat de Joe KELLER s'appuie, j'avais montré que

$$(V.1) \quad \begin{array}{l} \text{si } N = 2, \text{ et si } A_n \text{ H-converge vers } A_{\text{eff}} \\ \text{alors } \frac{A_n^T}{\det(A_n)} \text{ H-converge vers } \frac{A_{\text{eff}}^T}{\det(A_{\text{eff}})}, \end{array}$$

et bien sûr on peut omettre la transposition, puisque la condition A_n H-converge vers A_{eff} est équivalente à la condition A_n^T H-converge vers A_{eff}^T ([Mur3], [Tar9]), en toute dimension N . Le cas où $A_n = a_n I$ redonne bien (IV.4), mais un autre cas particulier de ce résultat est

$$(V.2) \quad \begin{array}{l} \text{si } N = 2, \text{ si } A_n \text{ H-converge vers } A_{\text{eff}} \\ \text{et si } \det(A_n) = \kappa \text{ pour tout } n \text{ et presque partout dans } \Omega, \\ \text{alors } \det(A_{\text{eff}}) = \kappa \text{ presque partout dans } \Omega, \end{array}$$

et j'avais entendu cette remarque d'Alain BAMBERGER ([Bam]), probablement restreinte au cas de la G-convergence, au début des années 1970, alors qu'avec François MURAT nous avons déjà observé cette propriété pour le cas du mélange d'un matériau anisotrope avec des orientations particulières, mais nous ne nous étions pas posé à ce moment là de question plus générale. Plus récemment, cette propriété est intervenue en liaison avec des questions de transformations quasi-conformes.

En fait, au début des années 1980, j'ai observé qu'il y a une famille plus large de transformations qui commutent avec la H-convergence dans le cas $N = 2$, et ces transformations forment un groupe. Graeme MILTON les a trouvées indépendamment ([Mil1]), et il avait été convaincu d'étudier le cas de matrices non symétriques pour une question liée à l'effet Hall classique (qui a lieu dans des rubans métalliques, raisonnablement décrits par des domaines bi-dimensionnels).

Lemme V.1.

$$(V.3) \quad \begin{array}{l} \text{si } N = 2, \text{ et si } A_n \text{ H-converge vers } A_{\text{eff}}, \text{ alors si } ad - bc > 0 \\ (-c R_{\pi/2} + d A_n) (a I + b R_{\pi/2} A_n)^{-1} \text{ H-converge vers} \\ (-c R_{\pi/2} + d A_{\text{eff}}) (a I + b R_{\pi/2} A_{\text{eff}})^{-1}. \end{array}$$

Démonstration: Le fait que A_n H-converge vers A_{eff} signifie que

$$(V.4) \quad \begin{array}{l} \text{si } E_n \rightharpoonup E_\infty, D_n \rightharpoonup D_\infty \text{ dans } L_{\text{loc}}^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \text{ faible} \\ \text{si } \text{rot}(E_n), \text{div}(D_n) \text{ restent dans un compact de } H_{\text{loc}}^{-1}(\Omega) \text{ fort} \\ \text{si } D_n = A_n E_n \text{ presque partout dans } \Omega \\ \text{alors } D_\infty = A_{\text{eff}} E_\infty \text{ presque partout dans } \Omega, \end{array}$$

et bien sûr on sait fabriquer suffisamment de telles suites (E_n, D_n) en résolvant des problèmes aux limites du type

$$(V.5) \quad -\operatorname{div}(A_n \operatorname{grad}(u_n)) + u_n = f \in H^{-1}(\Omega); u \in H_0^1(\Omega) .$$

Pour démontrer (V.3), on utilise (IV.1), et on obtient

$$(V.6) \quad \begin{aligned} \widetilde{E}_n &= a E_n + b R_{\pi/2} D_n \rightharpoonup \widetilde{E}_\infty = a E_\infty + b R_{\pi/2} D_\infty \\ &\text{dans } L_{\text{loc}}^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \text{ faible} \\ \widetilde{D}_n &= -c R_{\pi/2} E_n + d D_n \rightharpoonup \widetilde{D}_\infty = -c R_{\pi/2} E_\infty + d D_\infty \\ &\text{dans } L_{\text{loc}}^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \text{ faible} \\ \operatorname{rot}(\widetilde{E}_n) &= a \operatorname{rot}(E_n) + b \operatorname{div}(D_n), \quad \operatorname{div}(\widetilde{D}_n) = c \operatorname{rot}(E_n) + d \operatorname{div}(D_n) \\ &\text{restent dans un compact de } H_{\text{loc}}^{-1}(\Omega) \\ \widetilde{D}_n &= B_n \widetilde{E}_n, \quad \text{avec } B_n = (-c R_{\pi/2} + d A_n)(a I + b R_{\pi/2} A_n)^{-1} \\ &\text{presque partout dans } \Omega , \end{aligned}$$

ce qui a supposé $a I + b R_{\pi/2} A_n$ inversible; c'est clair si $b = 0$ puisque dans ce cas $a \neq 0$, et pour $b \neq 0$ on peut mettre $\operatorname{sign}(b) R_{\pi/2}$ en facteur et on utilise $((-a \operatorname{sign}(b) R_{\pi/2} + |b| A_n) \xi, \xi) = |b| (A_n \xi, \xi) \geq |b| \alpha |\xi|^2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. On doit aussi vérifier que B_n est uniformément elliptique, pour pouvoir extraire une sous suite qui H-converge vers B_{eff} , et cela donnera $\widetilde{D}_\infty = B_{\text{eff}} \widetilde{E}_\infty$, et les mêmes formules donneront $B_{\text{eff}} = (-c R_{\pi/2} + d A_{\text{eff}})(a I + b R_{\pi/2} A_{\text{eff}})^{-1}$, et donc on déduira que toute la suite B_n H-converge vers B_{eff} . Pour montrer l'ellipticité de B_n , on observe que

$$(V.7) \quad \begin{aligned} (\widetilde{D}_n \cdot \widetilde{E}_n) &= (-c R_{\pi/2} E_n + d D_n \cdot a E_n + b R_{\pi/2} D_n) \\ &= (a d - b c) (D_n \cdot E_n) \\ &\geq \alpha (a d - b c) |E_n|^2 , \end{aligned}$$

et d'après un calcul précédent, $|E_n|$ et $|\widetilde{E}_n|$ sont équivalentes. ■

La structure de groupe mentionnée correspond à l'observation suivante,

$$(V.8) \quad \begin{aligned} &\text{si pour } P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ inversible, on définit } \mathcal{T}_P \text{ par} \\ \mathcal{T}_P(M) &= (-c R_{\pi/2} + d M)(a I + b R_{\pi/2} M)^{-1} \\ &\text{pour toute matrice } M \text{ vérifiant} \\ (M \xi, \xi) &\geq \alpha |\xi|^2 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ pour un } \alpha > 0 \\ &\text{alors } P \mapsto \mathcal{T}_P \text{ est un homomorphisme de groupe ,} \end{aligned}$$

ce qui se vérifie facilement en composant le type d'application utilisée dans la démonstration du Lemme V.1, qui transforme (E_n, D_n) en $(\widetilde{E}_n, \widetilde{D}_n)$, et on observe que $\mathcal{T}_{-P} = \mathcal{T}_P$ pour tout P inversible. Le cas particulier (V.1) correspond au choix $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, et comme $P^2 = -I$, on voit que cette transformation \mathcal{T}_P est involutive.

Au delà de la question de caractériser les fonctions $f(z)$ qui apparaissent en dimension $N \geq 3$, il y a celle de caractériser la classe des fonctions F de deux matrices apparaissant en (III.1), éventuellement restreinte au cas des matrices symétriques définies positives pour commencer. Bien sûr, l'analyticité de la fonction F par rapport à (M_1, M_2) est valable dans ce cas général, puisque c'est une conséquence du mode de démonstration du théorème de H-convergence: pour le cas de la G-convergence, c'est à dire avec la restriction d'avoir M_1 et M_2 symétriques (et définies positives), on doit prendre la limite faible de l'inverse de l'opérateur

$$(V.9) \quad \mathcal{A}_n = -\operatorname{div} \left((\chi_n M_1 + (1 - \chi_n) M_2) \operatorname{grad}(\cdot) \right) \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega)),$$

et comme \mathcal{A}_n est analytique en (M_1, M_2) , son inverse est analytique, et les limites faibles héritent de ces propriétés d'analyticité, et ce type d'argument s'étend au cas de la H-convergence. Pour définir une extension naturelle de $F(\cdot; M_1, M_2)$ au cas de matrices complexes, j'utilise une remarque d'Eduardo ZARANTONELLO sur l'image numérique $\operatorname{num}(M)$ d'une application linéaire M d'un Hilbert complexe dans lui même ([Zar1], [Zar2]), c'est à dire

$$(V.10) \quad \operatorname{num}(M) = \{ (M e, e) \mid |e| = 1 \} \text{ est un convexe du plan complexe,}$$

et $\overline{\operatorname{num}(M)}$ contient le spectre de l'opérateur M (puisque si $\lambda \notin \overline{\operatorname{num}(M)}$ la version complexe du lemme de Lax–Milgram s'applique à $\lambda I - M$); en dimension finie avec M normal, et donc ayant une base orthonormée de vecteurs propres, $\operatorname{num}(M)$ est l'enveloppe convexe du spectre de M .

