
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. November 1999 an:

Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1144: $A = (a_1, a_2, a_3)$ sei eine wachsende arithmetische Sequenz natürlicher Zahlen. A heisse eine Q -Sequenz, wenn $1 + a_1 a_2 a_3$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

1. Bestimme alle Q -Sequenzen mit $a_1 = 1$.
2. Beweise: Alle Sequenzen A mit $a_1 = 2$ sind Q -Sequenzen.
3. Beweise: Es gibt keine Q -Sequenz mit $a_1 = 3$.
4. Beweise: Zu unendlich vielen a_1 gibt es je nur endlich viele Q -Sequenzen.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1145: Von einem Kreis mit Mittelpunkt M und Radius R wird ein Segment der Höhe $2r_0$ mit $0 < r_0 < R$ abgeschnitten. Diesem Segment wird eine Folge von Kreisen $k_0(M_0, r_0)$, $k_1(M_1, r_1)$, $k_2(M_2, r_2)$, ... so einbeschrieben, dass k_0 symmetrisch im Segment liegt, k_1 den Kreis k_0 berührt, k_2 wiederum k_1 berührt, usw. Man zeige, dass mit rationalen Zahlen R und r_0 alle Radien r_1, r_2, r_3, \dots rational sind. Kann man ein cartesisches Koordinatensystem so wählen, dass auch die Koordinaten sämtlicher Kreiszentren M_0, M_1, M_2, \dots rational werden?

Walter Burgherr, Rothenburg, CH

Aufgabe 1146 (Die einfache dritte Aufgabe): Beweise oder widerlege: In jedem konvexen Fünfeck existieren drei Diagonalen, aus welchen sich ein Dreieck konstruieren lässt.

Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosnien-Herzegowina

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 1998

Aufgabe 1132. Man zeige: In der Primfaktorzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl kommt mindestens eine der Primzahlen 3, 5, 7 nicht vor.

Horst Bergmann, Hamburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 9 Zuschriften eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walter Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Walter Schmidt (Dortmund, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Paul Streckeisen (Zürich, CH).

Alle Einsender führen den Beweis nach derselben Idee, welche wir anhand der Lösung von *Paul Streckeisen* wiedergeben:

Es sei u eine ungerade vollkommene Zahl mit der Primfaktorzerlegung

$$u = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}.$$

Für die Summe σ aller Teiler von u gilt

$$\sigma = \prod_{i=1}^n (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i}).$$

Aus der Bedingung für die Vollkommenheit $\sigma = 2u$ ergibt sich

$$\prod_{i=1}^n (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i}) = 2u = 2 \cdot \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}. \quad (1)$$

Es sei nun angenommen, dass 3, 5 und 7 als Primfaktoren auftreten, dass also

$$p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7.$$

p_1 und p_3 sind kongruent $-1 \pmod{4}$, und für solche Zahlen gilt – wie man sich leicht überlegt:

$$1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i} \equiv 0 \pmod{4}, \text{ sofern } \alpha_i \text{ ungerade ist.}$$

Weil der Faktor 2 auf der rechten Seite von (1) nur einmal auftritt, können α_1 und α_3 nicht ungerade sein. Es ist also $\alpha_1 \geq 2$, $\alpha_3 \geq 2$ und wie oben angenommen $\alpha_2 \geq 1$.

Aus (1) ergibt sich nach Division durch $\prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$ folgendes:

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots + \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right) = 2. \quad (2)$$

Nun ist aber

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots + \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49}\right) = \frac{494}{245} > 2.$$

Dies steht im Widerspruch zu (2), womit der Beweis erbracht ist.

Aufgabe 1133. Es seien p ein Polynom vom Grad ≤ 3 und q ein Polynom vom Grad ≤ 5 mit

$$\begin{aligned} p(0) &= q(0) & p(1) &= q(1) \\ p'(0) &= q'(0) & p'(1) &= q'(1) \\ q''(0) &= 0 & q''(1) &= 0. \end{aligned}$$

Man bestimme eine Konstante $C > 0$, so dass für alle diese Polynompaare (p, q) die Ungleichung

$$\int_0^1 pq \, dt \geq C \cdot \int_0^1 p^2 \, dt$$

gilt.

Wolfgang Moldenhauer, Erfurt, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Zuschriften eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walter Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Walter Schmidt (Dortmund, D), Fritz Siegerist (Meilen, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Klaus Zacharias (Bergfelde, D).

Dass die Lösung aufwendige Rechnungen erfordert – zumindest wenn man die bestmögliche Konstante C bestimmen will – veranlasst einige Einsender zu Kritik; andere wiederum freuen sich, dass sie “endlich ihr Computer-Algebra-System sinnvoll nutzen” können. Die beschrittenen Lösungswege unterscheiden sich wenig; meistens wird der Wert des Quotienten der beiden in der Ungleichung auftretenden Integrale untersucht. Wir folgen der Lösung von *Klaus Zacharias*, der auch das Geständnis gemacht hat, “Maple” benützt zu haben.

Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \\ q(t) &= b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + b_4t^4 + b_5t^5 \end{aligned}$$

erhält man wegen

$$\begin{aligned} p'(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \\ q'(t) &= b_1 + 2b_2t + 3b_3t^2 + 4b_4t^3 + 5b_5t^4 \\ q''(t) &= 2b_2 + 6b_3t + 12b_4t^2 + 20b_5t^3 \end{aligned}$$

aus $p(0) = q(0)$, $p'(0) = q'(0)$, $q''(0) = 0$ die Beziehungen $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1$, $b_2 = 0$. Hieraus und aus $p(1) = q(1)$, $p'(1) = q'(1)$, $q''(1) = 0$ bekommt man nach Lösen eines linearen Gleichungssystems $b_3 = 2a_2 - 2a_3$, $b_4 = -a_2 + 6a_3$, $b_5 = -3a_3$.

