Elem. Math. 54 (1999) 30 – 31
0013-6018/99/010030-2 $ 1.50+0.20/0

Elemente der Mathematik

Bemerkung zu beschränkt homogenen Funktionen

Konrad Schlude

Konrad Schlude wurde 1968 geboren. Er studierte Mathematik und Informatik an der Universität in Freiburg im Breisgau. Zur Zeit ist er als Assistent am Institut für Theoretische Informatik an der ETH Zürich, wo er sich vor allem mit verteilten Algorithmen und Datenstrukturen und deren Anwendung auf Verkehrsprobleme beschäftigt.

Definition. 1) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, f heisst *beschränkt homogen* bezüglich einer Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^+$ und eines $s \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$f(\lambda x) = \lambda^s f(x) \ , \qquad \forall \lambda \in \Lambda \ .$$

Dabei heisst Λ die *Homogenitätsmenge* und s der *Homogenitätsgrad*. Gilt $\Lambda = \mathbb{R}^+$, dann heisst f *homogen*.

Bemerkung. Der Übergang zu Polarkoordinaten macht deutlich, dass es ausreicht, die Funktion auf einem Strahl $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ zu betrachten.

Beispiel. Die Funktion $f(x) := \sin(\ln(x))$ ist beschränkt homogen mit Homogenitätsmenge $\Lambda = \{e^{2\pi\nu} \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$ und Homogenitätsgrad $s = 0$. Die Funktion $h(x) := x^{\tilde{s}} f(x)$ ist beschränkt homogen mit Homogenitätsgrad $\tilde{s}$. Funktionen dieses Konstruktionstyps werden *logarithmisch-periodisch* genannt [1].

Eine reelle Funktion f der reellen Variablen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heisst *homogen* vom Grad s, wenn sie für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^s f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ erfüllt. Erfüllt die Funktion f diese Gleichung nur für die λ's in der (echten) Teilmenge Λ von $\mathbb{R}^+$, so heisst f *beschränkt homogen* (bzgl. Λ) vom Grade s. Homogene, und auch beschränkt homogene Funktionen treten im Zusammenhang mit gewissen bekannten Differentialgleichungen auf. Konrad Schlude zeigt hier, dass ausser in den trivialen Fällen $\Lambda = \emptyset$ und $\Lambda = \{1\}$ eine beschränkt homogene Funktion f auf jedem Strahl durch den Nullpunkt, $x \in \mathbb{R}^+$, die Form $f(x) = g_f(\ln(x))x^s$ besitzt, wobei g_f eine von f abhängige periodische Funktion ist. *ust*

1) Diese Definition ist etwas allgemeiner als die in [1]

Gibt es neben diesen logarithmisch-periodischen Funktionen weitere Beispiele beschränkt homogener Funktionen? Mit einer trivialen Homogenitätsmenge $\Lambda = \emptyset$ oder $\Lambda = \{1\}$ ist jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ beschränkt homogen; sieht man jedoch von diesen Fällen ab, so beantwortet der folgende Satz die Frage mit einem Nein.

Satz. *Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine beschränkt homogene Funktion mit nichttrivialer*[2] *Homogenitätsmenge Λ und Homogenitätsgrad s. Dann gilt:*

$$f(x) = g_f(\ln(x))x^s \ , \qquad x \in \mathbb{R}^+ \ ,$$

wobei $g_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine von f abhängende periodische Funktion ist.

Beweis. Definiere $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := f(x)/x^s$. Dann gilt:

$$h(\lambda x) = \frac{f(\lambda x)}{(\lambda x)^s} = \frac{\lambda^s f(x)}{\lambda^s x^s} = h(x) \ , \qquad \forall \lambda \in \Lambda \ .$$

Es ist also h eine beschränkt homogene Funktion mit Homogenitätsgrad 0 und Homogenitätsmenge Λ. Betrachte nun die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := h(e^x)$ und die Menge $\Theta := \{\ln(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$. Sei $\theta \in \Theta \setminus \{0\}$, d.h. $\theta = \ln(\lambda)$ für ein $\lambda \in \Lambda \setminus \{1\}$. Dann gilt:

$$g(x + \theta) = h(e^x e^\theta) = h(e^x \lambda) = h(e^x) = g(x) \ .$$

Folglich ist g eine periodische Funktion, und $h(x) = g(\ln(x))$.

Vorkommen von beschränkt homogenen Funktionen. Beschränkt homogene Funktionen kommen u.a. in der Elektronik und Quantenoptik in Verbindung mit den zeitlich modulierten linearen Oszillatoren vor. Als konkretes Beispiel kann der sogenannte Eulersche „Down-Chirp" Oszillator [2] erwähnt werden, dessen Frequenz mit der Zeit umgekehrt proportional abnimmt. Das Bewegungsgesetz eines solchen Oszillators ist von der Form $x(t) = a\sqrt{t}\cos(b \ln t)$. Die Homogenitätsmenge $\{e^{2\pi\nu/b} \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$ dieser Funktion bringt eine Selbstähnlichkeit der Schwingungen an all den Zeitskalen zum Ausdruck, die durch Dehnung oder Stauchung mit den Faktoren $e^{2\pi\nu/b}$ erhalten werden [2]. Wie in [1] gezeigt wurde, sind unter den Lösungen der Emden-Fowler Differentialgleichung und der Riccatischen Differentialgleichung beschränkt homogene Funktionen zu finden.

Herzlich bedanke ich mich bei Herrn Dr. Magyari für seine Unterstützung und die Anregung zu diesem Thema.

Litatur

[1] E. Magyari: *Funktionen beschränkter Homogenität*, Elemente der Mathematik **45/3** (1990), 75–80

[2] F.K. Kneubühl: *Lineare und nichtlineare Schwingungen und Wellen*, B.G.Teubner Stuttgart 1995, Seiten 37 und 67

Konrad Schlude
Institut für Theoretische Informatik
ETH-Zentrum
CH-8092 Zürich

2) d.h. $\Lambda \neq \emptyset$ und $\Lambda \neq \{1\}$