
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Mai 2000 an:

Hansruedi Widmer, Boldstrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1150: Sei S_n die Menge aller Permutationen von n Objekten. Bekanntlich lässt sich eine Permutation $p \in S_n$ bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt paarweise disjunkter Zyklen schreiben, die wir kurz “die Zyklen von p ” nennen. Ist ferner t ein fester positiver Teiler von n , so werde eine Teilmenge $T_{n,t}$ von S_n betrachtet: $p \in T_{n,t}$ genau dann, wenn die Längen der Zyklen von p Vielfache von t sind. Berechne die folgende Potenzsumme:

$$\sum_{p \in T_{n,t}} t^{z(p)}$$

Dabei bedeutet $z(p)$ die Anzahl der Zyklen der Permutation p .

Karl Wirth, Zürich (CH)

Aufgabe 1151: Man bestimme alle Paare (c, d) natürlicher Zahlen mit

$$c | (3d^2 - 1) \quad \text{und} \quad d | (3c^2 - 1).$$

Diese Aufgabe geht aus der Aufgabe 1139 hervor, indem man $a = 3c$ und $b = 3d$ setzt und damit die Voraussetzung der Teilerfremdheit von a und b entfallen lässt.

Helmut Müller, Hamburg (D)

Aufgabe 1152 (Die einfache dritte Aufgabe): Die Zentren O_1, O_2 und O_3 der drei zentrischen Streckungen $S_1(O_1; k_1 = 11/3)$, $S_2(O_2; k_2 = 1/2)$ und $S_3(O_3; k_3 = 5)$ bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $s = 7$. Wie gross sind die drei Abstände von O_ℓ zum Zentrum O des Streckungsproduktes $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ ($\ell = 1, 2, 3$)?

Rolf Rose, Magglingen (CH)

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 1998

Aufgabe 1138. Es sei

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Einschlägige Mathematikprogramme zeigen $S = 1.1334\dots$. Ist die Vermutung $S = \pi^5/270$ richtig?

M. Vowe, Therwil, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 13 Zuschriften eingetroffen: Ulrich Abel (Wettenberg, D), Peter Bundschuh (Köln, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Murray S. Klamkin (Edmonton, Kanada), Joachim Klose (Bonn, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Norbert Ortner (Innsbruck, A), Volkhard Schindler (Berlin, D), Walter Schmidt (Dortmund, D), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Klaus Zacharias (Bergfelde, D). Eine Lösung war nicht gezeichnet.

Mehrere Einsender machen darauf aufmerksam, dass bereits Euler die für natürliche Zahlen $m \geq 3$ gültige Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{m-1}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{m+1}{2} \cdot \zeta(m) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=2}^{m-2} \zeta(m-j) \cdot \zeta(j) \quad (1)$$

gekannt hat. Dabei bedeutet ζ die Riemannsche Zetafunktion. Aus dieser Formel folgt für $m = 5$ das Resultat $S = 3 \cdot \zeta(5) - \zeta(2) \cdot \zeta(3) \approx 1.1334789\dots$, während $\pi^5/270 \approx 1.1334062\dots$

Die meisten Einsender kennen dieses Resultat nicht und begnügen sich (unter Zuhilfenahme von CAS-Systemen) mit dem numerischen Nachweis, dass bereits die 27. der monoton wachsenden Partialsummen der gegebenen Reihe grösser als der vermutete Wert $\pi^5/270$ ist. Einige Löser beweisen Formel (1) erneut.

Literatur

B.C. Berndt, Ramanujan's Notebooks, Part I, Springer-Verlag, 1985, p. 252

Aufgabe 1139. Man bestimme alle Paare (a, b) teilerfremder natürlicher Zahlen mit

$$a|(b^2 - 3) \quad \text{und} \quad b|(a^2 - 3).$$

Helmut Müller, Hamburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 7 Zuschriften eingetroffen: Šefket Arslanagić (Sarajevo, Bosnien-Herzegowina), Peter Bundschuh (Köln, D), Johannes M. Ebersold (Winterthur, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Victor Pambuccian (Phoenix, USA), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Einsender benutzen die Pell'sche Gleichung oder das quadratische Reziprozitätsgesetz (oder beides). Meist sind viele Fallunterscheidungen notwendig. Einige Löser

bemerken, dass die Bedingung der Teilerfremdheit von a und b die Lösungsmenge zwar einschränke, den Lösungsweg aber nicht wesentlich ebnen. Es ist ein glücklicher Zufall, dass der Autor die Aufgabe nun auch ohne die Voraussetzung der Teilerfremdheit von a und b präsentiert (Aufgabe 1151); durch die leichte Umformulierung sollte eine kleine Starthilfe gegeben sein. Damit wir nicht zu viel von der Lösungsidee vorwegnehmen, drucken wir für die ursprüngliche Variante der Aufgabe eine eher atypische Lösung ab, nämlich jene von *Johannes M. Ebersold*:

Dass die Paare $(1, 1)$, $(1, 2)$ und $(2, 1)$ die Aufgabe lösen, bestätigt man schnell, ebenso dass es keine weiteren Lösungen mit $a \leq 2$ oder $b \leq 2$ geben kann. Wegen der Symmetrie des Problems dürfen wir also zum Auffinden allfälliger weiterer Lösungen – wir behaupten, dass es keine solchen gibt – die Ungleichungen $a \geq b > 2$ annehmen, und wegen der Teilerfremdheit von a und b sogar $a > b > 2$. Es sei

$$ac = b^2 - 3 \quad \text{und} \quad b\gamma = a^2 - 3 \quad (c, \gamma \in \mathbb{N}).$$

Aus $3|a$ würde $3|b$ folgen und umgekehrt, was der Teilerfremdheit von a und b widerspricht; also sind weder a noch b durch 3 teilbar, und selbstverständlich auch c und γ nicht.