Lemme V.2. *Si χ_n est une suite de fonctions caractéristiques, on peut extraire une sous suite telle que $A_m = \chi_m M_1 + (1 - \chi_m) M_2$ H-converge vers $A_{\text{eff}} = F(\cdot; M_1, M_2)$ pour toutes les matrices M_1, M_2 complexes vérifiant*

$$(V.11) \quad 0 \notin K(M_1, M_2) = \operatorname{conv}(\operatorname{num}(M_1) \cup \operatorname{num}(M_2)),$$

où $\operatorname{conv}(X)$ est l'enveloppe convexe de X , et pour presque tout $x \in \Omega$ on a

$$(V.12) \quad \operatorname{num}(F(x; M_1, M_2)) \subset \bigcup_{s \geq 1} s K(M_1, M_2),$$

et

$$(V.13) \quad \text{num}(F(x; M_1, M_2)^{-1}) \subset \bigcup_{s \geq 1} s K(M_1^{-1}, M_2^{-1}) .$$

Démonstration: La condition (V.11) sert à l'existence de $\alpha > 0$ et ζ unimodulaire tel que $\Re(\zeta(M_j \xi \cdot \xi)) \geq \alpha |\xi|^2$ pour tous les $\xi \in C^N$, et $j = 1, 2$. Pour chaque paire (M_1, M_2) vérifiant (V.11), on peut donc extraire une sous suite qui H-converge, et en utilisant une sous suite diagonale on peut faire cela pour un ensemble dénombrable de telles paires, par exemple celles qui vérifient (V.11) et ont leurs coefficients de partie réelle et de partie imaginaire rationnelles, et par un argument d'équicontinuité ce sera alors vrai pour toutes les matrices vérifiant (V.11). Pour savoir où on trouve la matrice effective, on regarde l'ensemble $\mathcal{M}(\alpha, \beta; \Omega)$ où la suite prend ses valeurs, mais comme je n'ai utilisé avec François MURAT que la version réelle

$$(V.14) \quad \mathcal{M}(\alpha, \beta; \Omega) = \left\{ A \in L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)) \mid \begin{aligned} &(A(x)\xi \cdot \xi) \geq \alpha |\xi|^2, \\ &(A(x)\xi \cdot \xi) \geq \frac{|A(x)\xi|^2}{\beta} \\ &\text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ presque partout dans } \Omega \end{aligned} \right\},$$

je veux utiliser ici un analogue pour le cas complexe, qui a une formulation plus géométrique.⁽⁵¹⁾ Dans le cas complexe, l'analogue d'une inégalité $(A(x)\xi \cdot \xi) \geq \alpha |\xi|^2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ du cas réel est

$$(V.15) \quad \Re(\zeta(A(x)\xi \cdot \xi)) \geq \alpha |\xi|^2 \text{ pour tout } \xi \in C^N \text{ pour un } \zeta \text{ unimodulaire ,}$$

et devient donc par homogénéité

$$(V.16) \quad \Re(\zeta(M_j e \cdot e)) \geq \alpha \text{ pour } |e|_{C^N} = 1 \text{ et } j = 1, 2 ,$$

qui implique donc

$$(V.17) \quad \Re(\zeta(A_{\text{eff}}(x)e \cdot e)) \geq \alpha \text{ pour } |e|_{C^N} = 1 \text{ presque partout dans } \Omega ,$$

c'est à dire que $(A_{\text{eff}}(x)e \cdot e)$ prend ses valeurs dans tout demi-espace qui contient $\text{num}(M_1)$ et $\text{num}(M_2)$ mais pas 0, c'est à dire qui contient $K(M_1, M_2)$ mais pas 0,

⁽⁵¹⁾ Je ne décris pas les ensembles géométriques du plan complexe qui dans le cas général remplacent l'intervalle $[\alpha, \beta]$ du cas réel, mais je suppose que tout lecteur lisant la démonstration qui suit comprendra le cas général, s'il est mathématicien.

et cela signifie (V.12). De même, dans le cas complexe, l'analogue d'une inégalité $(A(x)\xi.\xi) \geq \frac{|A(x)\xi|^2}{\beta}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ dans le cas réel est

$$(V.18) \quad \Re(\zeta(A(x)\xi.\xi)) \geq \frac{|A(x)\xi|^2}{\beta} \text{ pour tout } \xi \in C^N \text{ pour un } \zeta \text{ unimodulaire ,}$$

et devient donc par homogénéité

$$(V.19) \quad \Re(\zeta(e.M_j^{-1}e)) \geq \frac{1}{\beta} \text{ pour } |e|_{C^N} = 1 \text{ et } j = 1, 2 ,$$

qui implique donc

$$(V.20) \quad \Re(\zeta(e.A_{\text{eff}}^{-1}(x)e)) \geq \frac{1}{\beta} \text{ pour tout } \xi \in C^N, \text{ presque partout dans } \Omega ,$$

et en passant aux complexes conjugués, on voit que $(A_{\text{eff}}^{-1}(x)e.e)$ prend ses valeurs dans tout demi-espace qui contient $\text{num}(M_1^{-1})$ et $\text{num}(M_2^{-1})$ mais pas 0, c'est à dire qui contient $K(M_1^{-1}, M_2^{-1})$ mais pas 0, et cela signifie (V.13). ■

La propriété déjà mentionnée dans le cas réel, que si A_n H-converge vers A_{eff} alors A_n^T H-converge vers A_{eff}^T , est aussi vraie dans le cas complexe, mais on a aussi $\overline{A_n}$ H-converge vers $\overline{A_{\text{eff}}}$, et donc les fonctions $F(\cdot; M_1, M_2)$ satisfont

$$(V.21) \quad \begin{aligned} F(x; M_1^T, M_2^T) &= (F(x; M_1, M_2))^T \\ F(x; \overline{M_1}, \overline{M_2}) &= \overline{F(x; M_1, M_2)} \end{aligned}$$

presque partout dans Ω , et pour tous M_1, M_2 satisfaisant (V.11),

et en utilisant le préordre $A \geq B$, qui veut dire $\Re(A\xi.\xi) \geq \Re(B\xi.\xi)$ pour tous les $\xi \in C^N$, on obtient le Lemme V.3.

Lemme V.3. *Si $M_1 \geq H_1$, $M_2 \geq H_2$, et H_1, H_2 sont Hermitiennes définies positives, alors la condition (V.11) est satisfaite et*

$$(V.22) \quad F(x; M_1, M_2) \geq F(x; H_1, H_2) \text{ presque partout dans } \Omega .$$

Démonstration: Dans le cas réel, pour pouvoir déduire $A_{\text{eff}} \geq B_{\text{eff}}$ de l'information $A_n \geq B_n$ pour tout n et presque partout dans Ω , on a besoin de la symétrie des B_n , et dans le cas complexe, c'est bien sûr la symétrie Hermitienne des B_n qui sert, pour pouvoir appliquer l'analogie d'une propriété démontrée par

Ennio DE GIORGI et Sergio SPAGNOLO ([DeGio&Spa]),⁽⁵²⁾ et on applique cette remarque à $A_m = \chi_m M_1 + (1 - \chi_m) M_2$ et $B_m = \chi_m H_1 + (1 - \chi_m) H_2$. ■

Le lemme suivant utilise l'information sur la H-mesure de la suite χ_m pour déduire le développement de Taylor de F à l'ordre 2 sur la diagonale.

Lemme V.4. *Si*

$$(V.23) \quad \begin{aligned} & \text{si } \chi_m \rightharpoonup \theta \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } \star \\ & \text{si } \chi_m - \theta \text{ définit une H-mesure } \mu \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}(S^{N-1})) , \end{aligned}$$

et si

$$(V.24) \quad 0 \notin \text{num}(M_1) ,$$

alors on a

$$(V.25) \quad \begin{aligned} F(x; M_1, M_2) &= \theta(x) M_1 + (1 - \theta(x)) M_2 \\ &\quad - (M_2 - M_1) G(x; M_1) (M_2 - M_1) + O(|M_2 - M_1|^3) , \\ \text{avec} \\ G(x; M_1) &= \int_{S^{N-1}} \frac{\xi \otimes \xi}{(M_1 \xi, \xi)} d\mu(x, \xi), \text{ presque partout dans } \Omega, \\ &\quad \text{si } |M_2 - M_1| \text{ est assez petit .} \end{aligned}$$

Démonstration: D'après (V.24), on peut séparer strictement $\text{num}(M_1)$ de 0, et donc la condition (V.11) est satisfaite pour $|M_2 - M_1|$ assez petit. On applique les calculs de H-mesures que j'ai développés pour les questions d'homogénéisation de faible amplitude ([Tar5]), mais ici la question est un peu plus générale que pour le cas particulier (III.7)–(III.10), et correspond à la situation

$$(V.26) \quad \begin{aligned} & A_n = M_1 + \gamma b_n Q \text{ avec } |\gamma| \text{ petit} \\ & b_n \rightharpoonup b_\infty \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } \star \\ & b_n \text{ correspond à une H-mesure } \mu \in \mathcal{M}(\Omega \times S^{N-1}) , \end{aligned}$$

et après extraction d'une sous suite A_m qui H-converge vers $A_{\text{eff}}(\cdot; \gamma)$ pour tout γ petit, on a une limite analytique en γ ,

$$(V.27) \quad A_{\text{eff}}(\cdot; \gamma) = M_1 + \gamma b_\infty Q + \gamma^2 C_2 + O(|\gamma|^3) ,$$

⁽⁵²⁾ Si B_n est Hermitienne définie positive, si B_n H-converge vers B_{eff} et si $\text{grad}(u_n) \rightharpoonup \text{grad}(u_\infty)$ dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ faible, alors pour tout $\varphi \in C_c(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\int_\Omega \varphi (B_n \text{grad}(u_n) \cdot \text{grad}(u_n)) dx) \geq \int_\Omega \varphi (B_{\text{eff}} \text{grad}(u_\infty) \cdot \text{grad}(u_\infty)) dx$.

et la correction quadratique C_2 est

$$(V.28) \quad C_2(x) = - \int_{S^{N-1}} Q \frac{\xi \otimes \xi}{(M_1 \xi, \xi)} Q d\mu(x, \xi) \text{ presque partout dans } \Omega .$$

On choisit ensuite $Q = \frac{M_2 - M_1}{|M_2 - M_1|}$ (si $M_2 \neq M_1$, bien sûr), $b_m = 1 - \chi_m$, et $\gamma = |M_2 - M_1|$, ce qui donne $b_\infty = 1 - \theta$ et fait apparaître la H-mesure de $\chi_m - \theta$, et (V.27)–(V.28) donne (V.25). ■

Comme je l'ai déjà dit, le cadre suivi par les physiciens qui étudient une fonction de Pick $f(z)$ n'est pas de l'homogénéisation, et ils ne peuvent pas discuter de propriétés locales, comme une densité $\theta(x)$ qui varie avec $x \in \Omega$, ou un comportement anisotrope comme je l'étudie avec la fonction $F(\cdot; M_1, M_2)$, et bien sûr, ils ne peuvent pas non plus parler de propriétés micro-locales, comme je le fais avec mes H-mesures.

