
Über die Bestimmung von Leitfähigkeiten durch Oberflächenmessungen

Reinhard Lang

Reinhard Lang hat 1976 mit einer Arbeit über unendlich-dimensionale Wienerprozesse promoviert. Er lehrt und forscht am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Heidelberg. Sein Arbeitsgebiet ist die Brownsche Bewegung mit ihren mannigfachen Beziehungen zur Analysis und zur Statistischen Physik.

1 Einleitung

Gegeben sei ein elektrisch leitender Körper mit Leitfähigkeit γ . Der Körper sei inhomogen; γ ist daher eine Funktion des Ortes. Ist es möglich, die Leitfähigkeit zu bestimmen durch Messungen an der Oberfläche des Körpers allein, ohne in sein Inneres einzudringen? Wenn ja, kann γ auf Grund dieser Messungen rekonstruiert werden? Solche Fragen kommen zum Beispiel in der Geophysik vor, wo es darum geht, an Hand von

Es ist wohl dem Menschen angeboren, sich nicht mit der "äusseren Erscheinung" eines Objektes zu begnügen, sondern immer auch wissen zu wollen, wie es "im Innern" aussieht. Diese Information ist natürlich dann besonders wertvoll, wenn sie erhalten wird, ohne das Objekt zu zerstören. Naturwissenschaftliche Fortschritte in dieser Richtung haben immer wieder zu spektakulären Erkenntnisschüben geführt, oft mit gewaltigen praktischen Auswirkungen. Die medizinischen Anwendungen der Röntgenstrahlen oder der Computertomographie sind dafür eindruckliche Beispiele. Es ist keine Überraschung, dass bei vielen dieser Verfahren die Mathematik eine Schlüsselrolle spielt. Dies wird im vorliegenden Beitrag von Reinhard Lang an einem konkreten Beispiel herausgearbeitet. Die Frage wird gestellt, ob man mit Hilfe von Oberflächenmessungen an einem räumlichen Körper die elektrische Leitfähigkeit in den Punkten im Innern des Körpers bestimmen kann. Mathematisch gesehen ist dies ein sogenanntes *inverses Problem*: Werden in den klassischen (Dirichlet- und von Neumann-) Problemen Lösungen von partiellen Differentialgleichungen unter gegebenen Randbedingungen gesucht, so will man bei inversen Problemen aus dem Randverhalten Aussagen über Eigenschaften des Innern des betrachteten Gebietes erhalten. Die mathematische Behandlung inverser Probleme hat in den vergangenen Jahren grosse Fortschritte gemacht; sie sind heute Gegenstand intensiver mathematischer Forschung. *ust*

Oberflächenmessungen Aussagen über die Zusammensetzung der Erde im Inneren zu gewinnen. Von großer Bedeutung sind sie auch in der Medizin (“electrical impedance tomography”, siehe dazu verschiedene Artikel in dem Sammelband [2]).

Elektrische Messungen an der Oberfläche eines leitenden Körpers D können zum Beispiel folgendermaßen vorgenommen werden. Zwischen Elektroden P und Q auf der Oberfläche ∂D legt man einen Strom an. Der aus P austretende Strom sei J_P . Dann mißt man an verschiedenen Stellen $R \in \partial D$ die Spannung f_R , die in Bezug auf einen geerdeten Punkt $R_0 \in \partial D$ herrscht.

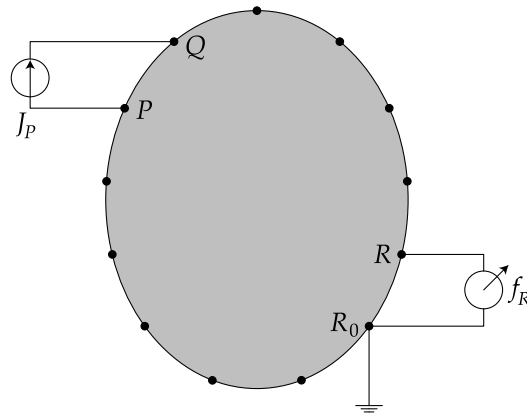


Fig. 1

Wenn man verschiedene Ströme anlegt und Messungen von J_P und f_R an vielen Punkten P und R der Oberfläche vornimmt, kennt man näherungsweise die Paare (J, f^J) , wobei $J: \partial D \rightarrow \mathbf{R}$ alle möglichen durch die Oberfläche ∂D fließenden Ströme und $f^J: \partial D \rightarrow \mathbf{R}$ die zugehörigen Spannungen auf ∂D sind. Das *inverse Randwertproblem* ist die Frage, ob die elektrische Leitfähigkeit des Körpers durch diese Information schon eindeutig bestimmt ist. Ein analoges Problem stellt sich auch bei wärmeleitenden Körpern. Der elektrischen Leitfähigkeit entspricht dabei die Wärmeleitfähigkeit, dem Potential die Temperatur und dem elektrischen Strom der Wärmefluß.