Offensichtlich gilt $c < b$, denn mit $c \geq b$ hätte man den Widerspruch $b^2 - 3 = ac \geq ab > b^2$.

Weiter gilt $c > 1$. Wäre nämlich $c = 1$, also $a = b^2 - 3$, so hätte man $b\gamma = (b^2 - 3)^2 - 3 = b^4 - 6b^2 + 6$, woraus $b|6$ folgen würde, was nicht möglich ist.

Setzen wir $a = (b^2 - 3)/c$ in $b\gamma = a^2 - 3$ ein, so erhalten wir nach kurzer Umformung die entscheidende Gleichung

$$bc^2\gamma = b^4 - 6b^2 - 3(c^2 - 3).$$

Weil b nicht durch 3 teilbar ist, folgt aus ihr nämlich, dass $b|(c^2 - 3)$. Da aber auch $c|(b^2 - 3)$ gilt, haben wir also aus dem Paar (a, b) mit $a > b$ ein neues Paar (b, c) mit $b > c > 1$ konstruiert, welches die Aufgabe ebenfalls löst. Weil es auf Grund der obigen Überlegungen keine Lösung (b, c) mit $b > c$ und $c = 2$ gibt, gilt sogar $c > 2$, und man kann deshalb das Verfahren iterieren. Dadurch erhält man eine unbegrenzte Folge $a > b > c > d > \dots > 2$ natürlicher Zahlen, was unmöglich ist.

Somit sind die drei anfänglich erwähnten Zahlenpaare die einzigen Lösungen.

Aufgabe 1140 (Die einfache dritte Aufgabe). Ist die folgende Gesetzmässigkeit auch in nicht-dezimalen Zahlssystemen gültig?

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 9 + 2 = 11 & 123456 \cdot 9 + 7 = 1111111 \\ 12 \cdot 9 + 3 = 111 & 1234567 \cdot 9 + 8 = 11111111 \\ 123 \cdot 9 + 4 = 1111 & 12345678 \cdot 9 + 9 = 111111111 \\ 1234 \cdot 9 + 5 = 11111 & 123456789 \cdot 9 + 10 = 1111111111 \\ 12345 \cdot 9 + 6 = 111111 & \end{array}$$

Peter Gallin, Bauma, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Zuschriften eingegangen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (Sauges, CH), Johannes M. Ebersold (Winterthur, CH), Jon Florin (Chur, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Bratislav Iričanin (Belgrad, Serbien), Walther Janous (Innsbruck, A), Günter Pickert (Giessen, D), Günther Sandner (Böblingen, D), Walter Schmidt (Dortmund, D), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Heinz-Jürgen Seiffert (Berlin, D), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Philipp Zumstein (Lungern, CH).

Zwei Einsender haben die Aufgabe so interpretiert, dass der Faktor 9 nicht verändert werden darf, und kamen dann zum Schluss, dass die Basis 10 die einzig mögliche ist. Die anderen Einsender haben die Aufgabe so verallgemeinert wie die unten abgedruckte Lösung, die aus den Einsendungen von *Peter Bundschuh* und *Jon Florin* stammt, es zeigt. Mehrere Autoren verwenden vollständige Induktion, einige arbeiten auch mit Ableitungen von Potenzreihen.

Die angegebene Gesetzmässigkeit gilt in jedem g -adischen Zahlssystem ($g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$). Ihre linke Seite lautet dort

$$(1 \cdot g^{j-1} + 2 \cdot g^{j-2} + \dots + j \cdot g^0) \cdot (g-1) + (j+1)$$

und lässt sich wie folgt umformen:

$$\sum_{i=1}^j i \cdot g^{j-i+1} - \sum_{i=1}^j i \cdot g^{j-i} + j + 1 = \sum_{i=0}^j (i+1) \cdot g^{j-i} - \sum_{i=0}^j i \cdot g^{j-i} = \sum_{i=0}^j g^{j-i}$$

Die letzte Summe entspricht der $(j+1)$ -stelligen Zahl $11 \dots 11$.

Philipp Zumstein beweist die noch allgemeinere Formel

$$(g-1) \cdot \sum_{i=1}^j (i^k \cdot g^{j-i}) + (j+1)^k = \sum_{i=0}^j ((i+1)^k - i^k) \cdot g^{j-i},$$

welche für $k > 1$ allerdings nicht als "Ziffernspielerei" im Positionssystem zur Basis g gedeutet werden kann, weil die auftretenden Potenzen $g-1$ übersteigen können.

Berichtigung zur Lösung von Aufgabe 1133. Knapp oberhalb der Mitte der Seite 89 muss der Ausdruck $\det(A - \lambda B) = 0$ ersetzt werden durch $\det(B - \lambda A) = 0$.