Lemme V.5. *Si $N = 2$,*

$$(V.29) \quad \begin{aligned} &F(x; \mathcal{T}_P(M_1), \mathcal{T}_P(M_2)) = \mathcal{T}_P(F(x; M_1, M_2)) \\ &\text{pour tout } P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ inversible, presque partout dans } \Omega, \\ &\text{pour tous } M_1, M_2 \text{ satisfaisant (V.11)} . \end{aligned}$$

avec \mathcal{T}_P défini à (V.8).

Démonstration: Il suffit d'utiliser le Lemme V.1, en observant que si $A_n = \chi_n M_1 + (1 - \chi_n) M_2$ alors $\mathcal{T}_P(A_n) = \chi_n \mathcal{T}_P(M_1) + (1 - \chi_n) \mathcal{T}_P(M_2)$. ■

Pour donner un sens à l'analogie de la propriété de réitération (IV.6), il vaut mieux éviter la dépendance en x pour certaines fonctions.

Lemme V.6. *Si on connaît deux fonctions F^1, F^2 indépendantes de $x \in \Omega$,⁽⁵³⁾ alors pour chaque fonction $F(\cdot; M_1, M_2)$ on peut fabriquer une autre fonction $\tilde{F}(\cdot; M_1, M_2)$, par la formule*

$$(V.30) \quad \begin{aligned} &\tilde{F}(x; M_1, M_2) = F(x; F^1(M_1, M_2), F^2(M_1, M_2)), \text{ presque partout dans } \Omega, \\ &\text{pour toutes les matrices } M_1, M_2 \text{ vérifiant (V.11)} . \end{aligned}$$

⁽⁵³⁾ Pour $j = 1, 2$, on peut restreindre F^j à un cube $Q^j \subset \Omega$ et ensuite répéter le même motif de manière périodique, ce qui d'après le caractère local de la H-convergence, fournit une fonction qui a la même propriété sur \mathbb{R}^N .

Démonstration: La fonction F est définie par une suite de fonctions caractéristiques χ_m d'ensembles mesurables ω_m , et par définition on peut supposer que

$$(V.31) \quad \begin{aligned} A_m(M_1, M_2) &= \chi_m F^1(M_1, M_2) + (1 - \chi_m) F^2(M_1, M_2) \\ &\text{H-converge vers } F(x; F^1(M_1, M_2), F^2(M_1, M_2)) \text{ dans } \Omega, \text{ quand } m \rightarrow \infty, \\ &\text{pour toutes les matrices } M_1, M_2 \text{ vérifiant (V.11) ,} \end{aligned}$$

car la condition (V.11) est satisfaite par $F^1(M_1, M_2)$ et $F^2(M_1, M_2)$, comme conséquence de (V.12)–(V.13). Pour $j = 1, 2$, la fonction F^j est définie par une suite de fonctions caractéristiques χ_n^j d'ensembles mesurables ω_n^j , convergeant dans $L^\infty(\Omega)$ faible \star vers une constante θ^j . On définit alors

$$(V.32) \quad \begin{aligned} A_{m,n}(M_1, M_2) &= \chi_m(\chi_n^1 M_1 + (1 - \chi_n^1) M_2) + (1 - \chi_m)(\chi_n^2 M_1 + (1 - \chi_n^2) M_2), \\ &\text{presque partout dans } \Omega \\ &= \chi_{m,n} M_1 + (1 - \chi_{m,n}) M_2, \\ &\text{avec } \chi_{m,n} = \chi_m \chi_n^1 + (1 - \chi_m) \chi_n^2, \end{aligned}$$

et on observe que pour tout m

$$(V.33) \quad \begin{aligned} A_{m,n}(M_1, M_2) &\text{ H-converge vers } A_m(M_1, M_2) \text{ dans } \Omega, \text{ quand } n \rightarrow \infty, \\ &\text{pour toutes les matrices } M_1, M_2 \text{ vérifiant (V.11) ,} \end{aligned}$$

par application du caractère local de la H-convergence à ω_m et à $\Omega \setminus \omega_m$, ce qui utilise la version de Sergio SPAGNOLO valable pour des ensembles mesurables, mais le même résultat peut s'obtenir avec la version plus simple pour des ouverts que j'ai utilisée avec François MURAT.⁽⁵⁴⁾ Ensuite, on utilise un argument de métrisabilité de la H-convergence, valable quand on se restreint à des ensembles du type $\mathcal{M}(\alpha, \beta; \Omega)$,⁽⁵⁵⁾ et comme on doit choisir des sous suites indépendantes

⁽⁵⁴⁾ Sergio SPAGNOLO a utilisé un résultat de régularité de MEYERS, qui n'est pas lié au principe du maximum comme me l'avait dit Ennio DE GIORGI à Rome en avril 1974, mais qu'il est utile d'éviter pour des problèmes plus généraux de H-convergence. Pour pouvoir appliquer le caractère local de la H-convergence à des ouverts, on remarque que pour $\varepsilon > 0$ on peut trouver un compact K_m et un ouvert O_m tels que $K_m \subset \omega_m \subset O_m \subset \Omega$ et $\text{mesure}(O_m \setminus K_m) < \varepsilon$, et ensuite on recouvre K_m par un nombre fini de cubes ouverts inclus dans O_m , et donc on peut remplacer ω_m par une union finie de cubes ouverts $\tilde{\omega}_m$ et faire en sorte que $\chi_{\omega_m} - \chi_{\tilde{\omega}_m}$ tende vers 0 dans $L^1(\Omega)$ fort, et donc dans $L^p(\Omega)$ fort pour tout $p < \infty$ par l'inégalité de Hölder, ce qui ne change aucune des H-limites considérées, et comme $\tilde{\omega}_m$ est ouvert et que son bord est de mesure nulle, on applique ensuite le caractère local de la H-convergence à $\tilde{\omega}_m$ et à $\Omega \setminus \tilde{\omega}_m$.

⁽⁵⁵⁾ J'ai mis en garde contre l'utilisation de sous suites diagonales dans le cas où on veut faire tendre α vers 0, puisqu'alors on n'est plus sûr de travailler sur des bornés, et que les topologies faibles habituelles et la H-convergence ne sont pas métrisables. Bien sûr, certains anciens mathématiciens qui avaient décidé de ne plus démontrer ce qu'ils disent n'ont pas écouté mes conseils, augmentant le nombre de leurs publications avec des démonstrations incomplètes, et peut-être des énoncés faux.

de M_1 et M_2 , il faut faire un peu attention, et je préfère décrire en détail une démonstration, car un mathématicien ne doit pas se contenter de l'intuition, qui est de remplir ω_m d'un premier mélange et $\Omega \setminus \omega_m$ d'un deuxième mélange, sans savoir quels arguments mathématiques servent à donner un sens à cette intuition.

On commence par énumérer les nombres complexes Z vérifiant $0 < |Z| < 1$, à partie réelle et à partie imaginaire rationnelles, Z_1, \dots, Z_j, \dots , et on dénote

$$(V.34) \quad \Delta_j = \left\{ z \in C \mid \Re\left(\frac{z}{Z_j}\right) \geq 1, \Re\left(\frac{-1}{z Z_j}\right) \geq 1 \right\}, \quad j = 1, \dots,$$

$$(V.35) \quad \mathcal{M}_j = \left\{ A \in L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(C^N, C^N)) \mid \text{num}(A(x)) \subset \Delta_j \text{ presque partout dans } \Omega \right\}, \quad j = 1, \dots,$$

qui est un compact métrisable pour la H-convergence, et on choisit

$$(V.36) \quad \delta_j(\cdot; \cdot) \text{ une distance vérifiant } 0 \leq \delta_j \leq 1 \\ \text{définissant la H-convergence sur } \mathcal{M}_j.$$

Ensuite, on énumère l'ensemble \mathcal{P}_j des matrices $M \in \mathcal{L}(C^N, C^N)$ dont les coefficients sont de partie réelle et de partie imaginaire rationnelles, et qui appartiennent à \mathcal{M}_j , $M^{j,1}, \dots, M^{j,k}, \dots$, et on remarque que la condition (V.31) écrite pour $M_1 = M^{j,k}$ et $M_2 = M^{j,\ell}$ est

$$(V.37) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \delta_j \left(A_m(M^{j,k}, M^{j,\ell}); F(\cdot; F^1(M^{j,k}, M^{j,\ell}), F^2(M^{j,k}, M^{j,\ell})) \right) = 0,$$

alors que la condition (V.33) est

$$(V.38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_j \left(A_{m,n}(M^{j,k}, M^{j,\ell}); A_m(M^{j,k}, M^{j,\ell}) \right) = 0.$$

Pour chaque m , on choisit $n = \varphi(m)$ assez grand pour que

$$(V.39) \quad \delta_j \left(A_{m,\varphi(m)}(M^{j,k}, M^{j,\ell}); A_m(M^{j,k}, M^{j,\ell}) \right) \leq 2^{-m} \\ \text{pour tous les } j, k, \ell = 1, \dots, m,$$

et alors, pour j, k, ℓ donnés, on peut utiliser (V.37) et (V.39) dès que $m \geq \max\{j, k, \ell\}$, et on déduit

$$(V.40) \quad A_{m,\varphi(m)}(M^{j,k}, M^{j,\ell}) \text{ H-converge vers } F(\cdot; F^1(M^{j,k}, M^{j,\ell}), F^2(M^{j,k}, M^{j,\ell})) \\ \text{quand } m \rightarrow \infty,$$

c'est à dire que (V.30) a lieu presque partout dans Ω pour les choix $M_1 = M^{j,k}$ et $M_2 = M^{j,\ell}$. Ensuite, on remarque que si M_1 et M_2 vérifient (V.11), alors il existe j tel que $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_j$, et (V.30) s'étend par continuité à ce cas, car la démonstration d'analyticité dans \mathcal{M}_j donne en fait des bornes précises, et en particulier les dérivées de $F(\cdot; M_1, M_2)$ par rapport à M_1 ou par rapport à M_2 sont bornées sur \mathcal{M}_j . ■