Im Folgenden wird versucht, sich schrittweise dem mathematischen Kern des inversen Randwertproblems zu nähern und die Grundidee seiner Lösung zu erklären.

Dabei werden aus der Elektrizitätslehre nicht mehr als die Gesetze von Ohm und Kirchhoff benötigt, an die im nächsten Abschnitt erinnert wird. Im dritten Abschnitt wird eine mathematisch präzise Formulierung der Fragestellung gegeben, und diese wird eingeordnet in den allgemeinen Problembereich inverser Probleme. Danach werden die Grundgedanken der Lösung des Problems skizziert. Diese gehen auf Calderón [1], Kohn und Vogelius [7], Sylvester und Uhlmann [10] zurück; eine Übersicht über diese Arbeiten findet sich in [11]. In [11] wird auch gezeigt, wie die Methoden, die an Hand der Lösung des inversen Randwertproblems gefunden worden sind, auf andere inverse Probleme der Streu- und Spektraltheorie Anwendung gefunden haben.

Diskretisiert für elektrische Netzwerke, läßt das inverse Randwertproblem eine elementare, schon Schülern zugängliche Lösung zu, einschließlich eines Algorithmus zur Rekonstruktion der Leitfähigkeit aus den Randdaten (vgl. [3], [4]).

2 Die Gesetze von Ohm und Kirchhoff

In diesem Abschnitt betrachten wir anstelle elektrisch leitender Körper elektrische Netzwerke. Wir wählen die einfachsten Beispiele: ein eindimensionales Netzwerk, das bis auf die beiden Randkanten nur innere Kanten enthält, und als anderen Extremfall ein zweidimensionales Netzwerk, das nur Randkanten enthält.

Beispiel 1. Das Netzwerk enthalte $n + 1$ auf einer Geraden liegende Knoten, die der Reihe nach mit $0, 1, \dots, n$ ($n \geq 2$) numeriert seien. Die Knoten $i - 1$ und i seien durch eine Kante σ_i miteinander verbunden ($1 \leq i \leq n$). Die elektrische Leitfähigkeit von σ_i sei $\gamma_i > 0$; der elektrische Widerstand der Kante σ_i ist also γ_i^{-1} ($1 \leq i \leq n$).

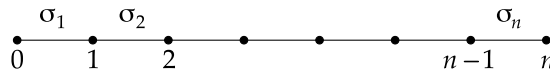


Fig. 2

Das Potential im Knoten i sei mit u_i bezeichnet, und J_i sei der durch die Kante σ_i fließende Strom. Strom und Spannung (= Potentialdifferenz) sind durch das *Ohmsche Gesetz*

$$J_i = -\gamma_i(u_i - u_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1)$$

miteinander verknüpft. Die *Kirchhoffsche Regel* besagt, daß der aus dem Knoten i auf der rechten Seite herausfließende Strom gleich ist dem auf der linken Seite hineinfließenden:

$$J_{i+1} - J_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n - 1. \quad (2)$$

Das inverse Randwertproblem besteht in der Aufgabe, die unbekanntenen Leitfähigkeiten γ_i ($1 \leq i \leq n$) zu bestimmen, wenn alle mit (1) und (2) verträglichen "Randdaten" (u_0, J_1) und (u_n, J_n) bekannt sind. Es liegt auf der Hand, daß das in diesem eindimensionalen Beispiel nicht möglich ist, weil der "Rand" zu klein ist. In der Tat erlauben die Daten nur, das harmonische Mittel $(\gamma_1^{-1} + \dots + \gamma_n^{-1})^{-1}$ zu bestimmen. Denn aus (1) und (2) bekommt man mit $J_1 = J_2 = \dots = J_n = J$

$$\begin{aligned} u_n - u_0 &= (u_n - u_{n-1}) + \dots + (u_1 - u_0) \\ &= -J(\gamma_1^{-1} + \dots + \gamma_n^{-1}); \end{aligned} \quad (3)$$

und umgekehrt folgt aus (3): zu zwei Netzwerken, deren Leitfähigkeiten dasselbe harmonische Mittel haben, gehören dieselben Randdaten (u_0, J_1) und (u_n, J_n) , wobei das Potential bis auf eine additive Konstante eindeutig ist (Eindeutigkeit kann zum Beispiel durch die Erdung $u_0 = 0$ erreicht werden).

