Elem. Math. 54 (1999) 130 – 134
0013-6018/99/030130-5 $ 1.50+0.20/0

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 2000 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1147: Beweise die folgenden Ungleichungen:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot n^n \leq 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot n! \cdot \exp\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \tag{1}$$

$$f_1^{f_1} \cdot f_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot f_n^{f_n} \leq f_1! \cdot f_2! \cdot \ldots \cdot f_n! \cdot \exp(f_{n+2} - n - 1) \tag{2}$$

Dabei steht f_n für die Fibonaccizahlen: $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Zdravko F. Starc, Vršac (YU)

Aufgabe 1148: Gegeben ist ein Kreis mit dem Durchmesser AB. Gesucht sind alle Kreissehnen, welche durch die von A und B auf sie gefällten Lote gedrittelt werden.

Georg Unger, Dornach (CH)

Aufgabe 1149 (Die einfache dritte Aufgabe):

a) Für welche zwei natürlichen Zahlen ist deren Summe gleich dem Quadrat ihrer Differenz?

b) Für welche zwei natürlichen Zahlen weichen arithmetisches und harmonisches Mittel um genau $1/2$ voneinander ab?

c) Für welche Belegungen einer Urne mit nur roten und grünen Kugeln sind beim Ziehen eines Kugelpaares Verschieden- und Gleichfarbigkeit gleich wahrscheinlich?

Fritz Siegerist, Meilen (CH)

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 1998

Aufgabe 1135. Ist jede zweistellige reelle Funktion, die für alle Werte der einen Variablen ein Polynom in der anderen ist, auch selbst ein Polynom?

Bemerkung: Ersetzt man "ein Polynom" durch "eine stetige Funktion", so ist die Antwort bekanntlich negativ.

Ernst Specker, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 5 Zuschriften eingetroffen. Nur in den Betrachtungen von O.P. Lossers (Eindhoven, NL) ist eine vollständige Lösung enthalten. Die übrigen Löser gehen alle von der zusätzlichen Voraussetzung aus, dass es eine obere Grenze für den Grad der Polynome in der Variablen x gibt, wenn y fest gewählt wird. Victor Pambuccian (Phoenix, USA) weist darauf hin, dass zu diesem Problem ein Kurzartikel von F.W. Carroll im American Mathematical Monthly 68 (1961) zu finden ist.

Die Lösung nach *O.P. Lossers*:

Es sei f eine Funktion in zwei reellen Variablen, welche für alle Werte der einen Variablen ein Polynom in der anderen ist. Betrachte die Mengen $X_n = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x,y) \text{ ist vom Grad} \leq n \text{ in } y\}$ und die analog definierten Mengen Y_n. Dann ist $\cup_{n\geq 0} X_n = \cup_{n\geq 0} Y_n = \mathbb{R}$, und weil $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, muss es Zahlen k und ℓ geben, für welche X_k und Y_ℓ unendlich sind. Wähle nun $x_0, x_1, \ldots, x_\ell \in X_k$ und $y_0, y_1, \ldots, y_k \in Y_\ell$. Für $i = 0, 1, \ldots, \ell$ schreiben wir

$$f(x_i, y) = a_{i0} + a_{i1}y + \cdots + a_{ik}y^k .$$

Für $j = 0, 1, \ldots, k$ bestimmen wir nun Polynome p_j vom Grad $\leq \ell$, für welche $p_j(x_i) = a_{ij}$, $(i = 0, 1, \ldots, \ell)$.