VI – Obtenir des bornes sur les propriétés effectives, I

Pour décrire le premier type de caractérisation de propriétés effectives, je considère encore le cas modèle d'une équation elliptique scalaire du deuxième ordre, et je m'impose de considérer des matrices réelles symétriques, et donc de me restreindre au cadre de la G-convergence, parce que cela correspond à la majorité des applications physiques. Si on dispose de matériaux non nécessairement isotropes, de matrices M^1, \dots, M^m symétriques définies positives, on considère des suites

$$(VI.1) \quad A_n(x) = \sum_{k=1}^m \chi_n^k(x) R_n(x)^T M_k R_n(x),$$

avec $R_n(x) \in SO(N)$ presque partout dans Ω ,

où χ_n^k est la fonction caractéristique d'un ensemble ω_n^k dans lequel on met le matériau $\#k$, réorienté par une rotation variable $R_n(x)$,⁽⁵⁶⁾ ce qui est naturel dans les cas physiques, $N = 2$ ou $N = 3$, et donc pour chaque n les ω_n^k forment

⁽⁵⁶⁾ Un "mathématicien", habitué à attribuer mes idées à ses amis, a écrit d'un de ses élèves, qui avait traité un problème où il n'utilisait pas de rotation, que c'était un problème que je n'avais pas traité. Il avait deviné juste, car j'aurais bien pu le faire sans qu'il le sache, mais je suppose qu'il voulait faire croire que je n'avais pas réussi à traiter ce problème, alors qu'à la vérité je n'avais pas imaginé de m'intéresser à une question si académique, dont je ne vois toujours pas l'utilité, car je suppose que son élève utilisait ma méthode de [Tar3], sans peut-être le dire. C'est un peu différent du comportement d'un mathématicien connu, qui avait une fois publié quelque chose que je lui avais expliqué, sans vraiment s'en excuser, et qui une autre fois qu'il parlait au séminaire de Jacques-Louis LIONS au Collège de France à Paris, avait annoncé qu'il avait une constante dans une inégalité meilleure que celle que je lui avais montrée, mais en refaisant mon calcul pendant qu'il parlait, j'avais trouvé une constante meilleure que la sienne, la moitié de celle qu'il venait justement de montrer, mais je ne lui avais pas dit, car son jeu d'essayer de se prétendre meilleur mathématicien que moi m'avait paru sans intérêt; pour m'amuser, il faudra que je trouve un jour la meilleure constante dans cette inégalité qui l'intéressait tant.

une partition de Ω à un ensemble de mesure nulle près, et on peut supposer que

$$(VI.2) \quad \begin{aligned} & \chi_n^k \rightharpoonup \theta_k \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } \star, \\ & \text{avec } 0 \leq \theta_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, m, \\ & \text{et } \sum_{k=1}^m \theta_k = 1 \text{ presque partout dans } \Omega, \end{aligned}$$

et

$$(VI.3) \quad A_n \text{ G-converge vers } A_{\text{eff}} \text{ dans } \Omega,$$

et une première question est la caractérisation des valeurs possibles de $A_{\text{eff}}(x)$ en fonction des proportions locales des matériaux utilisés, $\theta_1(x), \dots, \theta_m(x)$, c'est à dire d'écrire

$$(VI.4) \quad A_{\text{eff}} \in \mathcal{K}(\theta_1, \dots, \theta_m; M_1, \dots, M_m) \text{ presque partout dans } \Omega,$$

et de trouver quel est l'ensemble $\mathcal{K}(\theta_1, \dots, \theta_m; M_1, \dots, M_m)$ optimal.

Pour être plus précis, pour M_1, \dots, M_m donnés, on cherche une famille $\Psi_i, i \in I$, de fonctions continues telles que (VI.1), (VI.2), et (VI.3) impliquent

$$(VI.5) \quad \Psi_i(A_{\text{eff}}; \theta_1, \dots, \theta_m) \geq 0 \text{ presque partout dans } \Omega, \text{ pour tout } i \in I,$$

et pour des constantes positives η_1, \dots, η_m , de somme 1, on définit l'ensemble

$$(VI.6) \quad \mathcal{K}_+(\eta_1, \dots, \eta_m) = \left\{ A \mid \Psi_i(A; \eta_1, \dots, \eta_m) \geq 0 \text{ pour tout } i \in I \right\},$$

et l'ensemble

$$(VI.7) \quad \mathcal{K}_-(\eta_1, \dots, \eta_m) = \left\{ A \mid \begin{aligned} & \text{il existe une suite telle que} \\ & \theta_k = \eta_k, \quad k = 1, \dots, m, \text{ et } A_{\text{eff}} = A \\ & \text{presque partout dans un ouvert } \omega \end{aligned} \right\},$$

où ω est un ouvert quelconque, sachant qu'après restriction à un cube $Q \subset \omega$, et extension par périodicité, on peut prendre $\omega = \mathbb{R}^N$ grâce au caractère local de la G-convergence; ensuite,

$$(VI.8) \quad \begin{aligned} & \text{la caractérisation est dite optimale pour des proportions } \eta_1, \dots, \eta_m \\ & \text{si } \mathcal{K}_-(\eta_1, \dots, \eta_m) = \mathcal{K}_+(\eta_1, \dots, \eta_m). \end{aligned}$$

Quand cette égalité aura lieu pour toutes les proportions, c'est que des constructions pour des $A_{\text{eff}}, \theta_1, \dots, \theta_m$ constants auront été faites, et alors on pourra les

faire pour des $A_{\text{eff}}, \theta_1, \dots, \theta_m$ variables, grâce à certaines propriétés de régularité, que je décrirai.

Ma méthode de [Tar3], qui généralise la méthode que j'avais suivie avec François MURAT ([Mur3], [Tar2]), fournit des inégalités du type (VI.5) par application de notre théorie de la compacité par compensation, mais je ne sais pas si elle donne toujours des caractérisations, puisque je ne connais pas beaucoup de telles caractérisations, à part le cas $m = 2$ avec $M_1 = \alpha I$ et $M_2 = \beta I$, que j'ai résolu avec François MURAT en 1981 ([Tar4]), et quelques situations en dimension 2. Il serait donc utile d'au moins simplifier l'application de ma méthode, et si possible de l'améliorer, peut-être grâce à des considérations plus géométriques, et Enzo NESI m'a fait des remarques dans ce sens, en liaison avec la théorie des applications quasi-conformes.

Pour ce qui est des constructions explicites, que ce soit les travaux d'Antonio MARINO et Sergio SPAGNOLO ([Mar&Spa]), ou les constructions initiales que j'avais utilisées avec François MURAT ([Tar 2]), elles étaient basées sur la formule pour les matériaux laminés dans la situation simple où on utilise des matrices diagonales sur la même base orthonormée et où la normale aux couches est un des vecteurs de base.⁽⁵⁷⁾ Ensuite, François MURAT et moi avons généralisé la construction des sphères emboîtées de Hashin–Shtrikman au cas d'ellipsoïdes confocaux, et j'avais cru ce type de géométrie nécessaire, et après avoir fait un cours d'option sur l'homogénéisation à l'École Polytechnique au printemps 1982, j'avais demandé à deux élèves, Philippe BRAIDY et Didier POUILLOUX, de vérifier numériquement que les laminations successives créaient un ensemble strictement plus petit que la caractérisation obtenue avec François MURAT, mais ils avaient observé que cela semblait donner le même ensemble, et ils l'avaient ensuite démontré ([Bra&Pou]). Il est utile de remarquer que si je n'avais pas vu la construction des sphères emboîtées de Hashin–Shtrikman, dans la référence que George PAPANICOLAOU m'avait donnée en juin 1980, j'aurais probablement

⁽⁵⁷⁾ Dès le début des années 1970, François MURAT avait démontré une formule générale de lamination pour une équation de diffusion. En avril 1975, quand j'étais allé au Courant Institute à New York, Louis NIRENBERG m'avait montré un "preprint" de MCCONNELL qui faisait une démonstration analogue pour l'élasticité linéarisée, ce qui utilisait des calculs d'algèbre linéaire bien plus élaborés, bien sûr. Je ne me souviens pas bien quand j'avais mis au point ma démonstration générale pour les laminations, basée sur le lemme divergence-rotationnel obtenu avec François MURAT, mais c'est peut-être tout simplement au printemps 1979, quand j'avais agi en tant que consultant pour l'INRIA et que j'avais dû conseiller un client industriel qui utilisait des matériaux laminés alternant acier et caoutchouc; j'avais donc expliqué à un ingénieur de cette compagnie, et à Georges DUVAUT qui avait la même tâche que moi, que bien qu'il n'existe pas de théorie d'homogénéisation pour l'élasticité finie (ce qui est toujours vrai) ma méthode générale permet de déduire la loi de comportement effective de ce type de matériau laminé.

essayé moi même la méthode des laminations, qui était la seule que je connaissais auparavant. Au printemps 1983, j'avais généralisé la méthode de lamination pour pouvoir traiter des orientations arbitraires des matériaux utilisés, et réitérer la formule plus facilement, et cela consistait à exprimer de manière intrinsèque la formule que François MURAT avait obtenue, et en utilisant deux matériaux de matrices A et B (non nécessairement symétriques) en proportion θ et $1 - \theta$, laminés dans une direction e , la formule de la matrice effective est

$$(VI.9) \quad A_{\text{eff}} = \theta A + (1-\theta)B - \theta(1-\theta)(B-A) \frac{e \otimes e}{(1-\theta)(A e \cdot e) + \theta(B e \cdot e)} (B-A),$$

et j'avais écrit toutes ces remarques à l'automne 1983 pour une conférence à Paris en l'honneur d'Ennio DE GIORGI ([Tar4]). On peut se demander s'il ne faudrait pas imaginer d'autres constructions que les laminations pour améliorer notre compréhension de la manière de fabriquer tous les mélanges mathématiquement possibles, et on pourra trouver dans le livre de Graeme MILTON ([Mil3]) une énorme collection d'inégalités sur des coefficients effectifs, et même si son approche n'est pas exactement celle d'un mathématicien, il est sans aucun doute le meilleur spécialiste de ce type de questions; on trouvera dans son livre une construction montrant que l'utilisation de laminations successives ne permet pas de créer toutes les propriétés effectives possibles pour une situation d'élasticité linéarisée, utilisant sept matériaux.⁽⁵⁸⁾

L'utilisation de rotations arbitraires $R_n(x)$ dans les suites (VI.1) a des conséquences.