Wir überlegen noch, was die *Energie* ist, die von dem in Bild 2 gezeichneten Netzwerk pro Zeiteinheit dissipiert wird. Die von einer einzelnen Kante σ_i dissipierte Energie (Spannung \times Strom) ist

$$-(u_i - u_{i-1}) \cdot J_i.$$

Die von allen Kanten dissipierte Energie \mathcal{E}_γ ist daher

$$\mathcal{E}_\gamma = - \sum_{i=1}^n (u_i - u_{i-1}) J_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i (u_i - u_{i-1})^2. \quad (4)$$

Aus (4) und (2) folgt, daß sich \mathcal{E}_γ auch durch Randterme alleine ausdrücken läßt:

$$\mathcal{E}_\gamma = u_0 J_1 - u_n J_n. \quad (5)$$

Beispiel 2. Das Netzwerk bestehe aus fünf Knoten ($i = 0, 1, \dots, 4$) und vier Kanten σ_i ($i = 1, \dots, 4$) wie in Bild 3.

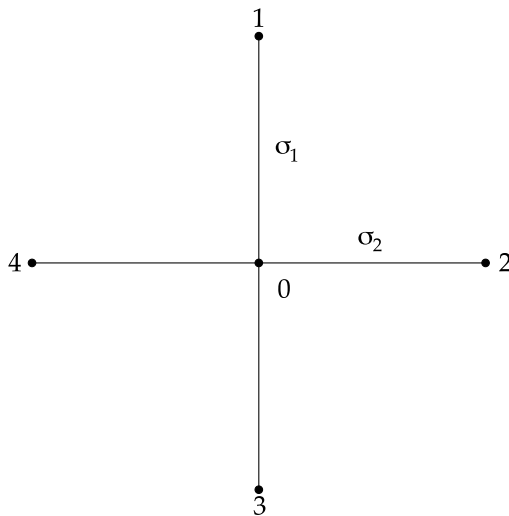


Fig. 3

Die Kante σ_i habe die Leitfähigkeit $\gamma_i > 0$, und der durch σ_i fließende Strom sei J_i ($1 \leq i \leq 4$). Das Potential im Knoten i sei u_i ($0 \leq i \leq 4$). Es gilt das Ohmsche Gesetz

$$J_i = -\gamma_i (u_i - u_0), \quad 1 \leq i \leq 4. \quad (6)$$

(Die Wahl des Vorzeichens von J_3 und J_4 ist nicht konsistent mit (1), aber zweckmäßig, weil jetzt alle Kanten äußere Kanten des Netzwerkes sind). Die Kirchhoffsche Regel besagt

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0, \quad (7)$$

woraus mit (6) die Mittelwertegenschaft

$$u_0 = \sum_{i=1}^4 \lambda_i u_i \quad \text{mit} \quad \lambda_i = \gamma_i / \sum_{j=1}^4 \gamma_j \quad (8)$$

folgt. Wenn J_i , $1 \leq i \leq 4$, gegeben ist, kann man bei bekanntem γ aus (6) sofort die Randspannungen u_i , $1 \leq i \leq 4$, bestimmen (bis auf eine additive Konstante). Wenn umgekehrt bei unbekanntem γ alle möglichen mit (6) und (7) verträglichen Werte (J_i, u_i) , $1 \leq i \leq 4$, gegeben sind, hat man genug Gleichungen, um daraus die fünf Unbekannten $u_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ bestimmen zu können.

Die Frage ist, ob dasselbe bei größeren Netzwerken in \mathbf{Z}^d , $d \geq 2$, die viele innere Knoten und einen vergleichsweise kleinen Rand haben, immer noch der Fall ist. Dem analogen Problem im Kontinuierlichen wenden wir uns im Folgenden zu.

3 Mathematische Formulierung des Problems

Zur mathematischen Präzisierung des inversen Randwertproblems benutzen wir folgende Notation. $D \subset \mathbf{R}^d$ ($d \geq 2$) sei eine zusammenhängende offene und beschränkte Menge mit glattem Rand ∂D , ihr Abschluß sei $\bar{D} = D \cup \partial D$. Die nach außen weisende Einheitsnormale sei mit $n(x)$, $x \in \partial D$, bezeichnet. Die Leitfähigkeit γ in \bar{D} sei eine strikt positive C^∞ -Funktion $\gamma: \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}$.