Wir behaupten, dass folgendes gilt:

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{k} p_j(x)\, y^j .$$

Um dies einzusehen, betrachten wir die Funktion $F(x,y) = \sum_{j=0}^{k} p_j(x)\, y^j$. Auf Grund der Konstruktion ist klar, dass $F(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$ für $i = 0, 1, \ldots, \ell$ und $j = 0, 1, \ldots, k$, und es folgt, dass $F(x_i, y) = f(x_i, y)$ für $i = 0, 1, \ldots, \ell$ und beliebiges y; beide Polynome sind nämlich vom Grad $\leq k$ in y, und sie stimmen an den $k+1$ Stellen $y_0, y_1, \ldots, y_k$ überein. Genauso überlegt man, dass $F(x, y_j) = f(x, y_j)$ für $j = 0, 1, \ldots, k$. Wähle nun $x \in X_k$ fest. Für beliebiges y gilt dann $F(x,y) = f(x,y)$, denn beide Polynome sind vom Grad $\leq k$ in y und stimmen an den $k+1$ Stellen $y_0, y_1, \ldots, y_k$ überein. Weil X_k unendlich ist, sind also $F(x,y)$ und $f(x,y)$ bei festem y Polynome in x, welche in unendlichen vielen Werten von x übereinstimmen. Also gilt $F(x,y) = f(x,y)$ für alle (x,y).

Weil die meisten Einsender nicht gemerkt haben, dass es wichtig ist, dass es sich um reelle Polynome handelt, geben wir als Ergänzung den Beweis von *Ernst Specker* wieder, mit welchem gezeigt wird, dass es in abzählbar unendlichen Körpern K eine Funktion

$f : K \times K \to K$ gibt, welche in beiden Variablen polynomial ist, die aber kein Polynom ist.

Es sei $\{q_j\}$ eine Abzählung von K. Es werden rekursiv Polynome p_j definiert: $p_0(x) \equiv 1$. Für $j \geq 1$ wird p_j durch Interpolation auf Grund von $p_0, p_1, \ldots, p_{j-1}$ definiert:

$$p_j(q_i) := \begin{cases} p_i(q_j) & \text{falls } i < j \\ 0 & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

Für alle i, j gilt dann $p_i(q_j) = p_j(q_i)$, und zusätzlich hat man

$$p_j(q_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } j > 0 \\ 1 & \text{falls } j = 0. \end{cases}$$

Nun definieren wir

$$f(q_i, q_j) := p_i(q_j).$$

Für diese Funktion f gilt

$$f(q_j, q_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } j > 0 \\ 1 & \text{falls } j = 0. \end{cases}$$

Es ist also $f(x, x) \not\equiv 0$. Weil aber $f(x, x) = 0$ für unendlich viele x, kann f kein Polynom sein. $f(q_i, x)$ und $f(x, q_i)$ sind aber beides Polynome.

Norbert Hungerbühler hat ein Beispiel einer solchen Funktion für $K = \mathbb{Q}$ konstruiert: Es sei $\{q_j\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ mit $q_j \leq j$. Definiere

$$f_k(x) := \prod_{j=1}^{k} (x - q_j), \qquad (k \in \mathbb{N})$$
$$f(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cdot f_k(y).$$

Weil $f_k(q_j) = 0$ falls $k \geq j$, ist f für feste Wahl von x ein Polynom. Analog folgt, dass f bei fester Wahl von y ein Polynom ist. Ausserdem gilt

$$f(2\ell, 2\ell) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(2\ell) \geq f_\ell^2(2\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} (2\ell - q_j)^2 \geq \ell^{2\ell},$$

also kann f kein Polynom sein.

Aufgabe 1136. Bei der Fadenkonstruktion der Ellipse bilden die Brennpunkte mit dem beweglichen Kurvenpunkt Dreiecke. Auf welchen Kurven wandern die Zentren des Inkreises und der drei Ankreise dieser Dreiecke?