Lemme VI.1. *Pour toutes les rotations $R \in SO(N)$, on a*

$$(VI.10) \quad A \in \mathcal{K}_-(\eta_1, \dots, \eta_m) \text{ implique } R^T A R \in \mathcal{K}_-(\eta_1, \dots, \eta_m).$$

Démonstration: On utilise la formule de changement de variable, ou tout au moins un cas particulier extrêmement simple d'une remarque de Sergio SPAGNOLO, car ici je ne considère que des changements affines $x \mapsto Q(x) = a + Q_0 x$ avec $Q_0 \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^N)$ (et $Q_0 = R^T$). L'observation

$$(VI.11) \quad \begin{aligned} & \text{si } -\operatorname{div}(A \operatorname{grad}(u)) = f \text{ dans } \omega, \\ & \text{et si } u(x) = \tilde{u}(Q(x)), f(x) = \tilde{f}(Q(x)) \text{ presque partout dans } \omega, \\ & \text{alors } -\operatorname{div}(B \operatorname{grad}(\tilde{u})) = \tilde{f} \text{ dans } Q(\omega), \\ & \text{avec } B(y) = Q_0 A(Q^{-1}(y)) Q_0^T \text{ presque partout dans } Q(\omega), \end{aligned}$$

⁽⁵⁸⁾ Comme l'élasticité linéarisée est une mauvaise théorie physique, qui a perdu l'invariance par rotation de l'élasticité finie, les difficultés techniques qu'on rencontre en élasticité linéarisée n'ont peut-être aucune raison physique.

implique la propriété

$$\begin{aligned}
 & \text{si } A_n \text{ H-converge vers } A_{\text{eff}} \text{ dans } \omega, \\
 & \text{et si } B_n(y) = Q_0 A_n(Q^{-1}(y)) Q_0^T \text{ presque partout dans } Q(\omega), \\
 \text{(VI.12)} \quad & \text{alors } B_n \text{ H-converge vers } B_{\text{eff}} \text{ dans } Q(\omega), \\
 & \text{et } B_{\text{eff}}(y) = Q_0 A_{\text{eff}}(Q^{-1}(y)) Q_0^T \text{ presque partout dans } Q(\omega),
 \end{aligned}$$

et on déduit (VI.10), en utilisant le fait que $\theta_1, \dots, \theta_m$ et A sont constants, et qu'on peut supposer $\omega = \mathbb{R}^N$. ■

En fait, la propriété (VI.10) est aussi vraie avec $\mathcal{K}_-(\eta_1, \dots, \eta_m)$ remplacé par $\mathcal{K}_+(\eta_1, \dots, \eta_m)$, comme conséquence du Lemme VI.2.

Lemme VI.2. *Si (VI.1), (VI.2), et (VI.3) impliquent (VI.5), alors pour toutes les rotations $R \in SO(N)$, on a*

$$\text{(VI.13)} \quad \Psi_i(R^T A_{\text{eff}} R; \theta_1, \dots, \theta_m) \geq 0 \text{ presque partout dans } \Omega, \text{ pour tout } i \in I.$$

Démonstration: Pour $\varepsilon > 0$ (destiné à tendre vers 0, bien sûr) on effectue un recouvrement de Vitali de Ω par des boules ouvertes de rayon $\leq \varepsilon$, c'est à dire que Ω est la réunion d'un ensemble de mesure nulle et d'une famille dénombrable de boules ouvertes B_j , $j = 1, \dots$, de centre $a_j \in \Omega$ et de rayon $\rho_j \leq \min\{\varepsilon, \text{dist}(a_j; \partial\Omega)\}$. Sur la boule B_j on définit $Q(x) = a_j + Q_0(x - a_j)$, avec $Q_0 = R^T$, ce qui envoie la boule B_j sur elle même, et pour toute fonction g définie sur Ω , on définit \tilde{g}^ε par $g(x) = \tilde{g}^\varepsilon(Q(x))$ sur chacune des boules B_j , ce qui définit \tilde{g}^ε sur Ω .

Si $\chi_n^1, \dots, \chi_n^m$ et R_n définissent A_n , alors le changement de variable Q donne des suites $\tilde{\chi}_n^1, \dots, \tilde{\chi}_n^m$, qui convergent dans $L^\infty(\Omega)$ faible \star vers $\tilde{\theta}_1^\varepsilon, \dots, \tilde{\theta}_m^\varepsilon$,⁽⁵⁹⁾ et d'autre part A_n est remplacé par $R^T \tilde{A}_n^\varepsilon R$, ce qui a pour effet d'avoir remplacé R_n par $\tilde{R}_n^\varepsilon R$, qui est encore une rotation, et comme $R^T \tilde{A}_n^\varepsilon R$ G-converge vers $R^T \tilde{A}_{\text{eff}}^\varepsilon R$, on déduit à la limite

$$\text{(VI.14)} \quad \Psi_i(R^T \tilde{A}_{\text{eff}}^\varepsilon R; \tilde{\theta}_1^\varepsilon, \dots, \tilde{\theta}_m^\varepsilon) \geq 0 \text{ presque partout dans } \Omega, \text{ pour tout } i \in I.$$

On prend ensuite une suite de recouvrements de Vitali avec $\varepsilon \rightarrow 0$, et on observe que pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$, la suite \tilde{f}^ε converge vers f dans $L^\infty(\Omega)$ faible \star et

⁽⁵⁹⁾ Parce que $\tilde{\cdot}^\varepsilon$ a la propriété $\int_\Omega f g dx = \int_\Omega \tilde{f}^\varepsilon \tilde{g}^\varepsilon dx$ pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$ et tout $g \in L^1(\Omega)$, et que l'inverse de $\tilde{\cdot}^\varepsilon$ est obtenu en remplaçant R par R^{-1} dans la définition.

$L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ fort pour tout $p < \infty$,⁽⁶⁰⁾ et donc une sous suite converge presque partout, et alors (VI.13) est obtenue en passant à la limite presque partout dans (VI.14) pour une sous suite. ■

La formule pour les laminations, avec des couches perpendiculaires à $e \in \mathbb{R}^N$, est obtenue à l'aide de la limite faible d'une fonction $\Phi_e(A)$ particulière,

$$(VI.15) \quad \begin{aligned} A_n((x.e)) \text{ H-converge vers } A_{\text{eff}}((x.e)) \text{ est équivalent à} \\ \Phi_e(A_n) \rightharpoonup \Phi_e(A_{\text{eff}}) \text{ dans } L^\infty \text{ faible } \star, \end{aligned}$$

et la fonction Φ_e , qui est une involution, est obtenue de la manière suivante: au lieu d'exprimer $D = A E$ en fonction de E , on garde seulement les composantes de E parallèles aux couches et la composante normale de D , et on en déduit les composantes de D parallèles aux couches et la composante normale de E , c'est à dire qu'en prenant pour e un vecteur unitaire

$$(VI.16) \quad \begin{aligned} D = A E \text{ est équivalent à} \\ \begin{pmatrix} (E.e) \\ D - (D.e)e \end{pmatrix} = \Phi_e(A) \begin{pmatrix} (D.e) \\ E - (E.e)e \end{pmatrix} \text{ pour tout } E \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Lemme VI.3. Pour tout vecteur unitaire $e \in \mathbb{R}^N$,

$$(VI.17) \quad \begin{aligned} K_e = \left\{ (\eta_1, \dots, \eta_m, \Phi_e(A)) \mid 0 \leq \eta_k, \right. \\ \left. k = 1, \dots, m, \sum_{k=1}^m \eta_k = 1, A \in \mathcal{K}_-(\eta_1, \dots, \eta_m) \right\} \text{ est convexe.} \end{aligned}$$

Démonstration: Soit $A^i \in \mathcal{K}_-(\eta_1^i, \dots, \eta_m^i)$ pour $i = 1, 2$, et $\xi \in (0, 1)$. Il existe donc des suites de fonctions caractéristiques $\chi_n^{k,i}$ convergeant vers η_k^i dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ faible \star pour $k = 1, \dots, m$, et $i = 1, 2$, et telles que $\sum_{k=1}^m \chi_n^{k,i} (R_n^i)^T M_k (R_n^i)$ G-converge vers A^i dans \mathbb{R}^N . Pour $\varepsilon > 0$ destiné à tendre vers 0, on utilise la première suite dans la zone $0 < (x.e) < \xi \varepsilon$ et la deuxième suite dans la zone $\xi \varepsilon < (x.e) < \varepsilon$, et on complète par périodicité dans la direction e , c'est à dire qu'on a utilisé pour le matériau $\#k$ la suite de fonctions caractéristiques

$$(VI.18) \quad \chi_{n,\varepsilon}^k = \chi_n^{k,1} f\left(\frac{(x.e)}{\varepsilon}\right) + \chi_n^{k,2} \left[1 - f\left(\frac{(x.e)}{\varepsilon}\right)\right],$$

⁽⁶⁰⁾ Ce qu'on voit facilement en utilisant le fait que chaque $\tilde{\cdot}^\varepsilon$ est une isométrie sur $L^1(\Omega)$, que pour $\varphi \in C_c(\Omega)$ on a évidemment $\tilde{\varphi}^\varepsilon \rightarrow \varphi$ uniformément, et que si f et g coïncident pour $|x| \leq k$ alors \tilde{f}^ε et \tilde{g}^ε coïncident pour $|x| \leq k - 2\varepsilon$.

où f est la fonction caractéristique de $(0, \xi)$ dans $(0, 1)$, prolongée pour être de période 1. Quand n tend vers l'infini, $\chi_{n,\varepsilon}^k$ converge dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ faible \star vers $\eta_k^1 f(\frac{(x.e)}{\varepsilon}) + \eta_k^2 [1 - f(\frac{(x.e)}{\varepsilon})]$, qui, quand ε tend vers 0, converge dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ faible \star vers $\xi \eta_k^1 + (1 - \xi) \eta_k^2$. Quand n tend vers l'infini, $A_{n,\varepsilon}$ G-converge dans \mathbb{R}^N vers $A^1 f(\frac{(x.e)}{\varepsilon}) + A^2 [1 - f(\frac{(x.e)}{\varepsilon})]$, qui, quand ε tend vers 0, G-converge dans \mathbb{R}^N vers A_{eff} défini par $\Phi_e(A_{\text{eff}}) = \xi \Phi_e(A^1) + (1 - \xi) \Phi_e(A^2)$. Comme on travaille dans des conditions où la convergence dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ faible \star et la G-convergence dans \mathbb{R}^N sont métrisables, on peut extraire une sous suite qui a ces limites, c'est à dire que

$$(VI.19) \quad \Phi_e^{-1}(\xi \Phi_e(A^1) + (1 - \xi) \Phi_e(A^2)) \in \mathcal{K}_- \left(\xi \eta_1^1 + (1 - \xi) \eta_1^2, \dots, \xi \eta_m^1 + (1 - \xi) \eta_m^2 \right),$$

d'où on déduit (VI.17). ■

Lemme VI.4. *Si (VI.1), (VI.2), et (VI.3) impliquent (VI.5), alors pour tout vecteur unitaire $e \in \mathbb{R}^N$, pour tout $\xi \in (0, 1)$ et pour deux limites de suites $(\theta_1^j, \dots, \theta_m^j, A_{\text{eff}}^j)$ pour $j = 1, 2$, on a*

$$(VI.20) \quad \Psi_i \left(\Phi_e^{-1}(\xi \Phi_e(A^1) + (1 - \xi) \Phi_e(A^2)); \xi \theta_1^1 + (1 - \xi) \theta_1^2, \dots, \xi \theta_m^1 + (1 - \xi) \theta_m^2 \right) \geq 0$$

presque partout dans Ω , pour tout $i \in I$.