In der Einleitung waren wir davon ausgegangen, daß man an einen leitenden Körper einen Strom anlegt und dann die dadurch erzeugte Randspannung mißt. Vom mathematischen Standpunkt aus ist es bequemer, sich umgekehrt verschiedene Potentiale f am Rand ∂D vorzugeben und den jeweils dazugehörigen Stromfluß J^f durch ∂D zu betrachten. Sei also ein Randpotential $f: \partial D \rightarrow \mathbf{R}$ gegeben. Um das Arbeiten mit Distributionsräumen zu vermeiden, nehmen wir der Einfachheit halber $f \in C^\infty(\partial D)$ an, d. h. f sei als unendlich oft differenzierbar vorausgesetzt. Um den zu f gehörigen Randstrom J^f zu finden, müssen wir zuerst das Gleichgewichts-Potential u , welches sich bei Randpotential f im Inneren des Körpers bildet, bestimmen. Es ist die eindeutig bestimmte, in \bar{D} stetige Lösung $u: \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}$ des Problems (*Dirichlet-Problem* in D bei Randbedingung f)

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0, & x \in D \\ u(x) = f(x), & x \in \partial D, \end{cases} \quad (9)$$

wobei $\nabla u(x) = \operatorname{grad} u(x)$. Gleichung (9) ergibt sich folgendermaßen. Für den Strom J in \bar{D} gilt das Analogon zum Ohmschen Gesetz (1)

$$J(x) = -\gamma(x)\nabla u(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (10)$$

und das Analogon zur Kirchhoffschen Regel (2)

$$\operatorname{div} J(x) = 0, \quad x \in D, \quad (11)$$

d. h. der Strom ist in D quellen- und senkenfrei. Zusammengenommen ergeben (10) und (11) gerade die obere Gleichung in (9). Bei gegebenem $f \in C^\infty(\partial D)$ bezeichnen wir

die Lösung des Dirichlet-Problems (9) mit w^f ; wegen $f \in C^\infty(\partial D)$ ist dann w^f glatt in \bar{D} , so daß w^f alle im Folgenden benutzten Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt. Bei Randpotential f ist der zugehörige durch die Oberfläche ∂D fließende Strom J^f gegeben durch (vgl. (10))

$$J^f(x) = -\gamma(x) (\nabla w^f(x)) \cdot n(x) = -\gamma(x) \frac{\partial w^f}{\partial n}(x), \quad x \in \partial D; \quad (12)$$

dabei bedeutet \cdot das Skalarprodukt in \mathbf{R}^d und $\frac{\partial}{\partial n}$ die Normalableitung in Richtung n .

Damit können wir das inverse Randwertproblem folgendermaßen formulieren: Die Leitfähigkeit $\gamma: \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}$ sei unbekannt. Für alle $f \in C^\infty(\partial D)$ seien die Paare (f, J^f) gegeben. Ist γ durch diese Angaben schon eindeutig bestimmt?

Während beim direkten Problem (9) die Aufgabe darin besteht, bei bekanntem γ , d. h. bei gegebener Gleichung (9), die Lösung w^f zu finden, ist beim inversen Problem die Gleichung selbst nicht gegeben. Vielmehr ist es umgekehrt die Aufgabe, aus Eigenschaften der Lösungen für verschiedene Randwerte f die unbekannte Funktion γ zu finden. Dies ist ein Beispiel für Aufgaben vom inversen Typ, wie sie häufig in Naturwissenschaft und Technik auftreten, etwa wenn die Gestalt eines streuenden Objektes zu finden ist, gegeben die Intensität der gestreuten Licht- oder Schallwellen in verschiedenen Richtungen. Eine schöne Einführung in inverse Probleme dieser und ähnlicher Art kann der daran interessierte Leser in [5] finden.

Wir nennen eine Funktion $u: \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}$ γ -harmonisch in D , wenn sie

$$\operatorname{div}(\gamma(x) \nabla u(x)) = 0, \quad x \in D, \quad (13)$$

erfüllt. Die Bedingung (13) ist das kontinuierliche Analogon zur Mittelwerteigenschaft (8). Im Spezialfall $\gamma \equiv 1$ bedeutet (13) gerade $\Delta u(x) = 0$, $x \in D$, wobei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

der Laplace-Operator ist, d. h. u ist *harmonisch* im üblichen Sinn. Der Leser der "Elemente der Mathematik" kann Beiträge zum Thema harmonische Funktionen zum Beispiel in den Aufsätzen [8] oder [12] in dieser Zeitschrift finden.

