

---

---

## Aufgaben

---

---

### Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 1999 an:

Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

**Aufgabe 1135:** Ist jede zweistellige reelle Funktion, die für alle Werte der einen Variablen ein Polynom in der anderen ist, auch selbst ein Polynom?

Bemerkung: Ersetzt man “ein Polynom” durch “eine stetige Funktion”, so ist die Antwort bekanntlich negativ.

E. Specker, Zürich, CH

**Aufgabe 1136:** Bei der Fadenkonstruktion der Ellipse bilden die Brennpunkte mit dem beweglichen Kurvenpunkt Dreiecke. Auf welchen Kurven wandern die Zentren des Inkreises und der drei Ankreise dieser Dreiecke?

Georg Unger, Dornach, CH

**Aufgabe 1137 (Die einfache dritte Aufgabe):** In der  $(x, y)$ -Ebene wird durch die Gleichung  $(2x - y)(x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 + (\sqrt{4 - y^2})^2 - 1) = 0$  der Buchstabe Z dargestellt. Man finde weitere Gleichungen der Form  $f(x, y) = 0$ , durch welche Buchstaben dargestellt werden.

Rolf Rose, Magglingen, CH

### Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 1997

**Aufgabe 1123.** Das Vorhaben, den Umfang einer Lemniskate zu berechnen, führt zu einem elliptischen Integral, das nur approximativ ausgewertet werden kann. Nun besitzen bereits Taschenrechner vorprogrammierte leistungsfähige Verfahren zur Berechnung bestimmter Integrale. Hierbei stellt sich nur noch die Frage, welches Integral dem Rechner einzugeben ist, um schnell ein Resultat von hoher Genauigkeit zu erhalten.

Wenn wir von der Lemniskatengleichung  $r = a \cdot \sqrt{\cos 2\phi}$  in Polarkoordinaten ausgehen, ergibt sich der Umfang der Lemniskate – unter Anwendung der Formel  $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\phi$  – theoretisch aus dem Integral

$$U = 4a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}.$$

Wegen der Definitionslücke bei  $\phi = \pi/4$  kann die numerische Berechnung in Schwierigkeiten geraten. Um sie zu umgehen, bestimme man exakt den Wert  $\phi_0$ , für den gilt:

$$\frac{U}{8} = a \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$$

Rolf Rose, Magglingen, CH

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 13 Zuschriften eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Hans Kappus (Rodorsdorf, CH), Volkhard Schindler (Berlin, D), Fritz Siegerist (Meilen, CH), Paul Streckeisen (Zürich, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) (4 Lösungen), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D). Ein Lösungsvorschlag war falsch. Da es bei der Aufgabe um das Auffinden einer Mitte geht, ist folgende, auf einem Symmetrieprinzip basierende Lösung von *Fritz Siegerist* naheliegend: Die Substitution  $t = -\ln(\sqrt[4]{2} \cos \phi)$  transformiert

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos 2\phi}}$$

in

$$\int_{-\ln \sqrt[4]{2}}^{\ln \sqrt[4]{2}} \frac{dt}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cosh 2t}}.$$

Da der neue Integrand gerade und die neuen Grenzen entgegengesetzt sind, muss aus Symmetriegründen  $t_0 = -\ln(\sqrt[4]{2} \cos \phi_0) = 0$  gelten. Daraus ergibt sich  $\phi_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ .

*Michael Vowe* weist darauf hin, dass in [1] die Entdeckungen von *Fagnano* und *Euler* zur Bogenlänge der Lemniskate beschrieben sind.

[1] A. Weil, *Zahlentheorie*. Basel 1992, S. 316/317.

**Aufgabe 1124.** Die Gleichung  $x^4 - ax^3 + 2x^2 - bx + 1 = 0$  habe reelle Lösungen. Man beweise, dass dann gilt:

$$a^2 + b^2 \geq 8$$

Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosnien-Herzegowina

**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es haben uns 30 Zuschriften erreicht. 25 Einsender ziehen komplexe Lösungen der gegebenen Gleichung in Betracht: G. Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Hans Kappus (Rodersdorf, CH), Dieter Koller (Zürich, CH), Murray S. Klamkin (Edmonton, Canada), Joachim Klose (Bonn, D), Stefan Kocher (Bern, CH), Kee-Wai Lau (Hong Kong, China), J. H. van Lint (Eindhoven, NL), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern, CH), Wolfgang Moldenhauer (Erfurt, D), Helmut Müller (Hamburg, D), Bernhard Ruh (Sulthorn, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Fritz Siegerist (Meilen, CH), Paul Streckeisen (Zürich, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Hansruedi Widmer (Nussbaumen, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D). 4 Einsender haben lauter reelle Lösungen der gegebenen Gleichung vorausgesetzt: Fenyad Arpad (St. Gallen, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Holger Schubert (Ober-Mockstadt, D). Ein Lösungsvorschlag war falsch.

Viele Einsender arbeiten mit dem Satz von Vieta und mit Koeffizientenvergleich. Andere untersuchen mit Hilfe der Analysis die Minimalwerte der Funktion  $f(x) = x^4 - ax^3 + 2x^2 - bx + 1$ . Einige weisen darauf hin, dass bei lauter reellen Lösungen sogar die Bedingung  $a^2 + b^2 \geq 32$  gilt. Im folgenden die Lösung nach *Jany C. Binz* und *Frieder Grupp*.