Démonstration: On se donne deux suites de fonctions caractéristiques $\chi_n^{k,j}$ convergeant vers θ_k^j dans $L^\infty(\Omega)$ faible \star pour $k = 1, \dots, m$, et $j = 1, 2$, et telles que $\sum_{k=1}^m \chi_n^{k,j} (R_n^j)^T M_k(R_n^j)$ G-converge vers A_{eff}^j dans Ω , et on construit une autre suite, indexée par n et ε , donnée par la formule (VI.18) utilisée pour la démonstration du Lemme VI.3. Ici aussi, quand n tend vers l'infini, $\chi_{n,\varepsilon}^k$ converge dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ faible \star vers $\theta_k^1 f(\frac{(x.e)}{\varepsilon}) + \theta_k^2 [1 - f(\frac{(x.e)}{\varepsilon})]$, qui, quand ε tend vers 0, converge dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ faible \star vers $\xi \theta_k^1 + (1 - \xi) \theta_k^2$. De même, quand n tend vers l'infini, $A_{n,\varepsilon}$ G-converge dans \mathbb{R}^N vers $A_{\text{eff}}^1 f(\frac{(x.e)}{\varepsilon}) + A_{\text{eff}}^2 [1 - f(\frac{(x.e)}{\varepsilon})]$, mais ensuite il faut faire attention pour appliquer la formule de lamination, puisque A_{eff}^1 et A_{eff}^2 ne sont pas constants, mais comme la formule de lamination est basée sur le lemme divergence-rotationnel obtenu avec François MURAT, il suffit que la divergence et les composantes du rotationnel restent dans un compact de $H_{\text{loc}}^{-1}(\Omega)$ fort. En prenant e comme premier vecteur de base, on observe donc que pour $a \in L^\infty(\Omega)$ et f_ε bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$ la suite $a f_\varepsilon(x_1)$ a ses dérivées en x_2, \dots, x_N qui restent dans un compact de $H_{\text{loc}}^{-1}(\Omega)$ fort, et pour montrer cela on peut supposer Ω borné, et on choisit une suite $\varphi_n \in C_c^1(\Omega)$ qui converge vers a

dans $L^2(\Omega)$ fort et pour $i \geq 2$ on décompose $\frac{\partial[a f_\varepsilon(x_1)]}{\partial x_i}$ en $\frac{\partial[(a-\varphi_n) f_\varepsilon(x_1)]}{\partial x_i}$ qui est de norme petite dans $H^{-1}(\Omega)$ et $f_\varepsilon(x_1) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}$, qui est borné dans $L^\infty(\Omega)$ et donc reste dans un compact de $H_{\text{loc}}^{-1}(\Omega)$ fort. ■

Lemme VI.5. Si $\theta_k \in L^\infty(\Omega)$, $k = 1, \dots, m$, avec $\theta_k \geq 0$, $k = 1, \dots, m$, et $\sum_{k=1}^m \theta_k = 1$ presque partout dans Ω , et si $A \in L^\infty(\Omega; \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ vérifie

$$(VI.21) \quad A \in \mathcal{K}_-(\theta_1, \dots, \theta_m) \text{ presque partout dans } \Omega,$$

alors il existe une suite de fonctions caractéristiques χ_n^k convergeant vers θ_k dans $L^\infty(\Omega)$ faible \star pour $k = 1, \dots, m$, et une suite de rotation R_n telles que $A_n = \sum_k \chi_n^k R_n^T M_k R_n$ G-converge vers A .

Démonstration: On choisit un vecteur unitaire $e \in \mathbb{R}^N$. Pour $\varepsilon > 0$ destiné à tendre vers 0 on décompose Ω , à un ensemble de mesure nulle près, en un nombre dénombrable d'ouverts de diamètre $\leq \varepsilon$, et pour chacun de ces petits ouverts $\omega^{j,\varepsilon}$ on note $\eta_k^{j,\varepsilon}$ la moyenne de θ_k sur $\omega^{j,\varepsilon}$, $B^{j,\varepsilon}$ la moyenne de $\Phi_e(A)$ sur $\omega^{j,\varepsilon}$, et on définit $A^{j,\varepsilon}$ par $\Phi_e(A^{j,\varepsilon}) = B^{j,\varepsilon}$. D'après (VI.21) et le Lemme VI.3 appliqué à $\omega^{j,\varepsilon}$, on déduit que $A^{j,\varepsilon} \in \mathcal{K}_-(\eta_1^{j,\varepsilon}, \dots, \eta_m^{j,\varepsilon})$ et on peut donc construire un mélange qui crée ces données sur $\omega^{j,\varepsilon}$. En utilisant le caractère local de la G-convergence on peut donc construire sur Ω des suites de fonctions caractéristiques $\chi_n^{k,\varepsilon}$, $k = 1, \dots, m$, qui convergent dans $L^\infty(\Omega)$ faible \star vers η_k^ε , $k = 1, \dots, m$, égal à $\eta_k^{j,\varepsilon}$ sur $\omega^{j,\varepsilon}$, et telles que $\sum_{k=1}^m \chi_n^{k,\varepsilon} R_{n,\varepsilon}^T M_k R_{n,\varepsilon}$ G-converge vers A^ε , égal à $A^{j,\varepsilon}$ sur $\omega^{j,\varepsilon}$. On remarque ensuite que quand ε tend vers 0, η_k^ε converge vers θ_k dans $L^\infty(\Omega)$ faible \star et $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ fort pour tout $p < \infty$,⁽⁶¹⁾ $k = 1, \dots, m$, et $\Phi_e(A^\varepsilon)$ converge vers $\Phi_e(A)$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible \star et $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ fort pour tout $p < \infty$, et donc A^ε converge vers A dans $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ fort pour tout $p < \infty$ (et donc aussi dans $L^\infty(\Omega)$ faible \star), et donc A^ε G-converge vers A . Ensuite, on utilise la métrisabilité des topologies mentionnées pour déduire que la suite désirée existe. ■

VII – Obtenir des bornes sur les propriétés effectives, II

Après ces considérations concernant ce premier type de caractérisation, qui complètent ce que j'avais écrit dans mon cours [Tar9], je voudrais mentionner

⁽⁶¹⁾ Parce que l'application T^ε , qui à une fonction comme $f = \theta_k$ fait correspondre $T^\varepsilon(f) = \eta_k^\varepsilon$, obtenue par les moyennes locales est une contraction dans tous les $L^p(\Omega)$, que la connaissance de f pour $|x| \leq r$ suffit pour connaître $T^\varepsilon(f)$ pour $|x| \leq r - 2\varepsilon$, et que $T^\varepsilon(\varphi)$ converge uniformément vers φ quand $\varphi \in C_c(\Omega)$.

un deuxième type de caractérisation, moins complet, que j'avais introduit dans [Tar7].

Pour les questions que j'avais considérées initialement avec François MURAT, ce n'est pas la connaissance complète du tenseur A_{eff} qui sert, mais simplement sa valeur sur un champ E utilisé, et on peut imaginer des cas où un petit nombre de champs ($< N$) servent. Pour d'autres problèmes, comme celui de l'évolution des micro-géométries, qui est un sujet crucial pour mieux comprendre la mécanique des milieux continus et la physique, il me semble d'ailleurs que la situation est un peu analogue, et qu'il faudra caractériser seulement certaines projections d'ensembles analogues à $\mathcal{K}(\theta_1, \dots, \theta_m; M_1, \dots, M_m)$.

Pour un seul vecteur E , j'avais caractérisé dans [Tar7] l'ensemble des $A_{\text{eff}}E$ quand A_{eff} parcourt cet ensemble $\mathcal{K}(\theta_1, \dots, \theta_m; M_1, \dots, M_m)$, qu'on n'a pas encore réussi à caractériser de manière générale, mais ici, je voudrais mentionner une question un peu différente, et pour une suite A_n qui G-converge vers A_{eff} , j'aimerais savoir ce qu'on peut dire de $A_{\text{eff}}E$ quand on n'utilise que des informations sur la mesure de Young de la suite A_n .

C'est un peu la philosophie que j'avais décrite dans [Tar6]. Les mesures de Young ne sont pas le bon outil pour comprendre les mélanges ou les micro-géométries qui apparaissent naturellement dans les matériaux, et je les avais introduites le premier dans des questions d'équations aux dérivées partielles pour exprimer simplement ce que les résultats de compacité par compensation veulent dire. Quelques "mathématiciens" ont écrit qu'elles caractérisent les microstructures, et ils n'avaient donc pas compris ce dont ils parlaient, puisque cela n'est vrai que pour des structures monodimensionnelles, mais peut-être certains d'entre eux savaient très bien que ce n'est pas vrai, puisqu'il s'est avéré ensuite qu'ils étaient de fermes partisans du sabotage auquel je me suis opposé. Dans [Tar6], je disais que, bien que les mesures de Young ne soient pas le bon outil, il est important de les utiliser pour expliquer les résultats d'homogénéisation, car historiquement cela correspond à la manière dont les physiciens avaient exprimé ce qu'ils croyaient être les lois physiques; au lieu de prétendre donner la valeur d'un coefficient effectif en fonction de proportions utilisées, le mathématicien doit donc essayer de comprendre quelles sont toutes les valeurs possibles résultant de cette seule information.