Bei nicht festgelegten Randbedingungen gibt es viele auf \bar{D} glatte Funktionen, welche γ -harmonisch in D sind, nämlich genauso viele, wie es verschiedene Randbedingungen $f \in C^\infty(\partial D)$ gibt. So gesehen besteht der mathematische Kern des inversen Randwertproblems darin, "geeignete" γ -harmonische Funktionen zu finden, die "genug" Randbedingungen f und zugehörige Randströme J^f produzieren, so daß daraus auf die Eindeutigkeit von γ geschlossen werden kann. Was dabei "geeignet" und "genug" genauer bedeutet, wird in Abschnitt 6 präzisiert werden.

4 Formulierung des Satzes

Für $f \in C^\infty(\partial D)$ sei u^f die Lösung des Dirichlet-Problems (9). Die zusammengesetzte Abbildung

$$f \rightarrow u^f \rightarrow (-J^f)$$

bezeichnen wir mit

$$\Lambda_\gamma(f) = \gamma \left. \frac{\partial u^f}{\partial n} \right|_{\partial D}. \quad (14)$$

$\Lambda_\gamma(f)$ ist also das Negative (die Wahl des Vorzeichens ist Konvention) des durch die Oberfläche ∂D fließenden Stromes bei gegebenem Randpotential f und bei zugrundeliegendem γ . Der Definitionsbereich von Λ_γ läßt sich auf eine größere Klasse von Funktionen $f: \partial D \rightarrow \mathbf{R}$ ausdehnen, was aber für die folgenden Überlegungen zunächst nicht erforderlich ist.

Es sieht vielleicht so aus, als sei die Einführung von Λ_γ nur eine zusätzliche, aber entbehrliche Notation. Das ist nicht der Fall, es steckt mehr dahinter, nämlich der auf Calderón [1] zurückgehende Gedanke, die Abbildung $\gamma \mapsto \Lambda_\gamma$ mit funktionalanalytischen Mitteln zu untersuchen. Das inverse Randwertproblem ist die Frage, ob diese Abbildung *injektiv* ist.

Satz. Sei $d \geq 2$, und $\gamma_i \in C^\infty(\bar{D})$ seien strikt positive Leitfähigkeiten in \bar{D} ($i = 1, 2$). Dann gilt

$$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2} \implies \gamma_1 = \gamma_2. \quad (15)$$

Die Leitfähigkeit ist also in der Tat durch die Randwerte (f, J^f) allein schon eindeutig bestimmt, zumindest in der Klasse der strikt positiven, unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Der Satz gibt allerdings keinen Hinweis darauf, wie man γ aus den Randdaten tatsächlich rekonstruieren kann. Für die zu diesem Zweck entwickelten numerischen Verfahren siehe zum Beispiel [6].

In den nächsten beiden Abschnitten soll die Grundidee des Beweises des Satzes erklärt werden. Dazu überlegen wir zuerst, was die elektrische Energie eines auf Randpotential f befindlichen Körpers ist, und welche Symmetrie-Eigenschaften die Abbildung Λ_γ besitzt.

5 Energie und Symmetrie

Sei $f \in C^\infty(\partial D)$ gegeben. Was ist die Energie \mathcal{E}_γ , die pro Zeiteinheit erforderlich ist, um das Randpotential f auf ∂D aufrecht zu erhalten? In Analogie zu Netzwerken gilt (vgl. (4))

$$\mathcal{E}_\gamma = \int_D \gamma(x) |\nabla u^f(x)|^2 dx. \quad (16)$$

Wir nennen \mathcal{E}_γ die *Energie* des leitenden Körpers D (korrekt wäre, von Energie pro Zeiteinheit, also von Leistung, zu sprechen) und schreiben

$$\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_\gamma(u^f, u^f) = \int_D \gamma(x) |\nabla u^f(x)|^2 dx, \quad f \in C^\infty(\partial D). \quad (17)$$

