Elem. Math. 52 (1997) 127 – 134
0013-6018/97/030127-8 $ 1.50+0.20/0

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 1998 an:

– Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

oder

– Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1123: Das Vorhaben, den Umfang einer Lemniskate zu berechnen, führt zu einem elliptischen Integral, das nur approximativ ausgewertet werden kann. Nun besitzen bereits Taschenrechner vorprogrammierte leistungsfähige Verfahren zur Berechnung bestimmter Integrale. Hierbei stellt sich nur noch die Frage, welches Integral dem Rechner einzugeben ist, um schnell ein Resultat von hoher Genauigkeit zu erhalten.

Wenn wir von der Lemniskatengleichung $r = a \cdot \sqrt{\cos 2\phi}$ in Polarkoordinaten ausgehen, ergibt sich der Umfang der Lemniskate – unter Anwendung der Formel $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\phi$ – theoretisch aus dem Integral

$$U = 4a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}} \; .$$

Wegen der Definitionslücke bei $\phi = \pi/4$ kann die numerische Berechnung in Schwierigkeiten geraten. Um sie zu umgehen, bestimme man exakt den Wert ϕ_0, für den gilt:

$$\frac{U}{8} = a \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$$

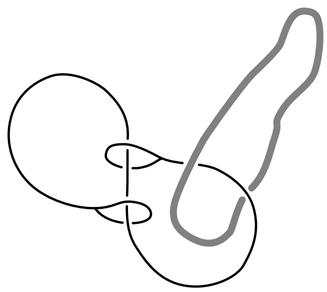
Rolf Rose, Magglingen, CH

Aufgabe 1124: Die Gleichung $x^4 - ax^3 + 2x^2 - bx + 1 = 0$ habe reelle Lösungen. Man beweise, dass dann gilt:

$$a^2 + b^2 \geq 8$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosnien-Herzegowina

Aufgabe 1125 (Die einfache dritte Aufgabe)**:** In einem Weiterbildungskurs erhielt ich von einem Kollegen ein Drahtspiel, das in der untenstehenden Abbildung schematisch wiedergegeben ist. Der Draht (schwarz) umfasst mit seinen beiden zu geschlossenen Schlaufen gebogenen Enden das Mittelstück. Eine geschlossene ringförmige Schnur (grau) ist im Drahtgebilde eingeschlauft und sollte befreit werden. Sie ist so lang und so biegsam, dass sie in die beiden geschlossenen Drahtschlaufen eingefahren werden kann. Damit besteht beispielsweise die Möglichkeit, die Schnur so durch beide Drahtschlaufen hindurchzuziehen, dass sie nicht mehr rechts – wie in der Abbildung –, sondern links im Drahtgebilde eingeschlauft ist.



Da nun mehrere Versuche, die Schnur zu befreien, scheiterten, besteht die Vermutung, dass die Aufgabe unlösbar ist. Dies oder das Gegenteil zu beweisen, ist sicher die Aufgabe eines Mathematikers oder einer Mathematikerin.

Peter Gallin, Bauma, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 1996

Aufgabe 1111. Es sei n eine natürliche Zahl und $[a]$ der ganzzahlige Teil einer reellen Zahl a. Für die unendliche Reihe

$$s_n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[k/n]}}{k+1}$$

gilt dann beginnend mit $n = 1$:

$$\begin{aligned} s_1 &= \ln 2 \ , \\ s_2 &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \ , \\ s_3 &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2 \ , \\ s_4 &= \frac{\pi}{8}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) + \frac{1}{4} \ln 2 \ . \end{aligned}$$

Wie lautet s_n allgemein? Man versuche, für s_n einen geschlossenen Ausdruck anzugeben.

Friedhelm Götze, Jena, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 15 Lösungen eingetroffen, nämlich von Ulrich Abel (Wettenberg, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Kappus (Rodersdorf, CH), Stefan Kocher (Bern, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong), Volkhard Schindler (Berlin, D), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Paul Streckeisen (Zürich, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Rieden, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH) und von Klaus Zacharias (Berlin, D). Eine weitere Zuschrift konnte nicht der Aufgabenstellung zugeordnet werden.