Je n'ai pas de résultats généraux dans cette direction, et le Lemme VII.1 consiste à regarder ce que donne la méthode que j'avais utilisée auparavant.

Lemme VII.1. *Si $A_n \in \mathcal{M}(\alpha, \beta; \Omega)$ vérifie $A_n^T = A_n$ presque partout et*

satisfait

$$(VII.1) \quad \begin{aligned} & A_n \rightharpoonup A_+ \text{ dans } L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)) \text{ faible } \star \\ & (A_n)^{-1} \rightharpoonup (A_-)^{-1} \text{ dans } L^\infty(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)) \text{ faible } \star \\ & A_n \text{ G-converge vers } A_{\text{eff}} \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

alors pour tout $u \in H^1(\Omega)$, les vecteurs $E = \text{grad}(u)$, $D = A_{\text{eff}}E \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ satisfont

$$(VII.2) \quad \begin{aligned} & D - A_-E, D - A_+E \text{ appartiennent à l'image de } A_+ - A_-, \text{ et} \\ & ((A_+ - A_-)^{-1}(D - A_-E) \cdot D - A_+E) \leq 0 \text{ presque partout.} \end{aligned}$$

Démonstration: En résolvant

$$(VII.3) \quad -\text{div}(A_n \text{grad}(u_n)) = -\text{div}(A_{\text{eff}} \text{grad}(u)), \text{ avec } u_n - u \in H_0^1(\Omega),$$

on a

$$(VII.4) \quad \begin{aligned} & u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible,} \\ & \text{grad}(u_n) \rightharpoonup E, A_n \text{grad}(u_n) \rightharpoonup D \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ faible,} \end{aligned}$$

et d'après le lemme divergence-rotationnel (qui correspond ici à une simple intégration par parties), on a

$$(VII.5) \quad (A_n \text{grad}(u_n) \cdot \text{grad}(u_n)) \rightharpoonup (D \cdot E) \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ faible } \star,$$

c'est à dire en utilisant des fonctions tests dans $C_c(\Omega)$.⁽⁶²⁾ Pour $v, w \in \mathbb{R}^N$, on passe à la limite dans l'inégalité

$$(VII.6) \quad \begin{aligned} & (A_n \text{grad}(u_n) \cdot \text{grad}(u_n)) + 2(v \cdot \text{grad}(u_n)) + 2(w \cdot A_n \text{grad}(u_n)) \geq \\ & \geq -((A_n)^{-1}(v + A_n w) \cdot (v + A_n w)), \end{aligned}$$

valable presque partout dans Ω , et comme le terme de droite est $-((A_n)^{-1}v \cdot v) - 2(v \cdot w) - (A_n w \cdot w)$, de par la symétrie de A_n , on déduit

$$(VII.7) \quad \begin{aligned} & (D \cdot E) + 2(v \cdot E) + 2(w \cdot D) + ((A_-)^{-1}v \cdot v) + 2(v \cdot w) + (A_+ w \cdot w) \geq 0 \\ & \text{presque partout dans } \Omega, \end{aligned}$$

et on minimise ensuite le terme de gauche pour $v, w \in \mathbb{R}^N$.

Comme $A_+ - A_- \geq 0$ presque partout, on commence par regarder les points où $A_+ - A_-$ est défini positif, puisque dans ce cas la forme quadratique $(v, w) \mapsto$

⁽⁶²⁾ On a mieux, bien sûr, en utilisant le résultat de régularité de MEYERS.

$((A_-)^{-1}v.v) + 2(v.w) + (A_+w.w)$ est définie positive, et le minimum est atteint au point (v_0, w_0) où les dérivées en v et en w sont nulles,

$$(VII.8) \quad \begin{aligned} E + (A_-)^{-1}v_0 + w_0 &= 0 \\ D + v_0 + A_+w_0 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(VII.9) \quad \begin{aligned} (I - A_+(A_-)^{-1})v_0 &= -D + A_+E \\ (A_+ - A_-)w_0 &= -D + A_-E, \end{aligned}$$

et le minimum est $(D.E) + (v_0.E) + (w_0.D)$. En utilisant le fait que l'inverse de $I - A_+(A_-)^{-1}$ est $-A_-(A_+ - A_-)^{-1}$, le minimum est $(D.E) + ((A_+ - A_-)^{-1}(D - A_+E).A_-E) + ((A_+ - A_-)^{-1}(-D + A_-E).D)$, et en écrivant $(D.E) = ((A_+ - A_-)^{-1}D.A_+E - A_-E)$, et en regroupant les termes, on trouve que ce minimum est $-((A_+ - A_-)^{-1}(D - A_-E).D - A_+E)$, d'où (VII.2).

Si $A_+ - A_-$ a un noyau non trivial, on remarque que pour $\xi, \eta \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$,

$$(VII.10) \quad \begin{aligned} (A_n^{-1}(\xi + A_n\eta).\xi + A_n\eta) &\rightharpoonup (A_-^{-1}\xi.\xi) + 2(\xi.\eta) + (A_+\eta.\eta) \\ &\text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } \star \\ &= (A_-^{-1}(\xi + A_- \eta).\xi + A_- \eta) + ((A_+ - A_-)\eta.\eta), \end{aligned}$$

et donc si $(A_+ - A_-)\eta = 0$ et $\xi + A_- \eta = 0$, sur un ensemble $\omega \subset \Omega$ de mesure > 0 , on déduit que $\xi + A_n\eta \rightarrow 0$ dans $L^2_{\text{loc}}(\omega; \mathbb{R}^N)$ fort. Si $(A_+ - A_-)\eta = 0$ et $\xi = -A_\pm \eta$ sur un ensemble de mesure positive, en utilisant $v = s\xi$ et $w = s\eta$ on a $((A_-)^{-1}v.v) + 2(v.w) + (A_+w.w) = 0$, et donc

$$(VII.11) \quad (A_+ - A_-)\eta = 0, \quad \xi = -A_\pm \eta \quad \text{impliquent} \quad (E.\xi) + (D.\eta) = 0,$$

ce qui montre que $D - A_\pm E$ est orthogonal à η , et comme l'orthogonal du noyau de $A_+ - A_-$ est son image, on trouve la première partie de (VII.2), et la deuxième partie consiste à ne minimiser que pour v, w dans l'image de $A_+ - A_-$, où le calcul du premier cas s'applique. ■

VIII – Affirmer le caractère micro-local de l'homogénéisation

Pour finir, je voudrais rappeler que l'homogénéisation est une théorie mathématique, et que c'est un début de théorie micro-locale non linéaire, comme la compacité par compensation, et dans mon cours Peccot au Collège de France

à Paris, au début de 1977, je décrivais déjà l'homogénéisation et la compacité par compensation comme deux aspects d'une même question scientifique, qui est cruciale pour mieux comprendre la mécanique des milieux continus et la physique du 20ème siècle. Bien sûr, il reste beaucoup à faire, et ces H-mesures que j'ai introduites ne sont qu'une petite partie de ces nouveaux outils qu'il faudrait développer.

Je ne rejette en rien les intuitions des non mathématiciens, que ce soient d'autres scientifiques comme les physiciens, les chimistes, ou les biologistes, ou que ce soient des ingénieurs, mais je trouve qu'il est fondamental de ne pas accepter leurs intuitions sans les comprendre au niveau mathématique, et il n'y a qu'une étude mathématique classique qui permette de transformer certaines de leurs conjectures en certitudes, et de rejeter celles qui sont fausses, en précisant toutefois quelles formules sont de bonnes approximations.

Bien sûr, ce travail ne peut pas être fait par ces anciens mathématiciens qui ont abandonné toute rigueur et qui essayent d'impressionner les naïfs en utilisant les même mots que les ingénieurs; d'ailleurs, ils n'ont en général développé aucune intuition physique, et sont capables de travailler sur des modèles déjà connus pour être déficients sans s'en rendre compte. Par ailleurs, il est assez clair que certains d'entre eux sont poussés par leurs opinions politiques à préférer travailler sur ces modèles déficients, dans l'espoir de détourner du chemin scientifique le plus de chercheurs possibles, et bien évidemment, ceux là utilisent des termes comme homogénéisation sans jamais citer aucun des pionniers, comme Sergio SPAGNOLO en Italie, François MURAT, Henri SANCHEZ-PALENCIA, et moi même en France.

Je comprends bien aussi que beaucoup préfèrent rester dans un cadre périodique, parce que c'est plus facile, mais quand je fais remarquer à quelques uns qui prétendent travailler sur des applications que leurs hypothèses sont irréalistes, et que je propose de les aider à les éviter, et qu'ils ne fassent ensuite aucun effort dans ce sens, c'est souvent parce qu'ils ont choisi le camp de mes opposants politiques, qui pour enrayer l'avance de la science vantent systématiquement des problèmes de fausse mécanique, et de fausse physique, dont j'ai souvent déjà expliqué les défauts.

D'une certaine manière, l'ardeur avec laquelle mes opposants politiques essayent d'utiliser mes idées sous d'autres noms, n'hésitant pas quelquefois à utiliser des vocables dont l'inutilité est bien connue pour ce qui concerne la mécanique, comme la quasi-convexité, plutôt que de mentionner la théorie de la compacité par compensation, que j'ai développée en partie avec François MURAT, est un signe certain que je vais dans la bonne direction, puisqu'ils font tant d'efforts pour éviter que les jeunes chercheurs ne me suivent.

Pour conclure, je voudrais rappeler une fois de plus ce que j'explique depuis tant d'années, que la Γ -convergence n'est pas de l'homogénéisation, et que ceux qui cherchent à discréditer le nom de Ennio DE GIORGI, en l'associant à leurs études de modèles de fausse mécanique, montrent un manque total de respect pour leur mentor, ce qui est d'ailleurs un signe de leur faible valeur scientifique.