Zulässige Polynome haben also die Form

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \\ q(t) &= a_0 + a_1t + 2(a_2 - a_3)t^3 + (-a_2 + 6a_3)t^4 - 3a_3t^5. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man mit $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ für die Integrale

$$P(a) = \int_0^1 (p(t))^2 dt, \quad Q(a) = \int_0^1 p(t)q(t) dt$$

die positiv definiten quadratischen Formen $P(a) = aAa^T$ und $Q(a) = aBa^T$, wobei A und B die symmetrischen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 19/60 & 9/40 \\ 1/2 & 1/3 & 29/120 & 13/70 \\ 19/60 & 29/120 & 4/21 & 13/84 \\ 9/40 & 13/70 & 13/84 & 11/84 \end{pmatrix}$$

bezeichnen. Nach bekannten Tatsachen der linearen Algebra gilt nun

$$\min_{a \neq 0} \frac{Q(a)}{P(a)} = \lambda_0,$$

wobei λ_0 die kleinste der (notwendigerweise reellen) Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\det(A - \lambda B) = 0$$

ist. Führt man die angedeuteten Manipulationen aus, so bekommt man die Gleichung

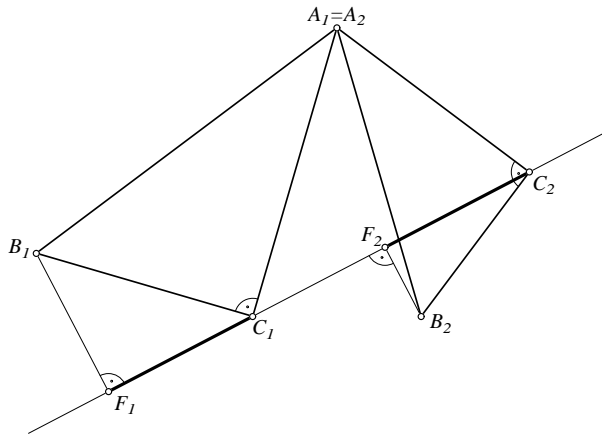
$$\lambda^4 - \frac{104}{21}\lambda^3 + \frac{1867}{210}\lambda^2 - \frac{5042}{735}\lambda + \frac{22663}{11760} = 0,$$

welche sich faktorisieren lässt:

$$\left(\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda + \frac{131}{84}\right)\left(\lambda^2 - \frac{16}{7}\lambda + \frac{173}{140}\right) = 0.$$

Ihre kleinste Wurzel ist $\lambda_0 = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{385}}{42}$, und dies ist zugleich die bestmögliche Konstante C .

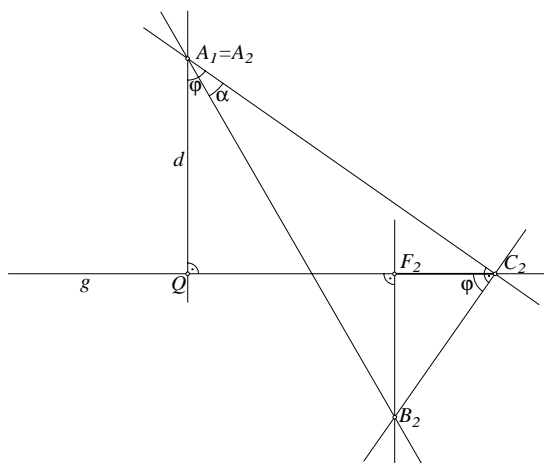
Aufgabe 1134 (Die einfache dritte Aufgabe). Die beiden rechtwinkligen Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ seien ähnlich, und es sei $A_1 = A_2$. Für $i = 1, 2$ sei F_i der Fusspunkt des von B_i auf die Gerade C_1C_2 gefällten Lotes. Man zeige: $\overline{C_1F_1} = \overline{C_2F_2}$.



Hans Walser, Frauenfeld, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 24 Zuschriften eingegangen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Johannes M. Ebersold (Winterthur, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Jon Florin (Chur, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walter Janous (Innsbruck, A) mit Verallgemeinerung, Hans Kappus (Rodgersdorf, CH), Dieter Koller (Zürich, CH), Ignace Morand (Lausanne, CH) 2 Lösungen, Ivan Paasche (Stockdorf, D), Günter Pickert (Giessen, D), Volkhard Schindler (Berlin, D), Walter Schmidt (Dortmund, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), M.C. van Hoorn (Appingedam, NL), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Josef Züger (Tamins, CH).

Die beschrifteten Lösungswege lassen sich in drei Kategorien unterteilen: Etwa in der Hälfte der Lösungen wird die Längengleichheit der beiden Strecken $\overline{C_1F_1}$ und $\overline{C_2F_2}$ mit trigonometrischen Berechnungen nachgewiesen. Ein Viertel der Löser arbeitet in der komplexen Ebene, und der Rest löst die Aufgabe abbildungsgeometrisch. Die folgende Überlegung stammt von *Johannes M. Ebersold*:



Es genügt zu zeigen, dass die Länge der Strecke $\overline{C_2F_2}$ unabhängig ist von der Lage von C_2 auf g . Die Dreiecke A_2QC_2 und $C_2F_2B_2$ sind ähnlich. Deshalb gilt

$$\frac{\overline{C_2F_2}}{\overline{C_2B_2}} = \frac{d}{\overline{A_2C_2}}$$

oder gleichwertig

$$\overline{C_2F_2} = d \cdot \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{A_2C_2}} = d \cdot \tan(\alpha).$$