Die Energie ist mit der Abbildung Λ_γ verknüpft durch

$$\mathcal{E}_\gamma(u^f, u^f) = \int_{\partial D} f(x) \Lambda_\gamma(f)(x) \sigma(dx), \quad (18)$$

wobei $\sigma(dx)$ das Oberflächenmaß auf ∂D ist. Formel (18) ist das Analogon zu (5) und folgt aus dem Greenschen Satz (= partielle Integration für mehrdimensionale Integrale)

$$\int_D \nabla v(x) \cdot F(x) dx = \int_{\partial D} v(x) F(x) \cdot n(x) \sigma(dx) - \int_D v(x) \operatorname{div} F(x) dx \quad (19)$$

für hinreichend reguläre Funktionen $v: \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}$ und Vektorfelder $F: \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}^d$. Denn aus (19), angewandt mit $v = u^f$ und $F = \gamma \nabla u^f$, bekommt man wegen (9) und (14)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\gamma(u^f, u^f) &= \int_{\partial D} u^f(x) (\gamma(x) \nabla u^f(x)) \cdot n(x) \sigma(dx) \\ &\quad - \int_D u^f(x) \operatorname{div}(\gamma(x) \nabla u^f(x)) dx \\ &= \int_{\partial D} f \gamma \frac{\partial u^f}{\partial n} d\sigma = \int_{\partial D} f(x) \Lambda_\gamma(f)(x) \sigma(dx). \end{aligned} \quad (20)$$

Es ist zweckmäßig, etwas allgemeiner als (17) die bilineare Form

$$\mathcal{E}_\gamma(u, v) = \int_D \gamma \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u, v \in C^\infty(\bar{D}), \quad (21)$$

zu betrachten. Wie in (20) bekommt man mit partieller Integration, daß für Funktionen $u, v \in C^\infty(\bar{D})$, welche in D γ -harmonisch sind, gilt

$$\mathcal{E}_\gamma(u, v) = \int_{\partial D} f(x) \Lambda_\gamma(g)(x) \sigma(dx) \quad \text{mit } f = u|_{\partial D} \text{ und } g = v|_{\partial D}. \quad (22)$$

Weil \mathcal{E}_γ symmetrisch ist, folgt aus (22) die *Symmetrie*

$$\int_{\partial D} f \Lambda_\gamma(g) d\sigma = \int_{\partial D} g \Lambda_\gamma(f) d\sigma, \quad f, g \in C^\infty(\partial D). \quad (23)$$

Die anschauliche Bedeutung von (23) ist die auf Grund der Geometrie des Körpers \bar{D} keineswegs offensichtliche, aber in der Elektrizitätslehre häufig anzutreffende Symmetrie zwischen Spannung und Strom.

Aus der Symmetrie von Λ_γ ergibt sich unmittelbar das folgende Lemma, von dem im nächsten Abschnitt der Beweis des Satzes seinen Ausgang nehmen wird.

Lemma. Seien γ_i ($i = 1, 2$) C^∞ -Leitfähigkeiten mit $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$. Dann gilt für alle Funktionen $u_i \in C^\infty(\bar{D})$, die in D γ_i -harmonisch sind ($i = 1, 2$)

$$\int_D (\gamma_1(x) - \gamma_2(x)) \nabla u_1(x) \cdot \nabla u_2(x) dx = 0. \quad (24)$$

Beweis. Mit der Formel (19) der partiellen Integration bekommt man

$$\begin{aligned} \int_D (\gamma_1 - \gamma_2) \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \, dx &= \int_D \nabla u_2 \cdot (\gamma_1 \nabla u_1) \, dx - \int_D \nabla u_1 \cdot (\gamma_2 \nabla u_2) \, dx \\ &= \int_{\partial D} u_2 \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \, d\sigma - \int_{\partial D} u_1 \gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \, d\sigma. \end{aligned} \quad (25)$$

Setzt man $u_i|_{\partial D} = f_i$ und benutzt die Symmetrie (23), bekommt man aus (25) und aus der Voraussetzung $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$:

$$\begin{aligned} \int_D (\gamma_1 - \gamma_2) \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \, dx &= \int_{\partial D} f_2 \Lambda_{\gamma_1}(f_1) \, d\sigma - \int_{\partial D} f_1 \Lambda_{\gamma_2}(f_2) \, d\sigma \\ &= \int_{\partial D} f_1 \Lambda_{\gamma_1}(f_2) \, d\sigma - \int_{\partial D} f_1 \Lambda_{\gamma_2}(f_2) \, d\sigma \\ &= \int_{\partial D} f_1 (\Lambda_{\gamma_1}(f_2) - \Lambda_{\gamma_2}(f_2)) \, d\sigma = 0. \end{aligned}$$