Hier zunächst der Einstieg von *Ulrich Abel*, *Hans Kappus*, *Kee-Wai Lau* und *Michael Vowe*: Sie schreiben $k = qn + r - 1$ mit $q \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le r \le n$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^q}{qn+r} \\
&= \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{qn+r} && (1) \\
&= \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \int_0^1 x^{qn+r-1} dx \\
&= \sum_{r=1}^{n} \int_0^1 \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q x^{qn+r-1} dx \\
&= \sum_{r=1}^{n} \int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x^n} dx && (2) \\
&= \int_0^1 \frac{1-x^n}{(1-x)(1+x^n)} dx \ . && (3)
\end{aligned}
$$

Dieses Integral könnte man durchaus als geschlossenen Ausdruck betrachten. Die meisten Löser arbeiten aber weiter. *Walter Burgherr*, *Frieder Grupp* und *Roland Wyss* starten mit dem letzten Integral (3) und spalten es in zwei Anteile auf:

$$
\begin{aligned}
s_n &= \int_0^1 \frac{1-x^{n-1}}{(1-x)(1+x^n)} dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1-x^{n-1}}{(1-x)(1+x^n)} dx + \frac{1}{n} \ln(x^n+1) \Big|_0^1 \\
&= \int_0^1 \frac{1-x^{n-1}}{(1-x)(1+x^n)} dx + \frac{1}{n} \ln 2 \ .
\end{aligned}
$$

Das nun übrigbleibende Integral bewältigen sie mit der Partialbruchzerlegung oder dem Residuensatz. Schliesslich gelangen sie zu folgendem Resultat:

$$
s_n = \frac{1}{n} \ln 2 + \frac{\pi}{n^2} \sum_{r=1}^{[n/2]} (n-2r+1) \tan\left(\frac{\pi(n-2r+1)}{2n}\right) \ . \qquad (4)
$$

Diese Summe widersteht allen Vereinfachungsversuchen. *Frieder Grupp* und *Roland Wyss* verlängern mittels (4) die vom Aufgabensteller begonnene Liste durch

$$\begin{aligned} s_5 &= \frac{1}{5}\ln 2 + \frac{2\pi}{25}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \\ s_6 &= \frac{1}{6}\ln 2 + \frac{\pi}{36}\left(15+4\sqrt{3}\right) \ . \end{aligned}$$

Walther Janous, *Kee-Wai Lau*, *Michael Vowe*, *Hansruedi Widmer* und *Klaus Zacharias* starten mit der zweitletzten Summe von Integralen (2) und spalten sie ebenso in zwei Anteile auf:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{r=1}^{n-1}\int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x^n}dx \ + \ \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n}dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-1}\int_0^1 \frac{x^{r-1}+x^{n-r-1}}{1+x^n}dx \ + \ \frac{1}{n}\ln 2 \ . \end{aligned}$$

Walther Janous wertet die Integrale der oberen Zeile für gerades und ungerades n getrennt aus und gelangt so nach längerer Rechnung zu (4). Die anderen vier Löser fanden in Sammlungen – beispielsweise in *I.S. Gradshteyn und I.M. Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products, Corrected and Enlarged Edition, Academic Press (1980)* – geschlossene Formeln für diese Integrale. Damit erhalten sie:

$$s_n = \frac{\ln 2}{n} \ + \ \frac{\pi}{2n}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(\frac{r\pi}{n})} \ . \tag{5}$$

Hansruedi Widmer formt mit elementaren trigonometrischen Identitäten weiter um zu

$$s_n = \frac{\ln 2}{n} \ + \ \frac{\pi}{2n}\sum_{r=1}^{n-1}\tan\left(\frac{r\pi}{2n}\right) \ . \tag{6}$$

Durch den Vergleich der beiden verschiedenen Lösungswege, die auf (4) resp. (6) geführt haben, ergibt sich eine erstaunliche Identität:

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-1}\tan\left(\frac{\pi}{2n}r\right) = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{[n/2]}(n-2r+1)\tan\left(\frac{\pi}{2n}(n-2r+1)\right) \ .$$

Dabei zeigt es sich, dass die Lösung (4) von der Anzahl Summanden her gesehen die kürzere ist.