Il faudra bien sûr que je reprenne ailleurs certains des points que j'ai simplement suggérés, mais j'espère avoir donné au lecteur une meilleure idée de ce qu'il faut essayer de faire sous le titre homogénéisation.

BIBLIOGRAPHIE

- [All] ALLAIRE, G. – Prolongement de la pression et homogénéisation des équations de Stokes dans un milieu poreux connexe, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 309(10) (1989), 717–722.
- [All&Mur] ALLAIRE, G. and MURAT, F. – Homogenization of the Neumann problem with non-isolated holes (with an appendix written jointly with A.K. Nandakumar), *Asymptotic Anal.*, 7(2) (1993), 81–95.
- [Bab1] BABUŠKA, I. – Homogenization approach in engineering, *Computing methods in applied sciences and engineering (Second Internat. Sympos., Versailles, 1975), Part 1*, pp.137–153, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Vol. 134, Springer, Berlin, 1976.
- [Bab2] BABUŠKA, I. – Homogenization and its application. Mathematical and computational problems, *Numerical Solution of Partial Differential Equations-III, (SYNSPADE 1975, Univ. Maryland, College Park MD, 1975)*, pp. 89–116, Academic Press, New York, 1976.
- [Bam] BAMBERGER, A. – Publication interne (début des années 1970), Centre de mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [Ber] BERGMAN, D. – Bulk physical properties of composite media, *Homogenization methods: theory and applications in physics (Bréau-sans-Nappe, 1983)*, Collect. Dir. Etudes Rech. Elec. France, 57, Eyrolles, Paris, 1985, 1–128.
- [Bol&Gam&Mis&Pon] BOLTYANSKII, V.G.; GAMKRELIDZE, R.V.; MISHCHENKO, E.F. and PONTRYAGIN, L.S. – *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, translated from the Russian by K.N. Trilogoff, edited by L.W. Neudstadt, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London, 1962, viii+360 pp.
- [Bra&Pou] BRAIDY, P. and POUILLOUX, D. – Travail d'option, Ecole Polytechnique, Palaiseau, printemps 1982.
- [Cra&Obn] CRASTER, R.V. and OBNOSOV, Y.V. – Four-phase checkerboard composites, *SIAM J. Appl. Math.*, 61(6) (2001), 1839–1856.

- [DeGio&Spa] DE GIORGI, E. and SPAGNOLO, S. – Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine, *Boll. Un. Mat. Ital. (4)*, 8 (1973), 391–411.
- [Ene&San-Pal1] ENE, H. and SANCHEZ-PALENCIA, E. – Équations et conditions aux limites pour un modèle de milieu poreux, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 277 (1973), 257–259.
- [Ene&San-Pal2] ENE, H. and SANCHEZ-PALENCIA, E. – Équations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans un modèle de milieu poreux, *J. Mécanique*, 14 (1975), 73–108.
- [Gut1] GUTIÉRREZ, S. – *Laminations in linearized elasticity and a Lusin type theorem for Sobolev spaces*, PhD thesis, Carnegie Mellon University, May 1997.
- [Gut2] GUTIÉRREZ, S. – Laminations in linearized elasticity: the isotropic non-very strongly elliptic case, *J. Elasticity*, 53(3) (1998/1999), 215–256.
- [Has&Sht] HASHIN, Z. and SHTRIKMAN, S. – A variational approach to the theory of effective magnetic permeability of multiphase materials, *J. Applied Phys.*, 33 (1962), 3125–3131.
- [Kel1] KELLER, J.B. – A theorem on the conductivity of a composite medium, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 548–549.
- [Kel2] KELLER, J.B. – Effective conductivity of periodic composites composed of two very unequal conductors, *J. Math. Phys.*, 28(10) (1987), 2516–2520.
- [Lan&Lif] LANDAU, L.D. and LIFSCHITZ, E.M. – *Electrodynamique des milieux continus*, Mir, Moscou, 1969.
- [Mar&Spa] MARINO, A. and SPAGNOLO, S. – Un tipo di approssimazione dell'operatore $\sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}D_j)$ con operatori $\sum_{j=1}^n D_j(bD_j)$, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)* 23 (1969), 657–673.
- [Mil1] MILTON, G.W. – Classical Hall effect in two-dimensional composites. A characterization of the sets of realizable effective conductivity tensors, *Phys. Rev. B*, 38 (1988), 11296–11303.
- [Mil2] MILTON, G. – Proof of a conjecture on the conductivity of checkerboards, *J. Math. Phys.*, 42(10) (2001), 4873–4882.
- [Mil3] MILTON, G. – *Theory of composites*, Cambridge monographs in applied and computational mathematics (No. 6), Cambridge University Press, Cambridge, 2002, xxviii+719 pp.
- [Mor&Ste1] MORTOLA, S. and STEFFÈ, S. – Un problema di omogeneizzazione bidimensionale, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)*, 78(3) (1985), 77–82.
- [Mor&Ste2] MORTOLA, S. and STEFFÈ, S. – *Isomorfismo tra H_0^1 and H^{-1} da funzionale variazionali non coercitivi*, Università degli Studi di Pisa, Dipartimento di Matematica, 1985.
- [Mur1] MURAT, F. – Un contre-exemple pour le problème du contrôle dans les coefficients, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B*, 273 (1971), A708–A711.
- [Mur2] MURAT, F. – Théorèmes de non-existence pour des problèmes de contrôle dans les coefficients, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B*, 274 (1972), A395–A398.

- [Mur3] MURAT, F. – H-convergence, *Séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique*, Université d'Alger, 1977-78, Traduction en Anglais: Murat, F. & Tartar, L., "H-convergence", *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, 21–43, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 31, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997, 21–43.
- [Obn] OBNOSOV, Y.V. – Periodic homogeneous structures: New explicit solutions and effective characteristics of refraction of an imposed field, *Siam. J. Appl. Math.*, 59(4) (1999), 1267–1287.
- [San-Pal1] SANCHEZ-PALENCIA, E. – Solutions périodiques par rapport aux variables d'espaces et applications, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B*, 271 (1970), A1129–A1132.
- [San-Pal2] SANCHEZ-PALENCIA, E. – Equations aux dérivées partielles dans un type de milieux hétérogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B*, 272 (1971), A1410–A1413.
- [San-Pal3] SANCHEZ-PALENCIA, E. – *Non homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1980, ix+398 pp.
- [Sch1] SCHWARTZ, L. – *Méthodes Mathématiques pour Les Sciences Physiques*, Hermann, Paris, 1961, 392 pp.
- [Sch2] SCHWARTZ, L. – *Théorie des distributions*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No.IX–X, Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée, Hermann, Paris, 1966, xiii+420 pp.
- [Spa1] SPAGNOLO, S. – Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 21 (1967), 657–699.
- [Spa2] SPAGNOLO, S. – Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 22 (1968), 571–597; errata, *ibid.* (3), 22 (1968), 673.
- [Tar1] TARTAR, L. – Convergence d'opérateurs différentiels, *Atti Giorni Analisi Convessa e Applicazioni* (Roma, 1974), 101–104.
- [Tar2] TARTAR, L. – Problèmes de contrôle des coefficients dans des équations aux dérivées partielles, *Control theory, numerical methods and computer systems modelling (Internat. Sympos., IRIA LABORIA, Rocquencourt, 1974)*, pp.420–426, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Vol.107, Springer, Berlin, 1975. Traduction en Anglais: Murat, F. & Tartar, L., "On the control of coefficients in partial differential equations", *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, 1–8, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 31, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [Tar3] TARTAR, L. – Estimations de coefficients homogénéisés, *Computing methods in applied sciences and engineering (Proc. Third Internat. Sympos., Versailles, 1977)*, I, pp.364–373, Lecture Notes in Math., 704, Springer, Berlin, 1979. Traduction en Anglais: "Estimations of homogenized coefficients", *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, 9–20, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 31, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.

- [Tar4] TARTAR, L. – Estimations fines des coefficients homogénéisés, *Ennio De Giorgi colloquium* (Paris, 1983), 168–187, Res. Notes in Math., 125, Pitman, Boston, MA, 1985.
- [Tar5] TARTAR, L. – H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 115(3–4) (1990), 193–230.
- [Tar6] TARTAR, L. – Beyond Young measures, *Microstructure and phase transitions in solids* (Udine, 1994), *Meccanica*, 30(5) (1995), 505–526 (numéro dédié à Jerrald Ericksen).
- [Tar7] TARTAR, L. – Remarks on the homogenization method in optimal design problems, *Homogenization and applications to material sciences (Nice, 1995)*, 393–412, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., 9, Gakkōkotosho, Tokyo, 1995.
- [Tar8] TARTAR, L. – Homogenization and hyperbolicity, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 25(3-4) (1997), 785–805 (1998) (numéro à la mémoire de Ennio De Giorgi).
- [Tar9] TARTAR, L. – An introduction to the homogenization method in optimal design, *Optimal Shape Design*, 47–156, Lectures given at the joint C.I.M./C.I.M.E. summer school held in Tróia, June 1–6, 1998, edited by A. Cellina and A. Ornelas, Lecture Notes in Mathematics, 1740. Fondazione C.I.M.E., Springer-Verlag, Berlin; Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), Florence, 2000, x+388 pp.
- [Tar10] TARTAR, L. – On homogenization and Γ -convergence, *Homogenization 2001 (Naples)*, 191–211, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., 18, Gakkōtoshō, Tokyo, 2003.
- [Tar11] TARTAR, L. – Faut-t-il croire aux dogmes, en Physique et ailleurs?, à paraître, *Ann. Math. Blaise Pascal*, 13 (2006).
- [You] YOUNG, L.C. – *Lectures on the calculus of variation and optimal control theory*, foreword by Wendell H. Fleming, W.B. Saunders Co., Philadelphia–London–Toronto, Ont., 1969, xi+331 pp.
- [Zar1] ZARANTONELLO, E.H. – The closure of the numerical range contains the spectrum, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70 1964, 781–787.
- [Zar2] ZARANTONELLO, E.H. – The closure of the numerical range contains the spectrum, *Pacific J. Math.*, 22(3) (1967), 575–595.

Luc Tartar,
Carnegie Mellon University,
Pittsburgh, PA 15213-3890 – ETATS-UNIS