6 Grundidee des Beweises des Satzes

Die Dimension des Raumes sei $d \geq 2$, und $\gamma_1, \gamma_2 \in C^\infty(\bar{D})$ seien gegebene Leitfähigkeiten. Es sei $\varphi \in C^\infty(\bar{D})$ eine stetige Funktion auf \bar{D} so, daß gilt

$$\int_D \varphi(x) \nabla u_1(x) \cdot \nabla u_2(x) \, dx = 0 \quad (26)$$

für alle Funktionen $u_i \in C^\infty(\bar{D})$, welche in D γ_i -harmonisch sind ($i = 1, 2$). Wenn wir zeigen können, daß daraus $\varphi \equiv 0$ folgt, ist wegen des Lemmas der Satz bewiesen. Um den Grundgedanken, der zum Beweis von $\varphi \equiv 0$ führt, zu erklären, betrachten wir ein einfacheres Problem, nämlich den Spezialfall dieser Aussage unter der Voraussetzung $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv 1$. Wir zeigen:

Wenn $\varphi \in C(\bar{D})$ so, daß

$$\int_D \varphi(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = 0 \quad (27)$$

für alle in D harmonischen $u, v \in C^\infty(\bar{D})$, dann ist notwendig $\varphi \equiv 0$.

Zum Beweis ist es zweckmäßig, harmonische Funktionen u mit Werten in den komplexen Zahlen \mathbf{C} zu betrachten. Eine Funktion $u: \bar{D} \rightarrow \mathbf{C}$ heißt harmonisch in D , wenn Real- und Imaginärteil harmonisch sind. Für zwei Vektoren $w, z \in \mathbf{C}^d$ bezeichnen wir das Skalarprodukt in \mathbf{C}^d mit $\langle w, z \rangle = w_1 z_1 + \dots + w_d z_d$. Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil sieht man, daß die Gültigkeit von (27) für alle reellwertigen harmonischen Funktionen die Gültigkeit von

$$\int_D \varphi(x) \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx = 0 \quad (28)$$

für alle komplexwertigen harmonischen Funktionen u, v nach sich zieht.

Wie kann man aus (28) auf $\varphi \equiv 0$ schliessen? Calderóns Idee (siehe [1]) ist es, zu versuchen, einen Zusammenhang mit der *Fourier-Transformierten* (F. t.) der Funktion φ ,

$$\hat{\varphi}(k) = \int_D \exp(-2\pi i k \cdot x) \varphi(x) dx, \quad k \in \mathbf{R}^d, \quad (29)$$

herzustellen. Dazu sucht man harmonische Funktionen in der Klasse der Funktionen

$$u_\rho(x) = \exp(-i\pi \langle \rho, x \rangle), \quad \rho \in \mathbf{C}^d. \quad (30)$$

Sei $\rho = k + il$ ($k, l \in \mathbf{R}^d$). Die Funktion u_ρ ist harmonisch genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \Delta u_\rho(x) &= -\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle u(x) = 0, \quad \text{d. h.} \\ \langle k + il, k + il \rangle &= |k|^2 - |l|^2 + 2ik \cdot l = 0, \quad \text{d. h.} \\ |l| &= |k| \quad \text{und} \quad k \cdot l = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

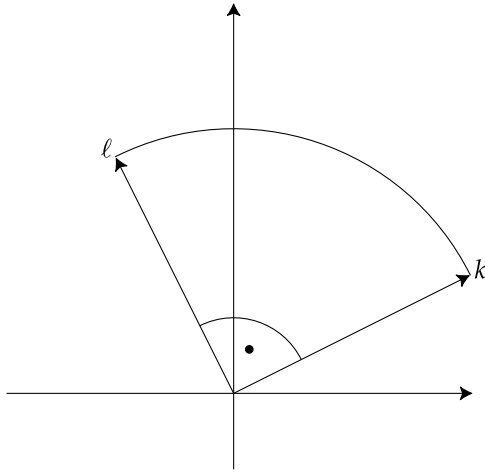


Fig. 4

Sei $k \in \mathbf{R}^d$ gegeben. Wegen $d \geq 2$ kann man dazu ein $l = l_k \in \mathbf{R}^d$ finden, so daß (31) erfüllt ist (vgl. Bild 4). Für $\rho = k + il$ und $\bar{\rho} = k - il$ sind dann die Funktionen u_ρ und $u_{\bar{\rho}}$ harmonisch, und nach Voraussetzung (28) ist daher