Zum Resultat (5) gelangt auch *Paul Streckeisen* direkt, indem er nachweist, dass die Summe aller Residuen der Funktion

$$f(z) \ = \ \frac{1}{zn+r}\cdot\frac{1}{\sin(\pi z)} \qquad (z\in\mathbb{C})$$

null sein muss, und daher gilt:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^q}{qn+r} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sin(\frac{r\pi}{n})} \; .$$

Einen ganz andern Weg ab Formel (1) beschreiten nebst dem Aufgabensteller auch *Albert Ghenzi*, *Stefan Kocher*, *Heinz-Jürgen Seiffert* und *Volkhard Schindler*, indem sie die Beta-Funktion

$$\beta(x) = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{q+x} \quad \text{mit} \quad x = \frac{r}{n}$$

resp. die Digammafunktion (Eulersche Psi-Funktion) $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ mit

$$\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{q+x}$$

benützen. So erhalten diese Autoren zunächst

$$s_n = \frac{1}{n}\beta(1) \; + \; \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-1}\beta\left(\frac{r}{n}\right)$$

resp.

$$s_n = \frac{1}{2n}\left(\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \; + \; \sum_{r=1}^{n-1}\left[\psi\left(1-\frac{r}{2n}\right) - \psi\left(\frac{r}{2n}\right)\right]\right) \; .$$

Wegen der Eigenschaften der Beta-Funktion

$$\beta(1) = \ln 2 \quad \text{und} \quad \beta(1-x) + \beta(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

resp. der Digammafunktion

$$\psi(1) - \psi(\frac{1}{2}) = 2\ln 2 \quad \text{und} \quad \psi(1-\frac{x}{2}) - \psi(\frac{x}{2}) = \pi\cot(\pi\frac{x}{2})$$

gelangen sie ebenfalls zu den Resultaten (5) resp. (6). *Volkhard Schindler* ist es schliesslich mit Hilfe von trigonometrischen Additionstheoremen gelungen, aus (6) eine von (4) verschiedene Reduktion der Anzahl Summanden vorzunehmen:

$$s_n = \frac{\ln 2}{n} \; + \; \frac{\pi}{n}\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\cos(\frac{2r-1}{2n}\pi)} \qquad \text{für ungerades } n > 1\,,$$

$$s_n = \frac{\ln 2}{n} \; + \; \frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{\cos(\frac{r}{n}\pi)}\right) \quad \text{für gerades } n > 2\,.$$

Aufgabe 1112. Man beweise, dass

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad 1^1 \cdot 2^2 \cdot\ \cdots\ \cdot n^n \geq e^{\frac{n(n-1)}{2}}\\
&\text{(b)}\quad 2^2 \cdot 4^4 \cdot\ \cdots\ \cdot (2n)^{2n} \geq e^{n^2}\\
&\text{(c)}\quad 1^1 \cdot 3^3 \cdot\ \cdots\ \cdot (2n-1)^{2n-1} \geq e^{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