Georg Unger, Dornach, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Zuschriften eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Sauges, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), O.P. Lossers, (Eindhoven, NL), Walter Schmidt (Dortmund, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Georg Unger (Dornach, CH) zweite Lösung, Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser finden mit Standardmethoden der analytischen Geometrie mit ziemlich grossem Rechenaufwand die vier Ortskurven. Ein Einsender unterlegt die komplexe Ebene. Die kürzeste Lösung stammt von *Jany C. Binz*:

Aus Symmetriegründen genügt es, P auf der Halbellipse $x = a \cdot \cos(t)$, $y = b \cdot \sin(t)$, $(0 \le t \le \pi)$ zu wählen. $F_1(c\,|\,0)$ und $F_2(-c\,|\,0)$ mit $c^2 = a^2 - b^2$ seien ihre Brennpunkte. Das Dreieck PF_1F_2 hat den Inhalt $A = bc \cdot \sin(t)$ und den halben Umfang $s = a + c$.

M_0, M_1, M_2 und M_3 seien die Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise mit Berührungspunkten auf den Strecken F_2F_1, F_1P und PF_2. Die Radien dieser Kreise seien ϱ_i, und $(x_i\,|\,y_i)$ seien die Koordinaten der Mittelpunkte $M_i \quad (i = 0, 1, 2, 3)$. Nun ergeben sich

$$x_0 = s - \overline{PF_1} - c = a - \sqrt{b^2 \sin^2(t) + (a\cos(t) - c)^2} = c \cdot \cos(t),$$
$$y_0 = \varrho_0 = \frac{A}{s} = \frac{bc}{a+c} \cdot \sin(t).$$

M_0 wandert also auf einer Ellipse mit Halbachsen c und $bc/(a+c)$. Analog erhält man

$$x_1 = -c \cdot \cos(t), \;\; y_1 = -\varrho_1 = -\frac{A}{s-2c} = -\frac{A}{a-c} = -\frac{bc}{a-c} \cdot \sin(t).$$

M_1 beschreibt also die Ellipse mit Halbachsen c und $bc/(a-c)$.

Schliesslich wird $x_2 = c + (s - 2c) = a$ konstant und

$$y_2 = \varrho_2 = \frac{A}{s - \overline{PF_1}} = \frac{b\sin(t)}{1+\cos(t)} = b \cdot \tan(\frac{t}{2}).$$

M_2 durchläuft also die Scheiteltangente $x = a$ und M_3 somit die Scheiteltangente $x = -a$.

Aufgabe 1137 (Die einfache dritte Aufgabe). In der (x, y)-Ebene wird durch die Gleichung $(2x - y)(x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 + (\sqrt{4-y^2})^2 - 1) = 0$ der Buchstabe Z dargestellt. Man finde weitere Gleichungen der Form $f(x, y) = 0$, durch welche Buchstaben dargestellt werden.

Rolf Rose, Magglingen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 3 Zuschriften eingegangen: Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Christoph Soland (Lausanne, CH).

Frieder Grupp und Christoph Soland konstruieren je ein Set von Funktionen, aus welchem sich fast alle Buchstaben erzeugen lassen. Einige Funktionen dienen zum Zeichnen von Geraden und Ellipsen, andere zum Einschränken des Definitionsbereiches. Wir verzichten auf die Wiedergabe dieser theoretischen Erläuterungen und beschränken uns auf Beispiele:

$x^4 + y^2 - 16 = 0$ stellt ein O dar
(Walther Janous)

$y^2 - ((\sqrt{1-x^2})^2 + x^2 - 1 + 2x)^2 = 0$ stellt ein X dar
(Walther Janous)

$xy(y^2-4)(1+\sqrt{4-y^2})(1+\sqrt{x-x^2}) = 0$ stellt ein E dar
(Frieder Grupp)

$x((x^2+y^2)^2 - 4y^2)(1+\sqrt{4-y^2})(1+\sqrt{x-x^2}) = 0$ stellt ein B dar
(Frieder Grupp)

$(2x-y)^2(y^2-4)^2 + (1-x^2)^R = 0$ stellt ein Z dar
(Christoph Soland)

$(y^2 + (1-x^2)^R)((y+2|x|-2)^2 + (y+2)^R) = 0$ stellt ein A dar
(Christoph Soland)

(Dabei steht f^R für $|f| - f$).