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \varphi(x) \langle \nabla u_\rho(x), \nabla u_{\bar{\rho}}(x) \rangle dx \\ &= -\pi^2 \langle \rho, \bar{\rho} \rangle \int_D \varphi(x) \exp(-i\pi \langle \rho + \bar{\rho}, x \rangle) dx \\ &= -2\pi^2 |k|^2 \int_D \varphi(x) \exp(-2\pi i k \cdot x) dx = -2\pi^2 |k|^2 \hat{\varphi}(k), \quad k \in \mathbf{R}^d. \end{aligned} \quad (32)$$

Die F. t. von φ ist also identisch Null. Da die Funktion φ eindeutig durch ihre F. t. bestimmt ist (Fourier-Inversion), folgt daraus $\varphi \equiv 0$, und das Modellproblem (27) ist gelöst.

Sylvester und Uhlmann [10] ist es gelungen, das Problem (26) bei allgemeinem $\gamma_i \in C^\infty(\bar{D})$ ($i = 1, 2$) zu lösen. Dazu haben sie γ_i -harmonische Funktionen u_i ($i = 1, 2$) konstruiert, die von exponentiellem Typ sind, ähnlich wie die Funktionen u_p in (30). Das Lemma aus Abschnitt 5 bleibt richtig für eine den Raum $C^\infty(\bar{D})$ umfassende Klasse von γ_i -harmonischen Funktionen, welche insbesondere die so konstruierten γ_i -harmonischen Funktionen enthält. Wenn die Dimension $d \geq 3$ ist, kann man dann ähnlich weiter-schließen wie in obigem Modellproblem und die Injektivität von $\gamma \mapsto \Lambda_\gamma$ folgern (siehe [10]). Der Grenzfall $d = 2$ ist schwieriger und lange offen geblieben. Geometrisch hängt das damit zusammen, daß in Bild 4 bei Dimension $d = 2$ der Vektor l schon eindeutig durch k festgelegt ist (bis auf das Vorzeichen), während man für $d \geq 3$ zusätzliche Freiheitsgrade hat, die man beim Beweis des Satzes ausnutzen kann. Der verbleibende Fall $d = 2$ ist erst jüngst von Nachman [9] vollständig bewiesen worden.

Bemerkung. Der Dank des Verfassers gilt Steffen Heinze und Reimer Kühn. Aus Diskussionen mit ihnen ist dieser Aufsatz entstanden.

Literatur

- [1] Calderón, A. P.: On an inverse boundary value problem. In: Seminar on Numerical Analysis and Its Applications to Continuum Physics (ed. W. Meyer, M. Raupp), *Soc. Brasileira de Matemática*, Rio de Janeiro (1980), 65–73.
- [2] Colton, D., Ewing, R., Rundell, W. (ed.): Inverse Problems in Partial Differential Equations. *Proceedings in Applied Mathematics* **42**. SIAM, Philadelphia (1990).
- [3] Curtis, E. B., Morrow, J. A.: Determining the resistors in a network. *SIAM J. Appl. Math.* **50** (1990), 918–930.
- [4] Curtis, E. B., Morrow, J. A.: The Dirichlet to Neumann map for a resistor network. *SIAM J. Appl. Math.* **51** (1991), 1011–1029.
- [5] Keller, J. B.: Inverse problems. *Amer. Math. Monthly* **83** (1976), 107–118.
- [6] Kohn, R. V., McKeeney, A.: Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography. *Inverse Problems* **6** (1990), 389–414.
- [7] Kohn, R. V., Vogelius, M.: Identification of an unknown conductivity by means of measurements at the boundary. In: Inverse Problems (ed. McLaughlin, D.). *SIAM-AMS Proceedings* **14** (1984), 113–123.
- [8] Lang, S.: Approximationssätze der Analysis. *El. Math.* **49** (1994), 92–103.
- [9] Nachman, A. I.: Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem. *Annals of Math.* **143** (1996), 71–96.
- [10] Sylvester, J., Uhlmann, G.: A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Annals of Math.* **125** (1987), 153–169.
- [11] Uhlmann, G.: Inverse boundary value problems and applications. *Astérisque* **207** (1992), 153–211.
- [12] Vignati, M.: A geometric property of functions harmonic in a disk. *El. Math.* **47** (1992), 33–38.

Reinhard Lang

Institut für Angewandte Mathematik

Im Neuenheimer Feld 294

D-69120 Heidelberg