Zdravko F. Starc, Vršac, YU

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 17 Zuschriften mit zum Teil mehreren Lösungswegen eingetroffen, nämlich von den Auszubildenden des Kurses MATA 95 (Köln, D) sowie von Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), Hans Kappus (Rodersdorf, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), J. H. van Lint (Eindhoven, NL), Wolfgang Moldenhauer (Erfurt, D), Helge Sandring (Berlin, D), Volkart Schindler (Berlin, D), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH). Eine weitere zugesandte Lösung war falsch. Die Lösungswege lassen sich in zwei Gruppen einteilen: In der einen Gruppe wird mit Induktion gearbeitet. Eine zweite Gruppe arbeitet direkt, zum Teil sogar mit Einbettung in einen gemeinsamen allgemeinen Fall, wie zum Beispiel die Lösung von *Roland Wyss*: Für die Funktion $f : x \mapsto x\ln(x) - x + 1$ ist $f(1) = 0$. Die Funktion ist für $0 < x \leq 1$ monoton fallend und für $x \geq 1$ monoton wachsend. Daher gilt für $x > 0$ die Ungleichung $x\ln(x) - x + 1 \geq 0$. Für positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt daher die Ungleichung $a_k \leq a_k \ln(a_k) + 1$, woraus wegen der Monotonie der Exponentialfunktion auch $e^{a_k} \leq e{a_k}^{a_k}$ folgt. Daher ist:

$$\prod_{k=1}^{n} {a_k}^{a_k} \geq e^{-n+\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

Für die arithmetischen Folgen

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad a_1 = 1,\ \ d = 1\\
&\text{(b)}\quad a_1 = 2,\ \ d = 2\\
&\text{(c)}\quad a_1 = 1,\ \ d = 2
\end{aligned}
$$

liefert diese Ungleichung die Behauptungen der Aufgabe.

Verschiedene Einsender geben erhebliche Verschärfungen der Ungleichungen der Aufgabe an. Nach *Walther Janous* ist zum Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad 1^1 \cdot 2^2 \cdot\ \cdots\ \cdot n^n \geq n^{\frac{n(n+1)}{2}} e^{\frac{1-n^2}{4}}\\
&\text{(b)}\quad 2^2 \cdot 4^4 \cdot\ \cdots\ \cdot (2n)^{2n} \geq (2n)^{n(n+1)} e^{\frac{1-n^2}{2}}\\
&\text{(c)}\quad 1^1 \cdot 3^3 \cdot\ \cdots\ \cdot (2n-1)^{2n-1} \geq (2n-1)^{n^2-\frac{1}{4}} e^{\frac{n(1-n)}{2}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1113 (Die einfache dritte Aufgabe).
My pocket calculator says $\pi^2 = 9.8696044$. Prove, from first principles, that $\pi^2 < 10$.

O.E. Lanford III, Zürich, CH (oral communication)

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Lösungen eingetroffen: Christian Blatter (Zürich, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), Bernhard Ruh (Solothurn, CH), J. Schaer (Calgary, Canada), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Georg Unger (Dornach, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Klaus Zacharias (Berlin, D). Die Aufgabe hat ein lebhaftes Interesse gefunden, was etliche Einsender zu mehreren (bis zu 6) verschiedenen Lösungswegen inspirierte. Der Hinweis auf "first principles" führte – neben ironischen Bemerkungen – zur Frage, wie π definiert ist. Es wurden folgende Definitionen verwendet: π als Flächeninhalt des Einheitskreises, 2π als Umfang des Einheitskreises, $\frac{\pi}{2}$ als erste positive Nullstelle der Cosinusfunktion und π als erste positive Nullstelle der Sinusfunktion.

Bei der Abschätzung des Umfanges des Einheitskreises durch umbeschriebene regelmässige Tangentenvielecke ist das 23-Eck das Vieleck mit der kleinsten Eckenzahl, für welches der Umfang kleiner als $2\sqrt{10}$ ist. Mehrere Einsender haben, wie zum Beispiel *Bernhard Ruh*, mit dem 24-Eck gearbeitet, dessen halber Umfang ausgehend vom Dreieck über mehrfache Verdoppelung der Eckenzahl nach dem Satz von Pythagoras zu

$$24 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

berechnet werden kann. Mit $w = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ und $q = \frac{10}{24^2}$ bleibt zu zeigen, dass

$$\frac{2-w}{2+w} < q \quad \text{bzw.} \quad 2 \cdot \frac{1-q}{1+q} < w.$$

Das Wegschaffen der Wurzeln durch zweimaliges Quadrieren liefert die Ungleichung $\left(4\frac{(1-q)^2}{(1+q)^2} - 2\right)^2 < 3$, welche durch eine Bruchrechnung bestätigt wird.