Das Beispiel  $x^4 - (2+i)x^3 + 2x^2 - (2-i)x + 1 = 0$  mit der reellen Lösung 1 und  $a^2 + b^2 = 6$  zeigt, dass der Aufgabensteller  $a$  und  $b$  als reell voraussetzt. In diesem Fall ist ein Beweis nur für  $a^2 < 8$  zu führen. Die Gleichung lässt sich in der Form

$$x^2 \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{8 - a^2}{4} \left( x - \frac{2b}{8 - a^2} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 8}{8 - a^2}$$

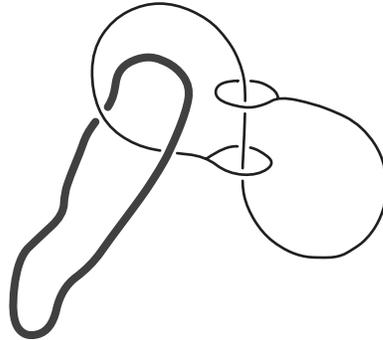
schreiben. Für eine nach Voraussetzung existierende reelle Lösung  $x$  wird der linke Term nichtnegativ und damit  $a^2 + b^2 \geq 8$ .

Das Beispiel  $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$  mit den Lösungen  $\{i, i, -i, -i\}$  und  $a^2 + b^2 = 0$  zeigt, dass die Voraussetzung der Existenz mindestens einer reellen Lösung wesentlich ist.

*Murray S. Klamkin* weist darauf hin, dass die Aufgabe nicht neu ist. Sie erschien 1993 in *The Tournament of the Towns*, Fall 1993, Senior A-Level, und in verwandter Form bereits 1973 als Problem 3 der 15. Internationalen Mathematik-Olympiade und wurde von *Murray S. Klamkin* in [1] verallgemeinert.

[1] Murray S. Klamkin: Generalization of an I.M.O. Inequality Problem. *Mathematics and Informatics Quarterly*. Vol. 4, No. 2, June 1994.

**Aufgabe 1125 (Die einfache dritte Aufgabe).** In einem Weiterbildungskurs erhielt ich von einem Kollegen ein Drahtspiel, das in der nachfolgenden Abbildung schematisch wiedergegeben ist. Der Draht (schwarz) umfasst mit seinen beiden zu geschlossenen Schlaufen gebogenen Enden das Mittelstück. Eine geschlossene ringförmige Schnur (grau) ist im Drahtgebilde eingeschlaucht und sollte befreit werden. Sie ist so lang und so biegsam, dass sie in die beiden geschlossenen Drahtschlaufen eingefahren werden kann. Damit besteht beispielsweise die Möglichkeit, die Schnur so durch beide Drahtschlaufen hindurchzuziehen, dass sie nicht mehr links – wie in der Abbildung –, sondern rechts im Drahtgebilde eingeschlaucht ist.



Da nun mehrere Versuche, die Schnur zu befreien, scheiterten, besteht die Vermutung, dass die Aufgabe unlösbar ist. Dies oder das Gegenteil zu beweisen, ist sicher die Aufgabe eines Mathematikers oder einer Mathematikerin.

Peter Gallin, Bauma, CH

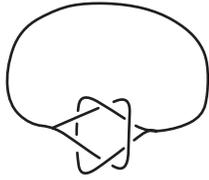
**Auswertung der eingesandten Lösungen.** Es sind 2 Zuschriften eingetroffen, nämlich von Marcus Kurtz (Nürnberg, D) und Michael Vowe (Therwil, CH). *Michael Vowe* verweist auf das Buch "Denkspiele der Welt" (von P. van Delft und J. Botermans, Heimeran Verlag, München 1977, Seite 154), in dem behauptet wird, dass die Schnur befreit werden kann. Die dort skizzierte Lösung hat sich allerdings bei experimentellen Versuchen nicht bestätigen lassen. *Marcus Kurtz* versucht mit Methoden der algebraischen Topologie den Aussenraum des Drahtgebildes durch einen Zellenkomplex nachzubilden, kommt aber nicht zu einer definitiven Antwort.

Nach dem Lösungsvorschlag des Aufgabenstellers genügt es zu untersuchen, ob das Drahtgebilde topologisch äquivalent zur folgenden Form ist:



Ist dies der Fall, kann die Schnur selbstverständlich befreit werden. Formt man nun das gegebene Drahtgebilde mit einer Schnur nach, stellt man fest, dass es nicht in der verlangten Weise gestreckt werden kann: Es lässt sich nur zu einem geschlossenen Ring

in der folgenden Art umformen:



Im Gegensatz dazu lassen sich die folgenden drei Beispiele von Drahtgebilden aus dem Buch "Geduldspiele der Welt" (von J. Botermans und J. Slocum, Hugendubel Verlag, München 1987, Seite 109) alle strecken. Aus ihnen lässt sich somit eine Schnurschlinge befreien.