Bei der Definition von π über die Nullstellen der Funktionen Cosinus oder Sinus wird die Abschätzung durch eine Taylor-Entwicklung geleistet.

Christian Blatter schreibt dazu: Es genügt, zu zeigen, dass $\sin\frac{\sqrt{10}}{6} > \frac{1}{2}$, da ja $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ und die Sinusfunktion im Bereich $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton wächst. Mit $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ folgt:

$$\sin\frac{\sqrt{10}}{6} > \frac{\sqrt{10}}{6}\left(1 - \frac{10}{6\cdot 36}\right) > \frac{\sqrt{10}}{6}\left(1 - \frac{10}{200}\right) = \frac{\sqrt{10}}{6}\frac{19}{20} > \frac{\sqrt{10\cdot 360}}{6\cdot 20} = \frac{1}{2}\,.$$

Es werden auch "klassische" Resultate verwendet: *Klaus Zacharias* setzt in die Formel von *Snellius* und *Huygens*

$$x \leq \frac{2}{3}\sin(x) + \frac{1}{3}\tan(x)$$

$x = \frac{\pi}{6}$ ein und erhält mit $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ die Abschätzung $\pi \le \frac{2}{3}\left(3+\sqrt{3}\right)$, woraus die Behauptung der Aufgabe folgt. *Michael Vowe* weist darauf hin, dass nach *Archimedes* – mit einer sehr komplizierten Herleitung – die Abschätzung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ gilt, woraus $\pi^2 < \frac{484}{49} < 10$ folgt.

Nachtrag zur Lösung der Aufgabe 1104. (Aufgabe in Heft 4, 1995)

Die in Heft 4, 1996, publizierte Lösung ist falsch, wie aus einer nachträglich eingegangenen Zuschrift von Paul Streckeisen (Zürich, CH) hervorgeht. Der Fehler lag in der Festlegung $d\epsilon := d\phi - d\phi'$ und im Ansatz $\rho = \frac{db'}{d\epsilon}$. Zum Winkel $d\epsilon$ gehört nämlich nicht der Bogen db'.

Im folgenden die richtige Lösung von *Paul Streckeisen*: Der Schwund des Holzes in einem Querschnitt des Stammes kann in Polarkoordinaten (mit Zentrum auf der Achse des Stammes) durch die folgende Abbildung beschrieben werden:

$$\begin{aligned} r' &= (1-\beta_r)\cdot r \\ \phi' &= \frac{1-\beta_t}{1-\beta_r}\cdot\phi, \quad -\pi \le \phi \le \pi \end{aligned}$$

Es sei nun d der Abstand der Längsachse des Brettes von der Achse des Stammes im frischen Zustand. Im Querschnitt kann die projizierende Längsachse als Punkt auf der x-Achse des Koordinatensystems angenommen werden. Es ist dann das Bild g' der Geraden g mit der Gleichung

$$g: \quad r = \frac{d}{\cos\phi}$$

zu untersuchen. Für g' ergibt sich aus den obigen Abbildungsgleichungen die Gleichung:

$$g': \quad r' = \frac{d(1-\beta_r)}{\cos\left(\frac{1-\beta_r}{1-\beta_t}\phi'\right)}\,.$$

Die differentialgeometrischen Formeln für den Krümmungskreisradius einer in Polarkoordinaten gegebenen Kurve liefern für $\phi = 0$ den Krümmungskreisradius

$$\rho = \frac{d(1-\beta_r)(1-\beta_t)^2}{(1-\beta_r)^2 - (1-\beta_t)^2}\,.$$

Für die in der Aufgabe angegebenen numerischen Daten ergibt sich $\rho \approx 10.345d$. Die Redaktion des Aufgabenteils entschuldigt sich für diesen Fehler.